Ecuaciones Diferenciales Lineales

Manuel Fernández García-Hierro

23 de octubre de 2012

Ecuaciones diferenciales lineales. Introducción

- Este capítulo está dedicado casi en su totalidad a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Contiene además una introdución a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes y a los sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Ecuaciones diferenciales lineales. Introducción

- Este capítulo está dedicado casi en su totalidad a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Contiene además una introdución a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes y a los sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes.
- Las ecuaciones lineales de segundo orden se utilizan para modelar matemáticamente fenómenos físicos en los que se usa la segunda ley de la mecánica de Newton, tales como el movimiento de una partícula que cae bajo la acción de la gravedad, el movimiento de un péndulo, el de los planetas alrededor del Sol, o las oscilaciones en sistemas mecánicos y eléctricos.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma

$$g(t, x, x', x'') = 0, \tag{1}$$

donde

$$g\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad (t, x_1, x_2, x_3) \to g(t, x_1, x_2, x_3).$$

El concepto de solución

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que $x\colon I \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial si para todo $t \in I$,

- x es dos veces derivable,

El concepto de solución

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que $x\colon I \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial si para todo $t \in I$,

- x es dos veces derivable,
- $(t, x(t), x'(t), x''(t)) \in \mathcal{D}$,

El concepto de solución

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que $x\colon I \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial si para todo $t \in I$,

- x es dos veces derivable,
- $(t, x(t), x'(t), x''(t)) \in \mathcal{D}$,
- $g(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0$.

Ecuaciones explícitas

La ecuación diferencial está en forma explícita si

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{2}$$

donde $f \colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Existencia y unicidad de soluciones

- Cada $(t_0, x_0, x_0') \in D$ es una condición inicial.

Existencia y unicidad de soluciones

- Cada $(t_0, x_0, x_0') \in D$ es una condición inicial.
- El problema de valor inicial para $x'' = f(t, x, x')$ consiste en encontrar soluciones tales que $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0'$.

Existencia y unicidad de soluciones

- Cada $(t_0, x_0, x'_0) \in D$ es una condición inicial.
- El problema de valor inicial para $x'' = f(t, x, x')$ consiste en encontrar soluciones tales que $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$.
- Es decir, tales que su gráfica pase por el punto (t_0, x_0) y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto sea $x'(t_0) = x'_0$.

Estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden del tipo

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = a_3(t), \tag{3}$$

donde $a_i\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones definidas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden del tipo

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = a_3(t), \tag{3}$$

donde $a_i \colon I \to \mathbb{R}$ son funciones definidas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. En el caso en que $a_0(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, la ecuación se puede escribir en la forma

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t), \tag{4}$$

donde $a(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)}$, $b(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)}$ y $c(t) = \frac{a_3(t)}{a_0(t)}$.

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Sean $a(t), b(t), c(t)$ *continuas en el intervalo* I *y sea* $(t_0, x_0, x_0') \in I \times \mathbb{R}^2$. *Entonces existe una única solución* $x\colon I \to \mathbb{R}$ *de la ecuación*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

tal que $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0'$.

Existencia y unicidad de soluciones

- Es decir, existe una única solución del problema de valor inicial para la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$.

Existencia y unicidad de soluciones

- Es decir, existe una única solución del problema de valor inicial para la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$.
- Nótese que se afirma que la solución está definida en todo el intervalo I de definición de las funciones $a(t), b(t), c(t)$.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

- En todo lo que sigue se supondrá que las funciones $a(t), b(t), c(t)$ son continuas en el intervalo I y que cualquier solución está definida en el intervalo I, sin mencionarlo explícitamente.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

- En todo lo que sigue se supondrá que las funciones $a(t), b(t), c(t)$ son continuas en el intervalo I y que cualquier solución está definida en el intervalo I, sin mencionarlo explícitamente.
- La ecuación $x'' + a(t)x' + b(t) = 0$ se llama homogénea, en contraposición con la ecuación no homogénea o completa, que corresponde al caso $x'' + a(t)x' + b(t) = c(t)$ con $c(t)$ no idénticamente nula.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

- El conjunto de soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t) = c(t)$ es un subconjunto del espacio vectorial de las funciones de clase 2 sobre el intervalo I.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

- El conjunto de soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t) = c(t)$ es un subconjunto del espacio vectorial de las funciones de clase 2 sobre el intervalo I.
- Se probará que el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un subespacio vectorial y el de las no homogéneas un subespacio afín, ambos de dimensión 2.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

Proposición

Sean $x(t), y(t)$ *soluciones de*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{5}$$

y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\lambda x(t) + \mu y(t)$ *también es solución.*
Sea $x_p(t)$ *una solución de*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t).$$

Entonces $\{x_p(t) + x_h(t) : x_h(t) \text{ es solución de}(5)\}$ *es el espacio afín de todas las soluciones de la ecuación no homogénea.*

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

Demostración.

Sea $C^2(I)$ (resp. $C(I)$) el espacio de las funciones reales de clase 2 (resp. continuas) definidas en I. Defínase $L\colon C^2(I) \to C(I)$ mediante la fórmula $Lx = x'' + a(t)x' + b(t)x$. Entonces L es lineal.

