Capítulo 21

Primitivas e Integrales

En este capítulo vamos a trabajar con funciones de una variable. En él estableceremos un caso particular del Teorema Fundamental del Cálculo Integral (ver [3] para el caso general), con el que iniciaremos el cálculo con integrales. Utilizaremos la notación $\int_a^b f(t)dt$ para referirnos a $\int_{[a,b]} f$

Las integrales de Riemann y Lebesgue

En Análisis I se estudiaron las funciones Riemann-integrables en un intervalo acotado $[a,b]$. Nosotros hemos visto ya que todas estas funciones son medibles en el sentido de Lebesgue (Ejemplo 2 de 20.2). Vamos a ver ahora que, en realidad, son Lebesgue-integrables, y, aunque Riemann y Lebesgue difieran en la técnica de integración, la integral de una función es la misma tanto como integrable Riemann que como integrable Lebesgue.

Proposición 21.1 *Si f es una función integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$, entonces f es también integrable Lebesgue y su integral como función integrable Riemann, $\mathcal{R}\int_a^b f$, coincide con su integral como función integrable Lebesgue, $\mathcal{L}\int_a^b f$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que la función $f \in R[a,b]$ es no negativa. Para cada partición $\mathscr{P} : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$, de $[a,b]$, se tiene

$$(21.1)\quad L(\mathscr{P}, f) = \sum m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \mathcal{R}\int_a^b f \leq U(\mathscr{P}, f) = \sum M_i(t_i - t_{i-1})$$

donde

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{f(t)\colon t \in [t_{i-1}, t_i]\}, \\ M_i &= \sup\{f(t)\colon t \in [t_{i-1}, t_i]\}. \end{aligned}$$

Además sabemos que $\mathcal{R}\int_a^b f$ es el único número real que satisface 21.1 para todas las particiones.

Ahora bien, es evidente que

$$\begin{aligned} L(\mathscr{P}, f) &= m\big(\cup\, [t_{i-1}, t_i] \times [0, m_i)\big) \\ \leq m(Ord_{[a,b]}f &\leq U(\mathscr{P}, f) = m\big(\cup\, [t_{i-1}, t_i] \times [0, M_i)\big) \end{aligned}$$

y, por tanto, el número real $\mathcal{L}\int_a^b f = m(Ord_{[a,b]}f$, está comprendido entre cada dos sumas de Riemann, luego

$$\mathcal{R}\int_a^b f = \mathcal{L}\int_a^b f.$$

∎

Proposición 21.2 *Sea $f \in \mathscr{L}^1[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces*

(i) *F es continua en cada punto $x \in [a,b]$.*

(ii) *Si f es continua en el punto $c \in [a,b]$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$. En consecuencia si f es continua en $[a,b]$ entonces F es una primitiva de f en $[a,b]$.*

Demostración. La demostración de (i) es consecuencia directa de la continuidad absoluta del operador integral (Corolario 20.16). En efecto,

$$|F(x+h) - F(x)| = \Big|\int_x^{x+h} f\Big| = \Big|\int_{[x,x+h]} f\Big| < \varepsilon\,, \text{ si } m([x, x+h]) = |h| < \delta.$$

(ii) Si f es continua en c, entonces dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ el que corresponda por la continuidad de f en c, entonces si $|h| < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} f(t)dt - hf(c)\right| \\ &= \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} f(t)dt - \int_h^{c+h} f(c)dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

∎

Fórmula de Barrow

La siguiente proposición nos va permitir obtener la clásica fórmula de Barrow sobre intervalos acotados o no.

Proposición 21.3 *Sea f una función que admite integral sobre el intervalo (a,b) con $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, es decir $\int_a^b f \neq \infty - \infty$. Entonces,*

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{x\to a^+ \\ y\to b^-}} \int_x^y f(t)dt = \lim_{y\to b^-} \int_a^y f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt. \tag{21.2}$$

Demostración. Supongamos primero que $\int_a^b f = +\infty$, pero $\lim\limits_{y\to b^-} \int_a^y f(t)dt \neq +\infty$,. En ese caso existiría algún número real M y puntos y tan próximos a b como se quiera (tan grandes como se quiera, si $b = +\infty$), para los que $\int_a^y f(t)dt \leq M$. Por lo tanto se podría encontrar una sucesión $y_p \nearrow b$ tal que

$$\int_a^{y_p} f \leq M\,,\ \forall p$$

lo que implicaría, aplicando 19.14, que

$$\lim \int_a^{y_p} f = \int_a^b f \leq M$$

en contra de que $\int_a^b f = \infty$.

