Capítulo 18

Conjuntos Medibles

Preliminares

En el capítulo anterior vimos que la medida exterior de Lebesgue no resulta σ-aditiva en todo $\mathbb{R}^n$. Ahora vamos a construir una familia $\mathscr{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, a los que llamaremos medibles, que goza de buenas propiedades conjuntistas y topológicas, y sobre la cual m^* será una verdadera *medida*, es decir una función de conjunto numerablemente aditiva. Previamente probaremos que m^* es ya σ-aditiva sobre los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Lema 18.1 *Si $\{I_p\}$ es una colección numerable de semintervalos disjuntos dos a dos entonces:*

$$m^*(\bigcup I_p) = \sum m(I_p)$$

Demostración. Por la σ-subaditividad de la medida exterior

$$m^*(\bigcup I_p) \leq \sum m(I_p).$$

Por lo que de acuerdo con la definición de $m^*(\cup I_p) = \text{ínf}\{\sum m(J_s) : \cup I_p \subset \cup J_s\}$, bastará probar que si $\{J_s\}$ es un colección numerable de semintervalos tal que $\cup I_p \subset \cup J_s$ entonces $\sum m(I_p) \leq \sum m(J_s)$:

Puesto que $I_p = \bigcup_s I_p \cap J_s$, la Proposición 17.7(a) nos dice que $m(I_p) \leq \sum_s m(I_p \cap J_s)$, luego

$$\begin{aligned}\sum_p m(I_p) &\leq \sum_p \sum_s m(I_p \cap J_s) \\ &= \sum_s \sum_p m(I_p \cap J_s) \leq \sum_s m(J_s),\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la Proposición 17.7(b), teniendo en cuenta que $\bigcup_p I_p \cap J_s \subset J_s$ y los intervalos $\{I_p \cap J_s\}_p$ son disjuntos dos a dos. ∎

Lema 18.2 *Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ admite una partición numerable mediante n-semicubos que tienen su adherencia contenida en él.*

Demostración. Llamaremos n-semicubo de lado l a un semintervalo que tiene todos sus lados de la misma longitud l. Si U es abierto, entonces se trata de encontrar una colección numerable (C_k) de n-semicubos disjuntos dos a dos y tales que $\overline{C_k} \subset U$.

Para ello vamos a proceder así:

Consideremos, en primer lugar, una partición de $\mathbb{R}^n$ mediante n-semicubos de lado 1 (Puede hacerse esto, por ejemplo, señalando en cada eje los números enteros y formando todos los n-productos posibles de semintervalos de $\mathbb{R}$ que tienen como extremos dos enteros consecutivos). Denotemos por $\mathscr{S}_1$ a la colección (numerable) de los n-semicubos de esta partición, y reservemos aquellos que tienen su adherencia contenida en U. Denotemos a dicha subcolección por $\mathscr{C}_1$.

A continuación, obtenemos una nueva partición de $\mathbb{R}^n$, ahora por n-semicubos de lado $1/2$, dividiendo los lados de cada n-semicubo de $\mathscr{S}_1$ en dos partes iguales (De cada n-semicubo de lado 1 se obtendrán entonces 2^n n-semicubos de lado $1/2$). Sea $\mathscr{S}_2$ esta partición y llamemos $\mathscr{C}_2$ a la subcolección de $\mathscr{S}_2$ obtenida tomando los n-semicubos de adherencia contenida en U y que, además, no son subconjuntos de algún n-semicubo de $\mathscr{C}_1$ (ya tomado en la etapa anterior).

De este mismo modo se conseguiría para cada $k = 1, 2, \ldots$ una partición de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{S}_k$, formada por n-semicubos de lado $1/2^{k-1}$ y una subcolección de ésta, $\mathscr{C}_k$, en la que están aquellos que tienen su adherencia contenida en U y que no proceden de n-semicubos tomados en las etapas anteriores, es decir que no son subconjuntos de ningún n-semicubo de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, ..., $\mathscr{C}_{k-1}$.

Sea $\mathscr{C} = \cup \mathscr{C}_k$ la familia de n-semicubos tomados en las distintas etapas. Evidentemente todos ellos son disjuntos entre sí y constituyen una cantidad numerable. Vamos a probar que

$$U = \bigcup \{C : C \in \mathscr{C}\}.$$

Como por construcción, los n-semicubos de $\mathscr{C}$ están contenidos en U, sólo hemos de ver que $U \subset \cup\{C : C \in \mathscr{C}\}$. Supongamos que x es un punto de

