3 Cálculo I

Sucesiones de números racionales

03 · 10 · 2015

Los números reales son aproximaciones que se van haciendo con números racionales. Estas aproximaciones se llaman sucesiones y van a permitir definir los números reales. Para ello se necesita definir qué son sucesiones convergentes y cómo a partir de ellas se puede definir el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Definición. Una sucesión en $\mathbb{Q}$ es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} x:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ 1 & \rightsquigarrow & x(1)=x_1 \\ 2 & \rightsquigarrow & x(2)=x_2 \\ 3 & \rightsquigarrow & x(3)=x_3 \\ & \dots & \end{array}$$

Se suele representar mediante sus imágenes $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_n = (x_n)$. En adelante, se utilizará cualquiera de estas notaciones. Se designa por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ al conjunto de valores que toman los términos de la sucesión. Por ejemplo, si $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ entonces el conjunto de valores es $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$, un conjunto de dos elementos. Para las sucesiones $(1, 2, 3, \dots)$ y $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots)$ el conjunto de valores es $\mathbb{N}$.

Al conjunto de todas las sucesiones de números racionales se le designará por $\mathscr{S}$. A partir de las operaciones en $\mathbb{Q}$ es posible definir ciertas operaciones en $\mathscr{S}$:

- Suma: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, es decir, las sucesiones se suman haciendo las sumas término a término.
- Producto: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$, las sucesiones se multiplican haciéndolo término a término.
- Producto por escalares: $\alpha \cdot (x_n) = (\alpha \cdot x_n)$, para $\alpha \in \mathbb{Q}$ y $(x_n) \in \mathscr{S}$.

Se puede comprobar fácilmente que la suma es asociativa, conmutativa, tiene a la sucesión cero $(0) = (0, 0, 0, \dots)$ como elemento neutro y todo elemento tiene opuesto: $-(x_n) = (-x_n)$. El producto es asociativo, conmutativo y tiene elemento unidad

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

$(1) = (1, 1, 1, \ldots)$. Sin embargo no toda sucesión no nula tiene elemento inverso. El inverso de una sucesión (x_n) es $(x_n)^{-1} = (x_n^{-1})$, que existe si todos los términos x_n son no nulos.

Así, $(\mathscr{S}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario y no es un cuerpo. Se dice que es un anillo con divisores de cero, ya que puede haber elementos no nulos cuyo producto es cero:

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots) = (0)$$

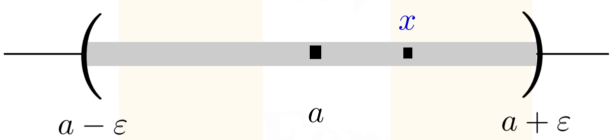
La definición de sucesión convergente es esencial en el Cálculo. Es necesario insistir en la importancia de entender correctamente esta forma de escribir un concepto que puede resultar más o menos intuitivo.

Definición. Se dice que una sucesión (x_n) de números racionales converge a $a \in \mathbb{Q}$, y se escribe $(x_n) \to a$ o también $a = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n)$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ n > \nu \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Dado cualquier valor $\varepsilon > 0$ todo lo pequeño que uno quiera (para valores grandes no se llega a nada importante), todos los términos x_n con $n > \nu$ están en el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, o lo que es lo mismo, $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Por ejemplo, es fácil probar que toda sucesión constante es convergente, y su límite es el término general de la sucesión. Si $(x_n) = (a, a, a, \ldots)$ entonces $|x_n - a| < \varepsilon$ para cualquier valor $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, una sucesión como $(x_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ no puede ser convergente.

