Capítulo 19

Integración de Funciones Medibles no Negativas

Una vez estudiada en los capítulos anteriores la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, vamos a desarrollar ahora la integración en el sentido de Lebesgue. En primer lugar se definirá la integral de ciertas funciones elementales, las funciones simples, para en etapas sucesivas extender la definición a una familia suficientemente amplia de funciones reales que denominaremos medibles, y que, en particular, contiene a todas las funciones continuas.

Funciones simples

Definición 19.1 Una función $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice simple si toma toma un número finito de valores i.e., si $\operatorname{Im} s$ es un conjunto finito de números reales,$b_1, b_2, \ldots, b_p$. Si $B_j = \{x \colon s(x) = b_j\}$, entonces es obvio que $s = \sum_{j=1}^{p} b_j \mathcal{X}_{B_j}$. Cuando los conjuntos B_j sean medibles, se dirá que s es medible, y si los B_j son intervalos, se dirá que s es escalonada.

Definición 19.2 Con las notaciones anteriores, si $0 \le s$ es una función simple medible y E es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$, definiremos la integral de s sobre E como

$$\int_E s = \sum_{j=1}^{p} b_j m(B_j \cap E).$$

Como convenio, escribiremos $\int s$ en lugar de $\int_{\mathbb{R}^n} s$. También en la definición anterior, se supondrá que $0 \cdot \infty = 0$ i.e., $b_j = 0,\ m(B_j \cap E) = \infty \Rightarrow b_j m(B_j \cap E) = 0$.

A continuación enumeramos algunas propiedades relativas a la integración de funciones simples:

1. *Si $0 \leq s$ es una función simple medible, entonces $\mu(E) = \int_E s$ es una medida sobre la σ-álgebra $\mathscr{M}$ de los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$*

Puesto que $m(\emptyset) = 0$ es obvio que $\mu(\emptyset) = 0$. Sea $\{E_k\}$ una colección numerable de medibles disjuntos dos a dos, $b_1, \ldots, b_p$ los valores de s y $B_j = s^{-1}(b_j)$ entonces

$$\mu(\cup E_k) = \int_{\cup E_k} s = \sum b_j m(B_j \cap (\cup E_k))$$
$$= \sum_j b_j \sum_k m(B_j \cap E_k) = \sum_k \sum_j b_j m(B_j \cap E_k) = \sum_k \int_{E_k} s. \quad \blacksquare$$

2. *Si $0 \leq s$ es una función simple y medible y E un conjunto medible, entonces $\int_E s = \int s\mathcal{X}_E$.*

Denotando por b_j y B_j como antes, es claro que $s\mathcal{X}_E$ toma el valor b_j justamente en $B_j \cap E$ y el valor 0 en E^c, luego $s\mathcal{X}_E$ es medible y $\int s\mathcal{X}_E = \sum b_j m(B_j \cap E) + 0m(E^c) = \int_E s$. $\blacksquare$

3. *Sean $0 \leq s \leq t$ funciones simples medibles y E un conjunto medible. Entonces $\int_E s \leq \int_E t$.*

Sean $b_1, \ldots, b_p$ los valores de s, $c_1, \ldots, c_q$ los valores de t y $B_i = s^{-1}(b_i)$, $C_j = t^{-1}(c_j)$. Obviamente la familia finita $\{B_i \cap C_j\}_{i,j}$ es una partición de $\mathbb{R}^n$, luego $\int s = \sum_{i,j} \int_{B_i \cap C_j} s$ (e igualmente para t). Para probar que $\int s \leq \int t$ bastará ver que para cada i, j

$$\int_{B_i \cap C_j} s = \int s\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} \leq \int t\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} = \int_{B_i \cap C_j} t.$$

Si $B_i \cap C_j = \emptyset$ entonces $s\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} = t\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} = 0$ y la desigualdad se cumple trivialmente. Si $B_i \cap C_j \neq \emptyset$ entonces para $x \in B_i \cap C_j$ se tiene $s(x)\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}(x) = b_i = s(x) \leq t(x) = t(x)\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}(x) = c_j$ y ambas funciones se anulan en cada x que no esté en $B_i \cap C_j$. Se deduce pues que

$$\int s\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} = b_i m(B_i \cap C_j) \leq c_j m(B_i \cap C_j) = \int t\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}.$$

La desigualdad $\int_E s \leq \int_E t$, se deduce inmediatamente de la fórmula $\int_E s = \int s\mathcal{X}_E$. $\blacksquare$