$\mathbb{R}^n$ que no está en ninguno de los n-semicubos de $\mathscr{C}$, y veamos que entonces $x \notin U$. Denotemos por S_k al único n-semicubo de la partición $\mathscr{S}_k$ en el que se encuentra el punto x. De acuerdo con nuestra suposición, ninguno de los n-semicubos S_k pertenece a la familia $\mathscr{C}$. Puesto que $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$, esto significa que

$$\overline{S_k} \not\subset U,$$

luego existe $x_k \in \overline{S}_k \cap U^c$. Entonces

$$x_k, x \in \overline{S}_k \quad \Rightarrow \quad d_\infty(x_k, x) \leq 1/2^{k-1} \text{ (lado de } S_k).$$

Se tiene pues que la sucesión $\{x_k\}$ converge a x, y como $x_k \in U^c$, que es un conjunto cerrado, se deduce que $x \in U^c$. ∎

Corolario 18.3 *La medida exterior de Lebesgue es σ-aditiva sobre la familia de los abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\{U_p\}$ una colección numerable de abiertos disjuntos dos a dos. Si, aplicando el lema anterior, escribimos cada uno de estos abiertos como unión de n-semicubos disjuntos

$$U_p = \bigcup_k I_{pk},$$

se tiene

$$m^*(\bigcup U_p) = m^*(\bigcup_{p,k} I_{pk}) = \sum_{p,k} m(I_{pk}) = \sum_p \sum_k m(I_{pk}) = \sum_p m^*(U_p).$$

∎

Lema 18.4 *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \supset A$ tal que $m^*(U) \leq m^*(A) + \varepsilon$ i.e.,*

$$m^*(A) = \text{ínf}\{m(U) : U \text{ (abierto)} \supset A\}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y (I_j) una colección numerable de semintervalos tales que

$$A \subset \cup I_j, \quad \sum m(I_j) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Consideremos entonces para cada j un semintervalo K_j tal que

$$I_j \subset \overset{\circ}{K}_j, \quad m(K_j) \leq m(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Obviamente A está contenido en el abierto $U = \cup \overset{\circ}{K_j}$ y

$$m^*(U) \leq \sum m(K_j) \leq \sum m(I_j) + \varepsilon \leq m^*(A) + 2\varepsilon.$$

∎

El lema anterior asegura que para cada conjunto A (de medida finita) y para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar algún abierto U que lo contiene tal que $m^*(U) - m^*(A) < \varepsilon$. Pero, como veremos, esto no es lo mismo que decir que $m^*(U \setminus A) < \varepsilon$. Precisamente la definición de conjunto medible se basa en esta distinción

La σ-álgebra de conjuntos medibles

Definición 18.5 Un subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ se dice medible si para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \supset B$ tal que $m^*(U \setminus B) \leq \varepsilon$.

Como consecuencias directas de la definición se obtiene que:

1. *Cada abierto de $\mathbb{R}^n$ es medible.*
2. *Cada conjunto de medida nula es medible.*

Si $m^*(N) = 0$ entonces por el Lema 18.4, para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \supset N$ tal que $m^*(U) < \varepsilon$, luego $m^*(U \setminus N) \leq m^*(U) < \varepsilon$.

3. *El carácter medible es invariante por traslaciones .*

Veamos que B medible implica $c + B$ medible. Para $\varepsilon > 0$ sea U un abierto tal que que $U \supset B$ y $m^*(U \setminus B) < \varepsilon$. Entonces $c + U$ es un abierto tal que $c + U \supset c + B$ y

$$m^*(c + U \setminus c + B) = m^*(c + (U \setminus B)) = m^*(U \setminus B) < \varepsilon.$$

4. *La unión numerable de conjuntos medibles es medible.*

Si $B_p,\ p = 1, 2, \ldots$ son medibles entonces para cada ε existen abiertos U_p que contienen a B_p y tales que $m^*(U_p \setminus B_p) \leq \varepsilon/2^p$. Entonces

$$m^*(\cup(U_p \setminus B_p)) \leq m^*(\cup(U_p \setminus B_p)) \leq \sum m^*(U_p \setminus B_p) \leq \varepsilon.$$

Lema 18.6 *Si $F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots$ es una sucesión de compactos tal que $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p \neq \emptyset, \forall p$ entonces $\bigcap_{p=1}^{\infty} F_p \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $\bigcap_{p=1}^{\infty} F_p = \emptyset$ entonces $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} F_i^c$, por lo que al ser F_1 compacto existe algún p tal que $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{p} F_i^c = (\bigcap_{i=2}^{p} F_i)^c \implies F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p = \emptyset$. ∎

Lema 18.7 *Sean $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_p \supset \cdots$ una sucesión decreciente de abiertos acotados de $\mathbb{R}^n$ tal que $\bigcap_{p=1}^{\infty} U_p = \emptyset$. Entonces $\lim_{p\to\infty} m^*(U_p) = 0$.*

Demostración. Vamos a probar que si existe $c > 0$ tal que $m^*(U_p) \geq c$, para todo p, entonces existe una sucesión de compactos $F_p \subset U_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ tal que $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p \neq \emptyset, \forall p$, mientras que $\bigcap_{p=1}^{\infty} F_p \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} U_p = \emptyset$, en contra del lema anterior.

