Capítulo 22

El Teorema de la Convergencia Dominada

Los dos teoremas de convergencia básicos en la integración Lebesgue son el teorema de la convergencia monótona (Lema 19.10), que vimos el capítulo y el de la convergencia dominada, que veremos ahora. En ambos se establecen condiciones sobre una sucesión de funciones medibles para que se puedan permutar los símbolos "$\int$" y "lím", es decir para que

$$\lim \int_E f_k = \int_E \lim f_k. \tag{22.1}$$

El de la convergencia monótona es para funciones no negativas y el de la convergencia dominada para funciones integrables.

Es fácil encontrar ejemplos de sucesiones de funciones integrables sobre un conjunto E que converjan puntualmente (e incluso uniformemente) a una función, pero que las sucesiones de integrales sean no convergentes o no converjan a la integral del límite:

Ejemplos 22.1 (1) Consideremos la sucesión $\{f_p\}$ definidas en en $[0,1]$ por

$$f_p(x) = \begin{cases} p\,\mathrm{sen}(px) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/p \\ 0 & \text{si } x \geq \pi/p. \end{cases}$$

Es fácil ver que la sucesión converge puntualmente a 0 en $[0,1]$ y que $\int_0^1 f_p = -\cos(px)\big]_0^{\pi/p} = 2, \forall p$. Luego $\lim_{p\to\infty} \int_0^1 f_p \neq \int_0^1 (\lim f_p)$.

(2) Sea ahora

$$f_p(x) = \begin{cases} p^2 \operatorname{sen}(p^2 x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/p \\ 0 & \text{si } x \geq 1/p. \end{cases}$$

De nuevo esta sucesión converge puntualmente a 0 en $[0,1]$, pero ahora la sucesión de integrales no converge, pues $\int_0^1 f_p = -\cos(p^2 x)\big]_0^{1/p} = 1 - \cos p$.

(3) La sucesión $\{f_p\}$ de funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f_p(x) = \begin{cases} 1/p & \text{si } |x| \leq p \\ 0 & \text{si } |x| \geq p, \end{cases}$$

converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$ y para cada p, $\int f_p = 2$. Luego tampoco ahora la integral del límite y el límite de las integrales coincide mientras que la integral

Como es bien conocido, en integración Riemann, la convergencia uniforme de una sucesión de funciones integrables sobre un intervalo compacto es una condición suficiente para la convergencia de la sucesión de integrales hacia la integral del límite de la sucesión. Esto también es cierto para funciones integrables Lebesgue, de hecho lo que pone de manifiesto el tercero de los ejemplos anteriores es que el resultado puede no ser cierto cuando se trabaja en intervalos no compactos:

Antes de establecer los resultados de este tema, veremos otra buena propiedad de las funciones medibles:

Lema 22.2 *Si $\{f_p\}$ es una sucesión de funciones medibles que converge en cada punto del conjunto medible E a la función f, entonces f es medible sobre E.*

Demostración. Basta tener en cuenta si $\{f_(x)\} \to f(x)$ para cada $x \in E$, entonces

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \cup_r \cup_k \cap_{p \geq k} \{x \in E : f_p(x) > \alpha + 1/r\}.$$

∎

Proposición 22.3 *Sea E un conjunto medible y de medida finita, y sea $\{f_p\}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{L}^1(E)$, que converge uniformemente sobre E a una función f, entonces $f \in \mathscr{L}^1(E)$ y $\int_E f = \lim_{p\to\infty} \int_E f_p$.*

Demostración. De la hipótesis se deduce que, dado $\varepsilon > 0$, existe un índice ν tal que si $p \geq \nu$ entonces $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, para todo $x \in E$. Luego

1. $|f(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_p(x)| \leq \varepsilon + |f_p(x)|$ en $E \Rightarrow \int_E |f| \leq \int_E (\varepsilon + |f_p|) = \varepsilon m(E) + \int_E |f_p| < \infty$. Luego $f \in \mathscr{L}^1(E)$.