4. *Si s, t son funciones simples no negativas y medibles y E es medible, entonces $\int_E (s+t) = \int_E s + \int_E t$.*

Usando las mismas notaciones que en la propiedad anterior y razonando igual, bastará probar que $\int (s+t)\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} = \int s\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} + \int t\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}$. De nuevo esto es cierto trivialmente si $B_i \cap C_j = \emptyset$. Si $B_i \cap C_j \neq \emptyset$, entonces las funciones $s\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}, t\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}, (s+t)\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}$ toman, respectivamente, el valor $b_i, c_j, b_i + c_j$ sobre $B_i \cap C_j$ y el valor 0 fuera de este conjunto, luego:

$$\begin{aligned}\int (s+t)\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} &= (b_i + c_j)m(B_i \cap C_j) = b_i m(B_i \cap C_j) + c_j m(B_i \cap C_j) \\ &= \int s\mathcal{X}_{B_i \cap C_j} + \int t\mathcal{X}_{B_i \cap C_j}.\end{aligned}$$

∎

5. *Si s es función simple no negativa y medible, c un número real no negativo y E un conjunto medible, entonces $\int_E (cs) = c\int_E s$.*

Si $c = 0$ entonces $cs = 0$, luego $\int_E (cs) = \int_E 0 = 0 = 0\int_E s$. Convenio: $0 \cdot \infty = 0$.

Si $c > 0$ entonces cs es una función que toma el valor cb_i justamente donde s toma el valor b_i. Luego sc es simple y medible y $\int_E (cs) = c\int_E s$. ∎

Integración de funciones no negativas

Lema 19.3 *Para cada $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, existe una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas, que converge puntualmente hacia f. Abreviadamente, $0 \leq s_k \nearrow f$.*

Demostración. La demostración de esta implicación se basa en una técnica clásica de aproximación uniforme: dado $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } \varepsilon < f(x) \leq 2\varepsilon \\ \cdots & \\ (p-1)\varepsilon & \text{si } (p-1)\varepsilon < f(x) \leq p\varepsilon \\ \cdots & \end{cases}$$

Es obvio entonces que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) < \infty$ se tiene que $0 \leq f(x) - t(x) \leq \varepsilon$.

Para construir la sucesión $\{s_p\}$ tomaremos sucesivamente $\varepsilon = 1/2$, $1/2^2, \ldots, 1/2^p, \ldots$, y definimos s_p igual que t (con $\varepsilon = 1/2^p$) cuando $f(x) \leq p$, mientras que le asignamos el valor p cuando $f(x) > p$. Obviamente s_p es una función simple y para x tal que $f(x) \leq p$ se tiene $0 \leq f(x) - s_p(x) \leq \varepsilon_p = 1/2^p$. Esta desigualdad expresa claramente que la sucesión $\{s_p(x)\}$ converge puntualmente hacia $f(x)$ para cada x tal que $f(x) < \infty$, pues si $f(x) < \infty$ entonces $f(x) \leq p$ para todo p posterior a algún $p(x)$. ¿Qué ocurre si $f(x) = \infty$? En ese caso $s_p(x) = p$ para todo p y por tanto la sucesión $\{p(x)\}$ es divergente i.e, converge hacia $f(x) = \infty$.

Falta probar que la sucesión $\{s_p\}$ es creciente. La prueba no es más que una extrapolación de lo que sucede con los dos primeros términos i.e, que $s_1 \leq s_2$:

$$s_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leq \varepsilon_1 = 1/2 \\ \varepsilon_1 & \text{si } \varepsilon < f(x) \leq 2\varepsilon_1 = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < f(x) \end{cases}$$

$$s_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \leq \varepsilon_2 = 1/2^2 \\ \varepsilon_2 & \text{si } \varepsilon_2 < f(x) \leq 2\varepsilon_2 = 1/2 \\ 2\varepsilon_2 = \varepsilon_1 & \text{si } 2\varepsilon_2 < f(x) \leq 3\varepsilon_2 = 3/2^2 \\ 3\varepsilon_2 = 3/2\varepsilon_1 & \text{si } 3\varepsilon_2 < f(x) \leq 4\varepsilon_2 = 1 \\ \cdots & \\ 7\varepsilon_2 & \text{si } 7\varepsilon_2 < f(x) \leq 8\varepsilon_2 = 2 \\ 2 & \text{si } 2 < f(x) \end{cases}$$

Es inmediato, a la vista de la descripción anterior, que $s_1 \leq s_2$.

