Parte III

Medida e Integración en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

Capítulo 17

La Medida Exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

El cálculo de longitudes, áreas y volúmenes es uno de los asuntos matemáticos con más larga tradición histórica, habiéndose desarrollados a este fin abundantes técnicas a lo largo de los siglos. Sin embargo, no es hasta bien entrado el siglo XIX, cuando los matemáticos ven la necesidad de dar una definición rigurosa de los conceptos de longitud, área y volumen. Este será el problema que nosotros abordaremos en esta lección y en algunas de las sucesivas.

En este curso no estamos interesados en definir la longitud de una curva, ni el área de una superficie no plana, por lo que sólo trataremos el problema de "intentar" asignar a cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$ un número real mayor o igual que cero ($+\infty$), su n-medida, y que será su longitud, área o volumen, según que n sea 1, 2 o 3. En el caso $n = 1$, no hay ninguna duda sobre cuál ha de ser la medida (longitud) de, por ejemplo, un segmento o una unión finita de segmentos. Elegida una unidad de longitud, un segmento se representa en $\mathbb{R}$ por un intervalo $[a, b]$, luego es lógico tomar como longitud de este segmento al número $b - a$. En cambio no parece claro cuál deba ser la longitud de otros subconjuntos de números reales, como por ejemplo el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales.

Para medir áreas es natural comenzar con figuras geométricamente sencillas, y obtener, a partir de éstas, el área de otras más complicadas. Así, definiremos en primer lugar el área de un rectángulo. Si C es un rectángulo de lados a y b, su área será $a{\cdot}b$. Para extender esta medida a otras figuras planas, parece natural respetar el criterio de que si una figura plana se descompone en una cantidad finita (incluso numerable) de rectángulos disjuntos dos a dos, su área sea la suma de las áreas de estos rectángulos. Precisamente, la propiedad de que la medida del "todo"sea igual a la suma de las medidas de las "partes", es lo que se tomará como definición de medida abstracta.

Análogas consideraciones cabe hacer sobre el concepto de volumen de un cuerpo en el espacio.

Definición 17.1 Sea X un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia de subconjuntos de X. Una aplicación $\mu\colon \mathfrak{F} \subset \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ se dirá que es una *medida finitamente aditiva* , si para cada colección *finita* (A_i) de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathfrak{F}$ tales que $\cup A_i \in \mathfrak{F}$, se tiene que

$$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i).$$

μ se dirá que es una *medida* (o también medida numerablemente aditiva o σ-aditiva) si para cada colección *numerable* (A_i) de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathfrak{F}$ tales que $\cup A_i \in \mathfrak{F}$, se tiene que

$$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i).$$

(Supondremos que $\alpha < +\infty$, $\alpha + \infty = \infty$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$).

Esta definición, siendo tan general, permite la construcción de numerosas medidas:

1. $\mu(A) = 0$ para todo $A \subset X$.
2. $\mu(A) = \infty$ para todo $A \subset X$.
3. $\mu(A) = \begin{cases} p\,, \text{si } A \text{ tiene } p \text{ elementos} \\ \infty\,, \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$
4. Aunque no lo precisemos aquí, toda *probabilidad* será también una medida.

Pero en este curso la única medida que estamos interesados en construir es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por "m", y que mide longitudes, áreas o volúmenes según que n=1,2 ó 3.

Semintervalos de $\mathbb{R}^n$

La primera familia sobre la que definiremos la medida de Lebesgue será la de semintervalos.

Definición 17.2 En $\mathbb{R}^n$ llamaremos *Semintervalo* a cada producto cartesiano de n intervalos acotados de $\mathbb{R}$ de la forma $[a_i, b_i)$, $a_i < b_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$. La medida del semintervalo $I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ es el número real

$$m(I) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

Por convenio, consideraremos al $\emptyset$ como un semintervalo de medida 0.

Para $n = 2$ un semintervalo es un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados, al que le falta parte del borde.

