Ecuaciones Diferenciales

Manuel Fernández García-Hierro

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Este capítulo es la puerta de entrada a las ecuaciones diferenciales. Se introducen los conceptos de solución, campo de pendientes, problema de valor inicial e integral primera en el contexto más sencillo posible: el de las ecuaciones diferenciales escalares de primer orden. Se describen los métodos clásicos de integración mediante cuadraturas y se enuncian teoremas de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial para algunos tipos de ecuaciones diferenciales. Se introduce el concepto de sub (super) solución enfatizando el hecho de que en general no hay fórmulas para las soluciones. Por último la descripción de algunos modelos matemáticos en los que aparecen ecuaciones diferenciales corroboran que son una buena herramienta para entender procesos temporales.

1.1. Soluciones

Una ecuación diferencial (abreviadamente ED) es una ecuación que contiene derivadas de las incógnitas. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en ella. Este capítulo está dedicado al estudio de las ecuaciones diferenciales más simples: las ecuaciones de primer orden

$$x' = f(t, x), \tag{1.1}$$

donde $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, siendo D con interior no vacío.

Una solución de una ED es una función $x\colon I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, tal que para todo $t \in I$

(i) x es derivable en t,
(ii) $(t, x(t)) \in D$,
(iii) $x'(t) = f(t, x(t))$.

En un punto $(t, x(t))$ de la gráfica de una solución, la pendiente de la recta tangente que pasa por dicho punto es $f(t, x(t))$. Por tanto su ecuación es:

$$X - x(t) = x'(t)(T - t) = f(t, x(t))(T - t),$$

donde T, X son las coordenadas del plano.

1.1.1. Campo de pendientes

Sea la ED $x' = f(t, x)$. En cada $(t, x) \in D$ se considera la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $f(t, x)$. Si las coordenadas del plano son T, X, entonces dicha recta tiene por ecuación

$$X - x = f(t, x)(T - t).$$

Así se tiene definido un campo de pendientes en D. De este modo, las soluciones son las curvas, (derivables y con su gráfica incluida en D), tales que en cada punto de su gráfica su recta tangente tiene la pendiente asignada por el campo.

Mostraremos dos métodos para dibujar el campo de pendientes de una ED haciendo una selección de puntos (t, x) y marcando cada uno con un pequeño segmento de recta con pendiente $f(t, x)$.

1. *Método de la red.* Se considera una red rectangular de puntos (t, x) y en cada uno de ellos se dibuja un segmento de pendiente $f(t, x)$.

La orden de Mathematica

```
VectorPLot[{1,f},{t,tmin,tmax},{x,xmin,xmax},
VectorStyle->Arrowheads[0]]
```

dibuja el campo de pendientes de la ecuación $x' = f(t, x)$ en el rectángulo

$$R = [t\text{min}, t\text{max}] \times [x\text{min}, x\text{max}].$$

2. *Método de las isoclinas.* Consiste en encontrar las isoclinas, que son las curvas sobre las que el campo es constante. La ecuación de las isoclinas es $f(t, x) = c$. La orden de Mathematica

```
Plot[f,{x,xmin,xmax]}]
```

dibuja la gráfica de la función $f(x)$ entre los valores $(x\text{min}, x\text{max})$ y

```
ContourPlot[f==c1,f==c2, {t,tmin,tmax},{x,xmin,xmax}]
```

dibuja las isoclinas $f(t, x) = c1$ y $f(t, x) = c2$ en el rectángulo R.

Un hecho a destacar del dibujo de las soluciones sobre un campo de pendientes es que nos permite visualizar y examinar el comportamiento de soluciones para las que no hay fórmulas.

1.1.2. El problema de valor inicial

Dado $(t_0, x_0) \in D$, el problema de valor inicial consiste en determinar la existencia y, en su caso, la unicidad de soluciones x de (1.1) tales que $x(t_0) = x_0$. Es decir, soluciones de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Se dice que (1.2) es un problema de valor inicial y que (t_0, x_0) es una condición inicial.

La orden básica en Mathematica para resolver ecuaciones diferenciales simbólicamente es DSolve. Calcula todas las soluciones y resuelve el problema de valor inicial.

La orden

```
solucion = DSolve[ecuacion,x,t]
```
,

donde “ecuacion” tiene la forma

```
x'[t]==f(t,x[t]), x[t0]==x0
```

resuelve en algunos casos el problema de valor inicial. Para dibujar la gráfica de la solución en el intervalo $(t\min, t\max)$ se utiliza

```
Plot[Evaluate[x[t] /. solucion],{t,tmin,tmax} ]
```
.

Si se suprime la condición inicial, se obtienen todas las soluciones que Mathematica puede hallar. También se puede resolver numéricamente el problema de valor inicial en el intervalo $(t\min, t\max)$ mediante la orden

```
solucion = NDSolve[ecuacion,x,{t,tmin,tmax}]
```
.

1.2. Integración elemental

Esta parte presenta métodos que nos permiten obtener fórmulas para las soluciones. Es muy convenente y sencillo establecer hipótesis bajo las cuales los métodos de integración funcionan. También hay que aprovechar la oportunidad para enunciar los teoremas de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial, que serán probados en el capítulo 4.

1.2.1. Ecuaciones del tipo $x' = g(t)$

Sea $g\colon I \to \mathbb{R}$, continua en el intervalo I de $\mathbb{R}$. El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es el conjunto de primitivas de g.

Nótese que todas las soluciones están definidas en I, intervalo de definición de g, y que si $x(t)$ es solución, también lo es $x(t) + x_0$, donde $x_0 \in \mathbb{R}$.

La función $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(t)\, dt$ es la única solución del problema de valor inicial $x' = g(t)$, $x(t_0) = x_0$. Las órdenes

```
Integrate[g,t], Integrate[g,{t,tmin,tmax}]
```

calculan las integrales indefinida y definida de $g(t)$.

1.2.2. Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = f(x), \tag{1.3}$$

donde $f\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Empezamos con la siguiente observación elemental, aunque importante:

Proposición 1.1. *Si $x\colon I \to U$ es solución de* (1.3) *y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x(t+t_0)\colon -t_0 + I \to U$, también es solución, donde $-t_0 + I = \{-t_0 + t : t \in I\}$.*

Por lo tanto es suficiente estudiar el problema de valor inicial

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0 \in U. \tag{1.4}$$

El método de integración

Supóngase que $U = (x_1, x_2)$, que f es continua y distinta de cero en U. Se puede suponer que f es estrictamente positiva. Si $x(t)$ es solución, entonces

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1.$$

Integrando,

$$\int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\, dt = C + t,$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Si $H(x) = \int \frac{dx}{f(x)}$, entonces $H(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\, dt$. La función $H(x)$ tiene derivada estrictamente positiva y, por tanto, es estrictamente creciente y tiene función inversa, que llamamos H^{-1}. En consecuencia

$$H(x(t)) = t + C.$$

Despejando, $x(t) = H^{-1}(t + C)$. Si se elige $H(x) = \int_{x(0)}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$, entonces $x(0) = H^{-1}(C)$, de donde se deduce que $C = 0$. Recíprocamente, se comprueba mediante sustitución en la ecuación diferencial que $H^{-1}(t + C)$ es solución.

