EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **12**, Núm. 2, 97 – 116 (1997)

Regards sur le Problème des Rotations de Mazur *

Félix Cabello Sánchez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 06071-*Badajoz, Spain,*
e–mail: fcabello@unex.es

AMS *Subject Class.* (1991): 46B04, 46B20, 46C15

0. Introduction

Ceci n'est pas le résumé de ma conference. J'alléguerai une bonne excuse : je n'ai jamais donné ma conference. Ce travail est plutôt le résumé de la conference que j'aurais bien voulu donner. Je remercie Pier Luigi Papini par sa précieuse aide dans le rassemblement des références. Merci également à Alberto et à Noem¡ qui se sont attelés sans peine à la tâche si ingrate de la relecture.

On cherche ici à donner une introduction aux espaces isotropes et à exposer l'état de quelques questions liées au problème des rotations de M. S. Mazur. Rappelons qu'*un espace normé est dit isotrope (ou transitif) lorsque son groupe d'isométries (linéaires et surjectives) opère transitivement sur la sphère unité*. C'est à dire, l'espace normé X est isotrope si, quels que soient x, y dans la sphère unité $S(X)$, il existe une isométrie $T : X \to X$ telle que $y = Tx$.

Nous sommes aussi interessés aux espaces quasi isotropes. *Un espace normé est quasi isotrope (ou encore quasi transitif) si les orbites de l'action du groupe des isométries sont denses dans la sphère unité* (c'est à dire, X est quasi isotrope si quels que soient $x, y \in S(X)$ et $\varepsilon > 0$ on peut trouver une isométrie $T : X \to X$ telle que $\|y - Tx\| < \varepsilon$). Les seuls exemples immédiats d'espaces isotropes (ou même quasi isotropes) sont les espaces hilbertiens. Quant au problème de l'existence d'espaces isotropes non hilbertiens on ne connaît que des réponses partielles. Par exemple, les espaces hilbertiens sont les seuls espaces (quasi) isotropes de dimension finie, comme l'ont montré MM. S. Mazur et H. Auerbach. Il y a, par contre, des espaces normés à une infinité de dimensions qui ne sont pas isomorphes à aucun espace hilbertien. On connaît des espaces de Banach isotropes non séparables et des espaces normés isotropes

*Financié partiellement par DGICYT, PB-94-1052-C02-02

séparables non complets non hilbertiens, mais on n'a pas réussi à trouver un tel exemple qui soit à la fois séparable et complet.

Problème. Un espace de Banach séparable isotrope est-il isométrique à L_2 ?

Ce problème (dit des rotations) est posé par M. S. Mazur d'après M. S. Banach [8, p. 242]. Il paraît difficil à résoudre. En fait, on ne sait ni démontrer, ni réfuter que tout espace normé isotrope, séparable et complet soit isomorphe à L_2. Malheureusement, on ne sait non plus si tout espace super réflexif est isomorphe à un espace (quasi) isotrope. Il faut remarquer qu'un espace X est isomorphe à un espace isotrope si et seulement si son groupe d'automorphismes (noté $\mathrm{Aut}(X)$ dans la suite) contient un sous-groupe borné agissant transitivement sur les droites de X. Ceci découle de que tout sous-groupe G borné de $\mathrm{Aut}(X)$ est aussi un sous-groupe du groupe des isométries d'un rénormage de X (qui peut être construit en prenant

$$\|x\|_G = \sup_{T\in G} \|Tx\|,$$

où $\|\cdot\|$ est n'importe quelle norme donnant la topologie de X). Ainsi, tous les résultats (et tous les problèmes) qu'on trouvera dans la suite concernent la structure des sous-groupes bornés des groupes d'automorphismes des espaces en considération.

Revenons sur terre. Bien que la question de Mazur reste ouverte, il existe des espaces de Banach quasi isotropes séparables. Dans ce travail, la plupart des espaces quasi isotropes connus actuellement sont présentés : les espaces L_p (pour $0 < p < \infty$), l'espace de Gurarij, les espaces de Lusky et l'espace $C[0,1]$ (muni d'une norme équivalente à la usuelle). Nous remarquons les liaisons entre les espaces quasi isotropes et ceux isotropes et la séparabilité : on montre que les ultraproduits des familles d'espaces quasi isotropes sont toujours espaces de Banach isotropes (en fait, la plupart des espaces isotropes connus sont obtenus par ultraproduit d'une famille d'espaces quasi isotropes). D'autre part, tout espace isotrope (étant en général non séparable) contient toujours des sous-espaces séparables quasi isotropes. De plus, pour la plupart des familles d'espaces de Banach définies par structures algébriques (par exemple, les M-espaces abstraits ou les algèbres de Banach), l'existence d'un espace isotrope équivaut à l'existence d'un espace quasi isotrope appartenant à la famille.

Enfin, nous présentons quelques problèmes liés a ce sujet, ainsi qu'une étendue bibliographie.

1. Espaces de dimension finie

Dans cette section, nous étudions le problème de Mazur pour les espaces de dimension finie. La plupart des résultats sont bien connus depuis longtemps.

Théorème 1.1. ([40],[6]) *Tout espace quasi isotrope de dimension finie est hilbertien.*

Presque toutes les démostrations du théorème 1.1 que nous avons trouvées dans la bibliographie sont bassées sur le théorème suivant (due à H. Auerbach) qui est au même temps un résultat sur points fixes et rénormages.

Théorème 1.2. ([3]) *Soit X un espace de dimension finie. Pour chaque sous-groupe G borné des automorphismes de X, il existe un produit scalaire G-invariant.*

C'est à dire, il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ pour $x, y \in X$ et $T \in G$. La norme hilbertienne induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est aussi G-invariante et le théorème 1.1 découle du théorème 1.2 à travers du principe élémentaire suivant.

Principe de comparaison. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé isotrope (respectivement, quasi isotrope) ayant groupe d'isométries G. Toute norme G-invariante (respectivement, G-invariante et $\|\cdot\|$-continue) coïncide avec $\|\cdot\|$ à un facteur scalaire près.*

Remarques et questions. Il y a plusieurs façons d'obtenir le produit scalaire du théorème 1.2. Par exemple :

(a) On peut prendre les ellipsoïdes de Löwner associés à une norme dont le groupe des isométries contient G ([1, p. 46], [46, p. 408]).

(b) D'après un produit scalaire arbitraire sur X prennant la moyenne

$$\langle x, y \rangle_\mu = \int_{\hat{G}} \langle Tx, Ty \rangle d\mu(T)$$

où $\hat{G}$ designe le complété de G et μ est la mesure de Haar sur le groupe $\hat{G}$ qui est toujours compact.