Considerando particiones sucesivas de $\mathbb{R}^n$ por $n-$semicubos de lado $1, 1/2, 1/2^2, \ldots$, podemos escribir

$$U_1 = \bigcup_{r=1}^{\infty} C_{1r},\ U_2 = \bigcup_{r=1}^{\infty} C_{2r}, \ldots$$

Puesto que $U_q \supset U_p$ si $q < p$, es obvio que cada C_{pr} está contenido en un único C_{qs}, y es por tanto disjunto con cada C_{qj} con $j \neq s$.

Sea $0 < \varepsilon < c/2$.

Puesto que U_1 es acotado se tiene que $m^*(U_1) = \sum_{r=1}^{\infty} m(C_{1r}) < \infty$ i.e. esta serie es convergente. Entonces existe N_1tal que $\sum_{r>N_1} m(C_{1r}) < \varepsilon/2$, lo que implica que

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N_1} m(C_{1r}) &= \sum_{r=1}^{\infty} m(C_{1r}) - \sum_{r>N_1} m(C_{1r}) \\ &= m^*(U_1) - \sum_{r>N_1} m(C_{1r}) \geq c - \varepsilon/2 > \varepsilon.\end{aligned}$$

Analogamente, existe N_2 tal que $\sum_{r>N_2} m(C_{2r}) < \varepsilon/2^2$, luego

$$\sum_{r=1}^{N_2} m(C_{2r}) = m^*(U_2) - \sum_{r>N_2} m(C_{2r}) \geq c - \varepsilon/2^2 > \varepsilon$$

existe $N_3, \ldots$

$\ldots$

Denotemos por $E_1 = \bigcup_{r=1}^{N_1} C_{1r},\ E_2 = \bigcup_{r=1}^{N_2} C_{2r}, \ldots$ y veamos que $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_p \neq \emptyset,\ \forall p$.

En caso contrario, y debido a que $E_p \subset U_p$, se tendría:

$$\bigcup_{r=1}^{N_p} C_{pr} \subset U_1 \setminus E_1 \cup U_2 \setminus E_2 \cup \ldots \cup U_{p-1} \setminus E_{p-1}$$

luego cada C_{pr} $(r \leq N_p)$ corta a algún $U_j \setminus E_j$ con $j < p$ y por lo tanto está contenido en alguno de los n-semicubos C_{jr} con $r > N_j$. Es claro entonces que

$$\sum_{r=1}^{N_P} m(C_{pr}) \leq \sum_{r>N_1} m(C_{1r}) + \cdots + \sum_{r>N_{p-1}} m(C_{(p-1)r}) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2^2 + \cdots \leq \varepsilon,$$

en contra de que $\sum_{r=1}^{N_P} m(C_{pr}) > \varepsilon$.

Si denotamos por $F_p = \bigcup_{r=1}^{N_p} \overline{C_{pr}} \subset U_p$ $p = 1, 2, \ldots$, de lo anterior se deduce que $F_1 \cap \ldots \cap F_p \neq \emptyset$ $\forall p$, mientras que $\bigcap_{p=1}^{\infty} F_p \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} U_p = \emptyset$, lo que contradice el lema anterior. ∎

Corolario 18.8 *Cada compacto K de $\mathbb{R}^n$ es medible y si U es un abierto que contiene a K entonces $m^*(U \setminus K) = m^*(U) - m^*(K)$.*

Demostración. Para cada número natural p consideremos el abierto

$$U_p = \{x : d(x, K) < 1/p\},$$

donde d es cualquier distancia compatible con la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Se tiene entonces:

$$K \subset U_p, \quad U_p \setminus K = \{x : 0 < d(x, K) < 1/p\}, \quad \cap_p (U_p \setminus K) = \emptyset.$$

Puesto que, además, la sucesión de abiertos acotados $\{U_p \setminus K\}$ es decreciente, se puede aplicar el lema anterior para deducir que $\lim_p m^*(U_p \setminus K) = 0$, luego para cada $\varepsilon > 0$ existe ν tal que si $p \geq \nu$, $m^*(U_p \setminus K) < \varepsilon$, es decir K es medible.

Sea U un abierto que contiene a K. Entonces $m^*(U) = m^*(K \cup (U \setminus K)) \leq m^*(K) + m^*(U \setminus K)$, luego $m^*(U) - m^*(K) \leq m^*(U \setminus K)$.