También se puede resolver el problema de valor inicial directamente integrando entre 0 y t.

Hemos probado la

Proposición 1.2. *Sea $f\colon (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Sea*

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)},$$

entonces $H^{-1}(t)$ es la única solución del problema de valor inicial (1.4).

Cuando f se anula en puntos de U la situación es algo más complicada. Nótese que la función constante $x(t) \equiv x_0 \in U$ es solución si y solo si $f(x_0) = 0$.

Definición 1.1. Se dice que $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio o crítico, si $f(x_0) = 0$.

Tal como ilustra la ecuación diferencial $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$, en general por cada condición inicial pasan infinitas soluciones de $x' = f(x)$, siendo f continua.

Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$, entonces el problema de valor inicial tiene una única solución. En efecto, se verifica el siguiente resultado cuya demostración la posponemos hasta el Capítulo 4.

Teorema 1.3. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(U)$, donde U es abierto. Para cada $x_0 \in U$ hay solución del problema de valor inicial* (1.4)*. Si $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de* (1.4)*, entonces coinciden en su intervalo común de definición.*

1.2.3. Ecuaciones de variables separadas

Las ecuaciones diferenciales de variables separadas tienen la forma

$$x' = g(t)f(x), \tag{1.5}$$

donde $f\colon (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ y $g\colon (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Una ecuación autónoma es de variables separadas con $g(t) \equiv 1$.

El método de integración

Sea la ED (1.5) donde $f\colon (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ y $g\colon (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Supóngase que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$; por ejemplo, $f(x) > 0$.

Si $x(t)$ es solución de (1.5) tal que $x(t_0) = x_0$, entonces

$$x'(t) = f(x(t))g(t).$$

Integrando,

$$\int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\, dt = \int g(t)\, dt + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Si $H(x)$ es una primitiva de $1/f(x)$, entonces $H(x(t)) = \int \frac{x'(t)}{f(x(t))}\, dt$. La función $H(x)$ tiene derivada estrictamente positiva y, por tanto, es estrictamente creciente. En consecuencia tiene función inversa, que se denota por H^{-1}. Con esta notación

$$H(x(t)) = G(t) + C,$$

donde $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$. Despejando, $x(t) = H^{-1}(G(t) + C)$.

Recíprocamente, se comprueba sustituyendo en la ecuación diferencial que $H^{-1}(G(t) + C)$ es solución.

Sea $(t_0, x_0) \in (t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$. Si se elige $H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$ y $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$, entonces $x_0 = x(t_0) = H^{-1}(C)$, de donde se deduce que $C = 0$.

También se puede resolver el problema de valor inicial directamente, integrando entre t_0 y t.

Hemos probado la

Proposición 1.4. *Sean $f\colon (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ y $g\colon (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ continuas. Supóngase que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Sea $(t_0, x_0) \in (t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$. Defínanse las funciones*

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}, \qquad G(t) = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt.$$

Entonces $H^{-1}(G(t))$ es la única solución del problema de valor inicial $x' = f(x)g(t)$, $x(t_0) = x_0$.

Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$, entonces el problema de valor inicial tiene una única solución. En efecto, se verifica el siguiente resultado cuya demostración también la posponemos hasta el Capítulo 4.

Teorema 1.5. *Sean $f \in \mathcal{C}^1(U_f)$, donde U_f es abierto, y $g\colon U_g \to \mathbb{R}$ continua. Para cada $(t_0, x_0) \in U_g \times U_f$ hay solución del problema de valor inicial. Si $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de* (1.4)*, entonces coinciden en su intervalo común de definición.*

1.2.4. Ecuaciones lineales

Si $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas definidas en el intervalo I, entonces

$$x' = a(t)x + b(t)$$

es una ED lineal de primer orden. Se llama homogénea si $b(t) \equiv 0$. La ED lineal homogénea $x' = a(t)x$ es de variables separadas y verifica las hipótesis del Teorema 1.5. La función idénticamente nula es solución y la solución que verifica $x(t_0) = x_0 \neq 0$ con $t_0 \in I$, se obtiene por integración elemental.

En este caso sencillo y sin hacer alusión al Teorema 1.5, se pueden obtener de una vez todas las soluciones, integrando del siguiente modo: La función $x\colon I \to \mathbb{R}$ es solución si y solo si para todo $t \in I$,

$$x'(t) - a(t)x(t) = 0.$$

Se busca una función $\mu(t) \neq 0$ para todo t, llamada factor integrante, tal que

$$(\mu(t)x(t))' = \mu'(t)x(t) + \mu(t)x'(t) = \mu(t)(x'(t) - a(t)x(t)) = 0.$$

De donde se deduce que

$$\mu(t) = e^{-A(t)},$$

donde $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$. Por tanto

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}x(t)\right) = e^{-A(t)}(x'(t) - a(t)x(t)) = 0.$$

Aplicando el Teorema del valor medio y despejando $x(t)$ se consigue la fórmula de la solución.

Obsérvese que el conjunto de todas las soluciones de $x' = a(t)x$ es un subespacio vectorial unidimensional de $\mathcal{C}^1(I)$.

Para resolver la ecuación diferencial lineal completa, $x' = a(t)x + b(t)$, considérese una solución $x\colon I \to \mathbb{R}$. Entonces para todos $t_0, t \in I$,

$$(x'(t) - a(t)x(t)) \exp(-A(t)) = \exp(-A(t))b(t).$$

Por tanto

$$(x(t) \exp(-A(t)))' = b(t) \exp(-A(t)).$$

Integrando entre t_0 y t y despejando $x(t)$ se obtiene

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

Derivando respecto de t en la fórmula anterior, se obtiene que $x(t)$ es solución de la EDL.

La discusión anterior se resume en el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial.

Teorema 1.6. *Sean $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en el intervalo I. Sea $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$. El problema de valor inicial*

$$x' = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

tiene la única solución definida en todo el intervalo I,

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

1.2.5. Cambio de variable

Hay ecuaciones diferenciales que se reducen mediante un “cambio de variable”, a ecuaciones de variables separadas o lineales. A continuación se presentarán algunos ejemplos de cambio de variable.

La ecuación de Bernoulli

Tiene la forma

$$x' = a(t)x^m + b(t)x, \tag{1.6}$$

donde a y b son continuas en el intervalo I y donde m es un entero positivo.

Si $m = 0$, es una ecuación diferencial lineal y si $m = 1$ una de variables separadas. Supóngase que $m \neq 0, 1$ y que hay a lo sumo una solución para el problema de valor inicial. Puesto que $x(t) \equiv 0$ es solución, cualquier otra solución es o estrictamente positiva, o estrictamente negativa en todo su intervalo de definición.

Se verifica que $x(t)$ es solución positiva de (1.6) si y solo si $y(t) = x^{1-m}(t)$ es solución de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{1}{1-m}y' = a + by.$$

Se dice que el cambio de variables $y = x^{1-m}$ transforma $x' = ax^m + bx$, $x > 0$ en $\frac{1}{1-m}x' = a + bx$.

Si $x < 0$, el cambio de variables $y = -x$ transforma la ecuación (1.6) en otra del mismo tipo, pero definida para $y > 0$.