(c) Soit G un groupe borné d'automorphismes de l'espace de dimension finie X. Soit $\|\cdot\|$ une norme G-invariante sur X, B sa boule unité, λ la mesure de Lebesgue normalisée sur B et $L_2 = L_2(B, \lambda)$. Posons $\mathrm{Bil}(X)$ pour l'ensemble des formes bilinéaires sur X. Considérons l'ensemble fermé et convexe

(dans L_2)

$$C = \{f \in L_2 : f(x) = \varphi(x,x), \varphi \in \mathrm{Bil}(X), k\|x\|^2 \leq f(x) \leq K\|x\|^2\},$$

où k et K son telles que C soit non vide. Il est clair que la meilleure approximation de la fonction $\|x\|^2 \in L_2$ par rapport à C détermine un produit scalaire G-invariant sur X (voir [14]).

Le théorème 1.2 ne reste plus valable pour espaces de Hilbert de dimension infinie. En 1955 Ehrenpreis et Mautner montront qu'il existe un groupe borné d'automorphismes de $l_2(\mathbb{N})$ n'admettant aucun produit scalaire invariant (c'est à dire, non unitarisable). L'exemple dans [24] est un groupe algébriquement isomorphe à $SL_2(\mathbb{R})$. Plus tard on trouva des exemples plus simples : tout groupe libre $\mathbb{F}_n$ ($n \geq 2$) est représentable comme un groupe borné non unitarisable d'automorphismes de $l_2(\mathbb{N})$.

Les groupes ci-dessus sont, évidemment, non moyennables. Il est clair que, étant G une représentation bornée d'un groupe moyennable dans les automorphismes d'un espace hilbertien H, on peut toujours trouver un produit scalaire G-invariant sur H (théorème de Dixmier [22]). Il suffit d'agir comme à (b) en remplaçant la mesure de Haar par une moyenne invariante sur le groupe.

Á présent la question semble être la suivante.

Problème 1.3. ([22], [45, p. 2]) Sont les groupes moyennables les seuls groupes dont toutes les représentations bornées (dans le groupe des automorphismes d'un espace hilbertien) sont unitarisables ?

D'autre part, on ne connaît pas si le théorème 1.2 reste vrai pour espaces isomorphes à un espace hilbertien :

Problème 1.4. Un espace normé (quasi) isotrope et isomorphe à un espace hilbertien est-il nécessairement isométrique à un espace hilbertien ?

Quelques résultats dans [14] et [17] suggèrent une réponse positive. Ce problème se rattache à donner une preuve de 1.1 sans l'aide de 1.2. Une telle preuve (bassée sur la compacité locale des espaces de dimension finie, donc toujours insuffisante pour résoudre 1.4) se trouve dans [14].

On peut remplacer dans le théorème 1.1 l'hypothèse sur l'espace par une autre concernant la structure du groupe des isométries. Rappelons ([14], [16]) qu'une isométrie T est dite de dimension finie si $T = Id + F$, où F est un opérateur de range fini. Il est facilement verifié que l'ensemble des isométries de dimension finie est un sous-groupe du groupe des isométries. On peut alors généraliser le théorème 1.1 comme il suit.

THÉORÈME 1.5. ([14], [16]) *Tout espace normé dont les isométries de dimension finie opèrent transitivement sur la sphère unité est isométrique à un espace hilbertien.*

La preuve de 1.5 est bassée sur l'analyse des sous-espaces invariants par les isométries de dimension finie :

FAIT. ([14], [16]) Soit Γ un ensemble d'isométries de dimension finie d'un espace normé X. Il existe un sous-espace (pas nécessairement fermé) H de X tel que :

(a) H est Γ-invariant et non nul ;

(b) On peut munir H d'un produit scalaire (pas nécessairement comparable avec la restriction de la norme de X) rendant unitaires tous les opérateurs de Γ.

Ceci établi, soit Γ le groupe des isométries de dimension finie de X. Si Γ opère transitivement sur $S(X)$, alors les sous-espaces Γ-invariants (fermés ou non) de X sont triviaux, donc $H = X$. D'après (b) il existe une norme hilbertienne Γ-invariante sur X. Cette norme est un multiple de la norme originelle de X en vertu du principe de comparaison, ce qui montre que X était hilbertien.

Il faut remarquer qu'on ne sait pas si 1.5 subsiste pour espaces dont le groupe des isométries de dimension finie opère quasi transitivement sur la sphère unité, étant la réponse positive si l'espace est isomorphe à un espace hilbertien. Quelques résultats dans [14] suggèrent la question suivante.

PROBLÈME 1.6. Tout espace normé (quasi) isotrope dont le groupe des isométries contient une perturbation finie-dimensionelle (non-triviale) de l'identité est-il hilbertien ?

Nous trouvons quelques solutions partielles dans la série de travaux [49], [16], [10] et [11]. Précisement, si X est un espace quasi isotrope et $G(X)$ (le groupe d'isométries de X) contient une isométrie (non triviale) de dimension 1 alors X est hilbertien (voir [49] pour le cas réel et [16] pour le cas complexe). Pour résultats plus géneraux nous renvoyons le lecteur à [10] et [11]. Signalons finalement que tous les résultats de cette section restent valables pour espaces quasi-normés (car tout espace quasi normé quasi transitif ayant une fonctionelle linéaire continue non nulle est un espace localement convexe étant sa quasi norme une norme [14], [17]).

2. Espaces (quasi) isotropes de dimension infinie

Comme nous l'avons déjà dit à l'introduction, l'isotropie ne caractérise pas les espaces hilbertiens parmi les espaces de Banach. Le théorème suivant (dont un cas particulier est dû à Pelczynski et Rolewicz [43], [46, p. 412]) montre qu'on peut même trouver des espaces isotropes non localement convexes.

Théorème 2.1. ([28]) *Soit μ une mesure homogène.*
(a) *L'espace $L_p(\mu)$ est quasi isotrope pour tout $0 < p < \infty$.*
(b) *Si de plus μ est non σ-finie, l'espace $L_p(\mu)$ est isotrope pour tout $0 < p < \infty$.*

Une mesure est dite homogène si toutes les algèbres obtenues par restriction aux ensembles de mesure finie sont isomorphes. D'après le théorème de Maharam [38] (voir [47, pp. 466-477]) tout espace $L_p(\mu)$ est représentable (comme espace réticulé et isométriquement) moyennant

$$L_p(\mu) = l_p(\Gamma) \oplus_p \big(\sum_{i \in I}^{p} L_p(\lambda^{m_i}) \big),$$

où Γ et I sont des ensembles (peut-être vides), les m_i sont des cardinaux infinis et λ est la mesure de Lebesgue sur [0, 1]. La mesure μ est σ-finie si et seulement si Γ et I sont dénombrables et elle est homogène si Γ est vide et tous les m_i coïncident. L'exemple de Pelczynski et Rolewicz correspond à $\Gamma = \emptyset,\ |I| = \aleph_1,\ m_i = \aleph_0$ (ou, ce qui vient de même, $\Gamma = \emptyset,\ I = \mathbb{R},\ m_i = 1$). Á titre ilustratif, nous donnons une preuve de 2.1. Elle est basée sur le fait suivant.