Veamos la desigualdad contraria:

Puesto que K es compacto contenido en el abierto U, existe $\lambda > 0$ tal que $d(K, U^c) > \lambda$ y por tanto si $p > \nu$ y $1/(p-1) \leq \lambda$ se tiene

$$K \subset \overline{U}_p \subset U_{p-1} \subset U, \quad m^*(\overline{U}_p \setminus K) \leq m^*(U_{p-1} \setminus K) < \varepsilon. \tag{18.1}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} m^*(K) + m^*(U \setminus K) &\leq m^*(U_p) + m^*(U \setminus \overline{U}_p) + m^*(\overline{U}_p \setminus K) \\ &\leq m^*(U_p \cup (U \setminus \overline{U}_p)) + \varepsilon \leq m^*(U) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos probado pues que para cada ε, $m^*(U\setminus K) \leq m^*(U)-m^*(K)+\varepsilon$, lo que implica $m^*(U\setminus K) \leq m^*(U) - m^*(K)$. Nótese que para ello hemos utilizado que m^* es aditiva sobre los abiertos y por ello $m^*(U_p) + m^*(U \setminus \overline{U}_p) = m^*(U_p \cup (U \setminus \overline{U}_p))$. ∎

Proposición 18.9 *Para un subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes:*

(a) *B es medible.*

(b) *para cada $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F \subset B$ tal que $m^*(B \setminus F) \leq \varepsilon$.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos primero B acotado, luego F compacto. Por el Lema 18.4 sabemos que existe un abierto $U \supset B$ tal que $m^*(U) \leq m^*(B) + \varepsilon$. Se tienen entonces:

$$\begin{aligned} m^*(B) + m^*(U \setminus B) &\leq m^*(F) + m^*(B \setminus F) + m^*(U \setminus F) \\ &= m^*(F) + m^*(B \setminus F) + m^*(U) - m^*(F) \\ &= m^*(B \setminus F) + m^*(U) \leq m^*(U) + \varepsilon \\ &\leq m^*(B) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Si B no es acotado, entonces escribiendo $B = \bigcup_r B \cap [-r, r]^n$, la condición $m^*(B \setminus F) < \varepsilon$ implica

$$m^*(B \cap [-r, r]^n \setminus F \cap [-r, r]^n) = m^*(B \cap [-r, r]^n \setminus F) \leq m^*(B \setminus F) < \varepsilon.$$

Es decir $B \cap [-r, r]^n$ es medible y por lo tanto B también por ser unión numerable de medibles.

(a) $\Rightarrow$ (b). Si B es medible entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U \supset B$ tal que

$$m^*(U \setminus B) = m^*(B^c \setminus U^c) < \varepsilon,$$

pero esto significa, según hemos visto en (b) $\Rightarrow$ (a), que B^c es medible. Existe, por tanto, un abierto $V \supset B^c$ tal que $m^*(V\setminus B^c) < \varepsilon \Rightarrow m^*(B\setminus V^c) < \varepsilon$, es decir que se satisface la condición (b) para B. ∎

Denotemos por $\mathscr{M}$ a la familia de los conjuntos medibles. Hasta el momento hemos probado $\mathscr{M}$ contiene a los abiertos y también a los cerrados, de hecho de la proposición anterior se deduce que *si $B \in \mathscr{M}$, entonces $B^c \in \mathscr{M}$*. También vimos que si $\{B_p\}$ es una colección numerable de elementos de $\mathscr{M}$ entonces $\bigcup B_P \in \mathscr{M}$. Todo esto nos dice que $\mathscr{M}$ es una σ-álgebra de subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (Por definición, una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ-álgebra si satisface las condiciones: $\emptyset, X \in \mathscr{A}$, es cerrada respecto a uniones numerables y es cerrada respecto al paso a complementarios). Se deduce , por tanto, que también *la intersección numerable de conjuntos medibles es medible* ($\bigcap_p B_p = (\bigcup_p B_p^c)^c$) y que la *diferencia de medibles es medible*. En particular *cada semintervalo es medible*, pues si $I = \prod[a_i, b_i)$ entonces $I = \prod(a_i - 1, b_i) \bigcap \prod[a_i, b_i]$.

Proposición 18.10 *La restricción de m^* a $\mathscr{M}$ es una medida*

Demostración. Veremos primero que si B_1, B_2 son medibles y disjuntos entonces $m^*(B_1 \cup B_2) = m^*(B_1) + m^*(B_2)$. Esto ya sabemos que es cierto cuando B_1, B_2 son abiertos. También es cierto si B_1, B_2 son cerrados. En efecto, consideremos los abiertos disjuntos

$$U_1 = \{x : d(x, B_1) < d(x, B_2)\}, \quad U_2 = \{x : d(x, B_2) < d(x, B_1)\}.$$