La ecuación (1.6) también se puede reducir a dos de variables separadas buscando soluciones de la forma $x(t) = u(t)v(t)$.

La ecuación de Ricatti

Es de la forma

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{1.7}$$

donde se supone que $a, b, c\colon I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo I.

Si $a \equiv 0$, es lineal y si $c \equiv 0$ es de Bernoulli con $m = 2$. Pero a pesar de estas semejanzas formales, esta ecuación diferencial ofrece una diferencia esencial con las anteriores, ya que, en general, sus soluciones no pueden expresarse mediante un numero finito de cuadraturas (integraciones) sobre funciones elementales de sus coeficientes, hecho que fue probado por Liouville. Sin embargo, si se conoce una solución x_1, el cambio de variables $x = x_1 + y$ la reduce a una ecuación de Bernoulli.

Si se conocen dos soluciones x_1, x_2, el cambio de variables

$$u = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

transforma la ecuación de Ricatti en $u' + au(x_2 - x_1) = 0$ que es de variables separadas. Si se conoce una tercera solución x_3, entonces $\bar{u}' + a\bar{u}(x_2 - x_1) = 0$, donde $\bar{u} = (x_3 - x_1)/(x_3 - x_2)$. Así que

$$\frac{u'}{u} = \frac{\bar{u}'}{\bar{u}}$$

y, por tanto, $u = c\bar{u}$, donde $c \in \mathbb{R}$.

Sea la ecuación lineal de segundo orden $x'' = a(t)x' + b(t)x$. Con el fin de reducir el orden se efectua el cambio de variables $y = x'/x$. Entonces

$$y' + y^2 = ay + b,$$

que es una ecuación de Ricatti.

Ecuaciones homogéneas

Tienen la forma

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Mediante el cambio de variables $u = x/t$ o el cambio a polares $t = r\cos\theta$, $x = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, se transforma en una ecuación de variables separadas.

1.3. Integral primera de una ecuación definida implícitamente

Sea $g\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde A tiene interior no vacío. Una ecuacion diferencial de primer orden en forma implícita es una expresión del tipo

$$g(t, x, x') = 0. \tag{1.8}$$

Definición 1.2. Se dice que $x\colon I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ es solución de (1.8) si para todo $t \in I$,

(i) x es derivable en t,
(ii) $(t, x(t), x'(t)) \in A$,
(iii) $g(t, x(t), x'(t)) = 0$.

Definición 1.3. Una integral primera de (1.8) en el abierto $D' \subset \mathbb{R}^2$ es una función $u\colon D' \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $u \in \mathcal{C}^1(D')$,
(ii) $(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}) \neq (0, 0)$ en cada punto de D'.
(iii) Si $x\colon I \to \mathbb{R}$ es solución de (1.8) tal que $(t, x(t)) \in D'$ para todo $t \in I$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u(t, x(t)) = c, \qquad \text{para todo } t \in I.$$

De manera que las curvas de nivel $u(t, x) = c$ de la integral primera contienen a las gráficas de las soluciones.

Una integral primera de la ED $x' = a(t)x + b(t)$ es

$$u(x, t) = xe^{-\int a(t)\,dt} - \int b(t)e^{-\int^t a(s)\,ds}\,dt.$$

También es fácil comprobar que $u(t, x) = H(x) - G(t)$ es una integral primera de la ecuación $x' = g(t)f(x)$, donde $H(x)$ es una primitiva de $1/f(x)$ y $G(t)$ de $g(t)$.

1.3.1. Ecuaciones exactas

Sea $u(t, x)$ una función de dos variables que describe una superficie en el espacio tridimensional mediante $z = u(t, x)$. Las curvas de nivel de esta superficie son las funciones definidas implícitamente por

$$u(t, x) = c.$$

Derivando implícitamente la ecuación anterior se obtiene la siguiente ED satisfecha por las funciones cuyas gráficas están en dichas curvas de nivel.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)x' = 0,$$

que podemos reescribirla como

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0.$$

Ahora observamos que podemos usar la última ecuación para trabajar hacia atrás. Esto será posible para algunas EDs, que llamaremos exactas.

Definición 1.4. Se dice que la ecuación diferencial $M(t,x) + N(t,x)x' = 0$ es exacta en D, si existe $u(t,x)$ de clase 1 en D tal que $(u_t, u_x) \neq (0,0)$, $u_t = M$ y $u_x = N$ en D.

El siguiente resultado caracteriza a las ecuaciones diferenciales exactas.

Teorema 1.7 (Condición de exactitud)**.** *Sea la ED*

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0, \tag{1.9}$$

donde $M(t,x)$ y $N(t,x)$ son funciones diferenciables con continuidad en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces existe una función $u(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t,x) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = N(t,x)$$

si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Si $M(t,x)$ y $N(t,x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de R y la ecuación diferencial es exacta, la función $u(t,x)$ es una integral primera. Mediante el teorema de funciones definidas implícitamente, se obtiene una única solución del problema de valor inicial.

En efecto, supóngase que u está definida en el abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(t_0, x_0) \in D$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$. Considérese la ecuación

$$U(t,x) = u(t,x) - u(t_0,x_0) = 0.$$

Entonces $U \in \mathcal{C}^1(D)$, $U(t_0,x_0) = 0$ y $U_x(t_0,x_0) \neq 0$. Por tanto existe un rectángulo

$$R = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset D$$

y una única función derivable con continuidad $x\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ tal que

$$(t,x) \in R,\ U(t,x) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = x(t).$$

Evidentemente $x(t_0) = x_0$. Derivando respecto de t en $U(t, x(t)) = 0$, se obtiene que $x(t)$ es solución. La unicidad es consecuencia de la unicidad en el teorema de funciones implícitas.

Lo que sigue es un ejemplo que indica el método para encontrar una integral primera de una ecuación exacta con Mathematica.

```
 (* Resolución de ecuaciones diferenciales exactas *)
 m[t_, x_] = -1 + Exp[t x ] x + x Cos[t x];
 n[t_, x_] = 1 + Exp[t x] t + t Cos[t x];
(* Comprueba que la ecuación es exacta *)
 D[m[t, x], x] == D[n[t, x], t]
etapauno = Integrate[m[t, x], t]
etapados = D[etapauno + g[x], x]
etapatres = Solve[etapados == n[t, x], g'[x]]
etapacuatro = Integrate[g'[x] /. etapatres[[1]], x]
integralprimera = etapauno + etapacuatro
(* Dibuja las curvas de nivel de la integral primera*)
ContourPlot[integralprimera, {t, -Pi, Pi}, {x, -Pi, Pi},
Contours -> 20, PlotPoints -> 30, PlotRange -> {-10, 10},
ContourShading -> False]
```

1.3.2. Factores integrantes

Sea la ED $M(t,x)+N(t,x)x'=0$. Se denomina factor integrante a una función $\mu(t,x)\neq 0$ para todo (t,x) donde está definida y tal que

$$\mu M+\mu N x'=0$$

es una ED exacta.

Es fácil comprobar que $\mu(t,x)=e^{-\int a(t)\,dt}$ es un factor integrante para la EDL $x'=a(t)x+b(t)$.