Es razonable pensar que la aproximación de una función no negativa a partir de funciones simples, hecha en el lema anterior, debiera servir también como recurso para aproximar la integral de esa función. Pero si queremos que el operador "integral" tenga buenas propiedades, en particular la linealidad, debemos restringir el conjunto de funciones sobre el que opere la integral. Ya lo hicimos en el caso de las funciones simples al definir solamente la integral de funciones simples y medibles. Ahora sólo vamos a definir la integral de aquellas funciones $f \geq 0$ para las que las funciones s_p que construimos en el lema anterior sean medibles, y que llamaremos también medibles.

Definición 19.4 Una función $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ se dice medible si para cada número real α, $f^{-1}(\alpha, \infty] = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible

Observemos, en primer lugar, que para una función simple s la nueva noción de medible es equivalente a la dada anteriormente: en efecto, si se supone que los conjuntos $B_j = s^{-1}(b_j)$ son medibles y suponemos ordenados los valores de s es decir $b_1 < b_2 < \ldots < b_p$, entonces

$$\{x : s(x) > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{si } \alpha < b_1, \\ \cup_{j>i} B_j & \text{si } b_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}, \\ \emptyset & \text{si } b_p \leq \alpha, \end{cases}$$

luego medible.

Recíprocamente, si para cada α, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : s(x) > \alpha\}$ es medible, entonces $B_j = \{x : s(x) = b_j\} = \{x : s(x) > b_{j-1}\} \setminus \{x : s(x) > b_j\}$ y por tanto medible.

Proposición 19.5 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ es medible si y sólo si existe una sucesión monótona creciente de funciones simples, no negativas y medibles que converge puntualmente a f.*

Demostración. Supongamos f medible y veamos que las funciones simples de la sucesión $\{s_p\}$ del lema 19.3 son medibles. Para ello basta observar que estas funciones toman sus valores en conjuntos del tipo $\{x : (r-1)\varepsilon < f(x) \leq r\varepsilon\} = \{x : f(x) > (r-1)\varepsilon\} \cap \{x : f(x) > r\varepsilon\}^c$ o del tipo $\{x : f(x) > p\}$, que son medibles.

Recíprocamente si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$ y $\lim_{p\to\infty} t_p(x) = f(x)$, con las t_p simples y medibles entonces es fácil ver que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : t_p(x) > \alpha\},$$

de lo que se deduce que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$ es medible por ser unión numerable de conjuntos medibles.

Definición 19.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ una función medible y E un conjunto medible. Llamaremos integral de f sobre E, $\int_E f$, a $\sup\{\int_E s : 0 \leq s \leq f\}$, s simple y medible.

De las propiedades dadas para la integración de funciones simples, se deduce:

1. *Si $0 \leq t$ es una función simple medible, entonces*

$$\int_E t = \sup\{\int_E s : 0 \leq s \leq t\},\ \textit{s simple medible}$$

2. *Si* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *es medible y* E *es un conjunto medible entonces* $f\mathcal{X}_E$ *es medible y* $\int_E f = \int f\mathcal{X}_E$

Demostración. 1. Se deduce inmediatamente de la propiedad $0 \leq s \leq t \Rightarrow \int_E s \leq \int_E t$.

En cuanto a (2.) se tiene:

La función $f\mathcal{X}_E$ es medible:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n : (f\mathcal{X}_E)(x) > \alpha\} &= \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E^c : (f\mathcal{X}_E)(x) > \alpha\} \\ &= \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \begin{cases} E^c & \text{si } \alpha < 0 \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$\int_E f \leq \int f\mathcal{X}_E$:

Si $0 \leq s \leq f$ entonces $0 \leq s\mathcal{X}_E \leq f\mathcal{X}_E$, luego

$$\int_E f = \int f\mathcal{X}_E \leq \sup\{\int t : 0 \leq t \leq f\mathcal{X}_E\} = \int f\mathcal{X}_E$$

$\int_E f \geq \int f\mathcal{X}_E$:

Si $0 \leq t \leq f\mathcal{X}_E$, entonces $0 \leq t \leq f$ y $t = t\mathcal{X}_E$, luego $\int t = \int t\mathcal{X}_E = \int_E t \leq \int_E f$. De esto se deduce que

$$\int f\mathcal{X}_E = \sup\{\int t : 0 \leq t \leq f\mathcal{X}_E\} \leq \int_E f.$$

Antes de continuar con la enumeración de propiedades de la integral de funciones medibles no negativas, conviene hacer una extensión del concepto de función medible.