Puede parecer un poco extraño comenzar este proceso de medir con la consideración de un tipo tan particular de rectángulos, en vez de trabajar desde un principio con rectángulos arbitrarios, definiendo su medida como el producto de las longitudes de sus lados. La razón de esto está en que aceptar, de entrada, que la medida de un rectángulo abierto y del rectángulo cerrado que tiene los mismos lados coinciden, puede ser demasiado fuerte para una mentalidad matemática: Lo anterior tiene más apariencia de teorema que de algo asumible como hipótesis.

Como punto de partida nos deberíamos de limitar, pues, a considerar todos los rectángulos del mismo tipo, en lugar de rectángulos arbitrarios (por ejemplo todos abiertos, o todos cerrados o semintervalos). Y de todas estas subfamilias, la más adecuada es la de semintervalos: Mediante semintervalos podemos obtener una partición numerable del plano (y de cualquier conjunto abierto), en cambio eso no es posible hacerlo a base sólo de rectángulos abiertos o de rectángulos cerrados. Para nuestros propósitos, lo anterior constituye una importante propiedad de los semintervalos de la que habremos de hacer uso en más de una ocasión (Ver Zaanen [30]).

Nuestro objetivo inmediato es demostrar que "m" es una medida σ-aditiva sobre la familia de semintervalos. Posteriormente extenderemos esta medida a conjuntos más generales (sería deseable que esta extensión la pudiésemos hacer a cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$, pero, como veremos, esto es imposible manteniendo el carácter σ-aditivo de la medida). Para todo ello necesitaremos destacar algunas de las propiedades de la familia de semintervalos y de la medida definida sobre ella.

Proposición 17.3 *Sea I un semintervalo de $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen semintervalos $I_1,\ I_2$ tales que*

$$\overline{I_1} \subset \overset{o}{I} \subset \overline{I} \subset \overset{o}{I}_2 \quad y \quad m(I_2) - \varepsilon \leq m(I) \leq m(I_1) + \varepsilon.$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \xrightarrow{\Phi} \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i)$$

de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}$. Esta aplicación es continua ya que es un polinomio de $2n$ variables. Sea entonces el semintervalo $I = \prod [a_i, b_i)$. De la continuidad de Φ en $((a_i), (b_i))$ se deduce que si nos aproximamos suficientemente al punto $((a_i), (b_i))$ mediante puntos $((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n)$ con $a_i < x_i < y_i < b_i$ o con puntos tales que $x_i \leq a_i,\ b_i \leq y_i$ se consiguen los intervalos $I_1,\ I_2$ requeridos. ∎

Proposición 17.4 (a) *La intersección finita de semintervalos es un semintervalo.*

(b) *La diferencia de dos semintervalos puede expresarse como unión de una familia finita de semintervalos disjuntos dos a dos.*

Demostración. (a) Sean $I = \prod [a_i, b_i), \quad J = \prod [c_i, d_i)$. Entonces

$$I \cap J = \prod [a_i, b_i) \cap [c_i, d_i),$$

y es obvio que, si esta intersección es no vacía, entonces $h_i = \text{máx}\{a_i, c_i\} < k_i = \text{mín}\{b_i, d_i\}$ y

$$I \cap J = \prod [h_i, k_i).$$

(b) Consideremos los semintervalos $I = \prod [a_i, b_i), \quad J = \prod [c_i, d_i)$. Puesto que $I \setminus J = I \setminus I \cap J$, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $J \subset I$.

Prolongando los lados de los semintervalos I, J obtenemos en cada eje los tres semintervalos

$$[a_i, c_i), \quad [c_i, d_i), \quad [d_i, b_i).$$

Estos intervalos (alguno de los cuales puede ser, eventualmente, vacío) constituyen una partición de $[a_i, b_i)$. Si formamos todos los n-productos posibles tomando como factores a estos intervalos, se obtiene trivialmente una partición finita del semintervalo I, uno de cuyos miembros es el semintervalo J. Por tanto $I \setminus J$ es igual a la unión del resto de los semintervalos de la partición. ∎

La partición del semintervalo I, obtenida de la forma anterior, diremos que constituye un cuadriculado o red del semintervalo I. Más generalmente, sea el semintervalo $I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$ y consideremos en cada eje una partición finita de $[a_i, b_i)$. Entonces, la colección de semintervalos, $\{K_s\}$, obtenidos como antes (es decir, formando los n-productos posibles que tienen en el factor i, $(i = 1, \ldots, n)$, un semintervalo de la partición de $[a_i, b_i)$), constituye una partición de I que se denomina *cuadriculado* o *red* de I.

