Capítulo 20

Integración de Funciones Reales

Nos proponemos estudiar en este capítulo las propiedades fundamentales del operador "integral". En particular, extenderemos aquí al caso de funciones medibles con valores reales las propiedades ya vistas en el capítulo 19 sobre la integración de funciones medibles no negativas.

Previamente dedicaremos una sección al estudio de las funciones medibles. En ella veremos que igual que la σ-álgebra de los conjuntos medibles, esta familia de funciones, además de contener a todas las funciones "razonables"(por supuesto son medibles todas las continuas, las integrables en el sentido de Riemann etc.), goza de muy buenas propiedades algebraicas.

Propiedades y ejemplos de funciones medibles

Consecuencia directa de la definición es la siguiente proposición

Proposición 20.1 *Sean B_1, B_2 conjuntos medibles contenidos en el dominio de una función f.*

(a) *Si $B_1 \subset B_2$ y $f_{|B_2}$ es medible, entonces $f_{|B_1}$ también es medible.*

(b) *$f_{|B_1 \cup B_2}$ es medible si y sólo si $f_{|B_1}$ y $f_{|B_2}$ son medibles.*

Demostración. Es inmediato.

Ejemplos 20.2 El primer ejemplo de función medible que hemos visto es el de función simple. De la caracterización dada para las funciones medibles, es inmediato comprobar que también va a ser medible cada función continua y más precisamente,

1. *Sea f una función definida sobre el conjunto medible B. Supongamos que el conjunto $D(f)$ de los puntos de discontinuidad de f es de medida nula, entonces f es medible sobre B.*

En efecto, denotemos por $C(f)$ al conjunto de puntos de continuidad de f ($C(f)$ es medible, pues $C(f) = B \setminus D(f)$). Como hipótesis se tiene entonces que $f_{|C(f)}$ es continua. Veamos que $\{x \in B : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible.

$$\{x \in B : f(x) > \alpha\} = \{x \in C(f) : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in D(f) : f(x) > \alpha\}.$$

El conjunto

$$\{x \in C(f) : f(x) > \alpha\} = f^{-1}_{|C(f)}(\alpha, +\infty]$$

es, debido a la continuidad de $f_{|C(f)}$, abierto en el subespacio $C(f)$, es decir que

$$\{x \in C(f) : f(x) > \alpha\} = \mathcal{O} \cap C(f),$$

donde $\mathcal{O}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, luego es un conjunto medible. Como $D(f)$ es de medida nula, se deduce ya lo que queríamos, es decir que $\{x \in B : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto medible. En particular, se deduce de lo anterior que

2. *Toda función Riemann integrable sobre un intervalo $[a, b]$ es medible sobre él.*

Por el teorema de Lebesgue de caracterización de las funciones Riemann integrables, sabemos que estas funciones son continuas salvo en un conjunto de medida cero, luego son medibles.

3. *Existen funciones medibles que no son continuas en ningún punto*

Quizás la más famosa de estas funciones sea la "función de Dirichlet", $f = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$, es decir la función que vale 1 sobre los racionales y 0 sobre los irracionales (O mejor, su restricción a un intervalo acotado, $g = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$). g es una función simple, luego es medible, siendo $\int g = m(\mathbb{Q} \cap [a, b]) = 0$.

Observemos que g constituye un ejemplo de una función cuya integral en el sentido de Lebesgue existe, pero no así en el de Riemann, ya que es discontinua en todo punto y por tanto no es R-integrable.

Como antes con los conjuntos no medibles, la presencia en la Teoría de Conjuntos del Axioma de Elección hace que también existan funciones no medibles. De hecho se puede establecer la siguiente relación entre conjuntos y funciones (no) medibles:

3. *Un conjunto B es medible si y sólo si la función $\mathcal{X}_B$ es medible.*

En efecto, si B es medible entonces $\mathcal{X}_B$ es una función simple y, por tanto, medible. Recíprocamente si $\mathcal{X}_B$ medible entonces $B = \{x : \mathcal{X}_B(x) > 0\}$ es medible.