En el supuesto de que $\int_a^b f$ fuese finita y distinta de $\lim_{y\to b^-} \int_a^y f(t)dt$, se tendría, como antes, algún $\varepsilon > 0$ y una sucesión $y_p \nearrow b$, para la que

$$\Big|\int_a^b f - \int_a^{y_p} f\Big| > \varepsilon,$$

lo que contradice el que $\lim \int_a^{y_p} f = \int_a^b f$.

La prueba de las demás igualdades de (21.2) es análoga. ∎

A los límites de (21.2) se les suele llamar *integrales impropias o flechadas*, y es habitual referirse a ellas con la notación:

$$\int_a^{\to b} f,\ \int_{\to a}^{b} f,\ \int_{\to a}^{\to b} f.$$

Se les llama así porque puede ocurrir que alguno de ellos existan, mientras que la $\int_a^b f$ no. Un ejemplo típico de esta situación lo constituye la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

cuya integral en $[0, \infty)$ no existe, y sin embargo (ver Apostol [1])

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Proposición 21.4 *Sea f una función continua en el intervalo abierto (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Se tiene:*

(a) f admite una primitiva en (a, b).

(b) **(Fórmula de Barrow)** *Si $\int_a^b f \neq \infty - \infty$ y G es una primitiva de f en (a, b) entonces*

$$\int_a^b f = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} (G(y) - G(x)) = G(b)^- - G(a)^+.$$

Demostración. (a) Sea $c \in (a, b)$ y consideremos la función

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f & \text{si } c \leq x \\ -\int_x^c f & \text{si } c \geq x. \end{cases}$$

Se trata de probar que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$:

Sea $x_0 \in (a, b)$ y supongamos primero que $x_0 \geq c$. Tomemos $d \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x < d$. La función $f \in \mathscr{L}^1[c, d]$, ya que $[c, d]$ es compacto y f es continua. Luego por el Teorema 21.7 $F(x) = \int_c^x f$ es una primitiva de f en $[c, d]$, en particular $F'(x_0) = f(x_0)$.

Si $x_0 \leq c$, sea $e \in (a, b)$ tal que $e < x_0 \leq c$. Como antes $f \in \mathscr{L}^1[e, c]$ y $\int_e^x f$ es una primitiva de f en $[e, c]$. Puesto que $\int_e^c f = \int_e^x f + \int_x^c f$, se deduce que para cada $x \in [e, c]$, $F(x) = \int_e^x f - \int_e^c f$, luego F es una primitiva de f en $[e, c]$, en particular $F'(x_0) = f(x_0)$.

(b) Si G es una primitiva de f en (a, b), sabemos que G se diferencia de la función F construida en (a) en una constante. Por otra parte, puesto que $\int_a^b f \neq \infty - \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \int_x^y f = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \left(\int_x^c f + \int_c^y f\right) \\ &= \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} (-F(x) + F(y)) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} (G(y) - G(x)). \end{aligned}$$

∎

ANEXO: Teorema fundamental del cálculo integral

Parece conveniente enunciar este teorema en términos de primitivas.

Definición 21.5 Si $F'(x) = f(x)$, para cada x de un intervalo I de $\mathbb{R}$, se dirá que F es una primitiva de la función f en I.

Es bien conocido que

1. Dos primitivas de una misma función en un intervalo se diferencian en una constante.

   $F' = G'$ en I implica que $(F-G)' = 0$, luego $F-G$ es constante en I.

2. Si f admite una primitiva en I, entonces f no tiene discontinuidades de salto.

   Si f es la derivada de alguna función, entonces debe satisfacer la propiedad de los valores intermedios. Es inmediato comprobar que esto está reñido con que f presente algún salto. En particular esto implica, obviamente, que muchas funciones integrables Riemann no admiten primitivas.