Fait.([28]) Soit $f \in L_p(\lambda) = L_p[0,1]$ normée et $p \neq 2,\ 0 < p < \infty$. Il existe une isométrie (linéaire et surjective) $T : L_p(\lambda) \to L_p(\lambda)$ telle que $T(\mathbf{1}_{[0,1]}) = f$ si (et seulement si) $\lambda\{0 \leq t \leq 1 \colon f(t) = 0\} = 0$.

La nécessité decoule facilement d'une remarque de Banach [8, p. 176] qui exprime le fait que deux fonctions $g, h \in L_p(\mu)$ $(p \neq 2,\ 0 < p < \infty)$ soient disjointes par la rélation linéaire métrique suivante :

$$\|h + g\|^p + \|h - g\|^p = 2\big[\|h\|^p + \|g\|^p\big].$$

Ainsi, les images de deux fonctions disjointes par une isométrie sont encore deux fonctions disjointes. En particulier les isométries laissent invariant l'ensemble des fonctions qui s'annulent sur un ensemble à mesure nulle. Ceci montre aussi que si la mesure μ est finie (ou σ-finie) l'espace $L_p(\mu)$ n'est jamais isotrope (sauf si $L_p(\mu) = \mathbb{K}$ ou $p = 2$, bien sûr).

Réciproquement, soit $\|f\|_p = 1$ avec $\lambda\{f(t) = 0\} = 0$. Il s'agit de trouver une isométrie T de $L_p(\lambda)$ telle que $T(\mathbf{1}_{[0,1]}) = f$. Il est clair qu'il existe une isométrie de $L_p(\lambda)$ transformant f en $|f|$, donc il suffit de considérer le cas où f est positive. Soit

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s)^p ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La sommabilité de f^p entraîne que φ est une fonction absolument continue sur [0, 1]. Définissons

$$Tg(t) = g(\varphi(t))f(t)$$

Évidemment, $T(\mathbf{1}_{[0,1]}) = f$. De plus T conserve la norme de $L_p(\lambda)$, car

$$\begin{aligned}\|Tg\|_p^p &= \int_0^1 |Tg(t)|^p dt = \int_0^1 |g(\varphi(t))f(t)|^p dt \\ &= \int_0^1 |g(\varphi(t))|^p \frac{d\varphi}{dt}(t)dt = \int_0^1 |g(\varphi(t))|^p d\varphi(t) = \|g\|_p^p.\end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de justifier les calculs et la surjectivité de T (la construction de T peut surprendre un peu, mais une lecture attentive du théorème I de la page 178 du livre de Banach montre que T est la plus simple isométrie de L_p satisfaisant $T(\mathbf{1}_{[0,1]}) = f$. Banach n'a jamais publié une preuve de ce théorème. Une démonstration complète s'appuyant sur un résultat de von Neumann [41] est due à Lamperti [33]). Ceci établi, nous avons :

Fait.[28] On peut remplacer λ par λ^m ci-desuss (m étant un nombre cardinal quelconque). Ainsi, si $f, g \in L_p(\lambda^m)$ sont telles que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ et $\lambda^m\{t\colon f(t) = 0\} = \lambda^m\{t\colon g(t) = 0\} = 0$, il existe une isométrie T de $L_p(\lambda^m)$ telle que $g = Tf$. Évidemment, la même conclusion reste vraie si λ^m est remplacée par une mesure homogène σ-finie quelconque.

En effet, soit $f \in L_p(\lambda^m)$ normée telle que $\lambda^m\{t : f(t) = 0\} = 0$. Étant f mesurable, elle ne depend que d'une quantité dénombrable des coordonnées de l'espace produit $[0,1]^m$. Soit J un sous-ensemble dénombrable de m contenant les indices correspondants à ces coordonnées. Les mesures λ^J et λ étant isomorphes, on peut suposser que $|J| = 1$. Si l'on écrit $f = f(t,s), t \in [0,1], s \in [0,1]^{m-1}$, il est évident qu'on peut construire une isométrie dans $L_p(\lambda^m) = L_p(\lambda \times \lambda^{m-1}) = L_p(\lambda, L_p(\lambda^{m-1}))$ transformant $\mathbf{1} = \mathbf{1}(t) \otimes \mathbf{1}(s)$ en

$f = f(t) \otimes \mathbf{1}(s)$. Il suffit de prendre l'extension de la transformation définie par

$$T \otimes Id\big(\sum_i g_i \otimes h_i\big)(t,s) = \sum_i Tg_i(t) \otimes h_i(s),$$

où T est une isométrie dans $L_p(\lambda)$ telle que $T(\mathbf{1}) = f$.

Maintenant, soit μ une mesure homogène non σ-finie et $f, g \in L_p(\mu)$ normées. Considérons les ensembles $A = \{w : f(w) \neq 0\}$ et $B = \{w : g(w) \neq 0\}$. Visiblement les mesures $\mu|A$ et $\mu|B$ sont σ-finies et homogènes. Il existe donc un isomorphisme isométrique de $L_p(\mu|A)$ dans $L_p(\mu|B)$ transformant $f|A$ en $g|B$. Cette isométrie se prolonge à une isométrie

$$L_p(\mu) = L_p(\mu|A) \oplus_p L_p(\mu|A^c) \to L_p(\mu|B) \oplus_p L_p(\mu|B^c) = L_p(\mu)$$

qui transforme f en g et montre la deuxième partie du théorème.

Dans [28] on peut voir que les conditions sur la mesure ci-dessus sont, non seulement suffisantes, mais aussi nécessaires pour la (quasi) isotropie de l'espace $L_p(\mu)$ si $p \neq 2$. Il faut dire que les résultats de [28] sont établis seulement dans le cas $1 \leq p < \infty$, bien qu'ils restent valables pour $0 < p < 1$. Les espaces isotropes du théorème 2.1(b) sont, il est clair, non séparables. Il y a des espaces normés isotropes séparables non complets : soit μ une mesure et posons

$$L_p^0(\mu) = \{f \in L_p(\mu) : \mu\{w : f(w) \neq 0\} < \infty\}.$$

Le lecteur peut vérifier sans peine les exemples suivants.