Definición 19.7 Por función medible sobre un conjunto medible E se entenderá una función, f, definida en algún subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ que contiene a E, que toma sus valores en $[-\infty, \infty]$ y tal que, para cada número real α, el conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, \infty] \cap E$ es medible.

Si f es una función medible sobre E, entonces es claro que la función (definida en todo $\mathbb{R}^n$) que vale 0 en E^c y coincide con f en E es medible. Denotaremos a esta función por $f\mathcal{X}_E$ (observar que, al hacer esto, cometemos un abuso de notación, pues estrictamente hablando la función $f\mathcal{X}_E$ sólo esta definida en donde esté definida f y por tanto no necesariamente en todo $\mathbb{R}^n$).

Definición 19.8 Si f es una función no negativa y medible sobre E se define $\int_E f = \int f\mathcal{X}_E$.

3. *Si N es un conjunto de medida nula entonces $\int_N f = 0$, cualquiera que sea la función $f \geq 0$ definida sobre N.*

Si f es simple entonces $\int_N f = b_1 m(B_1 \cap N) + \ldots + b_p m(B_p \cap N) = 0 + \ldots + 0 = 0$. En general, $\int_N f = \int f\mathcal{X}_N = \sup\{\int s : 0 \leq s \leq f\mathcal{X}_N\} = 0$, ya que $0 \leq s \leq f\mathcal{X}_N \to \int s = \int_N s$. ∎

4. *Si f, g son funciones medibles sobre E y $0 \leq f \leq g$ entonces $\int_E f \leq \int_E g$.*

Para $E = \mathbb{R}^n$ la desigualdad ya se ha probado cuando las funciones son simples. Entonces

$$\int f = sup\{\int s : 0 \leq s \leq f\} \leq sup\{\int s : 0 \leq s \leq g\} = \int g.$$

En general, si $f \leq g$ y E medible, se tiene $f\mathcal{X}_E \leq g\mathcal{X}_E$, luego $\int_E f = \int f\mathcal{X}_E \leq \int g\mathcal{X}_E = \int_E g$. ∎

A continuación vamos a ver que, como cabía esperar, la integral de una función no negativa respecto a la medida de Lebesgue es la medida del conjunto "comprendido entre la gráfica de la función y el eje X".

Por definición, dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ y $E \subset A$, llamaremos *conjunto de ordenadas de f sobre E* al conjunto

$$\operatorname{Ord}_E f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : 0 \leq y < f(x)\}.$$

Cuando $E = \mathbb{R}^n$ se escribirá $\operatorname{Ord} f$ en lugar de $\operatorname{Ord}_{\mathbb{R}^n} f$. Observar que los puntos de la gráfica de f no están en $\operatorname{Ord}_E f$

Teorema 19.9 *Si f es una función no negativa y medible sobre el conjunto medible E entonces el conjunto $\operatorname{Ord}_E f$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\int_E f = m(\operatorname{Ord}_E f)$.*

Demostración. Haremos la demostración primero para funciones simples, a continuación para funciones medibles definidas en todo $\mathbb{R}^n$ y por último para funciones medibles sobre conjuntos medibles.

i) Si f es una función simple que toma los valores $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sobre los conjuntos medibles $B_1, B_2, \ldots, B_p$, es inmediato comprobar que $\operatorname{Ord} f =$

$\cup_{i=1}^{p} B_i \times [0, b_i)$. Puesto que los conjuntos B_i son disjuntos, para que la igualdad del teorema se satisfaga sólo será necesario ver que *"si B es un conjunto medible entonces $B \times [0, b)$ es medible y $m(B \times [0, b)) = bm(B)$"*. En efecto, en tal caso

$$m(\operatorname{Ord} f) = m(\cup_{i=1}^{p} B_i \times [0, b_i)) = \sum b_i m(B_i) = \int s.$$

Probemos entonces el enunciado entre comillas:

Observemos, en primer lugar, que éste es cierto cuando B es un abierto. En este caso, escribiendo B como unión numerable de n-semicubos disjuntos se tiene: $B = \cup I_p$ implica que $B \times [0, b) = \cup I_p \times [0, b)$ es unión numerable de semintervalos disjuntos, luego es medible y

$$m(B \times [0, b)) = \sum m(I_p \times [0, b)) = \sum bm(I_p) = b \sum m(I_p) = bm(B)$$

En general, si B es medible, para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un abierto U y un cerrado F tales que $F \subset B \subset U$ y $m(U \backslash B) < \varepsilon$; $m(B \backslash F) < \varepsilon$ y por tanto $m(U \setminus F) < 2\varepsilon$. Entonces,

1. $m^*(B \times [0, b)) \leq m(U \times [0, b)) = bm(U) \leq bm(B) + b\varepsilon$.