En las hipótesis del Teorema 1.7 la función $\mu(t,x)$ es un factor integrante si y solo si

$$\mu_x M+\mu M_x=(\mu M)_x=(\mu N)_t=\mu_t N+\mu N_t,$$

donde el subíndice $_t$ (resp. $_x$) denota derivación parcial respecto de t (resp. x).

1.4. Desigualdades diferenciales

Puesto que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no pueden ser resueltas en términos de cuadraturas, es importante ser capaz de comparar soluciones desconocidas de una ecuación diferencial con soluciones conocidas de otra. De modo que en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, necesitaremos integrar desigualdades diferenciales tales como

$$x'\leq f(t,x) \quad \text{ó} \quad x'\geq f(t,x). \tag{1.11}$$

Este apartado se dedica a la comparación de las soluciones de (1.11) con las soluciones de (1.1).

Definición 1.5. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que la función $\alpha: I\to\mathbb{R}$ es subsolución de (1.1) si para todo $t\in I$, α es derivable en t, $(t,\alpha(t))\in D$ y

$$\alpha'(t)\leq f(t,\alpha(t)).$$

Es decir, α es subsolución si es solución de la primera inecuación de (1.11).

Cambiando el signo $\leq$ por $\geq$ en la definición de subsolución se obtiene el concepto de supersolución.

Una subsolución $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ de (1.1) que verifica $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$ para todo $t \in I$ se dice estricta. Cambiando $<$ por $>$ se define supersolución estricta.

Teorema 1.8. *Sea $x\colon I \to \mathbb{R}$ solución de (1.1).*

Si $\beta : I \to \mathbb{R}$ es una supersolución estricta de (1.1) y $t_0 \in I$, entonces

$$x(t_0) \leq \beta(t_0) \quad \textit{implica} \quad x(t) < \beta(t) \ \textit{ para todo } t > t_0,\ t \in I.$$

Analógamente, si $\alpha : I \to \mathbb{R}$ es una subsolución estricta de (1.1), entonces

$$x(t_0) \geq \alpha(t_0) \quad \textit{implica} \quad x(t) > \alpha(t) \ \textit{ para todo } t > t_0,\ t \in I.$$

Hay una versión izquierda (para $t \leq t_0$), con enunciado obvio.

Si la función $f(t, x)$ que define la ecuación diferencial es lipschitziana respecto de x, en el resultado anterior se pueden sustituir las desigualdades estrictas por desigualdades no estrictas, aunque la demostración es algo más difícil. Ver [2, Capítulo 1].

1.5. Modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales

Desintegración radiactiva

Ver [3]. Se sabe que ciertos elementos o sus isótopos son inestables, desintegrándose en isótopos de otros elementos mediante emisión de partículas α, partículas β o fotones. Se dice que tales elementos son radiactivos. Por ejemplo, un átomo de radio se desintegra en un átomo de radon, emitiendo una partícula α en el proceso, $^{226}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Rn}$. La desintegración de un único núcleo radiactivo es un proceso aleatorio, y el tiempo exacto de desintegración no puede ser determinado con exactitud. Sin embargo pueden hacerse afirmaciones concretas en el proceso de desintegración de un gran número de átomos radiactivos.

La cuestión es:

¿Cuántos núcleos hay en una muestra de un elemento radiactivo en el instante de tiempo t?

Nuestro sistema es la colección de núcleos radiactivos en la muestra, y lo único que nos interesa medir es el número de núcleos radiactivos en el tiempo t. No es obvio, sin embargo, cuál es la ley de desintegración. Hay numerosas evidencias experimentales que sugieren que la siguiente ley es cierta:

En una muestra que contiene un gran número de núcleos radiactivos, la disminución del número de núcleos radiactivos en un intervalo de tiempo es directamente proporcional a la longitud del intervalo de tiempo y al número de núcleos presente en el tiempo inicial.

Si denotamos por $x(t)$ el número de núcleos radiactivos en el tiempo t y el intervalo de tiempo por Δt, la ley se traduce en

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

donde a es la constante estrictamente positiva de proporcionalidad.

El modelo matemático anterior para la ley nos ayuda a darle su justo valor. Por una parte $x(t)$ y $x(t + \Delta t)$ deben ser enteros, pero $-a\Delta t$ puede no ser un entero. Si queremos mantener la ley debemos idealizar el fenómeno real suponiendo que $x(t)$ es una cantidad continua. Por ejemplo, midiendo $x(t)$ en gramos. Incluso siendo $x(t)$ continuo la ley pudiera no ser cierta para valores de t grande, ya que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Además la ley no tiene sentido si Δt es tan pequeño que ningún núcleo se desintegra en el intervalo de tiempo Δt. El fallo de la ley para intervalo grandes de tiempo puede ser ignorado, porque sólo estamos interesados en un comportamiento local (en el tiempo). Las dificultades con t pequeño son más preocupantes. Sólo podemos esperar que el procedimiento matemático que se presenta a continuación nos conduzca a un modelo matemático en la que la $x(t)$ teórica sea razonablemente próxima a la experimental.

Si dividimos ambos lados de

$$x(t + \Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

por Δt y tomamos límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$x'(t) = -ax(t).$$

Así que podemos decir:

La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible.

La vida media del elemento radiactivo, $t_{1/2}$, es el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de los núcleos radiactivos se desintegre. La constante a se puede calcular conociendo la vida media.

Determinación de la edad mediante el ^{14}C

Ver [3]. Las células vivas absorben carbono directa o indirectamente del dióxido de carbono en el aire. Algunos de los átomos del carbono en este CO_2 son la forma radioactiva: ^{14}C, en lugar del común ^{12}C, producido por las colisiones de los rayos cósmicos (neutrones) con el nitrógeno de la atmosfera. Los núcleos de ^{14}C se desintegran convirtiéndose en núcleos de nitrógeno y emitiendo partículas β. Entonces todos los seres vivos, o seres que estuvieron vivos contienen algunos núcleos de carbono radiactivo, ^{14}C. En los años 1960, Willard Libby demostró que una medición cuidadosa de la tasa de desintegración del ^{14}C en una muestra de tejido muerto puede usarse para determinar el número de años desde que murió.

Se considera un problema específico para concentrar nuestra atención:

Se utilizó un contador Geiger para medir la tasa de desintegración de ^{14}C en fragmentos de carbón vegetal encontrados en la gruta de Lascaux en Francia, donde hay pinturas prehistóricas. El contador registró 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono, mientras que para tejido vivo el número de desintegraciones, medido en 1950, fue de 13,5 por minuto y gramo de carbón. ¿Hace cuántos años se formó el carbón vegetal y, presumiblemente, fueron dibujadas las pinturas?

En cualquier organismo vivo la razón del ^{14}C al ^{12}C es la misma que en el aire. Si la razón en el aire es constante en el tiempo y en el lugar, entonces también lo será en un tejido vivo. Después de la muerte del organismo, la absorción de CO_2 se detiene y sólo sigue la desintegración radioactiva. La vida media del ^{14}C es de 5568 ± 30 años (valor internacionalmente aceptado desde 1968).