Exemples 2.2. (a) Si la mesure μ est homogène et infinie, l'espace (non complet) $L_p^0(\mu),\ 0 < p < \infty$, est isotrope.

(b) En particulier, si μ est la mesure de Lebesgue sur la droite réelle, l'espace $L_p^0(\mu)$ est séparable et isotrope.

(c) Pour chaque $0 < p < \infty$, l'espace vectoriel engendré dans $L_p(-\infty, \infty)$ par les fonctions indicatrices des intervalles est isotrope.

(d) Si $L_p(\mu)$ et X sont quasi isotropes, alors le produit tensoriel naturel $L_p(\mu, X)$ est aussi quasi isotrope ([28]).

(e) Le complété d'un espace normé quasi isotrope est un espace de Banach quasi isotrope.

Le cas $p = \infty$ a été exclu de la discussion précédente. La raison est bien simple : étant $L_\infty(\mu)$ une B^*-algèbre conmutative unitaire, il est isométrique à un espace $C(K)$ dont les isométries sont de la forme

$$Tf(x) = \sigma(x) f(\varphi(x)),$$

où $\varphi : K \to K$ est un homeomorphisme et σ est une fonction continue sur K telle que $|\sigma(x)| = 1$ pour tout x ([8], [2]). Ainsi l'orbite de la fonction **1** n'est jamais dense dans la sphère unité (sauf si K est réduit à un point) et la norme usuelle dans $C(K)$ n'est pas quasi transitive. Toutefois il existe des espaces quasi isotropes dont la structure locale est la même des espaces $C(K)$, le premier desquels a une curieuse histoire.

L'espace de Gurarij. En 1966 Gurarij [30] construit un espace de Banach Γ séparable de disposition universelle, c'est à dire, jouissant de la propriété d'extension suivante :
(*) *Étant donnés espaces de dimension finie $F \supset E$, un operateur injectif $T : E \to \Gamma$ et $\varepsilon > 0$, il existe un operateur injectif $\tilde{T} : E \to \Gamma$ prolongeant T tel que* $\|\tilde{T}\|\,\|\tilde{T}^{-1}\| \le (1+\varepsilon)\|T\|\,\|T^{-1}\|$.

Gurarij montra aussi que tout espace de disposition universelle est un espace de Lindenstrauss (c'est à dire, son dual est isométrique à un espace $L_1(\mu)$), que deux espaces séparables possèdant (*) sont presque isométriques et qu'il n'existe aucun espace séparable satisfaisant à (*) pour $\varepsilon = 0$. Il remarque que tout espace de disposition universelle vérifie aussi la propriété suivante : étant donnés x, y avec $\|x\| = \|y\|$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un isomorphisme T tel que $y = Tx$ et $\|T\|\,\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$ (ceci suit directement de (*)). D'autre part, Pelczynski et Wojtaszczyk [44] montrent que la famille des espaces de Lindenstrauss séparables admet un membre "maximal" : il existe un espace de Lindenstrauss séparable PW jouissant de la propriété suivante : étant donnés un espace de Lindenstrauss séparable X et $\varepsilon > 0$, il existe $T : X \to PW$ tel que $\|x\| \le \|Tx\| \le (1+\varepsilon)$ pour tout $x \in X$ et une projection contractive de PW sur TX. Un an plus tard, Wojtaszczyk [51] montre que l'espace PW peut être construit comme un espace de disposition universelle. Finalement, Lusky [36] obtient que tous les espaces de disposition universelle séparables sont isométriques (en fait il montre que tous les espaces séparables satisfaisant à (*) pour T preservant la norme sont isométriques) et que Γ est quasi isotrope (céci n'est pas évident à partir de (*)) ; plus précisément, Lusky montre que les isométries de l'espace de Gurarij opèrent transitivement sur l'ensemble des points de la sphère où la norme est différentiable au sens de Gâteaux (cet ensemble est dense en vertu d'un théoreme de Mazur [39]). Aucune représentation fonctionnelle de Γ n'est connue. Il est clair que Γ n'est pas isomorphe à un espace $C(K)$ car il existe un espace BL (Benyamini et Lindenstrauss [13]) dont le dual est isométrique à $l_1(\mathbb{N})$ qui n'est pas isomorphe à un sous-espace complementé d'un espace $C(K)$. Étant BL un sous-espace complementé de Γ, ceci ne peut pas être isomorphe à (un facteur direct de) un espace $C(K)$. On verra plus loin qu'il existe un espace isotrope (resp. quasi isotrope) isomorphe à un espace $C(K)$ (resp. à $C[0,1]$).

Maintenant nous présentons une description de l'espace de Gurarij due à Lazar et Lindenstrauss [34]. Rappelons que tout espace de Banach X séparable dont le dual est un espace L_1 se représente comme $X = \overline{\cup_n E_n}$, où chaque E_n est un sous-espace de X isométrique à l_∞^n et $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout n. Appelons base admissible toute base $\{e_i\}_{i=1}^n$ telle que

$$\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|.$$

Il est évident que si $\{e_i^n\}_{i=1}^n$ est une base admissible de E_n et $E_n \subset E_{n+1}$ il existe une base admissible $\{e_i^{n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ de E_{n+1} telle que

$$e_i^n = e_i^{n+1} + a_i^n e_{n+1}^{n+1},$$

où les nombres $\{a_i^n\}_{i=1}^n$ vérifient $\sum_{i=1}^n |a_i^n| \le 1$. Et réciproquement, une suite $\{a_i^n\}_{i=1}^n$ telle que $\sum_{i=1}^n |a_i^n| \le 1$ défine (par $Te_i^n = e_i^{n+1} + a_i^n e_{n+1}^{n+1}$) une inclusion isométrique de l_∞^n dans l_∞^{n+1}. Donc un espace de Lindenstrauss séparable peut être décrit moyennant une matrice triangulaire infinie $(a_i^n)_{i\le n}$ où chaque colonne est formée par les nombres $\{a_i^n\}_{i=1}^n$. En fait, il s'exprime comme la limite inductive de la suite

$$l_\infty^1 \xrightarrow{T_1} l_\infty^2 \to \cdots \longrightarrow l_\infty^n \xrightarrow{T_n} l_\infty^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

où $T_n e_i^n = e_i^{n+1} + a_i^n e_{n+1}^{n+1}$. On a le théorème suivant qui montre l'existence des espaces de Gurarij d'une manière particulièrement simple :

Théorème 2.3. ([34]) *Soit X un espace de Banach représenté par une matrice triangulaire dont les colonnes forment un sous-ensemble dense de la boule unité de l'espace l_1. Alors X est un espace de disposition universelle.*

Les espaces de Lusky. Ce n'était que le début. En 1979, W. Lusky a montré qu'on peut trouver d'espaces de Banach quasi isotropes contenant n'importe quel facteur prefixé.