Lema 17.5 *Si $\{K_s\}$ es un cuadriculado del semintervalo I entonces,*

$$m(I) = \sum m(K_s).$$

Demostración. Para no complicar en exceso las notaciones, supongamos $n = 2$. Sea $I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$, y

$$a_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b_1\,;\; a_2 = u_0 < u_1 < \ldots < u_q = b_2$$

particiones de $[a_1, b_1)$ y $[a_2, b_2)$. Entonces cada cuadrícula es de la forma $K_s = [t_i, t_{i+1}) \times [u_j, u_{j+1})$, luego

$$\begin{aligned}
\sum m(K_s) &= \sum_{i,j}(t_{i+1} - t_i)\cdot(u_{j+1} - u_j) \\
&= \sum_{i}(t_{i+1} - t_i)\sum_{j}(u_{j+1} - u_j) \\
&= \sum_{i}(t_{i+1} - t_i)\cdot(b_2 - a_2) \\
&= (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) = m(I).
\end{aligned}$$

∎

Proposición 17.6 *Sean $I_0, I_1, \ldots, I_p$ una colección finita de semintervalos de $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Si $I_0 \subset \cup_{k=1}^{p} I_k$ entonces $m(I_0) \le \sum m(I_k)$.*

(b) *Si $I_k \cap I_r = \emptyset$ $(k \neq r)$ y $\cup I_k \subset I_0$ entonces $\sum m(I_k) \le m(I_0)$.*

Demostración. (a) Prolongando los lados de los semintervalos $I_0, I_1, \dots, I_p$ (como en la proposición anterior) se obtiene en cada eje una colección finita de semintervalos disjuntos. Si se construyen a partir de ellos todos los n-productos posibles, la colección finita K_s de semintervalos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ que resulta, proporciona un cuadriculado de cada I_k. Concretamente, cada I_k es la unión de los K_s que lo cortan. Se tiene pues que

$$m(I_k) = \sum_{K_s \subset I_k} m(K_s).$$

Entonces, si $I_0 \subset \cup_{k=1}^p I_k$, cada semintervalo que está contenido en I_0 está también contenido en algún I_k $(k \geq 1)$, y por tanto

$$m(I_0) = \sum_{K_s \subset I_0} m(K_s) \leq \sum_k \sum_{K_s \subset I_k} m(K_s) = \sum m(I_k).$$

(b) Se demuestra de forma análoga. ∎

Para quien no le guste la demostración anterior, vamos a ver, a continuación, la singular demostración que dio Von Newman [24] de este resultado.

Demostración*. (a) Supongamos, en primer lugar, que todos los intervalos $I_k = \prod [a_i^k, b_i^k)$ verifican que las longitudes de sus lados son mayores que 1, es decir $b_i^k - a_i^k > 1$, y denotemos por N_{I_k} al número de elementos de I_k que tienen como coordenadas (todas) números enteros. Si se tiene en cuenta que un semintervalo de $\mathbb{R}$ cuya longitud l esté comprendida entre los números naturales N y $N+1$ $(N \leq l \leq N+1)$, contiene N o $N+1$ enteros, resulta que

$$\prod_{i=1}^n (b_i^k - a_i^k - 1) \leq N_{I_k} < \prod_{i=1}^n (b_i^k - a_i^k + 1).$$

Como $N_{I_0} \leq \sum N_{I_k}$, de la relación anterior resulta que

$$\prod_{i=1}^n (b_i^0 - a_i^0 - 1) \leq \sum_k \prod_i (b_i^k - a_i^k + 1). \tag{17.1}$$

Si las longitudes de los lados de los I_k no fuesen todas mayor o igual que 1 entonces, tomando r un natural suficientemente grande, los semintervalos rI_k serían del tipo anterior (y es obvio que $rI_0 \subset \cup_{k=1}^p rI_k$). Aplicando la desigualdad 17.1 se obtiene

$$\prod_{i=1}^n (rb_i^0 - ra_i^0 - 1) \leq \sum_k \prod_i (rb_i^k - ra_i^k + 1),$$

equivalentemente

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i^0 - a_i^0 - \frac{1}{r}) \leq \sum_k \prod_i (b_i^k - a_i^k + \frac{1}{r}),$$

lo que, pasando al límite cuando $r \to \infty$, implica

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i^0 - a_i^0) \leq \sum_k \prod_i (b_i^k - a_i^k),$$

o sea que $m(I_0) \leq \sum m(I_k)$.