Puesto que B_1, B_2 son cerrados disjuntos se tiene que $B_1 \subset U_1,\ B_2 \subset U_2$. Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto U tal que $U \supset B_1 \cup B_2$ y $m^*(U) \leq m^*(B_1 \cup B_2) + \varepsilon$. Entonces:

$$\begin{aligned} m^*(B_1) + m^*(B_2) &\leq m^*(U \cap U_1) + m^*(U \cap U_2) = m^*(U \cap (U_1 \cup U_2)) \\ &\leq m^*(U) \leq m^*(B_1 \cup B_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

En general, si B_1, B_2 son medibles disjuntos, tomemos para cada $\varepsilon > 0$ cerrados F_1, F_2 contenidos en B_1, B_2 respectivamente tales que $m^*(B_i \setminus F_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} m^*(B_1) + m^*(B_2) &\leq m^*(F_1) + m^*(B_1 \setminus F_1) + m^*(F_2) + m^*(B_2 \setminus F_2) \\ &= m^*(F_1 \cup F_2) + 2\varepsilon \leq m^*(B_1 \cup B_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente veamos el caso numerable: sea $\{B_p\}$ una colección numerable de medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\sum_{k=1}^{p} m^*(B_k) = m^*(\bigcup_{k=1}^{p} B_k) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k),\ \forall p,$$

luego $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(B_k) \leq m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)$

Definición 18.11 A la restricción de la medida exterior a la σ-álgebra $\mathscr{M}$ de los conjuntos medibles se le denomina *medida de Lebesgue*. Usaremos la notación $m(B)$ en lugar de $m^*(B)$ para referirnos a la medida exterior del "conjunto medible" B.

Las propiedades de la medida de Lebesgue que damos en el corolario siguiente serán consecuencia exclusivamente de la aditividad numerable y de las propiedades conjuntistas de $\mathscr{M}$, es decir estas mismas propiedades las tiene cualquier medida μ definida sobre una σ-álgebra $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un conjunto arbitrario X.

Corolario 18.12 *(a) Si $B_1, B_2 \in \mathscr{M}$ y $B_1 \subset B_2$ entonces, $m(B_2) = m(B_1) + m(B_2 \setminus B_1)$. En particular, si B_1 tiene medida finita entonces, $m(B_2 \setminus B_1) = m(B_2) - m(B_1)$.*

(b) Si $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_k \ldots$, es una sucesión creciente de conjuntos medibles, entonces $m(\cup B_k) = \lim_{k\to\infty} m(B_k)$.

(c) Si $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_k \ldots$, es una sucesión decreciente de conjuntos medibles de medida finita, entonces $m(\cap B_k) = \lim_{k\to\infty} m(B_k)$.

Demostración. (a) Escribiendo $B_2 = B_1 \cup (B_2 \setminus B_1)$ y utilizando la aditividad finita de la medida de Lebesgue, se tiene

$$m(B_2) = m(B_1) + m(B_2 \setminus B_1).$$

Si $m(B_1) < \infty$, podemos pasar al otro miembro $m(B_1)$, con lo que resulta la fórmula

$$m(B_2 \setminus B_1) = m(B_2) - m(B_1).$$

(b) Puesto que la sucesión de conjuntos es creciente, es claro que

$$\begin{aligned} B_k &= B_1 \cup (B_2 \setminus B_1) \cup \ldots \cup (B_k \setminus B_{k-1}), \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k &= B_1 \cup (B_2 \setminus B_1) \cup \ldots \end{aligned}$$

y que los conjuntos $B_i \setminus B_{i-1}$ son disjuntos entre sí y medibles. Por lo tanto

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i \setminus B_{i-1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} m(B_i \setminus B_{i-1}) = \lim_{k\to\infty} m(B_k).$$

(c) Formemos la sucesión creciente de conjuntos medibles

$$B_1 \setminus B_2 \subset B_1 \setminus B_3 \subset \ldots B_1 \setminus B_k \subset \ldots$$

De la proposición anterior resulta que

$$m(\cup (B_1 \setminus B_k)) = \lim_{k\to\infty} m(B_1 \setminus B_k).$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\cup(B_1 \setminus B_k) = B_1 \setminus \cap B_k$ y que por ser los conjuntos de medida finita, $m(B_1 \setminus B_k) = m(B_1) - m(B_k)$, resulta

$$\begin{aligned} m(B_1) - m(\cap B_k) &= m(\cup(B_1 \setminus B_k)) \\ = \lim_{k\to\infty} m(B_1 \setminus B_k) &= m(B_1) - \lim_{k\to\infty} m(B_k), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$m(\cap B_k) = \lim_{k\to\infty} m(B_k).$$