Sea $x(t)$ la cantidad de ^{14}C por gramo de carbón en el tiempo t (medido en años) en la muestra de carbón vegetal. Sea $t = 0$ el tiempo actual y supongase que $T < 0$ es el tiempo en el que el tejido de la muestra murió. Entonces $x(t) \equiv x_T$ para todo $t \leq T$. Para $t > T$ los núcleos de ^{14}C se desintegran siguiendo la ecuación diferencial

$$x'(t) = -ax(t),$$

donde la constante a se calcula a través de la vida media del ^{14}C.

Sabemos que el carbón de la muestra presenta 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón y que en un tejido vivo hay 13,5 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón. Sabiendo que el número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional a la velocidad de desintegración $x'(t)$, se calcula T.

La ley de enfriamiento de Newton

Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a temperatura T se coloca en un medio que se encuentra a la temperatura constante T_M, entonces la razón de cambio de T es proporcional a la diferencia de temperatura $T - T_M$. Esto da lugar a la ED autónoma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M), \qquad k < 0.$$

que se resuelve por integración elemental.

Secreción de hormonas

La secreción de hormonas suele ser una actividad periódica. Si una hormona es segregada en un ciclo de 24 hr, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar por medio del problema de valor inicial

$$x' = \alpha - \beta \cos \frac{\pi t}{12} - kx, \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(t)$ es la cantidad de la hormona contenida en la sangre en el instante t, α es la velocidad de secreción media, β la cantidad de variación en la secreción, y k una constante positiva que representa la velocidad a la cual el cuerpo elimina la hormona de la sangre. La ecuación diferencial es de tipo lineal y se integra elementalmente.

Un problema de mezclas

Considere un tanque que contiene V litros de agua, dentro del cual una solución de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de v_e l/min. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de v_s l/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de c_e g/l y $x(t)$ es la cantidad de sal en gramos que hay en el tanque en el tiempo t, entonces cumple la ecuación diferencial lineal

$$x'(t) = v_e c_e - v_s \frac{x(t)}{V + (v_e - v_s)t}.$$

Evolución temporal de poblaciones

Sea $p(t)$ la población en el tiempo t. Si bien la población es siempre un número entero, normalmente es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $p(t)$ es una función continua.

Considérese una población de bacterias que se reproducen mediante división celular simple, de modo que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Esta hipótesis es consistente con las observaciones de crecimiento de bacterias. Mientras exista espacio suficiente y un buen suministro de alimento para las bacterias, se puede suponer también que la tasa de mortalidad es cero. (Recuerde que en la división celular la célula madre no muere, sino que se convierte en dos nuevas células). Un modelo matemático para la población de bacterias que siga las hipótesis anteriores viene definido por la ecuación autónoma

$$p'(t) = ap(t), \qquad a > 0.$$

En el estudio de poblaciones humanas, la premisa de que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño parece razonable. Sin embargo la hipótesis de una tasa de mortalidad nula es, desde luego, errónea. Suponiendo que las personas fallecen por causas naturales, se podria esperar que la tasa de mortalidad fuera también proporcional al tamaño de la población.

Un modelo matemático para la población teniendo en cuenta los factores anteriores es

$$p'(t) = (a - b)p(t), \qquad a, b > 0.$$

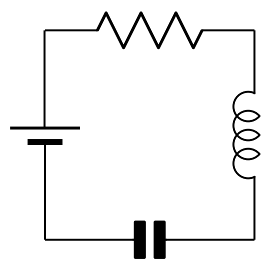
¿Qué se puede decir de las muertes prematuras debidas a desnutrición, servicios médicos inadecuados, enfermedades contagiosas, crimenes violentos, etc.? Puesto que estos factores implican la competencia dentro de la población, se puede suponer que la tasa de mortalidad debida a estos factores es proporcional al número de interacciones bipartitas.

Un modelo matemático para la población donde se tenga en cuenta la tasa de mortalidad debida a competencias entre la misma especie es

$$p'(t) = p(t)(a - bp(t)), \qquad a, b > 0.$$

Circuitos eléctricos

Se deducen las ED lineales que rigen el flujo de la electricidad en el circuito simple que se muestra en la figura que sigue.



Este circuito consta de cuatro elementos, cuya acción se puede comprender con facilidad, sin necesidad de tener conocimientos especiales de electricidad.

A. Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E –una pila o un generador– impulsa una carga eléctrica y produce una corriente I. Dependiendo de la naturaleza de la fuente, E puede ser una constante o función del tiempo.

B. Un resistor de resistencia R que se opone a la corriente, reduce la fuerza electromotriz en una magnitud $E_R = RI$. Esta ecuación se conoce como ley de Ohm.

C. Un inductor de inductancia L, que se opone a cualquier cambio de la corriente, produciendo una disminución de la fem en una magnitud

$$E_L = L\frac{dI}{dt}.$$

D. Un condensador de capacitancia C, almacena una carga Q. La carga acumulada por el condensador se opone a la entrada de una carga adiccional y la disminución de la fem que se produce en este caso es

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Además, puesto que la corriente es la rapidez de flujo de la carga y, en consecuencia, el índice al que la carga aumenta en el condensador, se tiene

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Estos elementos del circuito actúan de acuerdo a la ley de Kirchhoff, que indica que la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es igual a cero. Es decir $E - E_R - E_L - E_C = 0$ o

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0,$$

que se puede escribir como

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E. \tag{1.12}$$

Dependiendo de las circunstancias, se puede considerar ya sea I o Q como la variable dependiente. En el primer caso se elimina Q, derivando (1.13) con respecto de t y sustituyendo dQ/dt por I:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

En el segundo caso se sustituye I por dQ/dt:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E.$$

Ambas son ecuaciones diferenciales de segundo orden que se resolverán en el Capítulo 2. Cuando no hay condensador se obtiene la ED de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

1.6. Ejercicios

1. Resuelva las EDs

   a) $x' = x^2 - 1$.

   b) $x' = x(x-1)(x+1)$.

   c) $x' = 1 + x^2$.

   d) $x' = 3x^{2/3}$.

2. Resuelva la ED $2tx'(t^2 + x^2) = x(x^2 + 2t^2)$.

3. (Robert L. Borrelli- Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632)

   Se sabe que ciertos elementos o sus isótopos son inestables, desintegrándose en isótopos de otros elementos mediante emisión de partículas α, partículas β o fotones. Se dice que tales elementos son radiactivos. Por ejemplo, un átomo de radio se desintegra en un átomo de radon, emitiendo una partícula α en el proceso, $^{226}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Rn}$. La desintegración de un único núcleo radiactivo es un proceso alatorio, y el tiempo exacto de desintegración no puede ser determinado con exactitud. Sin embargo pueden hacerse afirmaciones concretas en el proceso de desintegración de un gran número de átomos radiactivos.

La cuestión es:

¿Cuántos núcleos hay en una muestra de un elemento radiactivo en el instante de tiempo t?

Nuestro sistema es la colección de núcleos radiactivos en la muestra, y lo único que nos interesa medir es el número de núcleos radiactivos en el tiempo t. No es obvio, sin embargo, cuál es la ley de desintegración. Hay numerosas evidencias experimentales que sugieren que la siguiente ley es cierta:

En una muestra que contiene un gran número de núcleos radiactivos, la disminución del número de núcleos radiactivos en un intervalo de tiempo es directamente proporcional a la longitud del intervalo de tiempo y al número de núcleos presente en el tiempo inicial.