El siguiente lema y su corolario serán de uso frecuente en el análisis del comportamiento de las funciones medibles respecto a las operaciones usuales.

Lema 20.3 *Sea f una función real y medible sobre el conjunto medible E. Entonces, son equivalentes:*

(i) *Para cada número real α, el conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible.*

(ii) *Para cada número real α, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.*

(iii) *Para cada número real α, el conjunto $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ es medible.*

(iv) *Para cada número real α, el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.*

Demostración. Es claro que i) y ii) son equivalentes y también iii) y iv), ya que los conjuntos involucrados en sus respectivos enunciados son complementarios respecto a E uno del otro. Veamos, por ejemplo, que también son equivalentes i) y iv). En efecto, si suponemos medible cada conjunto de la forma $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$, entonces el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq \beta\}$ puede escribirse como intersección numerable de conjuntos de esa forma:

$$\{x \in E : f(x) \geq \beta\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > \beta - 1/k\},$$

por lo que también resulta medible.

Del mismo modo se procede para establecer que iv) implica i). ∎

Corolario 20.4 *Si f, g son funciones medibles sobre el conjunto medible E, entonces también son medibles los conjuntos*

$$\{x \in E : f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in E : f(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in E : f(x) = g(x)\}.$$

Demostración. Todo resulta de la observación siguiente:

$$\{x \in E : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) < q < g(x)\}.$$

Según esto, el conjunto $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ es unión numerable de conjuntos medibles, pues para cada número racional q

$$\{x \in E : f(x) < q < g(x)\} = \{x \in E : f(x) < q\} \cap \{x \in E : q < g(x)\}.$$

El conjunto $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\}$ es el complementario en E del conjunto $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$, que acabamos de probar (cambiando f por g) que es medible.

Por último,

$$\{x \in E : f(x) = g(x)\} = \{x \in E : f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in E : f(x) \geq g(x)\}.$$ ∎

Proposición 20.5 *Si f, g son funciones reales medibles sobre E, entonces también son medibles sobre E las funciones*

$$(f \vee g)(x) = \sup(f(x), g(x)) \quad y \quad (f \wedge g)(x) = \text{ínf}(f(x), g(x)).$$

Más generalmente, si $\{f_k\}$ es un sucesión de funciones medibles sobre E, entonces también son medibles sobre E las funciones $\bigvee f_k$ y $\bigwedge f_k$.

Demostración. Es evidente que

$$\sup(f_k(x)) > \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \ / \ \ f_k(x) > \alpha,$$

luego

$$\{x \in E : \bigvee f_k(x) > \alpha\} = \bigcup_k \{x \in E : f_k(x) > \alpha\},$$

de lo que se deduce que $\bigvee f_k$ es medible sobre E. Análogamente se prueba que $\bigwedge f_k$ es medible. ∎

Proposición 20.6 *Si f es medible sobre E y λ es un número real, entonces también son medibles sobre E las funciones $f + \lambda$, λf, f^+, f^- y $|f|$.*

Demostración. $f + \lambda$ es una función medible ya que

$$\{x \in E : (f + \lambda)(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha - \lambda\}.$$

Es inmediato que λf es medible si $\lambda = 0$. En el caso $\lambda \neq 0$, basta observar que

$$\{x \in E : \lambda f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \{x \in E : f(x) > \alpha/\lambda\} & \text{si } \lambda > 0 \\ \{x \in E : f(x) < \alpha/\lambda\} & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

De las propiedades ya estudiadas se deduce trivialmente que si f es medible sobre E, entonces $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -(f \wedge 0)$ y $|f| = f \vee -f$, son también medibles sobre E. ∎

Proposición 20.7 *Si f, g son funciones reales medibles sobre E, entonces las funciones $f+g$, fg y f/g (si $g(x) \neq 0,\ x \in E$) son medibles sobre E.*

Demostración. Puesto que

$$\{x \in E : f(x) + g(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha - g(x)\},$$

de la proposición anterior y el corolario 20.4, se deduce que $f+g$ es medible sobre E.