2. Si $p \geq \nu$, $|\int_E f_p - \int_E f| \leq \int_E |f_p - f| \leq \varepsilon m(E)$. Es decir $\int_E f = \lim_{p\to\infty} \int_E f_p$. ∎

Convergencia dominada

Teorema 22.4 *Sea $\{f_p\}$ una sucesión de funciones medibles sobre E que converge puntualmente a la función f y supongamos que existe una función F integrable sobre E tal que $|f_p| \leq F$ para todo p, entonces*

(a) *f es integrable sobre E.*

(b) $\displaystyle\int_E f = \lim \int_E f_p.$

Demostración. De la condición $|f_p| \leq F$ y la convergencia puntual de la sucesión $\{f_p\}$ hacia la función f, se deduce trivialmente que $|f| \leq F$ en E, lo que implica (por ser F integrable sobre E) que cada función f_p y f son funciones de $\mathscr{L}^1(E)$.

Consideremos la sucesión

$$g_p(x) = \sup_{k\geq p} |f_k(x) - f(x)|.$$

Es fácil ver que $\{g_p\}$ es una sucesión decreciente de funciones medibles sobre E que converge puntualmente 0 en E. Además estas funciones son integrables sobre E, ya que $0 \leq g_p \leq 2F$. Aplicando entonces el teorema de la convergencia monótona a la sucesión

$$0 \leq g_1 - g_2 \leq g_1 - g_3 \leq \dots \ \to g_1,$$

se tiene que $\int_E g_p \to 0$. Finalmente, teniendo en cuenta que

$$|\int_E f_p - \int_E f| \leq \int_E |f_p - f| \leq \int_E g_p,$$

se deduce que $\lim_{p\to\infty} \int_E f_p = \int_E f$. ∎

Corolario 22.5 *Sea $\{f_p\}$ una sucesión de funciones medibles sobre un conjunto medible E de medida finita, que converge puntualmente a la función f. Supongamos que existe una constante M tal que $|f_p(x)| \leq M$, para cada $x \in E$, entonces,*

$$\lim_{p\to\infty} \int_E f_p = \int_E f.$$

Demostración. La condición significa que

$$|f_p \mathcal{X}_E| \leq M\mathcal{X}_E.$$

Puesto que la función $F = M\mathcal{X}_E$ es integrable ($\int M\mathcal{X}_E = M{\cdot}m(B) < \infty$), basta aplicar el teorema de la convergencia dominada a la sucesión $\{f_p\mathcal{X}_E\}$. ∎

Conjuntos de medida nula en la integración

Vamos a comenzar esta sección volviendo a una terminología, ya usada alguna vez, y que es habitual en la integración Lebesgue:

Definición 22.6 Se dice que una propiedad o definición P es válida en casi todo punto (de un conjunto E), o casi siempre (en E), si el conjunto N de los puntos (de E) donde P no es válida es de medida nula. Emplearemos las notación *c.s.* para referirnos abreviadamente a la expresión *casi siempre*.

De este modo, $f \overset{c.s}{=} g$ en E, significa que si $N = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$, entonces $m(N) = 0$. Una función es *continua en casi todo punto de* E, si el subconjunto de E donde la función no es continua es de medida nula. Una sucesión $\{f_k\}$ de funciones *converge c.s* en E hacia la función f, abreviadamente $f_k \overset{c.s.}{\to} f$ en E, si converge puntualmente en E a f, salvo en un conjunto de medida nula (que puede ser el vacío), es decir si

$$m(\{x \in E : f_k(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

El porqué del uso del término *c.s.* hay que buscarlo en el papel que, como consecuencia de la siguiente propiedad, juegan los conjuntos de medida cero en la integración:

Proposición 22.7 (a) *Si N es un conjunto de medida nula, entonces toda función f es medible sobre N y se tiene que $\int_N f = 0$.*

(b) *Si f es una función medible y no negativa sobre E y $\int_E f = 0$ entonces $f \overset{c.s.}{=} 0$ en E.*

Demostración. El apartado (a), que lo probábamos para funciones no negativas, se extiende en la forma habitual a funciones reales.