2. $$\begin{aligned} bm(B) &\leq bm(U) = m(U \times [0, b]) = m((B \cup (U \setminus B)) \times [0, b)) \\ &\leq m^*(B \times [0, b)) + m^*((U \setminus B) \times [0, b)) \\ &\leq m^*(B \times [0, b)) + m((U \setminus F) \times [0, b)) \\ &= m^*(B \times [0, b)) + bm(U \setminus F) \leq m^*(B \times [0, b)) + 2b\varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que en todo lo anterior ε es arbitrario, de i) y ii) se deduce que $m^*(B \times [0, b)) = bm(B)$.

3. $B \times [0, b)$ es medible: Consideremos el conjunto medible $U \times [0, b)$, que obviamente contiene a $B \times [0, b)$. En ii) se ha visto, en particular, que $m^*(U \times [0, b) \setminus B \times [0, b)) < 2b\varepsilon$. Deducir de ahí que $B \times [0, b)$ es medible es un ejercicio sencillo.

ii) Sea ahora $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ medible. Por la Proposición 19.5, sabemos que existe una sucesión monótona creciente $\{s_p\}$ de funciones simples, no negativas y medibles, que converge puntualmente a f. Es inmediato comprobar que, en estas condiciones, se tiene que $\operatorname{Ord} s_1 \subset \operatorname{Ord} s_2 \subset \ldots \subset \ldots \operatorname{Ord} f$. Además, de la convergencia puntual de la sucesión a la función f se deduce que

$$\operatorname{Ord} f = \cup_{p=1}^{\infty} \operatorname{Ord} s_p.$$

En efecto, si $(x, y) \in \operatorname{Ord} f$, es decir $0 \leq y < f(x) = \lim_{p\to\infty} s_p(x)$ entonces a partir de un cierto término se tiene que $y < s_p(x) \leq f(x)$, o sea $(x, y) \in \operatorname{Ord} s_p$.

De lo anterior resulta que $\operatorname{Ord} f$ es medible, por ser unión numerable de conjuntos medibles, y que

$$m(\operatorname{Ord} f) = \lim_{p\to\infty} m(\operatorname{Ord} s_p) = \lim_{p\to\infty} \int s_p \leq \sup\{\int s : 0 \leq s \leq f\} = \int f.$$

Por otra parte si s es una función simple medible tal que $0 \leq s \leq f$ entonces $\int s = m(\operatorname{Ord} s) \leq m(\operatorname{Ord} f)$, luego

$$\int f = \sup\{\int s : 0 \leq s \leq f\} \leq m(\operatorname{Ord} f)$$

iii) Finalmente, si $0 \leq f$ es medible sobre sobre E entonces $f\mathcal{X}_E$ es una función medible en todo $\mathbb{R}^n$ y es fácil ver que $\operatorname{Ord}_{\mathrm{E}} f = \operatorname{Ord}(f\mathcal{X}_E)$. Aplicando entonces ii) se tiene que $\operatorname{Ord}_{\mathrm{E}} f$ es medible y que

$$m(\operatorname{Ord}_{\mathrm{E}} f) = m(\operatorname{Ord}(f\mathcal{X}_E)) = \int f\mathcal{X}_E = \int_E f.$$

∎

Corolario 19.10 (Teorema de la convergencia monótona) *Sea $\{f_k\}$ una sucesión creciente de funciones no negativas y medibles sobre un conjunto medible E no negativas y $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, entonces f es una función medible sobre E y*

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

Demostración. Que la función f es medible sobre E se deduce de la igualdad

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_p \{x \in E : f_p(x) > \alpha\}.$$

Razonando como en ii) del teorema anterior se deduce que

$$\operatorname{Ord}_E(f) = \cup \operatorname{Ord}_E(f_k),$$

luego

$$\int_E f = m(\operatorname{Ord}_E(f)) = \lim_{k\to\infty} m(\operatorname{Ord}_E(f_k)) = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