Utilizando la propiedad arquimediana es fácil comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En la definición de convergencia aparece el valor absoluto como distancia entre números: $|a - b|$ es la distancia entre a y b. Este valor absoluto se define para cada número $a \in \mathbb{Q}$ como

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

y tiene las siguientes propiedades (para $a, b \in \mathbb{Q}$)

1. $|a| \geq 0$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Por tanto $|-a| = |a|$, $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ si $a \neq 0$, y $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

4. $\big||a|-|b|\big| \leq |a \pm b|$

El valor absoluto indica la distancia entre dos números. Resulta útil a veces para comparar números a y b, ya que

$$|a-b|< \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = b$$

Por ejemplo, $a = 1'9999\ldots = 1'\widehat{9}$ y $b = 2$ verifican $|a-b|< \varepsilon$ sea cual sea el valor $\varepsilon > 0$. Por tanto $a = b$.

Definición (conjunto acotado). Un Conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ es acotado si existe $M > 0$ tal que $|x|\leq M$ para todo $x \in A$, es decir, si $A \subset [-M, M]$. Una sucesión (x_n) se dice que está acotada si todos los términos están contenidos en algún intervalo: existe $M > 0$ que verifica $x_n \in [-M, M]$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Proposición. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Se considera una sucesión convergente $(x_n) \to a$. Dado $\varepsilon = 1$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a|< 1$ para $n > \nu$. Por tanto $|x_n|< 1 + |a|$ para esos valores $n > \nu$. Así,

$$M = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_\nu|, 1 + |a|\}$$

es una cota máxima para la sucesión. □

Proposición. *La suma (respectivamente el producto) de sucesiones convergentes es una sucesión convergente y su límite es la suma (resp. el producto) de sus límites.*

Así, si dos sucesiones (x_n) y (y_n) son convergentes entonces $(x_n + y_n)$ y $(x_n \cdot y_n)$ también lo son y se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} (x_n) + \lim_{n\to\infty} (y_n) \\ \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) &= \lim_{n\to\infty} (x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (y_n). \end{aligned}$$

Demostración. Sean $(x_n) \to a, (y_n) \to b$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe ν_1 tal que $|x_n - a|< \varepsilon/2$ si $n > \nu_1$ y existe ν_2 tal que $|y_n - b|< \varepsilon/2$ si $n > \nu_2$. Por tanto, si $\nu = \text{máx}\{\nu_1, \nu_2\}$ se tiene

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

para $n > \nu$, lo que prueba que $(x_n + y_n) \to a + b$.

El argumento para el producto es similar. Como las sucesiones son convergentes también son acotadas. Como ambas sucesiones son acotadas, se puede encontrar $M > 0$ que verifique $|a|< M, |b|< M, |x_n|< M, |y_n|< M$ para todo n. Dado $\varepsilon > 0$ existen $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - a|< \varepsilon/2M$ si $n > \nu_1$ y $|y_n - b|< \varepsilon/2M$ si $n > \nu_2$. Así

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \\ &= |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

para $n > \text{máx}\{\nu_1, \nu_2\}$. □

Ejercicio. Es fácil probar que las tres sentencias siguientes son equivalentes:

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

- $(x_n) \to a$,
- $(x_n - a) \to 0$,
- $(|x_n - a|) \to 0$.

Además, si (y_n) es acotada y $(x_n) \to a$ entonces $\big(y_n(x_n - a)\big) \to 0$. Con este ejercicio se podría haber probado de otra forma la segunda parte de la proposición anterior.

Sin embargo, cuando alguna de las sucesiones no es convergente, con la suma y el producto puede resultar una sucesión convergente o no, por ejemplo

- (n) no es convergente, $(-n)$ no es convergente, pero la suma sí lo es
- $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ no es convergente, $(0, 7, 0, 7, \ldots)$ no es convergente, y el producto sí es convergente
- (n) no es convergente, $(1/n^2)$ es convergente, y el producto sí es convergente
- (n^2) no es convergente, $(1/n)$ es convergente, y el producto no es convergente

Definición. Se dice que una sucesión (x_n) de números racionales es de Cauchy si

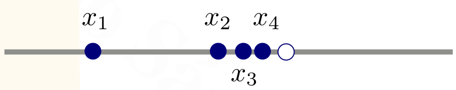
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \;:\; n, m > \nu \;\Rightarrow\; |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Dado cualquier valor $\varepsilon > 0$ todo lo pequeño que uno quiera (para valores grandes no se llega a nada importante), todos los términos x_n y x_m con $n, m > \nu$ están muy próximos entre sí, como mucho a distancia ε.