La versión más clásica del teorema fundamental del cálculo integral es para funciones continuas y puede enunciarse así:

21.6 *Si f es una función continua sobre un intervalo $[a,b]$ entonces la función, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, es una primitiva para la función f en $[a,b]$. Más precisamente:*

$$G'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b] \ \Leftrightarrow \ G(x) = \int_a^x f + C.$$

Las operaciones integración y derivación son pues, en el contexto del teorema precedente, inversas una de la otra:

$$\begin{array}{ccccc} f & \xrightarrow{\int} & \int_a^x f & \xrightarrow{\mathrm{D}} & f \\ \text{continua} & & \text{derivable} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\mathrm{D}} & F' & \xrightarrow{\int} & \int_a^x F' = F(x) - F(a) \\ \text{clase } C^1 & & \text{continua} & & \end{array}$$

Nos proponemos analizar ahora si existen otros casos en los que integración y derivación también resulten operaciones inversas:

Teorema 21.7 *Sea* $f \in \mathscr{L}^1[a,b]$ *y* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*, entonces*

(i) *F es continua en cada punto $x \in [a,b]$.*

(ii) **(T. de diferenciación de Lebesgue)** *F es derivable en c.t.p. de $[a,b]$ y $F'(x) \overset{c.s.}{=} f(x)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ en todo punto x en el que f sea continua.*

Demostración. La demostración de (i) es consecuencia directa de la continuidad absoluta del operador integral (Corolario 20.16). En efecto,

$$|F(x+h) - F(x)| = \Big| \int_x^{x+h} f \Big| = \Big| \int_{[x,x+h]} f \Big| < \varepsilon \,, \text{ si } m([x,x+h]) = |h| < \delta.$$

(ii) El teorema de diferenciación de Lebesgue escapa al contenido de este curso, su demostración puede verse en Kolmogorov [20] y Benedetto [3]. Veamos, no obstante, que $F'(x) = f(x)$ cuando f es continua en x. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ el que corresponda por la continuidad de f en x, entonces si $|h| < \delta$ se tiene que

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - hf(x) \right|$$
$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_h^{x+h} f(x)dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \varepsilon.$$

∎

Se tiene pues que, en las condiciones del teorema anterior, integrando primero y derivando después recuperamos la función en c.t.p.:

$$\underset{\text{integrable}}{f} \quad \xrightarrow{\int} \quad \underset{\text{derivable c.s.}}{\int_a^x f} \quad \xrightarrow{\mathrm{D}} \quad \underset{\text{(c.s.)}}{f}$$

Vamos a analizar ahora lo que sucede cuando invertimos las composiciones, es decir si primero derivamos y después integramos en un contexto más general que el de 21.6.

$$\underset{\text{derivable}}{F} \quad \xrightarrow{\mathrm{D}} \quad \underset{\text{¿integrable?}}{F'} \quad \xrightarrow{\int} \quad \int_a^x F' = F(x) - F(a).$$

Lo que expresa el diagrama es lo siguiente:

El que una función F sea derivable en todo punto no implica que F' tenga que ser integrable. Pero si F' es integrable, entonces derivando primero y después integrando recuperamos la función en todo punto. Damos a continuación un enunciado preciso de todo esto

Teorema 21.8 *Supongamos que f es una función que admite una primitiva F en el intervalo $[a,b]$. Entonces:*

(a) *Es posible que f no sea integrable en $[a,b]$.*

(b) *Si f es acotada en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.*

(c) *Si f es integrable en $[a,b]$ entonces $F(x)=\int_a^x f + C(constante)$.*

Demostración. (a) El ejemplo clásico lo constituye la derivada de la función

$$F(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

Es inmediato de comprobar que esta función es derivable en todo punto, siendo su derivada la función

$$f(x) = 2x\operatorname{sen}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\ ;\ f(0)=0.$$

Para probar que f no es integrable en $[a,b]$ (a pesar de admitir primitiva), bastará ver que la función $h(x)=1/x\,\cos 1/x^2$ no es integrable en $[a,b]$. En efecto, puesto que

$$\cos\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{si} \quad \frac{1}{x^2} \in \left(\frac{-\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

es fácil deducir que

$$h^+(x) \geq 1/2 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{-\pi/3+2k\pi}\,\mathcal{X}_{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/3+2k\pi}},\frac{1}{\sqrt{-\pi/3+2k\pi}}\right)}$$

lo que implica (después de algunos cálculos elementales) que

$$\int h^+ \geq 1/2 \sum \left(1-\sqrt{\frac{6k-1}{6k+1}}\right)$$
$$\geq 1/2 \sum \frac{2}{\sqrt{6k+1}\left(\sqrt{6k+1}+\sqrt{6k-1}\right)} \geq 1/2 \sum \frac{1}{6k+1} = \infty.$$

Análogamente se demuestra que $\int h^- = \infty$. Esto prueba pues que $\int_a^b f = \infty - \infty$.