Si denotamos por $x(t)$ el número de núcleos radiactivos en el tiempo t y el intervalo de tiempo por Δt, la ley se traduce en

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

donde a es la constante estrictamente positiva de proporcionalidad.

El modelo matemático anterior para la ley nos ayuda a darle su justo valor. Por una parte $x(t)$ y $x(t+\Delta t)$ deben ser enteros, pero $-a\Delta t$ puede no ser un entero. Si queremos mantener la ley debemos idealizar el fenómeno real suponiendo que $x(t)$ es una cantidad continua. Por ejemplo, midiendo $x(t)$ en gramos. Incluso siendo $x(t)$ continuo la ley pudiera no ser cierta para valores de t grande, ya que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Además la ley no tiene sentido si Δt es tan pequeño que ningún núcleo se desintegra en el intervalo de tiempo Δt. El fallo de la ley para intervalo grandes de tiempo puede ser ignorado, porque sólo estamos interesados en un comportamiento local (en el tiempo). Las dificultades con t pequeño son más preocupantes. Sólo podemos esperar que el procedimiento matemático que se presenta a continuación nos conduzca a un modelo matemático en la que la $x(t)$ teórica sea razonablemente próxima a la experimental.

Si dividimos ambos lados de

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t,$$

por Δt y tomamos límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$x'(t) = -ax(t).$$

Así que podemos decir:

La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible.

Resolver la ecuación diferencial.

La vida media del elemento radiactivo, $t_{1/2}$, es el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de los núcleos radiactivos se desintegre.

Calcule la constante a conociendo la vida media.

4. La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Supóngase que en 25 años el 1,1 % de una cierta cantidad de radio se ha desintegrado. ¿Cuál es la vida media del radio?

5. Si la vida media de una sustancia radiactiva es 1000 años, ¿qué fracción de ella permanece después de 100 años?

6. Con el tiempo medido en años, el valor de a en $x'(t) = -ax(t)$ para el cobalto–60 es aproximadamente 0.13. Estime la vida media del cobalto–60.

7. **Determinación de la edad mediante el ^{14}**C (Robert L. Borrelli-Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632).

   Las células vivas absorben carbono directa o indirectamente del dióxido de carbono en el aire. Algunos de los átomos del carbono en este CO_2 son la forma radioactiva: ^{14}C, en lugar del común ^{12}C, producido por las colisiones de los rayos cósmicos (neutrones) con el nitrógeno de la atmosfera. Los núcleos de ^{14}C se desintegran convirtiéndose en núcleos de nitrógeno y emitiendo partículas β. Entonces todos los seres vivos, o seres que estuvieron vivos contienen algunos núcleos de carbono radiactivo, ^{14}C. En los años 1960, Willard Libby demostró que una medición cuidadosa de la tasa de desintegración del ^{14}C en una muestra de tejido muerto puede usarse para determinar el número de años desde que murió.

   Vamos a considerar un problema específico para concentrar nuestra atención:

   Se utilizó un contador Geiger para medir la tasa de desintegración de ^{14}C en fragmentos de carbón vegetal encontrados en la gruta de Lascaux en Francia, donde hay pinturas prehistóricas. El contador registró 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono, mientras que para tejido vivo el número de desintegraciones, medido en 1950, fue de 13,5 por minuto y gramo de carbón. ¿Hace cuántos años se formó el carbón vegetal y, presumiblemente, fueron dibujadas las pinturas?

   En cualquier organismo vivo la razón del ^{14}C al ^{12}C es la misma que en el aire. Si la razón en el aire es constante en el tiempo y en el lugar, entonces también lo será en un tejido vivo. Después de la muerte del organismo, la absorción de CO_2 se detiene y sólo sigue la desintegración radioactiva.

La vida media del ^{14}C es de 5568 ± 30 años (valor internacionalmente aceptado desde 1968).

Sea $x(t)$ la cantidad de ^{14}C por gramo de carbón en el tiempo t (medido en años) en la muestra de carbón vegetal. Sea $t = 0$ el tiempo actual y supongase que $T < 0$ es el tiempo en el que el tejido de la muestra murió. Entonces $x(t) \equiv x_T$ para todo $t \leq T$. Para $t > T$ los núcleos de ^{14}C se desintegran siguiendo la ecuación diferencial

$$x'(t) = -ax(t),$$

donde la constante a se calcula a través de la vida media del ^{14}C.

Sabemos que el carbón de la muestra presenta 1,69 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón y que en un tejido vivo hay 13,5 desintegraciones por minuto y por gramo de carbón. Sabiendo que el número de desintegraciones por unidad de tiempo es proporcional a la velocidad de desintegración $x'(t)$, calcular T.

8. Un arqueólogo ha encontrado una concha que contiene el 60 % del ^{14}C de una concha viva. ¿Cuál es su edad?

9. La velocidad de desintegración del elemento radiactivo radio es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Se supone que en el instante de tiempo t_0 hay R_0 gramos de radio. Se desea saber cuál es la cantidad de radio en cada instante de tiempo.

10. Una máquina quita la nieve uniformemente, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la cantidad de nieve. Se supone que nieva con regularidad, que a las 12 a.m. comienza a funcionar la máquina, que recorre en la primera hora 2Km. y en la segunda hora 1Km. ?A qué hora comenzó a nevar?

11. Un objeto cae por el aire hacia la Tierra. Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el objeto son la gravedad y la resistencia del aire (que se supone proporcional a la velocidad), determine la velocidad en función del tiempo.

12. Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a temperatura T se coloca en un medio que se encuentra a la temperatura constante T_M, entonces la razón de cambio de T es proporcional a la diferencia de temperatura $T - T_M$. Esto da lugar a la ED

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M), \qquad k < 0.$$

Resuelva la ED para T.

Un termómetro que marca 100 grados se coloca en un medio que se encuentra a una temperatura constante de 70 grados. Al cabo de 6 min., el termómetro marca 80 grados. ¿Cuál es la lectura al cabo de 20 min.?

13. La secreción de hormonas suele ser una actividad periódica. Si una hormona es segregada en un ciclo de 24 hr, entonces la razón de cambio del nivel de la hormona en la sangre se puede representar por medio del problema de valor inicial

$$x' = \alpha - \beta \cos \frac{\pi t}{12} - kx, \quad x(0) = x_0,$$

donde $x(t)$ es la cantidad de la hormona contenida en la sangre en el instante t, α es la velocidad de secreción media, β la cantidad de variación en la secreción, y k una constante positiva que representa la velocidad a la cual el cuerpo elimina la hormona de la sangre. Si $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ y $x_0 = 10$, encuentre $x(t)$.

14. Determine las curvas tales que el segmento de tangente comprendido entre los ejes coordenados se divide por la mitad en los puntos de contacto.

15. Halle las curvas que verifican que la distancia de la perpendicular desde el origen de coordenadas a la tangente a la curva es igual a la abcisa del punto de contacto.