Proposición. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n) \to a$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon/2$ si $n > \nu$. Por tanto, si $p, q > \nu$ se tiene $|x_p - x_q| \leq |x_p - a| + |x_q - a| < \varepsilon$. $\square$

Sin embargo, existen sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no son convergentes. Por ejemplo, se puede considerar la sucesión $(x_n) = (1, 1'4, 1'41, 1'414, 1'4142, \ldots)$ cuyos términos verifican $(x_n^2) \to 2$. Esta sucesión es de Cauchy ya que sus términos verifican



$$\begin{array}{lcll} |x_p - x_q| & < & 1/10 & (\forall p, q > 1) \\ |x_p - x_q| & < & 1/10^2 & (\forall p, q > 2) \\ |x_p - x_q| & < & 1/10^3 & (\forall p, q > 3) \\ & & \ldots & \end{array}$$

También es de Cauchy la sucesión (x_n^2), ya que es convergente y converge a 2. Sin embargo (x_n) no converge en $\mathbb{Q}$, ya que su único posible límite es un número cuyo cuadrado es 2, y ese número no existe en $\mathbb{Q}$.

El conjunto $\mathscr{C}$ de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, o el conjunto $\mathscr{C}_o$ de sucesiones convergentes y el conjunto $\mathscr{A}$ de sucesiones acotadas, con las operaciones usuales de suma y multiplicación son subanillos del anillo $\mathscr{S}$ de todas las sucesiones en $\mathbb{Q}$. Además, se tienen las inclusiones (todas son estrictas)

$$\mathscr{C}_o \subset \mathscr{C} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{S}$$

Proposición. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Si (x_n) es de Cauchy, dado $\varepsilon = 1$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon = 1$ para $n, m \geq \nu$. Por tanto, $|x_n| < 1 + |x_\nu|$ para $n > \nu$ y la sucesión está acotada por $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_\nu|, 1 + |x_\nu|\}$. □

Ejercicio. Probar que si (x_n) no está acotada, es posible encontrar términos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tales que $|x_{n_1}| > 1000,\ |x_{n_2}| > 2000,\ |x_{n_3}| > 3000, \dots$ Esto hace que una sucesión así no pueda ser de Cauchy ni convergente.

Con este ejercicio se podría haber probado la proposición anterior, utilizando el contrarrecíproco.

Proposición. *La suma y producto de sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sean (x_n) e (y_n) sucesiones de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ existen ν_1 y ν_2 tales que $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ y $|y_p - y_q| < \varepsilon/2$ para $m, n > \nu_1$ y $p, q > \nu_2$. Por tanto para valores $n, m > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ se tiene $|x_n + y_n - (x_m + y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon$ y la sucesión $(x_n + y_n)$ es de Cauchy.
Para el producto es similar. Al ser sucesiones de Cauchy son acotadas: $|x_n| \leq N$ y $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se puede escribir

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |x_n - x_m| \cdot |y_n| + |y_n - y_m| \cdot |x_m| \\ &\leq |x_n - x_m| \cdot M + |y_n - y_m| \cdot N \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $(x_n y_n)$ es de Cauchy. □

Definición. Dos sucesiones de Cauchy de números racionales (x_n) e (y_n) se dice que son equivalentes, y se escribe $(x_n) \sim (y_n)$, si $(x_n - y_n) \to 0$.

Es fácil comprobar que esta relación es de equivalencia: reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto induce una clasificación $\mathscr{C}/\!\sim$ es el conjunto de sucesiones de Cauchy. A este conjunto cociente se le llama conjunto de los números reales y se denota $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathscr{C}/\!\sim$$

Cada número real es una clase de sucesiones Cauchy equivalentes de números racionales.