(b) Sabemos que toda función medible y acotada es integrable sobre cada conjunto medible de medida finita. Luego para demostrar que, en las condiciones de este apartado, f es integrable sobre $[a,b]$, sólo hemos de probar que es medible:

Puesto que $f = F'$, se tiene

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} n\big(F(x+1/n) - F(x)\big)$$

lo que expresa que f es el límite puntual de la sucesión de funciones medibles (ya que F es continua), $f_n(x) = n\big(F(x+1/n) - F(x)\big)$. Se deduce pues que f es también medible, como queríamos ver.

(c) Sólo haremos la demostración de este apartado para el caso de funciones acotadas. Una demostración, usando técnicas elementales, para el caso no acotado puede verse en Rudin ([25]) o en Cohn ([9]). Supongamos pues que $f = F'$ es una función acotada en $[a,b]$, es decir, para todo x de $[a,b]$, $|f(x)| \le M$ para algún M. Es evidente que para demostrar la igualdad de (c) bastará comprobar que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad (\textbf{F. de Barrow}).$$

Consideremos para cada número natural n la partición de $[a,b]$, $\quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$, tal que $t_{i+1} - t_i = (b-a)/n$. Definimos entonces, para cada n, la función simple:

$$s_n = \sum \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \mathcal{X}_{J_i}$$

siendo $J_0 = [t_0, t_1]$, $J_i = (t_i, t_{i+1}] (i = 1, 2, \ldots)$.

La sucesión $\{s_n\}$ verifica entonces lo siguiente:

1. $\{s_n(x)\} \to f(x)$.

   En efecto, sea $x \in [a,b]$. Es fácil probar, por un lado, que

   $$f(x) = F'(x) = \lim_{y,z\to x y<x\le z} \frac{F(z) - F(y)}{z - y}$$

   por otro,

   $$s_n(x) = \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

donde $[t_i, t_{i+1}]$ es el intervalo de la partición de $[a, b]$ asociada a n (y por tanto de longitud $(b-a)/n$) en el que está el punto x. De ambos hecho se deduce ya trivialmente que $\{s_n(x)\}$ converge a $F'(x)$.

2. $|s_n(x)| \leq M$.

   Como F es derivable en todo punto, del teorema del valor medio se deduce que
   $$s_n(x) = F'(\xi), \quad \xi \in (t_i, t_{i+1})$$
   lo que implica que s_n está, como F', acotada por M.

3. Para todo n, $\int s_n = F(b) - F(a)$.
   $$\int s_n = \sum (F(t_{i+1}) - F(t_i)) = F(b) - F(a).$$

La sucesión $\{s_n\}$ satisface pues las condiciones del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, por lo que podemos concluir que

$$\int_a^b f = \lim \int s_n = F(b) - F(a).$$

∎

Ejercicios

21A ¿Es posible encontrar alguna función f que admita primitiva en todo punto de un intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que $\int_a^b f = \infty$?

21B Estudiar si la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ admite una primitiva en $[0, 1]$.

21C (a) Estudiar la integrabilidad según los valores de $\alpha > 0$ de la función $f(x) = 1/x^\alpha$ en un entorno de 0 y en un entorno de ∞.

(b) Utilizar el apartado anterior para estudiar la integrabilidad en $(0, \infty)$ de las funciones
$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2}, \qquad \frac{1-x}{\sqrt{x} - x^2},$$

21D Estudiar la integrabilidad de las funciones

$$e^{1/x} \operatorname{sen} x, \qquad x \in [0, 1]; \qquad \frac{\ln x}{x^2 - \ln x}, \quad \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)}, \qquad x \in (0, \infty)$$
$$\frac{1}{x(\ln x)^2}, \qquad x \in [e, \infty]$$

21E Probar las desigualdades:

$$\sqrt{p} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{p}} \leq 2\sqrt{p}.$$

$$\ln(p+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} \leq \ln p + 1.$$

INDICACIÓN. Tener en cuenta que las funciones $2\sqrt{x}$ y $\ln x$ son primitivas, respectivamente, de las funciones $1/\sqrt{x}$ y $1/x$.