Théorème 2.4. ([37]) *Soit X un espace de Banach. Il existe un espace de Banach quasi isotrope L contenant X et une projection contractive de L sur X. De plus, si X est séparable, L peut être choisi séparable.*

Lusky établi le théorème seulement pour le cas où X est séparable ; pourtant on peut adapter facilement la preuve au cas général. L'idée est bien simple : tous les droites de n'importe quel espace de Banach sont isométriques, donc pour chaque $x, y \in S(X)$ on peut trouver une isométrie (linéaire) partielle $T_0 : \langle x \rangle \to X$ (c'est à dire, un opérateur linéaire préservant la norme) telle que $y = T_0 x$. Soit Ω_0 l'ensemble de ces isométries. Peut être les isométries partielles de Ω_0 n'admettent pas des extensions à tout l'espace X, mais on peut toujours construire un espace de Banach L_1 contenant X et un système Ω_1 d'isométries partielles $X \to L_1$ prolongeant chaque $T_0 \in \Omega_0$. Maintenant on poursuit cette procédure remplaçant X par L_1 : il existe $L_2 \supset L_1$ et un ensemble d'isométries partielles Ω_2 tel que pour toute $T_1 \in \Omega_1$ il existe $T_2 : L_1 \to L_2$ dans Ω_2 prolongeant T_1 et pour tous $x, y \in S(L_1) \subset L_2$ il existe une isométrie partielle $T_2 : L_1 \to L_2$ dans Ω_2 telle que $y = T_2 x$. Ainsi, on obtient une suite croissante d'espaces de Banach $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ de façon que l'espace normé (non complet) $L_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} L_n$ possède la propriété suivante : quels que soient $x, y \in S(L_\infty)$ il existe $T : L_\infty \to L_\infty$ (linéaire) telle que $y = Tx$, avec $\|Tz\| = \|z\|$ pour tout $z \in L_\infty$. Un peu plus de travail avait permis de construire des isométries surjectives (donnant aussi une projection contractive de L_∞ sur X). Donc L_∞ serait un espace normé isotrope et leur completé L un espace de Banach quasi isotrope.

La partie du théorème 2.4 concernant la projection de L sur X entraîne l'existence d'espaces (quasi) isotropes possèdant quelques propriétés exotiques. Par exemple, l'espace L construit à partir de X ne possède pas la propriété d'approximation lorsque X ne la possède pas. Ainsi nous voyons qu'il y a des espaces quasi isotropes séparables très différents aux espaces hilbertiens.

Ultraproduits. Dans ce qui suit on aura besoin de la notion d'ultraproduit ([31], [48]). Soit $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ une famille d'espaces de Banach indexée par Γ. Si U est un ultrafiltre sur Γ, l'espace ultraproduit de $\{X_\gamma\}$ selon U est l'espace quotient de

$$l_\infty(\Gamma, X_\gamma) = \{(x_\gamma) : x_\gamma \in X_\gamma, \sup_\gamma \|x_\gamma\|_\gamma < \infty\}$$

par le sous-espace

$$\{(x_\gamma) : \lim_U \|x_\gamma\|_\gamma = 0\}$$

et será dénoté $\left[\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma\right]_U$. La norme de cet espace vérifie la remarquable relation

$$\big\|[(x_\gamma)]\big\| = \lim_U \|x_\gamma\|_\gamma$$

où $[(x_\gamma)]$ est la classe d'equivalence de (x_γ) dans $\left[\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma\right]_U$.
Si tous les espaces X_γ coïncident avec un espace de Banach fixe X, l'ultraproduit s'appelle ultrapuissance de X selon U (désigné par X_U). Dans ce cas, il existe une inclusion (canonique) de X dans X_U qui est donnée par $x \to [(x)_\gamma]$.

Considérons maintenant une famille $\{T_\gamma : X_\gamma \to Y_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ d'opérateurs telle que $\sup_\gamma \|T_\gamma\|$ est fini. Soit U un ultrafiltre sur Γ. L'opérateur ultraproduit de la famille $\{T_\gamma\}$ est l'opérateur

$$\left[\prod_\gamma T_\gamma\right]_U \colon \left[\prod_\gamma X_\gamma\right]_U \to \left[\prod_\gamma Y_\gamma\right]_U$$

défini par $\left[\prod_\gamma T_\gamma\right]_U \left[(x)_\gamma\right] = \left[(T_\gamma x)_\gamma\right]$. On voit sans peine que

$$\left\|\left[\prod_\gamma T_\gamma\right]_U\right\| = \lim_U \|T_\gamma\|.$$

En particulier un ultraproduit d'une famille d'isométries est encore une isométrie.

Un ultraproduit s'appellera non trivial lorsqu'il est construit moyennant un ultrafiltre dénombrablement incomplet, c'est à dire, tel qu'il existe une suite d'ensembles appartenant à l'ultrafiltre dont l'intersection est vide.

Proposition 2.5. *(a) Tout ultraproduit non trivial d'espaces quasi isotropes est un espace de Banach isotrope. (b) En particulier, toute ultrapuissance non triviale d'un espace quasi isotrope est isotrope.*

Par exemple, les ultrapuissances (non triviales) des espaces $L_p[0,1]$ construites sur $\mathbb{N}$ sont des espaces isotropes du type $L_p(\mu)$ [48]. En fait, dans ce cas $(L_p[0,1])_U$ est isométrique à $\sum_{i\in I}^p L_p(\lambda^m)$, où $|I| = m = \aleph_1$ (un résultat dû à Henson, voir [47, p. 65]). Ainsi, nous voyons que $(L_p[0,1])_U$ est "plus grand" que les exemples de Pelczynski et Rolewicz cités après le théorème 2.1. Un usage moins innocent des ultraproduits est le suivant :

Un M-espace isotrope. ([14], [15]) Soit $p(n)$ une suite de nombres réels tendant vers l'infini. Soit U un ultrafiltre (non trivial) sur $\mathbb{N}$. L'ultraproduit $Y = \left[\prod_{n=1}^\infty L_{p(n)}\right]_U$ est isotrope d'après 2.1 (a) et 2.5 (a). On montre sans peine que Y est un M-espace (en d'autres mots, Y est un espace de Banach reticulé où on a $\|x+y\| = \max[\|x\|, \|y\|]$ chaque fois que x et y sont deux éléments disjoints de Y). Cet espace semble être le premier espace isotrope possédant M structure non triviale (voir [28]). Il n'est pas clair si Y est isomorphe à un espace $C(K)$. Maintenant, on va étudier l'existence de sous-espaces séparables quasi isotropes dans les espaces isotropes. On ne donne ici que les définitions et résultats essentiels : plus de détails se trouvent dans [14] et [15].