(b) Resulta como en (a), sin más que observar que si $I_k \cap I_h = \emptyset$, entonces para cualquier número real $r \neq 0$, rI_k y rI_h son también semintervalos disjuntos. ∎

Proposición 17.7 *Sean $I_0, I_1, I_2, \dots$ una colección numerable de semintervalos.*

(a) *Si $I_0 \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ entonces $m(I_0) \leq \sum m(I_k)$.*

(b) *Si $I_k \cap I_r = \emptyset$ $(k \neq r)$ y $\cup I_k \subset I_0$ entonces $\sum m(I_k) \leq m(I_0)$.*

Demostración. (a) Veamos que

$$I_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \Rightarrow \quad m(I_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k).$$

Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada k, sean J y H_k semintervalos tales que

$$\begin{aligned} &\overline{J} \subset I_0, \quad m(I_0) \leq m(J) + \varepsilon/2, \\ &I_k \subset \overset{\circ}{H}_k, \quad m(H_k) \leq m(I_k) + \varepsilon/2^{k+1}. \end{aligned}$$

Puesto que $\overline{J}$ es un compacto, se deduce que $J \subset \cup_{\text{finita}} H_k$, luego aplicando la proposición anterior se tiene que

$$m(J) \leq \sum_{\text{finita}} m(H_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(H_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto

$$m(I_0) \leq m(J) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon,$$

lo que implica, por ser ε arbitrario, que

$$m(I_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k).$$

(b) Si los semintervalos I_k son disjuntos entre sí y están contenidos en I_0 entonces, por la proposición anterior, se tiene que para cada $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{p} m(I_k) \leq m(I_0),$$

luego también $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leq m(I_0)$. ∎

Corolario 17.8 *Si $\mathfrak{F}$ denota a la familia de semintervalos de $\mathbb{R}^n$, la aplicación $m\colon \mathfrak{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, que asigna a cada semintervalo el producto de las longitudes de sus lados, es una medida numerablemente aditiva.*

Demostración. Si el semintervalo I se escribe como

$$I = \cup I_k,$$

donde los I_k son semintervalos disjuntos entre sí entonces, del apartado (a) de la proposición anterior, se deduce que

$$m(I) \leq \sum m(I_k)$$

y del apartado (b) que

$$\sum m(I_k) \leq m(I).$$

∎

Medida exterior

En esta sección vamos a extender la medida de semintervalos a conjuntos más generales. Vamos a comenzar asignando a cada subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ un número real $(+\infty)$, $m^*(A) \geq 0$, que pretendemos sea su medida.

Definición 17.9 Si $A \subset \mathbb{R}^n$, llamaremos medida exterior del conjunto A, al elemento de $[0,+\infty]$,

$$m^*(A) = \text{ínf } \left\{ \sum m(I_k) : \; A \subset \cup I_k \right\}$$

donde este ínfimo está extendido al conjunto de colecciones numerables, $\{I_k\}$, de semintervalos que recubren el conjunto A.

Es inmediato comprobar que la definición anterior tiene perfecto sentido, ya que, por una parte, para cada conjunto existe alguna colección numerable de semintervalos que lo recubre, y por otra, todas la sumas $\sum m(I_k)$ están acotadas inferiormente por 0, luego el extremo inferior de todas ellas existe en $[0, +\infty]$. Precisamente por ser la medida exterior del conjunto A el extremo inferior de un conjunto de números reales, se deduce

Proposición 17.10 *Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^n$. El número $\alpha \in [0, +\infty]$ es la medida exterior de A si y sólo si se dan las dos condiciones*