16. Una trayectoria ortogonal a una familia de curvas es una curva que corta todas las curvas de la familia en ángulo recto.

    Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de elipses $t + mxx' = 0$.

17. Calcule el perfil de unas tijeras que corten bajo ángulo constante.

18. Resuelva las EDs

$$x' = -2x + t^2 + 2t, \qquad x' = x \ln 2 + 2^{\operatorname{sen} t}(\cos t - 1) \ln 2.$$

19. Encuentre una solución constante de la ED $x' - (1 - 2t)x + x^2 = 2t$ y entonces calcule todas sus soluciones.

20. Considere un tanque que contiene 1000 l de agua, dentro del cual una solución salada de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 l/min. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de 6 l/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 10 g/l, determine cuándo será de 5 g/l la concentración de sal en el tanque.

21. En el problema anterior, supóngase que la salmuera sale del tanque a razón de 5 l/m en lugar de 6 l/m, con todas las demás condiciones iguales. Determine la concentración de sal en el tanque en función del tiempo.

22. Una solución de salmuera fluye a razón constante de 8 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 l de solución de salmuera en la cual están disueltos 5 Kg de sal. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior con la misma rapidez. Si la

concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 0,5 Kg/l, determine la cantidad de sal presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el tanque el valor de $0,2$ Kg/l?

23. Una solución de salmuera fluye a razón constante de 4 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 l de agua. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior a razón de 3 l/m. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de $0,2$ Kg/l, determine la cantidad de sal contenida en el tanque al cabo de t minutos. ¿En qué momento la concentración de sal contenida en el tanque será de $0,1$ Kg/l ?

24. Una solución de ácido nítrico fluye a razón constante de 6 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 l de una solución de ácido nítrico al 0,5 %. La solución contenida en el tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior del mismo a razón de 8 l/m. Si la solución que entra en el tanque es de 20 % de ácido nítrico, determine la cantidad de ácido nítrico presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿En qué momento el porcentaje de ácido nítrico contenido en el tanque será del 10 % ?

25. Una piscina cuyo volumen es de 45.000 l contiene agua con el 0.01 % de cloro. Empezando en $t = 0$ desde la central depuradora se bombea agua, que contiene 0.001 % de cloro, hacia el interior de la piscina a razón de 25 l/m. El agua de la piscina fluye al exterior a la misma velocidad. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la piscina al cabo de una hora? ¿Cuándo tendrá el agua de la piscina 0.002 % de cloro?

26. Sea $p(t)$ la población en el tiempo t. Si bien la población es siempre un número entero, normalmente es tan grande que se introduce un error muy pequeño al suponer que $p(t)$ es una función continua.

    Considérese una población de bacterias que se reproducen mediante división celular simple, de modo que la tasa de crecimiento es proporcional a la población presente. Esta hipótesis es consistente con las observaciones de crecimiento de bacterias. Mientras exista espacio suficiente y un buen suministro de alimento para las bacterias, se puede suponer también que la tasa de mortalidad es cero. (Recuerde que en la división celular la célula madre no muere, sino que se convierte en dos nuevas células). Establezca un modelo matemático para la población de bacterias que siga las hipótesis anteriores.

27. En el estudio de poblaciones humanas, la premisa de que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño parece razonable. Sin embargo la hipótesis de una tasa de mortalidad nula es, desde luego, errónea. Suponiendo que las personas fallecen por causas naturales, se podria esperar que la tasa de mortalidad fuera también proporcional al tamaño de la población.

Establezca un modelo matemático para la población teniendo en cuenta los factores anteriores. Resuelva la ED del modelo.

28. ¿Qué se puede decir de las muertes prematuras debidas a desnutrición, servicios médicos inadecuados, enfermedades contagiosas, crimenes violentos, etc.? Puesto que estos factores implican la competencia dentro de la población, se puede suponer que la tasa de mortalidad debida a estos factores es proporcional al número de interacciones bipartitas.

    Establezca un modelo matemático para la población donde se tenga en cuenta la tasa de mortalidad debida a competencias entre la misma especie. Resuelva la ED del modelo.

29. La acuicultura trata del cultivo de plantas y animales acuáticos. En el ejemplo que aqui se considera se cria un lote de tencas en una charca. Se desea determinar el momento óptimo para capturar a los peces de modo que el coste por kilo sea minimo.

    Una ED que describe el crecimiento de los peces es

$$\frac{dW}{dt} = KW^{\alpha}, \tag{*}$$

    donde $W(t)$ es el peso del pez en el tiempo t, y K y α son constantes de crecimiento determinadas empiricamente. Es una suposición común modelar la tasa de crecimiento o tasa metabólica por medio de un término proporcional a W^{α}. Los biólogos llaman ecuación alométrica a la ecuación anterior. Dicha ecuación puede apoyarse mediante argumentos razonables tales como el de una tasa de crecimiento dependiente del área de la superficie del intestino (la cual varia en forma proporcional a $W^{2/3}$), o bien dependiente del volumen del animal (el cual varia en forma proporcional a W).

    (a) Resuelva la ED (*) cuando $\alpha \neq 1$.

    (b) La solución obtenida en la parte (a) no está acotada, pero en la práctica existe un cierto peso máximo para el pez, W_M. Esta cota superior puede incluirse en la ED que describe el crecimiento introduciendo una variable adimensional, que puede variar entre 0 y 1 y que contiene un parámetro adimensional μ que se determina empiricamente. Es decir se supone que

$$\frac{dW}{dt} = KW^{\alpha}S, \tag{**}$$

    donde $S = 1 - (W/W_M)^{\mu}$.

    Resuelva la ED (**) cuando $K = 12$, $\alpha = 2/3$, $\mu = 1/3$, $W_M = 5$ Kg y $W(0) = 0{,}1$ Kg. Las constantes están dadas para t medido en meses.

    (c) La ED que describe el costo total en euros $C(t)$ para criar una tenca durante t meses tiene un término constante K_1 que especifica el costo mensual (debido a gastos tales como intereses, depreciación y mano de obra), y una segunda constante K_2 que multiplica a la tasa de crecimiento (debido a que la cantidad de alimento consumido por el pez es aproximadamente proporcional a la tasa de crecimiento). Esto es

$$\frac{dC}{dt} = K_1 + K_2 \frac{dW}{dt}. \qquad (***)$$

Resuelva la ED (***) cuando $K_1 = 0{,}5$, $K_2 = 0{,}1$, $C(0) = 100$ pesetas y $W(t)$ es como se determinó en la parte (b).

(d) Trace la gráfica de la curva obtenida en la parte (b), que representa el peso del pez en función del tiempo. A continuación trace la gráfica de la curva obtenida en la parte (c), que representa el costo total de la crianza del pez en función del tiempo.

(e) Para determinar el tiempo óptimo para capturar el pez, trace la gráfica del cociente $C(t)/W(t)$. Dicho cociente representa el coste total por Kg en función del tiempo. Cuando este cociente alcanza su minimo —es decir, cuando el coste total por Kg es el más bajo posible—, es el momento óptimo para capturar el pez. Determine dicho momento óptimo redondeado al mes más cercano.