THÉORÈME 2.6. *Soit X un espace de Banach isotrope et Y un sous-espace séparable de X. Il existe un sous-espace Z séparable et quasi isotrope contenant Y.*

En fait, on peut aller plus loin si nous précisons la structure de X.

Soit J une sous-categorie d'espaces de Banach dont les objets s'appelleront J-espaces et les morphismes J-morphismes. Un J-sous-espace Y d'un J-espace X est un sous-espace (de Banach) qui est lui même un J-espace, de façon que l'inclusion $Y \to X$ est un J-morphisme. *Une sous-categorie J est appelée admissible si elle vérifie les conditions suivantes :*

(a) *Étant donnés un J-espace X et un sous-espace Y de X, il existe un J-sous-espace séparable de X qui contient Y.*

(b) *Si (Y_n) est une suite croissante de J-sous-espaces d'un J-espace X, alors l'espace de Banach $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ est un J-espace.*

THÉORÈME 2.7. *Soit J une categorie admissible.* (a) S'il existe un J-espace isotrope, alors il existe un J-espace séparable et quasi isotrope. De façon plus precise, si X est un J-espace isotrope et S est un sous-espace separable de X, alors il existe un J-sous-espace de X separable et quasi isotrope conteneant S. (b) De plus, si la classe des J-espaces est stable par ultrapuissance, l'existence des J-espaces quasi isotropes équivaut à l'existence des J-espaces séparables quasi isotropes.

La plupart des familles d'espaces de Banach définies par des structures algébriques additionelles sont des categories admissibles dans le sens de 2.7. Par exemple, les L_p-espaces, L-espaces, M-espaces, les JB^*-triples ([9], voir aussi [50]), les algèbres de Banach, les B^*-algèbres de Banach et les B^*-algèbres de Banach commutatives et les espaces du type $C_0(L)$ sont des categories admissibles de façon naturelle.

EXEMPLE 2.8. ([14], [15]) L'espace $C[0,1]$ (réel ou complexe) est quasi isotrope pour une norme équivalente.

On peut montrer 2.8 à partir de 2.7 comme il suit. On remarque d'abord que le M-espace Y ci-dessus contient une copie isométrique de $L_\infty(0,1)$. Il suffit de considérer l'opérateur

$$g \in L_\infty(0,1) \to [(g)_n] \in Y$$

Donc Y contient $C[0,1]$ et d'après 2.7 (a) il existe un M-espace Z séparable quasi isotrope contenant $C[0,1]$. L'espace Z est isomorphe à un espace du type $C(K)$, avec K compact et métrisable (d'après Benyamini [12]). De plus, Z contient un sous-espace isométrique à $C[0,1]$, donc $C(K)$ contient un sous-espace isomorphe à $C[0,1]$ et alors K n'est pas dénombrable. Enfin, $C(K)$ est isomorphe à $C[0,1]$ en vertu du théorème de Miljutin ([47, p. 379]). Maintenant, tenant compte 2.5, l'exemple ci-dessus et le fait qu'une ultrapuissance d'un espace isomorphe à un $C(K)$ est encore un espace du même type, nous avons :

Exemple 2.9. Il existe un espace topologique compact K tel que $C(K)$ admet un rénormage transitif.

Remarques et questions. On pourrait penser, à partir des exemples d'espaces isotropes ci-dessus, qu'il existe des espaces isotropes séparables "classiques". Pourtant la structure des espaces L_p (pour $p \neq 2$) n'est pas compatible avec l'isotropie dans les espaces de Banach séparables. Rappelons qu'un espace X possède L_p-structure (non triviale) si on peut écrire $X = Y \oplus_p Z$, où Y et Z sont sous-espaces (non triviaux) de X (dans le cas $p = \infty$, on parle toujours de M-structure). Les auteurs de [28] montrent qu'un espace de Banach isotrope séparable a L_p-structure triviale pour $1 \leq p < \infty, p \neq 2$. Il est clair aussi qu'un espace de Banach isotrope séparable a M-structure triviale, car la norme d'un espace isotrope séparable est différentiable au sens de Gâteaux dans toute la sphère unité (grâce au théorème de Mazur [39]), ce qui est impossible si l'espace a un sous-espace isométrique à l_∞^2.

On pourrait encore se démander si tout espace de Banach a un rénormage (quasi) transitif, ou ce qui vient de même, si pour tout espace de Banach X il existe un sous-groupe borné de $\mathrm{Aut}(X)$ opérant transitivement sur (un ensemble dense de) les droites de X. Comme d'habitude, la réponse à cette question est negative. On peut montrer le suivant :

Proposition 2.10. ([15], [17]) *Pour un espace de Banach quasi isotrope X les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *X est un espace d'Asplund (voir [53]) ;*
(b) *X possède la propriété de Radon-Nikodym (voir [21]) ;*
(c) *X est réflexif ;*
(d) *X est super-réflexif.*

Il en résulte que, par exemple, l_1, c_0 ou l'espace de Tsirelson n'admettent aucun rénormage quasi transitif. Les espaces l_p $(p < 1)$ n'admettent non plus aucune F-norme équivalente quasi transitive [17]. Le problème suivant reste pourtant ouvert.

Problème 2.11. ([20, p. 176]) Un espace de Banach super-réflexif admet-il toujours un rénormage
(a) transitif ?
(b) Et quasi transitif ?

Deville, Godefroy et Zizler ont remarqué qu'une solution positive à la seconde partie de ce problème entraînerait une réponse positive à la question (fondamentale dans la théorie des rénormages) de déterminer si un espace de Banach admettant une norme équivalente dont le module de convexité uniforme est de type $p \geq 2$ et une autre norme dont le module de lissure est de type $1 < q \leq 2$ admet-il toujours un rénormage possèdant au même temps les deux propriétés. Le lien entre ces dernières questions est établi par Finet ([25], [20]) qui a montré que tout rénormage quasi transitif d'un espace ayant une norme équivalente dont le module de convexité uniforme est de type p a lui-même un module de convexité uniforme de type p. On peut obtenir un résultat analogue concernant le module de lissure. Une preuve très simple de ces faits se trouve dans [17].

On ne saurait donner aucun candidat à contre-exemple pour le problème 2.11. Ce qu'on a dit sur les espaces $l_p(0 < p \leq 1)$ et c_0 semblairait suggérer les espaces $l_p(p > 1, p \neq 2)$, comme contre-exemples, mais il faut tenir compte que les espaces de Hardy H_p $(0 < p \leq 1)$ aussi que le predual de H_1 n'admettent aucune F-norme quasi-transitive [17] alors que les espaces H_p, $1 < p < \infty$, (n'étant quasi isotropes munis de leurs normes naturelles, sauf si $p = 2$ [26]) admettent toujours des rénormages quasi transitifs car ils sont isomorphes aux espaces de Lebesgue correspondants.