(b) Sea $E_p = \{x \in E : f(x) \geq 1/p\}$. Es obvio, pues, que $f\mathcal{X}_{E_p} \geq 1/p\mathcal{X}_{E_p}$ y que el conjunto N de los puntos de E donde f no se anula es justamente $\cup_p E_p$. Entonces,

$$0 = \int_{E_p} f \geq \int 1/p\mathcal{X}_{E_p} = 1/pm(E_p).$$

Se deduce entonces que $m(E_p) = 0$ para todo p y $m(N) \leq \sum m(E_p) = 0$. ∎

Debido a esto,:

Proposición 22.8 *(a) Si f es una función medible sobre E y N es de medida nula, entonces $\int_E f = \int_{E\setminus N} f$. (b) Si f es una función medible sobre E y $g \overset{c.s.}{=} f$ en E , entonces g es medible sobre E y $\int_E f = \int_E g$.*

Demostración. (a) $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = (\int_{E\setminus N} f^+ + \int_N f^+) - (\int_{E\setminus N} f^- + \int_N f^-) = \int_{E\setminus N} f^+ - \int_{E\setminus N} f^- = \int_{E\setminus N} f$.

Supongamos f medible y $N = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ de medida nula. Entonces

$$\{x \in E : g(x) > \alpha\} = \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cap N \cup \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cap N^c,$$

de lo que resulta trivialmente que $\{x : g(x) > \alpha\}$ es medible.

La igualdad de las dos integrales se obtiene de (a):

$$\int_E f = \int_{E\setminus N} f = \int_{E\setminus N} g = \int_E g.$$

∎

Este resultado indica que, para calcular la integral de una función medible f, no importa cuáles sean los valores que tome f sobre un conjunto de medida nula, N. La integral de esta función va a depender exclusivamente de los valores que tome en N^c, en otras palabras sólo es preciso que f esté definida en casi todo punto. Debido a esto, en los teoremas relativos a funciones medibles y a la integral de Lebesgue, es normal que las hipótesis deban ser verificadas sólo en casi todos los puntos. De este modo muchos de los resultados que hemos obtenido pueden enunciarse debilitando las hipótesis en este sentido. Así, por ejemplo:

1. Si f, g son funciones integrables sobre E y $f \overset{c.s.}{\leq} g$ en E, entonces $\int_E f \leq \int_E g$.

2. Si $\{f_p\}$ es una sucesión de funciones medibles que converge en casi todo punto del conjunto medible E a la función f, entonces f es medible sobre E.

3. **(T. de la Convergencia Dominada)** Sea $\{f_p\}$ una sucesión de funciones medibles sobre E que converge c.s. en E a la función f y supongamos que existe una función F integrable sobre E tal que $|f_p| \overset{c.s.}{\leq} F$ para todo p, entonces f es integrable sobre E y $\int_E f = \lim \int_E f_p$.

Conviene recordar que también hay resultados que no son ciertos con las hipótesis c.s., por ejemplo:

La hipótesis f continua c.s. en el compacto K, NO implica f integrable sobre K.

Ejercicios

22A Sea f una función integrable y $B_p = \{x\colon |f(x)| \geq p\}$.

(a) Probar que $\lim_{p\to\infty} p\, m(B_p) = 0$.

(b) Probar que
$$\sum_{p=0}^{\infty} p\, m(B_{p+1} \setminus B_p)) < +\infty.$$

(c) Probar que la condición sobre f en el apartado (a) no implica f integrable. La condición en el apartado (b) implica que f es integrable si $\{x : f(x) \neq 0\}$ es de medida finita.