∎

Corolario 19.11 *Sean f, g funciones no negativas y medibles sobre E y $c \in \mathbb{R}^+$. Entonces las funciones $f+g$ y cf son medibles sobre E y se tiene que*

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g; \qquad \int_E cf = c\int_E f.$$

Demostración. Demostraremos sólo lo que respecta a la suma, de forma análoga se puede proceder para la multiplicación por escalares. Sean pues f, g no negativas y medibles sobre E y sean $0 \leq s_k \nearrow f\mathcal{X}_E,\ 0 \leq t_k \nearrow g\mathcal{X}_E$, dos sucesiones no decrecientes de funciones simples y medibles, convergiendo a $f\mathcal{X}_E$ y a $g\mathcal{X}_E$, respectivamente. Entonces $0 \leq s_k + t_k \nearrow (f+g)\mathcal{X}_E$, por lo que, aplicando el teorema de la convergencia monótona se deduce que $f+g$ es medible sobre E y que

$$\begin{aligned}\int_E (f+g) &= \int (f+g)\mathcal{X}_E \\ &= \lim_{k\to\infty} \int (s_k + t_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\int s_k + \int t_k \right) \\ &= \int f\mathcal{X}_E + \int g\mathcal{X}_E = \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

∎

Consecuencias

19.12 *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones no negativas y medibles sobre E, entonces*

$$\int_E \sum f_k = \sum \int_E f_k.$$

Para probarlo sólo hay que aplicar el teorema de la convergencia monótona y la aditividad del operador integral a la sucesión de funciones no negativas

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} f_i.$$

∎

19.13 *Si f es una función medible y no negativa, la función de conjunto*

$$\mu(E) = \int_E f, \quad E \in \mathcal{M},$$

es una medida sobre $\mathcal{M}$,

Si $\{E_k\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, del resultado anterior y la igualdad $f\mathcal{X}_{\cup E_k} = \sum f\mathcal{X}_{E_k}$, se deduce que

$$\int f\mathcal{X}_{\cup E_k} = \sum \int f\mathcal{X}_{E_k} = \sum \int_{E_k} f.$$

∎

Aplicando las propiedades de toda medida a la medida $\mu(E) = \int_E f$, se deduce:

19.14 *Sea f es una función no negativa y medible,*

1. *Si E_1, E_2 son conjuntos medibles $E_1 \subset E_2$, entonces $\int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f$.*
2. *Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles entonces*
$$\int_{\cup E_p} f = \lim_{p\to\infty} \int_{E_p} f.$$
3. *$E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles y $\int_{E_1} f < \infty$ entonces*
$$\int_{\cap E_p} f = \lim_{p\to\infty} \int_{E_p} f.$$

Ejercicios

19A (a) Probar que toda función medible $f \geq 0$ puede expresarse en la forma

$$f = \sum_{k\in D\subset\mathbb{N}} b_k \mathcal{X}_{B_k}.$$

(b) Probar que si G_k es un conjunto G_δ tal que $B_k \subset G_k$ y $m(G_k \setminus B_k) = 0$ entonces $\{x\colon f(x) \neq \sum b_k\mathcal{X}_{G_k}\}$ es un conjunto de medida nula.

19B (a) Probar que si B es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y de medida finita, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto E que es unión finita de semintervalos tal que $m(B\Delta E) < \varepsilon$ $(B\Delta E = (B \setminus E) \cup (E \setminus B))$.

(b) Probar la fórmula $|\mathcal{X}_B - \mathcal{X}_E| = \mathcal{X}_{B\Delta E}$.

(c) Sea $f \geq 0$ una función medible. Probar que si $\{s_p\}$ es una sucesión de funciones simples tal que $0 \leq s_p \nearrow f$, entonces

$$t_p = s_p\mathcal{X}_{\{x\colon \|x\|\leq p\}}$$

es otra sucesión de funciones simples que verifica $0 \leq t_p \nearrow f$.

(d) Sea $f \geq 0$ una función medible. Utilizar el teorema de Borel-Cantelli (Ejercicio 18O) y los apartados anteriores para construir una sucesión de funciones escalonadas $\{\alpha_p\}$ que converja en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ a f, es decir tal que

$$\{x \colon \{\alpha_p(x)\} \text{ no converge a f(x)}\}$$

sea de medida nula.