Olimpiada Matemática Española RSME

LVI Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
17 de enero de 2020
Soluciones propuestas

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Dado un número natural a_0 realizamos la siguiente operación: si es par lo dividimos entre dos y, si es impar, le sumamos 5. El resultado se denota por a_1, que se vuelve a someter al mismo procedimiento dando lugar al número a_2 y así sucesivamente. El proceso finaliza en el paso n-ésimo si $a_n = 1$. Determina los números naturales a_0 para los cuales el proceso no acaba, es decir, que nunca se llega a 1.*

   Solución: Es fácil percatarse de que a_n es múltiplo de 5 sí, y sólo si, a_{n+1} es múltiplo de 5. Por otra parte, dado que $a_{n+3} \leq (a_n+5)/2$, también es fácil probar que, si a_n es mayor que 5, $a_{n+3} \leq a_n - 1$. En consecuencia, por muy grande que sea a_0 habrá algún n tal que $a_n \leq 5$. Por lo tanto, tenemos a lo sumo 5 situaciones que discutir: si $a_n = 1$ el proceso acaba; si $a_n = 2$ acabaremos con a_{n+1}; si $a_n = 4$ acabaremos con a_{n+2}; si $a_n = 3$, acabaremos con a_{n+3}. Sin embargo, si $a_n = 5$, es decir, cuando a_0 es múltiplo de 5, entraremos en un ciclo infinito $5 \leftrightarrow 10$.

2. *Razona cuántos polígonos regulares hay cuyos ángulos entre lados contiguos, medidos en grados, sean números enteros.*

   Solución: Si unimos cada vértice de un polígono regular de n lados con el centro del mismo obtendremos n triángulos iguales. La suma de los n ángulos correspondientes al centro del polígono es 360, por lo que la suma de los ángulos del polígono es $180n - 360$. Por simetría, cada ángulo mide $180 - 360/n$, que será un entero positivo si, y sólo si, lo es $360/n$, es decir, cuando n es un divisor de 360 mayor o igual que 3 (pues debe ser un polígono). Dado que la descomposición en factores primos de 360 es $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, los divisores distintos de 1 se obtienen combinándolos entre sí, lo cual da lugar al siguiente número de posibilidades:

$$3 + 2 + 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 23$$

   Al excluir el divisor 2 nos quedan 22 polígonos regulares que satisfacen la condición, empezando por le triángulo equilátero, con ángulos de 60 grados, y acabando con un polígono regular con 360 lados al que le corresponden ángulos de 179 grados.

3. *Determinar los valores reales (x, y, z) para los cuales se satisface el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 & (1)\\ x^2y + y^2z + z^2x &= xy^2 + yz^2 + zx^2 & (2)\\ x^3 + y^2 + z &= y^3 + z^2 + x & (3) \end{aligned}$$

   Solución: La ecuación (2) equivale a $(x - y)(z - x)(z - y) = 0$. Luego, cualquier solución al sistema debe tener al menos un par de coordenadas iguales. Distinguimos tres casos:

   - Si suponemos $x = y$ se deduce de (1) que $z = 1 - 2x$. Sustituyendo en (3) se tiene que $x(3x - 1) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1/3$, que se corresponden con los puntos $(0, 0, 1)$ y $(1/3, 1/3, 1/3)$, respectivamente.

- Si suponemos $x = z$ se tiene por (1) que $y = 1 - 2x$. Sustituyendo en (3) se tiene que $x(9x^2 - 9x + 2) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$, $x = 2/3$ y $x = 1/3$, que se corresponden respectivamente con los puntos $(0, 1, 0)$, $(2/3, -1/3, 2/3)$ y, de nuevo, $(1/3, 1/3, 1/3)$.
- Si suponemos $y = z$ se tiene por (1) que $x = 1-2y$. Nuevamente por (3) se verifica que $3y(3y^2-4y+1) = 0$, cuyas soluciones son $y = 0$, $y = 1$ e $y = 1/3$, que se corresponden respectivamente con los puntos $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 1)$ y, otra vez, $(1/3, 1/3, 1/3)$. En total tenemos pues seis soluciones diferentes al sistema.