Que el producto de funciones medibles es medible, es consecuencia de la igualdad $(f \cdot g)(x) = 1/2[(f+g)^2(x) - f^2(x) - g^2(x)]$, y de que el cuadrado de una función medible es medible. Veamos que si φ es una función medible, entonces la función φ^2 es también medible. En efecto,

$$\{x \in E : \varphi^2(x) > \alpha\} = \begin{cases} \{x \in E : |\varphi(x)| > \sqrt{\alpha}\}, & \text{si } \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R}^n, & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Finalmente para que f/g sea medible sobre E, obviamente sólo será preciso probar que $1/g$ es medible sobre E:

$$\begin{aligned} \{x \in E : 1/g(x) > \alpha\} =& \{x \in B : g(x) > 0\} \cap \{x \in E : \alpha\, g(x) < 1\} \cup \\ & \{x \in E : g(x) < 0\} \cap \{x : \alpha\, g(x) > 1\}. \end{aligned}$$

∎

Proposición 20.8 *Si f es una función medible sobre E y g es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces $g \circ f$ es medible sobre E.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{x \in E : (g \circ f)(x) < \alpha\} = (g \circ f)^{-1}(-\infty, \alpha) = f^{-1}(g^{-1}(-\infty, \alpha)) \cap E.$$

Puesto que g es continua, $g^{-1}(-\infty, \alpha)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, por lo que

$$g^{-1}(-\infty, \alpha) = \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j),$$

luego

$$\begin{aligned} \{x \in E : (g \circ f)(x) < \alpha\} &= \bigcup_j f^{-1}[\alpha_j, \beta_j) \cap E \\ &= \bigcup_j \{x \in E : f(x) \geq \alpha_j\} \cap \{x \in E : f(x) < \beta_j\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $g \circ f$ es medible sobre E. ∎

Nota. La composición de funciones medibles no es, en general, una función medible (ver Ejercicio 20A).

Funciones integrables

Definición 20.9 Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función medible sobre el conjunto medible E, se define

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Del Teorema 19.9 resulta que

$$\int_E f = m(\operatorname{Ord}_E(f^+)) - m(\operatorname{Ord}_E(f^-)).$$

Asimismo, se tiene la fórmula (ya probada para funciones no negativas)

$$\int_E f = \int f\mathcal{X}_E,$$

la cual se deduce de la definición, sin más que tener en cuenta que $(f\mathcal{X}_E)^+ = f^+\mathcal{X}_E$ y $(f\mathcal{X}_E)^- = f^-\mathcal{X}_E$:

$$\begin{aligned}\int_E f &= \int_E f^+ - \int_E f^- = \int f^+\mathcal{X}_E - \int f^-\mathcal{X}_E \\ &= \int (f\mathcal{X}_E)^+ - \int (f\mathcal{X}_E)^- = \int (f\mathcal{X}_E).\end{aligned}$$

La función f se dice integrable sobre E cuando $\int_E f$ es finita, lo que se expresará por $f \in \mathscr{L}^1(E)$. Cuando $\int_E f = \infty - \infty$ se dice que no existe la integral de f sobre E.

Proposición 20.10 *Una función f medible sobre E es integrable sobre E si y sólo si $|f|$ es integrable, satisfaciéndose la fórmula*

$$\Big|\int_E f\Big| \leq \int_E |f|.$$

Demostración. Puesto $|f| = f^+ + f^-$, de 19.11 se sigue que

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^-. \tag{20.1}$$

Por definición $f \in \mathscr{L}^1(E)$ si y sólo si $\int f^+ < \infty$ y $\int f^- < \infty$. Pero también, de acuerdo a la igualdad 20.1, $|f| \in \mathscr{L}^1(E)$ si y sólo $\int f^+ < \infty$ y $\int f^- < \infty$. Además: $\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f|$.