30. Un hombre parte del origen y camina con velocidad constante por el eje OX. Su perro sale del punto $(1, 0)$ con velocidad doble y mirando siempre a su dueño. Halle la ED de la trayectoria, la trayectoria del perro y el punto de encuentro.

31. Encuentre la forma de un espejo curvo de forma que la luz de una fuente en el origen se refleje en un haz de rayos paralelo al eje t.

32. Encuentre la forma asumida por una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga con su propio peso.

33. Se arrastra un punto P a lo largo del plano tx por medio de una cuerda PT de longitud a. Si T parte del origen y se desplaza a lo largo del eje positivo x y si P parte de $(a, 0)$, ¿Cuál será la trayectoria de P? Esta curva se llama *tractiz* (del latin tractum, que significa tirar).

34. El eje y y la recta $x = c$ son las orillas de un rio cuya corriente tiene una velocidad uniforme a, en la dirección negativa del eje y. Una barca entra en el rio en el punto $(c, 0)$ y va directamente hacia el origen con una velocidad b en relación al agua. ¿Cuál es la trayectoria de la barca?

35. Encuentre las soluciones de la ED $t + xx' = 0$.

36. Encuentre las soluciones de la ED

$$\frac{t + xx'}{\sqrt{t^2 + x^2}} + \frac{tx' - x}{t^2} = 0.$$

37. Resuelva la ED
$$t(2t^2 + x^2) + x(t^2 + 2x^2)x' = 0.$$

38. Resuelva la ED
$$\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{x} + t\right) + \left(x - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{x^2}\right) x' = 0.$$

39. Resuelva la ED
$$(1 - t^2 x) + t^2(x - t)x' = 0,$$
sabiendo que tiene un factor integrante que sólo depende de t.

40. Resuelva la ED
$$t + xx' + t(tx' - x) = 0$$
buscando un factor integrante dependiente de $t^2 + x^2$.

41. Pruebe que si μ y ν son factores integrantes esencialmente distintos (i.e. $\mu_x \nu_t - \mu_t \nu_x \neq 0$), entonces μ/ν es la integral primera.

42. Sea la ED $(2t - t^2 - x^2) + 2xx' = 0$.

    (a) Encuentre un factor integrante que solo dependa de t, e integre la ED.

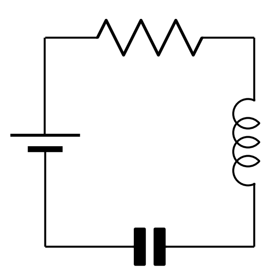
    (b) Encuentre un factor integrante que solo dependa de $t^2 + x^2$, e integre la ED.

    (c) Halle una integral primera de la ED sin cuadratura.

43. Si $M(t, x) = xf(tx)$ y $N(t, x) = tg(tx)$, demuestre que $1/(Mt - Nx)$ es un factor integrante de la ED $M + Nx' = 0$.

44. Si M y N son funciones homogéneas del mismo grado, pruebe que $1/(tM + xN)$ es un factor integrante de la ED $M + Nx' = 0$.

45. **Circuitos eléctricos simples**. Se deducen las ED lineales que rigen el flujo de la electricidad en el circuito simple que se muestra en la figura que sigue.



Este circuito consta de cuatro elementos, cuya acción se puede comprender con facilidad, sin necesidad de tener conocimientos especiales de electricidad.

A. Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E –una pila o un generador– impulsa una carga eléctrica y produce una corriente I. Dependiendo de la naturaleza de la fuente E puede ser una constante o función del tiempo.

B. Un resistor de resistencia R que se opone a la corriente, reduce la fuerza electromotriz en una magnitud $E_R = RI$. Esta ecuación se conoce como ley de Ohm.

C. Un inductor de inductancia L, que se opone a cualquier cambio de la corriente, produciendo una disminución de la fem en una magnitud

$$E_L = L\frac{dI}{dt}.$$

D. Un condensador de capacitancia C, almacena una carga Q. La carga acumulada por el condensador se opone a la entrada de una carga adicional y la disminución de la fem que se produce en este caso es

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Además, puesto que la corriente es la rapidez de flujo de la carga y, en consecuencia, el indice al que la carga aumenta en el condensador, se tiene

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Estos elementos del circuito actúan de acuerdo a la ley de Kirchhoff, que indica que la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es igual a cero. Es decir $E - E_R - E_L - E_C = 0$ o

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0,$$

que se puede escribir como

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E. \tag{1.13}$$

Dependiendo de las circunstancias, se puede considerar ya sea I o Q como la variable dependiente. En el primer caso se elimina Q, derivando (1.13) con respecto de t y sustituyendo dQ/dt por I:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

En el segundo caso se sustituye I por dQ/dt:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E.$$

Cuando no hay condensador se obtiene la ED de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Resuélvala.

46. La ED de segundo orden tiene la forma $f(t, x, x', x'') = 0$. Algunos tipos especiales de EDs de segundo orden se pueden resolver por métodos de primer orden.

    a) Resuelva $tx'' - x' = 3t^2$ haciendo $u = x'$.

    b) Resuelva $x'' + k^2 x = 0$ haciendo $u = x'$.

    c) Resuelva $x'' + k^2 \sin x = 0$ haciendo primero $u = x'$ y después $v = u^2$.

Bibliografía

[1] M.L. Abell, J.M. Braselton, "Differential Equations with Mathematica", Academic Press, Inc., 1993.

[2] G. Birkhoff, GC. Rota, "Ordinary Differential Equations", 3 ed. Jhon Wiley & Sons, Inc., 1978.

[3] R.L. Borrelli, C.S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[4] F. Brauer, J. Nohel,"Ordinary Differential Equations: a first course", 2ª ed., W.A. Benjamin, Inc., 1973.

[5] M. Braun, "Differential Equations and Their Applications", 4 ed. Springer-Verlag, 1993.

[6] C.H. Edwards, D.E. Penney, "Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, 3 ed., Prentice Hall, 1993.

[7] C. Fernández Pérez, "Ecuaciones Diferenciales-I", Ediciones Pirámide, S.A., 1992, Madrid.

[8] R. Habermam, "Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno", 3 ed. Pearson Educación, S.A. 2003.

[9] J.H. Hubbard, B.H. West, "Differential Equations: A Dynamical System Approach. Ordinary Differential Equations", Texts in Applied Mathematics 5, Springer-Verlag, N. York, Inc., 1991.

[10] F. John, "Partial Differential Equations", 4 ed. Springer-Verlag, 1982.

[11] G. Ledder, "Ecuaciones Diferenciales. Un Enfoque de Modelado", McGraw Hill, 2006.

[12] R.K. Nagle, E.B. Saff, "Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales", 2 ed., Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.

[13] G.F. Simmons, "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas", McGraw-Hill, Inc., 1993.

[14] R.J. Swift, S.A. Wirkus, "A Course in Ordinary Differential Equations", Chapman & Hall/CRC, 2007.

[15] A. Tineo, J. Rivero, "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Departamento de Matemáticas, Univ. de los Andes, Venezuela.

[16] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 8.0, Champaign, IL, 2010.

[17] D.G. Zill, M.R. Cullen, "Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores Frontera", 5a. ed., Thomson Learning, 2002.