∎

El problema de la medida

Ya sabemos que, al no ser m^* σ-aditiva en todo $\mathbb{R}^n$, la familia $\mathscr{M}$ es distinta de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. Un ejemplo de conjunto no medible lo constituye el conjunto de Vitali. Para comprobar esto sólo hay que tener en cuenta que las traslaciones mantienen el carácter medible, pues entonces, si el conjunto V de Vitali fuese medible, los conjuntos V_q (véase ejemplo de Vitali 17.15) también lo serían y, en consecuencia, $m^*(\cup V_q)$ debería ser igual a $\sum m^*(V_q)$. En cuanto al cardinal de la familia de conjuntos que no son medibles, éste resulta ser el mismo que la de los medibles. Para verlo, basta observar que si J es un intervalo de $\mathbb{R}$ disjunto con V, entonces para todo subconjunto $A \subset J$ el conjunto $V \cup A$ es no medible

El ejemplo dado por Vitali puso de manifiesto no sólo que la medida exterior de Lebesgue no es σ-aditiva en todo $\mathbb{R}$, sino que es imposible construir una medida (σ-aditiva) para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, que sea además invariante por traslaciones y asigne a cada intervalo su longitud.

En efecto, sea V un conjunto de Vitali contenido, por ejemplo, en $A = [-1, 1]$. Si μ fuese una medida de estas características definida en $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, debería de verificarse que

$$\mu(\cup V_q) = \sum \mu(V_q) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \infty \end{array} \right\},$$

según que $\mu(V) = 0$ ó $\mu(V) > 0$. Pero ambas posibilidades se contradicen con el hecho de que

$$[-1, 1] \subset \cup V_q \subset [-6, 6].$$

(Obsérvese que de la aditividad de μ resulta que μ es también monótona).

Si bien, después de lo anterior, no resulta posible extender la medida de Lebesgue a $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, manteniendo la invariancia por traslaciones, sí que se han obtenido extensiones de la misma a familias de conjuntos estrictamente más grandes que la σ-álgebra $\mathscr{M}$ de los conjuntos medibles ([19], [17]).

Como ya hemos señalado, la existencia de conjuntos no medibles es consecuencia de la presencia en la teoría de conjuntos del *Axioma de Elección*(**AC**). Concretamente, si a los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel **(ZF)** añadimos **(AC)**, entonces aparecen subconjuntos en $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles.

Pero esto no significa que sin el axioma de elección, es decir sólo con los axiomas **(ZF)**, se pueda demostrar que todo conjunto es medible. De hecho, si se sustituye **(AC)** por la *Hipótesis del Continuo* (Cohen demostró que la hipótesis del continuo es independiente del axioma de elección [8]), también se pueden construir conjuntos no Lebesgue-medibles en $\mathbb{R}$.

Por otra parte Solovay ([27]) ha demostrado que también es concebible un modelo matemático con la axiomática de Zermelo-Fraenkel **(ZF)**, en el que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ sea Lebesgue-medible. En términos más precisos: La proposición *todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es Lebesgue-medible*, es consistente con los axiomas **(ZF)**.

La σ-álgebra de Borel

Hemos demostrado ya que la familia $\mathscr{M}$ de los conjuntos medibles contiene a todos los abiertos y a los cerrados de $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, a todos los conjuntos que podamos formar a partir de ellos mediante las operaciones: paso a complementarios, uniones e intersecciones numerables, etc., como por ejemplo los conjuntos del tipo F_σ (uniones numerables de cerrados) o los del tipo G_δ (intersecciones numerables de abiertos). Todos estos conjuntos constituirán la familia de conjuntos de Borel (o borelianos). Veremos que la relación entre estos conjuntos y los conjuntos medibles es mucho más estrecha que la de una simple relación de contenido.

En primer lugar, recordemos que una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ-álgebra si satisface las condiciones siguientes:

1. Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathscr{A}$.
2. $\mathscr{A}$ es cerrada por paso al complementario, es decir si $B \in \mathscr{A}$ entonces $B^c \in \mathscr{A}$.
3. $\mathscr{A}$ es cerrada respecto a uniones numerables, es decir si $B_k \in \mathscr{A}$, $k = 1, \ldots$ entonces $\cup B_k \in \mathscr{A}$.

Procediendo como para la σ-álgebra $\mathscr{M}$, se deduce que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra entonces $\mathscr{A}$ es cerrada también respecto a las intersecciones numerables y respecto a la diferencia de conjuntos. Por otra parte es inmediato comprobar que *cualquier intersección de σ-álgebras es también una σ-álgebra*. Esto permite dar la siguiente definición.

Definición 18.13 Si X es un espacio topológico, llamaremos σ-álgebra de Borel sobre X a la menor σ-álgebra sobre X que contiene a los abiertos.