1. *Cualquiera que sea la colección $\{I_k\}$ de semintervalos con $A \subset \cup I_k$, se tiene que $\alpha \leq \sum m(I_k)$.*
2. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe alguna colección $\{I_k\}$ de semintervalos que recubre a A y tal que*

$$\sum m(I_k) \leq \alpha + \varepsilon.$$

Probaremos a continuación que la medida exterior de un semintervalo coincide con su n-volumen, es decir la medida que ya le habíamos asignado. Pero, desafortunadamente, m^* no es numerablemente aditiva sobre la totalidad de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, no es una medida sobre $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, podremos encontrar después una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, suficientemente amplia (contiene a los semintervalos, a todos los abiertos, cerrados etc.), de forma que la restricción de m^* a $\mathcal{M}$ sí que sea numerablemente aditiva.

Propiedades de la Medida Exterior

Proposición 17.11 *La medida exterior de un semintervalo I es igual al producto de las longitudes de sus lados. Es decir $m^*(I) = m(I)$.*

Demostración. Sea I un semintervalo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Por definición

$$m^*(I) = \text{ínf } \left\{ \sum m(I_k) : \; I \subset \cup I_k \right\},$$

donde este ínfimo está extendido al conjunto de colecciones numerables, $\{I_k\}$, de semintervalos que recubren el conjunto I. Como un recubrimiento trivial de I lo constituye el propio $\{I\}$, resulta que

$$m^*(I) \leq m(I).$$

Para obtener la desigualdad contraria, sea $\{I_k\}$ una colección numerable de semintervalos que recubran a I. Como por la proposición 17.7(a)

$$m(I) \leq \sum m(I_k),$$

resulta

$$m(I) \leq \text{ínf}\ \left\{\sum m(I_k) : \ I \subset \cup I_k\right\} = m^*(I),$$

con lo que termina la demostración. ∎

La siguiente propiedad de la medida exterior es la *Monotonía* y su demostración es inmediata.

Proposición 17.12 *Si $A \subset B$ entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

Aunque como ya anunciamos la medida exterior no va a ser numerablemente aditiva en todo $\mathbb{R}^n$, sí va a ser, en cambio, *σ-subaditiva*.

Proposición 17.13 *Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección numerable de conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$m^*(\cup A_k) \leq \sum m^*(A_k).$$

Demostración. Consideremos para cada $\varepsilon > 0$ y para cada k, una colección numerable de semintervalos, $\{I_{ki}\}$, tal que

$$A_k \subset \bigcup_i I_{ki}\,, \quad \sum_i m(I_{ki}) \leq m^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Entonces $A \subset \cup_{k,i} I_{ki}$ (una colección numerable de semintervalos). De la definición de $m^*(A)$ se deduce entonces que

$$m^*(A) \leq \sum_{k,i} m(I_{ki}) = \sum_k \sum_i m(I_{ki}) \leq \sum_k m^*(A_k) + \varepsilon.$$

La conclusión resulta ya de que ε es arbitrario. ∎

Una de las propiedades que cabía esperar de una medida en $\mathbb{R}^n$ es la ser invariante frente a movimientos. Aunque es cierto que la medida exterior tiene esta propiedad, la demostración general de la misma la vamos a aplazar de momento (ver Lema 24.2). Sólo vamos a probar ahora que la medida exterior es *Invariante por Traslaciones*.

Proposición 17.14 *La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones. Es decir, para todo conjunto A de $\mathbb{R}^n$ y para todo punto x, se tiene que $m^*(x + A) = m^*(A)$.*

Demostración. El resultado es cierto si A es un semintervalo. En efecto, si A es el semintervalo $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$, entonces es evidente que

$$x + A = \prod_{i=1}^{n} [x_i + a_i, x_i + b_i).$$

Por lo tanto

$$m^*(x + A) = \prod (x_i + b_i - (x_i + a_i)) = \prod (b_i - a_i) = m^*(A).$$

En general, si A es un conjunto cualquiera, veamos que $m^*(x + A) \leq m^*(A)$. Sea (I_k) una colección de semintervalos tal que $A \subset \cup I_k$. Entonces $x + A \subset \cup(x + I_k)$, por lo que de la definición de medida exterior resulta que

$$m^*(x + A) \leq \sum m(x + I_k) = \sum m(I_k).$$

Esto significa que $m^*(x + A)$ es una cota inferior del conjunto

$$\left\{ \sum m(I_k) : \ A \subset \cup I_k \right\},$$

por tanto $m^*(x + A) \leq m^*(A)$.