22B Encontrar sucesiones monótonas $\{f_k\}$ que no satisfagan las hipótesis de ninguno de los teoremas de convergencia monótona y tales que

- $\int f_k = \infty - \infty\,,\ \forall k$.
- $\lim \int f_k \neq \int \lim f_k$
- $\lim \int f_k = \int \lim f_k$

22C Estudiar y calcular, cuando sea posible, los siguientes límites

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{k}{kx^2 + \sqrt{x}}, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{k}{(x+k)^2 + kx^2}$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{x}{x^3 + k\cos^2 x}, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 kx}{x^2 + k^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

22D Probar que si B_k y B son conjuntos medibles tales que $m(B_k \Delta B) \to 0$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f = \int_B f$$

para toda f integrable.

22E Demostrar que si f es una función integrable entonces

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\infty e^{-m \operatorname{sen}^2 x} \cdot f(x) = 0.$$

22F Consideremos la sucesión de funciones

$$f_p(x,y) = \frac{px^2}{px-y} \cos \frac{1}{px-y}.$$

(a) Probar que se trata de una sucesión de funciones medibles que converge c.s. ¿hacia qué función?

(b) ¿Se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada en $B = \{(x,y)\colon 0 < y < x < 1\}$.

22G Probar que si f es una función medible sobre el intervalo $[a,b]$ y para cada $x \in [a,b]$ se tiene que $\int_a^x f = 0$, entonces $f \overset{c.s.}{=} 0$.
INDICACIÓN. Observar que $\int_I f = 0$ para cada semintervalo contenido en $[a,b]$ y utilizar la continuidad absoluta de la integral.

22H Sea $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ derivable en 0 y tal que $f(0) = 0$. Probar que la función $g(x) = f(x)/x$ es integrable en $\mathbb{R}$.

22I Sea f_k una sucesión monótona de funciones reales e integrables que converge puntualmente a una función f. ¿Es cierto entonces que $\lim_{k\to\infty} \int |f - f_k| = 0$?

22J Sea f_k una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a una función f. Probar que si existe $M > 0$ tal que $\int |f_k| \le M$ entonces $\int |f| \le M$.

22K Sea f_k una sucesión de funciones medibles "no negativas"que converge puntualmente a una función integrable f y sea para cada k, $B_k = \{x : f(x) \ge f_k(x)\}$.

(a) Probar que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} (f - f_k) = 0.$$

(b) Probar que

$$\int |f - f_k| = \int (f - f_k) + 2 \int_{B_k} (f - f_k).$$

(c) Deducir de los apartados anteriores que si, además de las hipótesis iniciales sobre $\{f_k\}$ y f, se tiene que $\lim \int f_k = \int f$, entonces $\lim \int |f - f_k| = 0$. ¿Puede suprimirse la hipótesis $f_k \geq 0$ para cada k? y la hipótesis f integrable?

22L Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice Borel-medible si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x\colon f(x) > \alpha\}$ es un Borel.

(b) Probar que el límite de una sucesión de funciones Borel-medibles es una función Borel-medible.

(c) Probar que si f es una función medible existe una función g Borel-medible tal que $f \overset{c.s.}{=} g$.(Ver Ejercicio 19A(b)).

22M Probar que una función f es medible si y sólo si existe una sucesión de funciones escalonadas que converge c.s hacia f.

22N Probar que dos funciones continuas que son iguales c.s. son iguales en todo punto.

22Ñ Sea f una función con dominio en $\mathbb{R}^n$. Se dice que un abierto Ω es un abierto de anulación de la función f si f es igual a 0 en casi todo punto de Ω. Probar que si Ω_f es la unión de todos los abiertos de anulación de f entonces $f = 0$ c.s. en Ω_f.

22O Sea f una función medible.

(a) Probar que si f es continua y no negativa, entonces

$$\int f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

(b) Probar que si para todo conjunto medible B, $\int_B f = 0$ entonces $f \overset{c.s.}{=} 0$.

22P Probar que si una función $g : A \subset \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ es integrable sobre $E \subset A$, entonces g es finita c.s. en E i.e., el conjunto $N = \{x \in E : g(x) = \infty\}$ tiene medida nula.