Es claro que tal σ-álgebra está siempre bien definida, no es más que la intersección de todas la σ-álgebras que contienen a los abiertos del espacio topológico X. (Nótese que al menos hay una σ-álgebra con esta propiedad, la familia $\mathscr{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X). Es obvio que en $\mathbb{R}^n$ la σ-álgebra de Borel, $\mathscr{B}$, está contenida en $\mathscr{M}$ (existen ejemplos que prueban que esta contención es estricta). La relación entre borelianos y conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ se pone de manifiesto en la siguiente proposición

Proposición 18.14 *Un conjunto L es medible si y sólo si es de la forma $L = B \cup N$, donde B es un conjunto Borel y N es un subconjunto de medida nula.*

Demostración. Puesto que cada boreliano y cada conjunto de medida nula son medibles, todo conjunto del tipo $B \cup N$ es medible. Recíprocamente, si L es medible, aplicando la Proposición 18.9 podemos encontrar una sucesión de cerrados F_P contenidos en L tal que $m^*(L \setminus F_p) < 1/p$. Tomando entonces el conjunto F_σ (boreliano), $B = \bigcup_p F_p$, se tiene que

$$m^*(L \setminus B) \leq m^*(L \setminus F_p) < 1/p, \ \forall p,$$

luego el conjunto $N = L \setminus B$ es de medida nula y $L = B \cup N$. ∎

Ejercicios

18A Probar que para todo $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$m^*(A) = \text{ínf} \ \left\{ \sum m(I_k) : \ A \subset \cup I_k \right\}$$

con el ínfimo extendido sólo al conjunto de colecciones numerables, $\{I_k\}$, de intervalos “abiertos”que recubren el conjunto A.

18B Sean A_1, A_2 dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $d(A_1, A_2) > 0$. Probar que $m^*(A_1 \cup A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2)$.

18C (Identidad de Caratheodory) Probar que un conjunto B de $\mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si para todo conjunto A, se verifica la siguiente identidad

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B).$$

18D Probar que todo conjunto B de $\mathbb{R}^n$ cuya frontera sea un conjunto de medida nula es medible.

18E Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existen dos conjuntos medibles C, D tales que $B \subset C$, $B^c \subset D$ y $m(C \cap D) < \varepsilon$. Probar que B es medible

18F Probar que un conjunto B es medible si y sólo si, cualesquiera que sean los conjuntos $A_1 \subset B$, $A_2 \subset B^c$, se tiene

$$m^*(A_1 \cup A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2)$$

18G Obtener la medida del conjunto de números reales de $[0, 1]$ que en su expresión decimal sólo tienen "ceros y unos".

18H Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ con $m^*(A) < \infty$. Demostrar que si A contiene un conjunto medible B tal que $m(B) = m^*(A)$, entonces A es medible. ¿Es esto cierto si $m^*(A) = \infty$?

18I Demostrar que para cada $\alpha \in [0, 1)$ existe un conjunto perfecto, tipo Cantor, de medida igual a α.
Indicación. Elegir adecuadamente las longitudes $\delta_1, \delta_2, \ldots,$ de los intervalos centrales que se quitan en cada paso de la construcción del conjunto tipo Cantor.

18J Demostrar que para todo conjunto A de $\mathbb{R}^n$ y todo α se tiene que

$$m^*(\alpha A) = |\alpha|^n m^*(A),$$

y que si B es medible entonces αB también es medible.

18K Probar que existen conjuntos no medibles de cualquier medida.

18L (La Medida de Jordan). Dado un conjunto acotado $C \subset \mathbb{R}^n$ se define la medida exterior de Jordan de C como

$$\overline{m}\,(C) = \text{ínf}\{\sum m(I_k) \colon C \subset \cup I_k\},$$

donde con (I_k) se denota a las colecciones *finitas* de semintervalos que recubren al conjunto C.

(a) Probar que en la definición anterior los semintervalos I_k se pueden tomar disjuntos entre sí.

Análogamente, se define la medida interior de Jordan del conjunto acotado C como

$$\underline{m}\,(C) = \sup\{\sum m(I_k) \colon C \supset \cup I_k\},$$

donde con (I_k) se denota a las colecciones *finitas* de semintervalos *disjuntos entre sí* contenidos en C.

(b) Probar que $\underline{m}\,(C) \leq m^*(C) \leq \overline{m}\,(C)$.

El conjunto acotado C se dirá j-medible (Jordan-medible) si $\overline{m}\,(C) = \underline{m}\,(C)$.

(c) Probar que el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ no es un conjunto j-medible.

(d) Demostrar que si C es un conjunto j-medible entonces su frontera es un conjunto de medida nula.

(e) Deducir del apartado anterior que todo conjunto j-medible es Lebesgue medible.

(f) Encontrar un abierto de $\mathbb{R}$ que contenga al conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y cuya frontera tenga medida no nula.

18M Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y I un semintervalo que contenga a A. Se define entonces $m_*(A)$, la medida interior de Lebesgue de A, como

$$m_*(A) = m(I) - m^*(I \setminus A)$$

(a) Probar que $m_*(A)$ es independiente del intervalo I que contenga a A.

(b) Demostrar que para todo conjunto acotado A $m_*(A) \leq m^*(A)$.