La desigualdad contraria se obtiene de la anterior escribiendo $A = (-x) + (x + A)$. Así,

$$m^*(A) = m^*((-x) + (x + A)) \leq m^*(x + A).$$

∎

Por último, vamos a ver que la medida exterior de Lebesgue no es numerablemente aditiva. Para ello vamos a dar el ejemplo clásico de Vitali, el cual proporciona, a partir del axioma de elección, una familia numerable de conjuntos de $\mathbb{R}$, disjuntos dos a dos, cuya suma de medidas no coincide con la medida de la unión de ellos.

Ejemplo 17.15 (Vitali) Sea A un conjunto acotado de números reales con $m^*(A) > 0$. Supongamos, por ejemplo, $A \subset [-r, r)$. Definimos sobre A la relación de equivalencia

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Obviamente cada clase de equivalencia es de la forma $(x+\mathbb{Q})\cap A$, luego es un conjunto numerable. Se deduce pues que existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia. Sea V un conjunto obtenido seleccionando en cada clase un único representante (observar que para ello se hace uso del *Axioma de Elección*), y consideremos, para cada racional q del intervalo $[-2r, 2r)$, el conjunto $V_q = q + V$. Se tiene entonces

1. Los conjuntos V_q son disjuntos dos a dos.

   En efecto, si $x \in V_{q_1} \cap V_{q_2}$, entonces

   $$x = q_1 + a_1 = q_2 + a_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 - a_2 \in \mathbb{Q}.$$

   Es decir los puntos de V, a_1 y a_2, están relacionados, y esto implica, por la construcción de V, que $a_1 = a_2$, y por tanto, $q_1 = q_2$.

2. $A \subset \cup V_q \subset [-3r, 3r), \quad q \in \mathbb{Q} \cap [-2r, 2r).$

   En efecto, sea $x \in A$, y sea $a \in V$ tal que $q = x - a \in \mathbb{Q}$. Entonces

   $$x = q + a \in q + V,$$

   siendo $|q| = |x-a| < 2r$, como se sigue fácilmente de que tanto x como a estén en $[-r, r)$. De igual modo si $x \in V_q$, es decir $x = q + a$ con $-2r \leq q < 2r$ y $a \in V$ (por tanto $-r \leq a < r$), entonces $x \in [-3r, 3r)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a comprobar que

$$m^*(\cup V_q) \neq \sum m^*(V_q),$$

lo que demostrará que m^* no es σ-aditiva en todo $\mathbb{R}^n$: Por una lado, de la monotonía de la medida exterior, se deduce que

$$0 < m^*(A) \leq m^*(\cup V_q) \leq 6r.$$

Por otro, como la medida exterior es invariante por traslaciones, $m^*(V_q) = m^*(V)$, y por tanto

$$\sum m^*(V_q) = 0 \ , \qquad \text{si} \ \ m^*(V) = 0$$

$$\sum m^*(V_q) = \infty \ , \qquad \text{si} \ \ m^*(V) > 0$$

Tanto en un caso como en otro, resultaría imposible que $m^*(\cup V_q)$ fuese igual a $\sum m^*(V_q)$. (Comprobar además que la primera opción, es decir $m^*(V) = 0$, no puede darse).

Ejercicios

17A Sea I un semintervalo de $\mathbb{R}^n$. Probar que para todo conjunto A tal que $\overset{\circ}{I} \subset A \subset \overline{I}$, se tiene que $m^*(A) = m(I)$.

17B (Sobre conjuntos de medida nula).

(a) Probar que la medida exterior de cada conjunto numerable es igual a 0, pero que el recíproco no es cierto (considerar el conjunto de Cantor).

(b) Demostrar que la gráfica de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^2$.

(c) Demostrar que todo conjunto de medida nula tiene interior vacío, pero que el recíproco no es cierto.

17C Probar que la medida exterior de Lebesgue no es finitamente aditiva en $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.

17D Extender a $\mathbb{R}^n$ el ejemplo de Vitali.