4. *Consideremos el polinomio*

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c)$$

Demuestra que $p(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *si, y sólo si,* $a = b = c$.

Solución: Es obvio que el polinomio puede tomar valores no negativos, por lo que $p(x)$ será mayor o igual que 0 en todo caso si, y sólo sí, su discriminante es menor o igual que 0. Se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) = 4[a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)] \\ &= 2[a^2+b^2-2ab] + 2[a^2+c^2-2ac] + 2[b^2+c^2-2bc] \\ &= 2\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right] \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces $\Delta \leq 0$ si, y sólo si, $a = b = c$. En ese caso el polinomio podría expresarse mediante $p(x) = 3(x-a)^2$, que se corresponde con una parábola con vértice en $(a, 0)$.

5. *Encuentra dos enteros entre 60 y 70 (ambos inclusive) que sean divisores de* $2^{96} - 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2^{96} - 1 &= (2^{48}+1)(2^{48}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{24}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{6}+1)(2^{6}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)\cdot 65 \cdot 63 \end{aligned}$$

6. *Una remota aldea está habitada por 30 personas sobre las que recae una terrible maldición: cada una posee una marca en la frente que puede ser un círculo o una cruz, aunque ninguna de ellas sabe qué tipo de marca lleva porque, de hecho, morirían al término del día en que lo averiguaran. Para completar la maldición han sido dotadas de una perfecta capacidad deductiva. Lo cierto es que 3 habitantes portan un círculo y el resto una cruz pero, como está completamente prohibido el uso de espejos así como emitir cualquier mínimo comentario sobre el tema, nadie sabe cuál es su marca. De esta forma los años trascurren felizmente, dentro de lo que cabe.*

Mas, un aciago día, acude un visitante a la aldea. Tras conocer a sus moradores y, a pesar de haber sido claramente aleccionado sobre la gravedad del problema, declara ante todos:
–¡La verdad es que me ha gustado mucho la marca esa del circulito que he visto!
Ante lo cual, el habitante que ejerce de alcalde le responde:
–Has perdido una excelente oportunidad de quedarte callado. De hecho, tu comentario nos condena a todos a una muerte inminente.
–¡Pero si yo sólo he hablado de algo que todos estáis viendo! –Se defendió el visitante.
–Anda, déjalo porque lo está empeorando. Os lo dije. Esto nos pasa por dejar entrar a gente de fuera –respondió el alcalde. ¿Podrías explicar tú por qué y cuando morirán?

Solución: Implícitamente el visitante afirma que al menos uno de los habitantes tiene un círculo en la frente. De hecho, de su segunda frase se deduce que hay al menos dos, pues de haber sólo uno su portador se mantendría ignorante de la presencia de círculos. Tiene parte de razón en su protesta porque cada habitante ve gente con un círculo en la frente. El problema radica en que, al decirlo públicamente, ahora todos saben que todos lo ven, lo cual es suficiente información para estos infelices dotados del cuestionable don de la lógica. Razonemos por qué.

Si sólo hubiera dos con círculo cada uno de ellos vería un único círculo, de lo cual deduciría que él es el portador del otro, por lo que ambos morirían la primera noche. Como en realidad hay tres círculos, cada uno de ellos observa a dos con círculos y sabe pues que, si fueran los únicos, deberían morir la primera noche, por el razonamiento anterior. Como esto no va a ocurrir, los tres deducirán que ellos también son portadores, por lo que morirán la segunda noche. Los veintisiete restantes, que han observado cómo morían los tres portadores de círculos que veían, deducirán que son diferentes a éstos, por lo que morirán la tercera noche.

Como moraleja concluimos que, cuando vayamos a una aldea maldita, es mejor que cerremos el pico. Es más, la primera frase del visitante habría bastado para condenarlos a todos, sólo que una noche después en cada caso. De hecho, el desenlace fatal habría tenido lugar independiente del número de círculos que hubiera y del número de habitantes de la aldea. ¿Podrías formalizarlo?