Nótese que hemos tenido necesidad de suponer que f es medible, ya que si bien la condición f medible implica $|f|$ medible, el recíproco no es cierto. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea V el conjunto de Vitali (conjunto no medible) y consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V \\ -1 & \text{si } x \in V^c \end{cases}$$

La función f no es medible (por ejemplo, $\{x : f(x) > 0\} = V$), en cambio $|f| = 1$ que sí que es medible. Si queremos que $|f|$ sea además integrable, basta con modificar la función anterior, considerando la función $f \cdot \mathcal{X}_I$, con I un intervalo acotado que contenga a V. ∎

Proposición 20.11 *para cada conjunto medible E, $\mathscr{L}^1(E)$ es un espacio vectorial, siendo la integral un operador lineal sobre él i.e., si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$ entonces $\int_E(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$. Se tiene entonces :

$$0 \leq \int_E |\alpha f + \beta g| \leq \int_E (|\alpha||f| + |\beta||g|) = |\alpha| \int_E |f| + |\beta| \int_E |g| < \infty.$$

Vamos a probar la igualdad $\int_E(f+g) = \int_E f + \int_E g$ (de forma análoga se procedería para probar que $\int_E(\lambda f) = \lambda \int_E f$). Teniendo en cuenta las relaciones $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, $f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$, podemos escribir

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

equivalentemente

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

por lo que, aplicando la aditividad del operador integral para funciones medibles no negativas, se tiene que

$$\int_E (f+g)^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E (f+g)^- + \int_E f^+ + \int_E g^+.$$

Como las funciones f, g y $f + g$ son integrables, todos los sumandos anteriores son $\neq \infty$, luego

$$\int_E (f+g)^+ - \int_E (f+g)^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-,$$

es decir $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$. ∎

Proposición 20.12 *Si f, g son funciones integrables sobre E y $f \leq g$, entonces $\int_E f \leq \int_E g$.*

Demostración. Este resultado es ya conocido para funciones medibles no negativas. Si f y g tienen signo arbitrario, entonces $f^+ \leq g^+$ y $f^- \geq g^-$. Se tiene entonces:

$$\begin{matrix} \int_E f^+ \leq \int_E g^+ \\ \int_E f^- \geq \int_E g^- \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \int_E f = \int f^+ - \int_E f^- \leq \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g.$$

∎

Proposición 20.13 *Si f una función integrable sobre E, se verifica:*

(*a*) *$f \in \mathscr{L}^1(B)$ para cada conjunto medible $B \subset E$,*

(*b*) *Si $E = E_1 \cup E_2$, E_1, E_2 medibles y disjuntos, entonces $\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$.*

Demostración. (a) Si $B \subset E$ entonces $|f|\mathcal{X}_B \leq |f|\mathcal{X}_E$, luego

$$\int_B |f| = \int |f|\mathcal{X}_B \leq \int |f|\mathcal{X}_E = \int_E |f| < \infty$$

i.e., $f \in \mathscr{L}^1(B)$.

(b) Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ entonces $\mathcal{X}_{E_1 \cup E_2} = \mathcal{X}_{E_1} + \mathcal{X}_{E_2}$. Luego:

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \cup E_2} f &= \int f\mathcal{X}_{E_1 \cup E_2} = \int (f\mathcal{X}_{E_1} + f\mathcal{X}_{E_2}) \\ &= \int f\mathcal{X}_{E_1} + \int f\mathcal{X}_{E_2} = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f. \end{aligned}$$

∎

Proposición 20.14 *Si f es una función medible y acotada sobre un conjunto E de medida finita, entonces f es integrable sobre E.*

Demostración. Si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E$, entonces $|f|\mathcal{X}_E \leq M\mathcal{X}_E$. Luego f integrable sobre E, concretamente

$$\int_E |f| = \int |f|\mathcal{X}_E \leq \int M\mathcal{X}_E = Mm(E) < \infty.$$

∎

Corolario 20.15 *Toda función continua sobre un compacto es integrable sobre él.*

Demostración. Si f es una función continua sobre el compacto K, entonces f está acotada en el conjunto de medida finita K, luego es integrable sobre K según el criterio anterior. ∎

Nota. Es importante observar que la hipótesis "f continua"del criterio anterior no puede sustituirse por "f continua c.s."Por ejemplo la función $1/x$ es continua en todos los puntos del compacto $[0, 1]$, menos en el 0. Como veremos en el capítulo 13, esta función no es integrable sobre [0,1]. (Es obvio que esta función no es acotada y por tanto no puede utilizarse el argumento de 20.14).