Ajoutons encore une autre question à propos du problème 2.11. Rappelons ([43], [46], [52]) que la norme d'un espace de Banach X est dite maximale lorsque aucune norme équivalente sur X ne possède un groupe d'isométries contenant strictement $G(X)$. Encore, une norme est maximale si son groupe d'isométries est maximal par rapport aux sous-groupes bornés du groupe des automorphismes de l'espace. Il est évident que toute norme quasi transitive est maximale. Il existe d'autres normes maximales. Par exemple, une norme admettant une base symétrique est toujours maximale dans un espace non isomorphe à l_2 ([46], voir aussi [27]). Le problème suivant est aussi ouvert.

Problème 2.12. ([52], [42]) Dans un espace de Banach, existe-t-il toujours une norme équivalente maximale ?

Ou, ce qui vient de même, le groupe des automorphismes d'un espace de Banach contient-il toujours un sous-groupe borné maximal ? Quant à normes concrètes on ne connaît pas si la norme usuelle est maximale dans l'espace des fonctions à valeurs réels et continues sur le circle ([46],[42] ; la réponse est positive dans le cas complexe [32]) ni dans l'espace des opérateurs linéaires bornés dans un espace hilbertien réel ou complexe.

Il faut remarquer qu'une norme maximale n'est pas nécessairement la seule norme possédant son groupe d'isométries. Par exemple, la norme $\|\cdot\|_p$ est maximale sur l'espace l_p. Pourtant, si $p < q$ et $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$ est équivalente à $\|\cdot\|_p$ et elle possède le même groupe d'isométries. Une norme $\|\cdot\|$ dont le groupe d'isométries est G est appelée uniquement maximale lorsque toute norme équivalente dont le groupe d'isométries contient G coïncide avec $\|\cdot\|$ à un facteur scalaire près [46], [52]. En d'autres mots, une norme est uniquement maximale lorsqu'elle est déterminée par son groupe d'isométries (dans le sens de qu'elle vérifie la conclusion du principe de comparaison).

Théorème 2.13. ([19]) *La norme de X est uniquement maximale si et seulement si, pour tout $x \in S(X)$, l'enveloppe convexe de l'orbite de x par l'action du groupe d'isométries de X est dense dans la boule unité de X.*

La deuxième condition du théoreme est connue par "transitivité convexe" de la norme. Il est clair que toute norme quasi transitive est uniquement maximale. Le réciproque n'est pas vrai, car la norme usuelle dans l'espace c_0, étant uniquement maximale, n'est pas quasi transitive. En fait, la proposition 2.10 montre qu'il n'existe aucune norme équivalente quasi transitive sur c_0. Dans [17] on montre :

Proposition 2.14. *Toute norme uniquement maximale dans un espace de Banach super réflexif est aussi quasi transitive.*

C'est naturel de poser le problème suivant.

Problème 2.15. ([52], [42]) Dans un espace de Banach, existe-t-il toujours une norme équivalente uniquement maximale ?

Dans [17] sont analysées quelques propriétés géométriques des normes uniquement maximales. Ce travail contient aussi des résultats concernant espaces non localement convexes. Par exemple, il existe un espace de functions de Orlicz (non localement convexe) qui n'est isomorphe à aucun quotient d'un espace admettant une quasi norme uniquement maximal.

Pour finir, nous présentons une autre question de la théorie isométrique. Soit L un espace topologique localement compact. On denote par $C_0(L, \mathbb{K})$

l'espace de Banach des fonctions continues sur L (à valeurs dans $\mathbb{K}$) s'annulant à l'infini muni de la norme usuelle $\|f\| = \max_{x\in L} |f(x)|$. C'est surprenant que le problème suivant (posé par G. V. Wood) reste ouvert :

Problème 2.16. ([52], [28], [29]) Existe-t-il un espace du type $C_0(L, \mathbb{K})$ quasi isotrope ?

Wood a conjeturé dans [52] une réponse négative. En fait on sait ([14], [29], [15]) que la réponse est négative si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (donc nous considerons dans la suite seulement des espaces complèxes). En tenant compte que les espaces du type $C_0(L, \mathbb{C})$ coïncident avec les B^*-algèbres conmutatives (théorème de Gelfand-Naimark, voir [20, p. 11] nous voyons que le problème de Wood équivaut à déterminer si $\mathbb{C}$ est la seule B^*-algèbre conmutative quasi isotrope. Il est clair que les B^*-algèbres conmutatives sont stables par ultraproduits, donc le problème de Wood se reduit à déterminer si $\mathbb{C}$ est la seule B^*-algèbre conmutative isotrope. De plus, les B^*-algèbres forment une categorie admissible dans le sense de 2.7, donc le problème de Wood équivaut encore à démontrer (ou réfuter) que la seule B^*-algèbre séparable conmutative et quasi isotrope soit $\mathbb{C}$ (ou ce qui vient de même, on peut suposser dans 2.16 que la compactification d'Alexandroff de l'espace localement compact L est métrisable).

Récemment Greim et Rajalopagan [29] ont trouvé quelques conditions nécessaires pour la transitivité de l'espace $C_0(L, \mathbb{C})$ concernant la structure topologique de L (quelques questions posées dans [29] sont résolues dans [18]). Remarquons finalement que la conjecture de Wood est fausse (même quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) si l'on admet rénormages car l'exemple 2.9 montre qu'il existe un M-espace abstrait isomorphe à un espace du type $C_0(L, \mathbb{K})$ dont la norme est transitive.

Références

[1] Amir, D., "Characterizations of Inner Product Spaces", Operator Theory 20", Bikhäuser, Basel, 1986.

[2] Arens, R.F. and Kelley, J.L., Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space, *Transactions of the American Mathematical Society,* **62** (1947), 499 – 508.

[3] Auerbach, H., Sur les groupes linéaires bornés I, *Studia Mathematica,* **IV** (1934), 113 – 127.

[4] Auerbach, H., Sur les groupes linéaires bornés II, *Studia Mathematica,* **IV** (1934), 158 – 166.

[5] Auerbach, H., Sur les groupes linéaires bornés III, *Studia Mathematica,* **V** (1935), 43 – 49.

[6] Auerbach, H., Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde, *Studia Mathematica,* **IX** (1940), 17 – 22.

[7] Auerbach, H., Mazur, S. and Ulam, S., Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde, *Monatshefte für Mathematik und Physik,* **42** (1935), 45 – 48.

