LV Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
18 de enero de 2019
Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Para cada número de cuatro cifras $\overline{abcd}$ denotamos por S al número $\overline{abcd}-\overline{dcba}$. Demuestra que S es múltiplo de 37 si y sólo si $b = c$.*

   Solución:

   Si se denota $x = a - d$, $y = b - c$, se verifica que $S = 999x + 90y$, que en el caso $y = 0$ es múltiplo de 37, dado que $999 = 37 \cdot 27$. Recíprocamente, si S es múltiplo de 37, que no comparte ningún factor con 9 (de hecho es primo), existirá un entero z tal que $9(37 \cdot 3x + 10y) = 9 \cdot 37z$, es decir, $37(z - 3x) = 10y$. Entonces, y tiene que necesariamente múltiplo de 37. Como $|y| \leq 9$ ha de ser 0.

2. *Demuestra que, para todo $n \geq 2$, podemos encontrar n números reales $x_1, \ldots, x_n$ tales que*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x_n} \tag{1}$$

   Solución:

   En primer lugar, tendremos en cuenta que la ecuación $x = -1/(1-x)$ tienen como solución cualquiera de las dos raíces reales del polinomio $p(x) = x^2 - x - 1$, que son $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Entonces, si para $n = 2$ damos cualquiera de esos valores a x_1 y x_2 (da igual que sean el mismo o distintos) se verificará que

$$\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2 = -\frac{1}{1-\mathrm{x}_1} \cdot \left(-\frac{1}{1-\mathrm{x}_2}\right) = \frac{1}{1-\mathrm{x}_1} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{x}_2}$$

   Para $n = 3$ consideremos $x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por otra parte, dado $x_2 \neq 1$, los valores de x_1 tales que

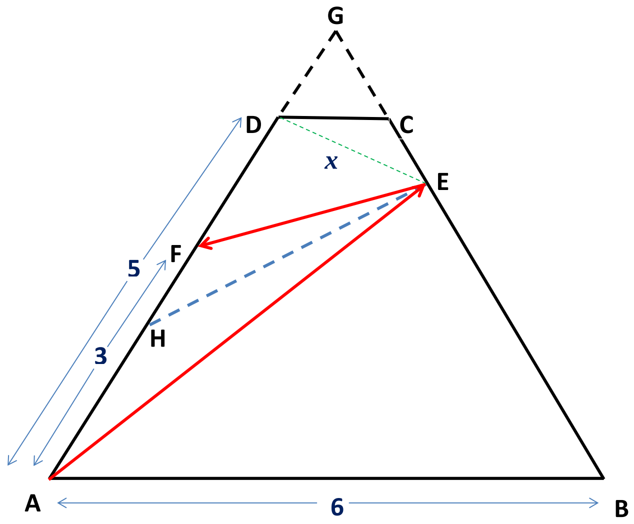
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \tag{2}$$

   son las raíces del polinomio $q_{x_2}(x_1) = (x_2^2 - x_2) \cdot x_1^2 - (x_2^2 - x_2) \cdot x_1 + 1$, que serán reales si y sólo si $\Delta = (x_2^2 - x_2) \cdot (x_2^2 - x_2 - 4) \geq 0$. Conociendo el comportamiento de la función polinómica $g(x) = x(x-1)$, basta con tomar $x_2 \geq 3$, por ejemplo, para que x_2 y cualquier raíz x_1 del correspondiente polinomio q_{x_2} verifiquen (2). Luego, se verificará (1) para x_1, x_2, x_3.

   En general, si $n = 2m$ con $m \geq 1$ (es decir, n par), consideraremos el producto $(\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2)^m$; si $n = 2m + 3$ con $m \geq 0$ (n impar) consideraremos el producto $(\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2)^m \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

3. *El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD, con $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e interseca en AD el punto F. Si $\overline{AF}$=3, calcula el área del triángulo AFE.*

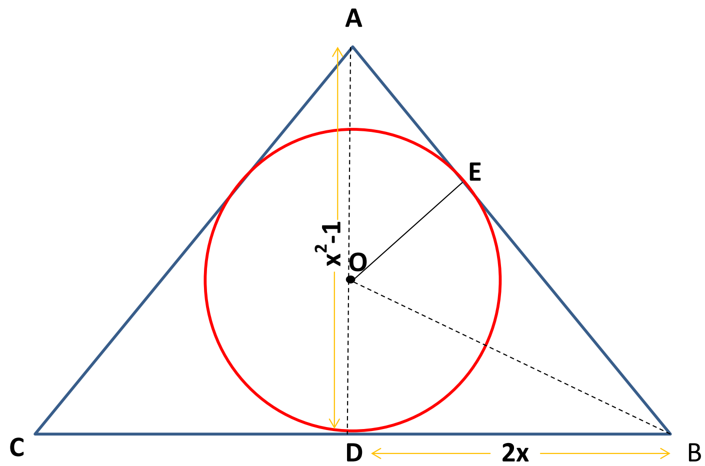
Solución:



La figura de la derecha ilustra el enunciado. Conviene percatarse primeramente de que, con estos datos, si prolongamos los lados AD y BC para formar una triángulo ABG, éste será equilátero de lado 6. Por otra parte, si la recta perpendicular a BG que pasa por E corta AG en H, $\angle AEH$ y $\angle HEF$ son, respectivamente, los ángulos de incidencia y reflexión del rayo, que deben ser iguales; en consecuencia, $\angle AEB = \angle FEG$. Como, además, $\angle ABE = \angle FGE = 60^o$, los triángulos FGE y ABE son semejantes. Por lo tanto, el área del triángulo AEB es el cuádruple de la de FEG. Además, se verifica que $\overline{EG}/3 = (6 - \overline{EG})/6$, es decir, $\overline{EG} = 2$. Para calcular el área de FEG basta conocer la medida x de la altura perpendicular al lado FG, que es sen $60^o \cdot \overline{EG} = \sqrt{3}$. Luego, el área de FEG es $3\sqrt{3}/2$ y la de AEB es $12\sqrt{3}/2$. Dado que el área total de ABG es $18\sqrt{3}/2$, el área del triángulo AEF es la diferencia $3\sqrt{3}/2$.

4. *Sean x un número entero mayor o igual que 2 y ABC un triángulo tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 4x$ y la altura perpendicular a BC mide $x^2 - 1$. ¿Para qué valores de x el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo es un número entero?*

Solución:



La figura de la izquierda ilustra el enunciado. Denótese por $R = \overline{OD} = \overline{OE}$ el radio de la circunferencia. Del teorema de Pitágoras se sigue que $\overline{AB} = x^2 + 1$. Dado que $\angle OEB = \angle ODB = 90^o$, $\overline{EB} = \overline{DB} = 2x$. Luego, $\overline{AE} = (x-1)^2$. De nuevo por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= R + \overline{OA} \\ &= R + \sqrt{R^2 + (x-1)^4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y despejando resulta que $2R(x-1)(x+1) = (x-1)^2[(x+1)^2 - (x-1)^2]$, es decir,

$$\begin{aligned} R &= 2x\frac{x-1}{x+1} = 2x\frac{x+1-2}{x+1} = 2x - \frac{4x}{x+1} \\ &= 2x - \frac{4x+4-4}{x+1} = 2x - 4 + \frac{4}{x+1} \end{aligned}$$

Como $2x-4$ es entero, R es entero si y sólo si lo es $4/(x+1)$. Dado que $x \geq 2$ por hipótesis, eso sólo ocurre con $x = 3$, que es la solución.

5. *¿Existen m, n números naturales tales que $n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$ sea un número primo?*

Solución:

$$\begin{aligned} n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 &= n^2 + 2019mn - mn + 2019m + n - 2019m^2 \\ &= n(n-m+1) + 2019m(n-m+1) \\ &= (n-m+1)(2019m+n) \end{aligned}$$

Si fuera un número primo, uno de los dos factores en que descompone debería ser 1, lo cual equivaldría a afirmar que $n = m$. Pero en ese caso el número sería $2020m$, que no es primo. Por lo tanto, la respuesta es no.

6. *Dado un número natural k encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan, para todo x real, que*

$$P\left(x^k\right) - P(k \cdot x) = x^k \cdot P(x) \tag{3}$$

Solución:

Consideremos un polinomio $P(x)$ de grado n verificando (3), que se expresará mediante $P(x) = A_n x^n + \ldots + A_1 x_1 + A_0$, con $A_n \neq 0$. En ese caso, la igualdad (3) queda como sigue:

$$A_n x^{nk} + \ldots + A_1 x^k - A_n k^n x^n - \ldots - A_1 kx = A_n x^{n+k} + \ldots + A_1 x^{1+k} + A_0 x^k \tag{4}$$

Se deduce primeramente que $A_1 = \ldots = A_{k-1} = 0$ y que, en consecuencia, $n \geq k$. Comparando los primeros sumandos de cada término se concluye que $nk = n + k$, por lo que $k \neq 1$. Además, si $k > 2$ se verificaría que $nk > 2n \geq n+k$, llegando así a contradicción. Luego, el único valor que nos queda para k es 2. Nuevamente, si $2n = n+2$, entonces $n = 2$. Por lo tanto, sólo cabe la posibilidad de que (3) ocurra con $P(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$ y $k = 2$. En tal caso, la igualdad (4) se expresaría mediante

$$A_2x^4 + A_1x^2 - 4A_2x^2 - 2A_1x = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2$$

Por lo tanto, A_1 debe ser igual a 0 y la igualdad se reduce a $A_0 = -4A_2$. Efectivamente, podemos comprobar que con $k = 2$ la igualdad (3) se verifica para cualquier polinomio del tipo $P(x) = \lambda \cdot (x^2 - 4)$ con $\lambda \neq 0$.