Estructura algebraica del conjunto de soluciones

Demostración.

Sea $C^2(I)$ (resp. $C(I)$) el espacio de las funciones reales de clase 2 (resp. continuas) definidas en I. Defínase $L\colon C^2(I) \to C(I)$ mediante la fórmula $Lx = x'' + a(t)x' + b(t)x$. Entonces L es lineal.
Además $L(x_p + x_h) = c(t)$ y dadas dos soluciones x, y de la ecuación no homogénea, $L(x - y) = 0$. □

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

El siguiente resultado es un criterio para que dos soluciones sean linealmente independrendientes de aplicación muy sencilla.

Proposición

Sean x, y soluciones de la ecuación homogénea y sea $t_0 \in I$. Entonces x, y son linealmente independientes si y solo si los vectores $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0))$ son linealmente independientes.

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Demostración.

Es fácil comprobar que si $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0))$ son linealmente independientes, entonces x, y son linealmente independientes.

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Demostración.

Es fácil comprobar que si $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0))$ son linealmente independientes, entonces x, y son linealmente independientes. Recíprocamente, supóngase que x, y son linealmente independientes. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda(x(t_0), x'(t_0)) + \mu(y(t_0), y'(t_0)) = (0, 0)$. La solución $\lambda x(t) + \mu y(t)$ es la solución idénticamente nula por la unicidad de soluciones del problema de valor inicial. Por tanto $\lambda = \mu = 0$. □

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

La utilidad de este criterio se hace patente al demostrar la siguiente proposición.

Proposición

El subespacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea tiene dimensión 2.

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Demostración.

Sea $t_0 \in I$. Sea $x^1(t)$ (resp. $x^2(t)$) la solución de la ecuación homogénea tal que $(x^1(t_0), (x^1)'(t_0)) = (1, 0)$ (resp $(x^2(t_0), (x^2)'(t_0)) = (0, 1)$).

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Demostración.

Sea $t_0 \in I$. Sea $x^1(t)$ (resp. $x^2(t)$) la solución de la ecuación homogénea tal que $(x^1(t_0), (x^1)'(t_0)) = (1, 0)$ (resp $(x^2(t_0), (x^2)'(t_0)) = (0, 1)$). Entonces $x^1(t)$ y $x^2(t)$ son linealmente independientes.

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Demostración.

Sea $t_0 \in I$. Sea $x^1(t)$ (resp. $x^2(t)$) la solución de la ecuación homogénea tal que $(x^1(t_0), (x^1)'(t_0)) = (1, 0)$ (resp $(x^2(t_0), (x^2)'(t_0)) = (0, 1)$). Entonces $x^1(t)$ y $x^2(t)$ son linealmente independientes.

Sea $x(t)$ la solución del sistema homogéneo tal que $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0'$. Entonces $x_0 x^1(t) + x_0' x^2(t)$ también es solución y cumple la misma condición inicial. Por tanto $x(t) = x_0 x^1(t) + x_0' x^2(t)$ para todo $t \in I$. □

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

El wronskiano de dos soluciones. Sean $x, y \colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables. El wronskiano de x, y es por definición

$$W(x,y)(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix}.$$

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Proposición

Sean x, y soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ y $t_0 \in I$. Entonces

$$W(x,y)(t) = W(x,y)(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right). \qquad (6)$$

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Demostración.

Se probará que $W(x,y)'(t) = -a(t)W(x,y)(t)$, ya que integrando entre t_0 y t se obtiene (6).

$$\begin{aligned} W(x,y)'(t) &= x(t)y''(t) - x''(t)y(t) \\ &= x(t)(-a(t)y'(t) - b(t)y(t)) \\ &\quad - (-a(t)x'(t) - b(t)x(t))y(t) \\ &= -a(t)W(x,y)(t). \end{aligned}$$

$\square$

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Una consecuencia de la proposición anterior es que el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación homogénea, o es distinto de cero para todo $t \in I$ o es idénticamente nulo.

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Una consecuencia de la proposición anterior es que el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación homogénea, o es distinto de cero para todo $t \in I$ o es idénticamente nulo. Teniendo en cuenta la Proposición 2 se obtiene la

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Proposición

Sean x, y *soluciones de la ecuación* $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ *y* $t_0 \in I$*. Son equivalentes:*

- x, y *son linealmente independientes.*

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Proposición

Sean x, y *soluciones de la ecuación* $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ *y* $t_0 \in I$. *Son equivalentes:*

- x, y *son linealmente independientes.*
- *Los vectores* $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0))$ *son linealmente independientes.*

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Proposición

Sean x, y soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ y $t_0 \in I$. Son equivalentes:

- *x, y son linealmente independientes.*
- *Los vectores $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0))$ son linealmente independientes.*
- *$W(x, y)(t_0) \neq 0$.*

Caso homogéneo. El wronskiano de dos soluciones

Proposición

Sean x, y soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ y $t_0 \in I$. Son equivalentes:

- *x, y son linealmente independientes.*
- *Los vectores $(x(t_0), x'(t_0))$, $(y(t_0), y'(t_0))$ son linealmente independientes.*
- $W(x, y)(t_0) \neq 0$.
- $W(x, y)(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.