(c) Comparar las medidas interiores de Jordan y de Lebesgue del conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

(d) Probar que un conjunto acotado B es Lebesgue medible si y sólo si $m^*(B) = m_*(B)$.

18N (a) Probar que si μ es una medida sobre $\mathscr{B}$ invariante por traslaciones y con la propiedad $\mu(K) < \infty$ para cada compacto K, entonces existe $c \geq 0$ tal que $\mu(B) = cm(B)$ para cada $B \in \mathscr{B}$. Se sugieren los siguientes pasos:

1. Sea Q_0 el semicubo $[0,1)^n$ y $Q_k = [0, 1/2^k)^n$. Probar que $\mu(Q_k) = \mu(Q_0)m(Q_k)$.
2. Sea $c = \mu(Q_0)$. Teniendo en cuenta que al ser μ invariante por traslaciones, $\mu(Q) = \mu(Q_k)$ si Q es un semicubo de lado $1/2^k$, probar que $\mu(U) = cm(U)$ para todo abierto U.
3. Para extender la fórmula anterior a cada $B \in \mathscr{B}$, usar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto U y un cerrado F tal que $F \subset B \subset U$ y $m(U \setminus F) < \varepsilon$.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un aplicación lineal no singular. Probar que mediante la fórmula $\mu(B) = m(T(B))$ se define una medida sobre $\mathscr{B}$ invariante por traslaciones y finita sobre los compactos. Luego existe $c(T)$ tal que $m(T(B)) = c(T)m(B)$ (ver 24.2 para probar que $c(T) = |det\,(T)|$).

(c) Deducir de (b) que la medida de Lebesgue es invariante por rotaciones.

18Ñ Dar ejemplos de conjuntos medibles $B_1 \subset B_2$ para los que $m(B_2 \setminus B_1)$ sea, sucesivamente, igual a $0, 1, \infty$.

18O (Teorema de Borel-Cantelli) Sea $\{B_p\}$ un sucesión de conjuntos medibles y supongamos que

$$\sum_{p=1}^{\infty} m(B_p) < \infty.$$

Probar que el conjunto P de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que están en infinitos B_p tiene medida nula.
Indicación. Observar que el conjunto $P = \bigcap_p \bigcup_{j \geq p} B_j$.

18P Sea B un conjunto medible contenido en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea h la aplicación de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = m(B \cap [a, x]).$$

(a) Probar que h es continua y creciente.
(b) Probar que si B es un abierto denso de $[a, b]$ entonces h es estrictamente creciente.
(c) Demostrar que para cada número real $0 \leq \alpha \leq m(B)$ existe un conjunto medible $B_\alpha \subset B$ tal que $m(B_\alpha) = \alpha$.
(d) Demostrar que si $m(B) > 0$ entonces, para cada $0 < \alpha < m(B)$, B contiene un subconjunto no medible V tal que $m^*(V) = \alpha$.

18Q Demostrar que la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por las siguientes familias de conjuntos: Los semintervalos, los conjuntos compactos, los conjuntos del tipo $\{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_1 \leq b_1, \ldots, x_n \leq b_n\}$.

18R Sean X, Y espacios topológicos

(a) Probar que si h es una aplicación continua de X en Y entonces la contraimagen por h de un conjunto de Borel en Y es un conjunto de Borel de Y.
(b) Utilizar que las proyecciones en un producto topológico son continuas para probar que el producto cartesiano de un conjunto de Borel de X y un conjunto de Borel de Y es un conjunto de Borel en $X \times Y$.

18S Sea B un abierto denso de $[0, 1]$ tal que $m(B) < 1$ (por tanto $m([0, 1] \setminus B) > 0$).

(a) Demostrar que la aplicación

$$\varphi(x) = \frac{m(B \cap [0, x])}{m(B)}$$

es un homeomorfismo de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ (ver ejercicio (18P).
(b) Probar que $m(\varphi(B)) = 1$.

(c) Sea V un conjunto no medible contenido en $[0,1]\setminus B$. Probar que $\varphi(V)$ es un conjunto medible que no es un conjunto de Borel.

(d) Observar que φ no mantiene el carácter medible de los conjuntos, a pesar de ser un homeomorfismo.

18T Demostrar que si B es un conjunto medible, entonces

$$m(B) = \sup\{m(K) : K \text{ compacto} \subset B\}.$$

Recíprocamente, si la fórmula anterior es cierta y B es de medida finita, entonces B es medible.

18U Probar que todo subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de medida nula de $\mathbb{R}^n$.

18V Probar que la gráfica de toda función continua $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, donde U es un conjunto abierto, es un conjunto de medida nula. En particular, probar que toda variedad diferenciable de $\mathbb{R}^k$ de dimensión $n < k$ es un conjunto de medida nula de $\mathbb{R}^k$.