Olimpiada
Matemática
Española
RSME

LIII Olimpiada Matemática Espanõla
Primera Fase
Soluciones
13 de enero de 2017

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 yA_3B_3 están alineados.

Solución 1. *El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Esta tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas.*

Solución 2. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Entre todas las rectas de pendiente dada m consideraremos dos particulares: en primer lugar la que pasa por el origen, O, $y = mx$. Por simetría, el origen será precisamente el punto medio de los dos puntos en que esta recta corta a la elipse; a continuación, consideramos una de las dos rectas tangentes a la elipse con esta pendiente m en el punto que llamamos P. Si nuestras rectas r_1, r_2 y r_3 tienen pendiente m y los puntos medios de los puntos de corte con la elipse van a estar alineados, estos puntos medios deben estar sobre la recta que pasa por O y P.*
Tomemos una recta con ecuación $y = mx + c$ y determinemos sus intersecciones con la elipse, A y B, con coordenadas respectivas, (x_A, y_A) y (x_B, y_B). x_A y x_B serán las soluciones para la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

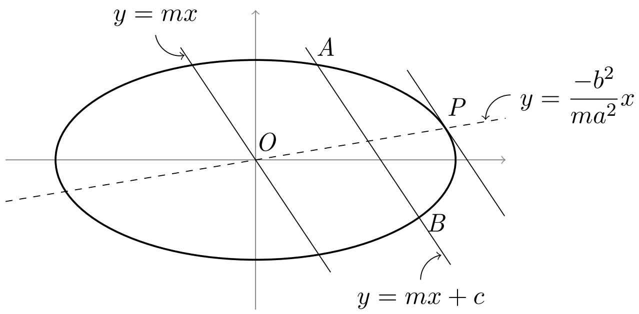
es decir,

$$(b^2+m^2a^2)x^2+(2ma^2c)x+a^2c^2-a^2b^2=0,$$

que vienen dadas por

$$\frac{-2ma^2c\pm\sqrt{(2ma^2c)^2-4(b^2+m^2a^2)(a^2c^2-a^2b^2)}}{2(b^2+m^2a^2)},$$

una para cada signo. Por lo tanto, si el punto medio tiene por coordenadas (x_M, y_M), entonces $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-ma^2c}{b^2+m^2a^2}$ *e* $y_M=mx_M+c=\frac{b^2c}{b^2+m^2a^2}$, *que están sobre la recta* $y=\frac{y_M}{x_M}x=\frac{-b^2}{ma^2}x$, *que es independiente del valor de c de la recta particular elegida.*



Solución 3. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *y que la pendiente común de* r_1, r_2 *y* r_3 *es* m*. La transformación,* f*, definida por*

$$(x', y') = f(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

convierte la elipse en una circunferencia de ecuación $x'^2 + y'^2 = 1$*, y una recta de ecuación* $y = mx + c$ *en una recta de ecuación* $by' = max' + c$*, es decir,* $y' = \frac{ma}{b}x + \frac{c}{b}$*. Por tanto, las imágenes por* f *de* r_1, r_2 *y* r_3 *serán tres rectas que cortan a la circunferencia formando tres cuerdas paralelas entre sí, y sus puntos medios estarán entonces sobre el diámetro ortogonal a todas ellas, es decir, sobre la recta de ecuación* $y' = -\frac{b}{ma}x'$*. Como* f *conserva los puntos medios, por linealidad, los puntos medios de* A_1B1*,* A_2B_2 *y* A_3B_3 *estarán sobre la recta* $\frac{y}{b} = -\frac{b}{ma}\frac{x}{a}$*, es decir,* $y = -\frac{b^2}{ma^2}x$*, el diámetro conjugado de* $y = mx$*.*

2. Imaginemos un juego estupendo consistente en lanzar simultáneamente diez dados cúbicos, obteniéndose una ganancia en euros igual al producto de los resultados de los diez dados. ¿De cuántas formas diferentes se puede obtener una ganancia de 225 euros? Suponiendo que todos los posibles resultados del lanzamiento fueran equiprobables, ¿cuál sería entonces la probabilidad de ganar 225 euros tras lanzar los diez dados?

Solución. Numeremos los dados del 1 al 10. Dado que 225 se descompone en factores primos como $3^2 \cdot 5^2$, la única forma de obtener dicho producto es con dos dados (dos posiciones del 1 al 10) con puntuación 3, otros dos con puntuación 5 y las seis posiciones restantes, con puntuación 1. Podemos distinguir $\binom{10}{2}$ pares distintos de posiciones entre un total de 10, a las que asignamos pues puntuación 3. Para cada una de esas combinaciones distinguimos a su vez $\binom{8}{2}$ pares distintos de posiciones entre las 8 restantes, a las que asignamos puntuación 5. Fijadas las posiciones del 3 y del 5, quedaran otras seis posiciones libres, a las que se asignará necesariamente puntuación 1. Así pues, el número de posibilidades es $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} = 1260$. Para calcular la probabilidad basta con dividir el número de casos favorables entre la cantidad total de resultados posibles que es 6^{10}.

3. Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue para $n \geq 0$:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n-1) + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

Solución. Si para cada $k = 1, 2, \ldots$ se denota por A_k el menor $n \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(n) = k$, el problema consistirá en calcular A_{2017}. Obviamente, $A_1 = 1$. Además, se verifica para cada $k > 1$ que $A_k = 4A_{k-1} + 1$. Razonando de manera recurrente se tiene que

$$A_k = 4^0 + 4^1 A_{k-1} = 4^0 + 4^1 + 4^2 A_{k-2} = \ldots = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{k-1} A_1$$

es decir, tenemos la serie geométrica $A_k = \sum_{j=0}^{k-1} 4^j = \frac{4^k - 1}{3}$ y, en particular, la solución buscada es $\frac{4^{2017}-1}{3}$

4. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

Solución. Si m y n son enteros tales que $m = (n^2 + 7)/8$, entonces n tiene que ser necesariamente impar, es decir, tiene que existir un $k \geq 1$ tal que $n = 2k - 1$. En tal caso, sustituyendo en n y desarrollando el cuadrado, la ecuación anterior se expresaría así

$$m = \frac{k^2 - k + 2}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + 1$$

Nótese que $k(k-1)$ es siempre par y, por lo tanto, para todo valor de k obtenemos una solución entera de m. Así pues, la secuencia de soluciones es la siguiente:

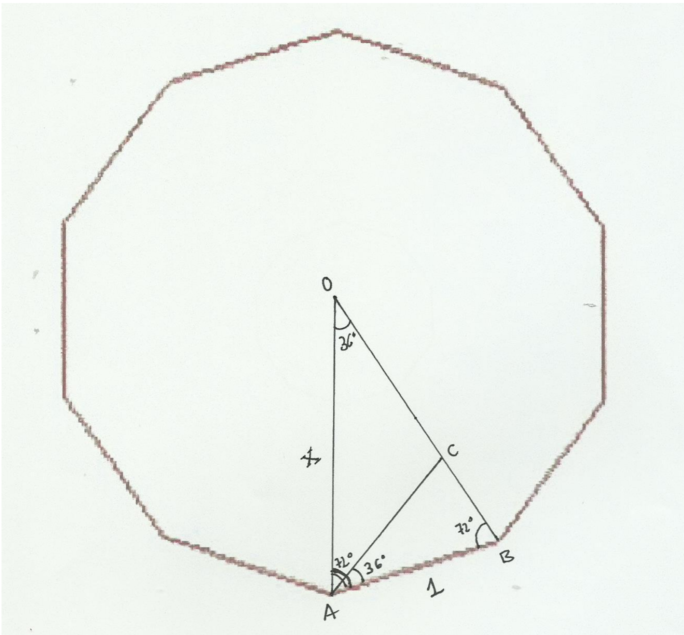
k	1	2	3	4	5	...	63	64	...
m	1	2	4	7	11	...	1954	**2017**	...
n	1	3	5	7	9	...	125	127	...

La solución buscada es pues, como cabía esperar, $m = 2017$.

5. Calcular el perímetro de una circunferencia circunscrita a un decágono regular de lado 1.

   Indicación: dado que no puede utilizarse la calculadora se trata de expresar la solución a través del número $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, conocido como razón áurea.

Solución. El decágono regular puede dividirse en 10 triángulos isósceles iguales, como OAB (ver figura), con un vértice en el centro O de la circunferencia y cuyo lado AB mide 1. La longitud de la circunferencia será entonces $2\pi x$, siendo x la longitud de AO. Dado que el ángulo $\angle AOB$ mide $\pi/5$, los otros dos miden $2\pi/5$.



Trazamos la bisectriz de $\angle OAB$, que corta al lado OB en C. El triángulo ABC es entonces semejante a AOB y, por lo tanto, la longitud con AC es 1. También es isóceles el triágulo OAC, por lo cual el lado CB mide $x - 1$. Razonándo por semejanza de triángulos se deduce entonces que

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Por lo tanto, x es la raíz positiva del polinomio $p(x) = x^2 - x - 1$, es decir, la solución es $2\pi\phi$.

6. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.

Solución. Por ejemplo, el polinomio $x(x-1)(x-2)(x-1/2)$, con 4 raíces reales distintas, verifica la propiedad deseada. Veamos que el número máximo posible de raíces diferentes es precisamente 4. Efectivamente, si el polinomio verifica la propiedad y 0, 1 y -1 son raíces del mismo no puede haber otra distinta, porque si existiera tal raíz r también lo serían $-r$, $-r^2$, r^3, r^4, etc. Es decir, el polinomio tendría infinitas raíces. Si, por el contrario, -1 no es raíz del polinomio y éste consta de al menos tres raíces diferentes y distintas a su vez de 0 y 1, o bien habría al menos dos de ellas con valor absoluto mayor que 1, o bien habría al menos dos de ellas con valor absoluto menor que 1. En el primer caso, bastaría considerar el producto de la raíz de valor absoluto máximo con otra de valor absoluto mayor que 1 para obtener una nueva raíz con valor absoluto superior a ambas, y llegar así a una contradicción. Razonando análogamente en el segundo caso, pero considerando la raíz con mínimo valor absoluto, llegamos igualmente a una contradicción.