Proposición 20.16 (Continuidad absoluta) *Si f es una función integrable sobre E , entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para conjunto medible $B \subset E$ con $m(B) < \delta$ se tiene que $\int_B |f| < \varepsilon$.*

Demostración. De lo contrario, existiría un $\varepsilon > 0$ y una sucesión de conjuntos $\{B_p\}$ tal que $m(B_p) < 1/2^p$ y $\int_{B_p} |f| > \varepsilon$. Sea entonces $C_p = \bigcup_{k\geq p} B_k$. Obviamente la sucesión $\{C_p\}$ es decreciente y $m(C_p) \leq \sum_{k\geq p} m(B_k) = 1/2^{p-1}$, lo que implica, según (19.14) que

$$\int_{\cap C_p} |f| = \lim_{p\to\infty} \int_{C_p} |f| \geq \lim_{p\to\infty} \int_{B_p} |f| \geq \varepsilon,$$

pero $C = \cap C_p$ es un conjunto de medida nula, luego la integral sobre C de $|f|$ debería ser 0 y no mayor o igual que ε. ∎

Ejercicios

20A (a) Probar que si existe un conjunto B medible tal que $f^{-1}(B)$ es un no medible (ver Ejercicio 18S), entonces la aplicación $\mathcal{X}_B \circ f$ es una función no medible

(b) Demostrar que si f es medible y g es un difeomorfismo entonces $f \circ g$ es medible. En particular, si f es medible entonces también es medible la aplicación $f(ax + b), a, b \in \mathbb{R}$.

20B Probar que si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable entonces la función f', derivada de f, es una función medible.

20C Encontrar ejemplos de funciones no medibles, para las que el módulo o el cuadrado sea medible.

20D Si $\{x : f(x) = \alpha\}$ es medible para todo número real α, ¿es medible la función f?

20E Sea U un abierto de $\mathbb{R}$ que contenga a los racionales del intervalo $[0,1]$ y tal que $m([0,1] \setminus U) > 0$ (Probar que tales abiertos existen).

(a) Sea $P = [0,1] \setminus U$. Demostrar que la función $\mathcal{X}_P$ es discontinua en cada punto $x \in P$.

(b) Sea $f(x) = d(x, P) = \text{ínf}\{|x - s| \colon s \in P\}$ y $g = \mathcal{X}_{\{0\}}$. Probar que f es continua, g es continua c.s, pero $g \circ f$ no es continua c.s.

20F Si f, g son funciones integrables ¿son integrables las funciones $f \wedge g$, $f \vee g$, fg?.

20G Probar que la gráfica de una función medible $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un conjunto de medida nula.
INDICACIÓN. $\text{Gra}\,(f) \subset \text{Ord}\,(f + 1/p) \setminus \text{Ord}\,(f)$.

20H (a) Utilizar el ejercicio 19B para probar que si s es una función simple integrable, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada α tal que $\int |s - \alpha| < \varepsilon$.

(b) Probar que las funciones escalonadas son densas en L^1.

20I Sean f, g funciones medibles estrictamente positivas. Probar que

$$\frac{f}{1 + fg} \in \mathscr{L}^1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ínf}\left(f, \frac{1}{g}\right) \in \mathscr{L}^1.$$

20J Demostrar que si f es una función integrable en $\mathbb{R}$ y existe $\text{lím}_{x \to \infty} f(x)$ entonces este límite vale 0. Dar algún ejemplo de una función integrable que no admita límite en el infinito.

20K Demostrar que si f es una función medible no negativa que toma el valor 1 en un conjunto de puntos de medida infinita, entonces $\int f = \infty$.

20L Estudiar la integrabilidad en el intervalo $[0,1]$ de las funciones

$$f(x) = \text{sen}\, 1/x, \;\; g(x) = \frac{x - 1}{\ln x}.$$