[8] Banach, S., "Théorie des Opérations Linéaires", Monografie Matematyczne 1, Warsawa-Lwów, 1932.

[9] Becerra Guerrero, J., JB*-triples and transitivity of the norm, *Preprint,* Universidad de Granada, 1997.

[10] Becerra Guerrero, J. and Rodriguez Palacios, A, Isometric reflexions after a paper of Skorik and Zaidenberg, *Preprint,* Universidad de Granada, 1996.

[11] Becerra Guerrero, J. and Rodriguez Palacios, A., Isometries which are one-dimensional perturbations of the identity, *Preprint,* Universidad de Granada, 1997.

[12] Benyamini, Y., Separable G spaces are isomorphic to $C(K)$ spaces, *Israel Journal of Mathematics,* **14** (1973), 287 – 293.

[13] Benyamini, Y. and Lindenstrauss, J., A predual of l_1 which is not isomorphic to a $C(K)$ space, *Israel Journal of Mathematics,* **13** (1972), 246 – 254.

[14] Cabello Sánchez, F., "10 Variaciones sobre un Tema de Mazur", Thèse, Universidad de Extremadura, Badajoz, 1996.

[15] Cabello Sánchez, F., Transitivity of M spaces and Wood's conjecture, (to appear in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **123**.

[16] Cabello Sánchez, F., Finite-dimensional isometries, preprint.

[17] Cabello Sánchez, F., Maximal symmetric norms on Banach spaces, *Preprint* **23** , Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 1997.

[18] Cabello Sánchez, F., Nearly variants of properties and ultrapowers, *Preprint***18** , Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 1997.

[19] Cowie, E.R., A note on uniquely maximal Banach spaces, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,* **26** (1983), 85 – 87.

[20] Deville, R., Godefroy, G. and Zizler, V., "Smoothness and renormings in Banach spaces", Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 64, 1993.

[21] Diestel, J. and Uhl, J.J., "Vector Measures", Mathematical Surveys 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[22] Dixmier, J., Les moyennes invariantes dans les semigroupes et leur applications, *Acta Scientiarum Mathematicarum. Acta Universitatis Szegediensis,* **12A** (1950), 213 – 227.

[23] Dixmier, J., "C^*-algebras", North-Holland, Amsterdam, 1977.

[24] Ehrenpreis, L. and Mautner,F., Uniformly bounded representations of groups, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)* **41** (1955), 231 – 233.

[25] Finet, C., Uniform convexity properties of norms on a super-reflexive Banach space, *Israel Journal of Mathematics,* **53** (1986), 81 – 92.

[26] Forelli, F., The isometries of H_p, *Canadian Journal of Mathematics,* **18** (1964), 721 – 728.

[27] Gordon, Y. and Lewis, D.R., Isometries of diagonally symmetric Banach spaces, *Israel Journal of Mathematics,* **28** (1977), 45 – 67.

[28] Greim, P., Jamison, J.E. and Kaminska, A., Almost transitivity of some function spaces, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **116** (1994), 475 – 488.

[29] Greim, P. and Rajalopagan, M., Almost transitivity in $C_0(L)$, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **121** (1997), 75 – 80.

[30] Gurarij, V.I., Espaces de disposition universelle, espaces isotropes et le problème des rotations de Mazur (en russe), *Sibirskij Matematicheskij Zhurnal,* **7** (1966), 1002 – 1013.

[31] Heinrich, S., Ultraproducts in Banach space theory, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematike,* **313** (1980), 72 – 104.

[32] Kalton, N.J. and Wood, G.V., Orthonormal systems in Banach spaces and their applications, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **79** (1976), 493 – 510.

[33] Lamperti, J., On the isometries of certain function spaces, *Pacific Journal of Mathematics,* **8** (1958), 459 – 466.

[34] Lazar, A.J. and Lindenstrauss, J., Banach spaces whose dual are L_1 and their representing matrices, *Acta Mathematica,* **126** (1971), 165 – 195.

[35] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., “Classical Banach Spaces II”, Springer, Berlin, 1979.

[36] Lusky, W., The Gurarij spaces are unique, *Archiv der Mathematik,* **27** (1976), 627 – 635.

[37] Lusky, W., A note on rotations in separable Banach spaces, *Studia Mathematica,* **LXV** (1979), 239 – 242.

[38] Maharam, D., On homogeneous measure algebras, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA),* **28** (1942), 108 – 111.

[39] Mazur, S., Über konvexe Mengen in linearen normieten Räumen, *Studia Mathematica,* **IV** (1933), 70 – 84.

[40] Mazur, S., Quelques propriétés caractéristiques des espaces euclideans, *Comptes Rendues de l'Academie des Sciencies de Paris,* **207** (1938), 761 – 764.

[41] von Neumann, J., Einige Satze über messbare Abbildungen, *Annals of Mathematics,* **33** (1932), 574 – 586.

[42] Partington, J.R., Maximal norms on Banach spaces, *Bulletin of the London Mathematical Society,* **17** (1985), 55 – 56.

[43] Pelczynski, A. and Rolewicz, S., Best norms with respect to isometry groups in normed linear spaces, *In Short communications on International Mathematics Congress in Stockholm,* (1964), 104.

[44] Pelczynski, A. and Wojtaszczyk, P., Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional spaces, *Studia Mathematica,* **XL** (1971), 91 – 108.

[45] Pisier, G., "Similarity Problems and Completely Bounded Maps", Lecture Notes in Mathematics 1618, Springer, 1996.

[46] Rolewicz, S., "Metric Linear Spaces", Monografie Matematyczne 56, PWN and D. Reidel, Dordrecht, 1984.

[47] Semadeni, Z., "Banach Spaces of Continuous Functions", Monografie Matematyczne 55, PWN, Warsawa, 1971.

[48] Sims, B., "Ultra -techniques in Banach space theory", Queens Papers in Pure and Applied Mathematics 60, Queen's University, Kingston, Ontario, 1982.

[49] Skorik, A. and Zaidenberg, M., "On isometric reflexions in Banach spaces", Prépublication del'Institut Fourier des Mathématiques 276, 1994.

[50] Tarasov, S.K., Banach spaces with a homogeneous ball, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Matematika,* **43** (1988), 70 – 73.

[51] Wojtaszczyk, P., Some remarks on the Gurarij space, *Studia Mathematica,* **XLI** (1972), 207 – 210.

[52] Wood, G.V., Maximal symmetry in Banach spaces, *Proceedings of the Royal Irish Academy,* **82A** (1982), 177- 186.

[53] Yost, D., Asplund spaces for beginners, *Acta Universitatis Carolinæ. Mathematica et Physica,* **34** (1993), 159 – 177.