Capítulo 23

El Teorema de Fubini-Tonelli

Veremos en este capítulo que el cálculo de una integral múltiple se reduce al de integrales simples. Concretamente se va a probar que si $f(x,y)$ es una función medible de $n+k$ variables, que no cambia de signo o que es integrable, entonces las integrales iteradas

$$\int \Big(\int f(x,y)\,dy \Big) dx\,, \quad \int \Big(\int f(x,y)\,dx \Big) dy \tag{23.1}$$

existen y son iguales, siendo su valor precisamente $\int f$. Por tanto repitiendo el proceso tantas veces como sea necesario, el cálculo de $\int f$ se reducirá al de ciertas integrales simples.

El teorema de Tonelli

El primer caso que vamos a considerar en el que se da la igualdad entre la integral de una función y sus integrales iteradas, es el de funciones medibles no negativas.

Teorema 23.1 *Sea $f\colon \mathbb{R}^{n+k} \to [0,+\infty]$ medible. Entonces:*

(i) *La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f_x\colon y \to f(x,y)$, es medible p.c.t. (para casi todo) $x \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) *La función g, definida p.c.t. x por $g(x) = \int f(x,y)\,dy$, es medible.*

(iii) *$\int g\,dx = \int f$ (es decir la integral de f coincide con sus integrales iteradas).*

La demostración del teorema general puede reducirse al caso particular en que $f = \mathcal{X}_E$, la función característica de un conjunto medible, utilizando los siguientes hecho:

23.2 (a) *Si las funciones $f, g \geq 0$ satisfacen el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface toda función del tipo $af + b\,g$, para todos $a, b \geq 0$.*

(b) *Si $\{f_k\}$ es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas que satisfacen el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $f = \lim_{k\to\infty} f_k$.*

(c) *Si $\{f_k\}$ es una sucesión monótona decreciente de funciones no negativas, acotadas y con soporte compacto que satisfacen el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $f = \lim_{k\to\infty} f_k$.*

(*d*) *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones no negativas que satisfacen el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $f = \sum f_k$.*

Demostración. (a) Supongamos que las funciones f, g satisfacen el teorema de F-T y veamos que la función $f + g$ también lo satisface:
Sea

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_x \text{ no es } [y]\text{-medible}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_x \text{ no es } [y]\text{-medible}\}.$$

Por hipótesis N es de medida nula. Es claro entonces que si $x \notin N$, la función de y, $f_x + g_x$ es medible. Con otras palabras las funciones $f_x + g_x$ son medible p.c.t. x. Puesto que f, g satisfacen F-T, la función h definida c.s mediante, $h(x) = \int (f_x + g_x)(y)dy = \int f(x,y)dy + \int g(x,y)dy$, es la suma de las funciones $[x]$-medibles y no negativas $h_1(x) = \int f(x,y)dy$ y $h_2(x) = \int g(x,y)dy$ y por tanto es una función medible. Por último

$$\begin{aligned}
\int \Big(\int (f+g)(x,y)dy \Big) dx &= \int h(x)dx = \int (h_1(x) + h_2(x))dx \\
= \int h_1(x)dx + \int h_2(x)dx &= \int \Big(\int f(x,y)dy \Big) dx + \int \Big(\int g(x,y)dy \Big) dx \\
= \int f(x,y)dxdy + \int g(x,y)dxdy &= \int (f+g)(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

(b) y (c) La técnica de la demostración es similar en ambos casos y está basada en el teorema de la convergencia monótona y en de la convergencia dominada. Demostraremos (c), que es algo más compleja:

Observemos en primer lugar que se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada a la sucesión, ya que para cada k, $0 \leq f_k \leq f_1$ y f_1 es integrable (por ser acotada y de soporte acotado). Luego

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Denotemos $N_k = \{x \in \mathbb{R}^n : (f_k)_x \text{ no es medible}\}$. Por hipótesis cada uno de estos conjuntos es de medida nula. Es claro entonces que si $x \notin N = \cup N_k$, la sucesión decreciente de funciones de y, $(f_k)_x$, es medible, y por tanto su límite f_x también. Se tiene pues que f_x es medible para c.t. x. Razonando como antes, a la sucesión $(f_k)_x$ se puede aplicar también el teorema de la convergencia dominada, por lo que si $x \notin N$

$$\int f_x(y)dy = \lim_{k\to\infty} \int (f_k)_x(y)dy.$$

Una vez más, teniendo en cuenta que las funciones f_k satisfacen el teorema de F-T, la sucesión decreciente de funciones de x definidas c.s. por $g_k(x) = \int f_k(x,y)dy$ está formada por funciones $[x]$-medibles, su límite $g(x) \overset{c.s.}{=} \int f_x(y)dy$ es medible y, aplicando el teorema de la convergencia dominada, resulta que

$$\begin{aligned} \int \Big(\int f(x,y)dy \Big) dx &= \int g(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int g_k(x)dx \\ = \lim_{k\to\infty} \int \Big(\int f_k(x,y)dy \Big) dx &= \lim_{k\to\infty} \int f_k(x,y)dxdy = \int f(x,y)dxdy \end{aligned}$$

(d) Es consecuencia directa de (a) y (b). ∎

Como consecuencia de este resultado, la demostración del teorema de Tonelli bastará hacerla para funciones del tipo $f = \mathcal{X}_E$. En efecto, éste podría extenderse ya a las funciones simples no negativas. Además si f es una función medible no negativa sabemos que existe una sucesión creciente $\{s_k\}$ de funciones simples no negativas que converge puntualmente a f. Luego por (b) el teorema de F-T se extendería también a f.

Lema 23.3 *Si $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es un conjunto medible, entonces el teorema de Tonelli se satisface para la función $\mathcal{X}_E$.*

Demostración. Vamos a ver que para probar el lema bastará ver que éste es cierto cuando E es el producto de dos semintervalos:

1. En primer lugar observemos que bastaría probar el lema para conjuntos medibles y acotados. En efecto si E es medible, sea $E_k = E \cap \{x : \|x\| \leq k\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Entonces es obvio que

$$\mathcal{X}_{E_1} \leq \mathcal{X}_{E_2} \leq \ldots \leq \mathcal{X}_{E_k} \leq \ldots \to \mathcal{X}_E,$$

por lo que aplicando (b) de 23.2 se deduce que si $\mathcal{X}_{E_k}$ satisface F-T, entonces también lo satisface $\mathcal{X}_E$.

2. Sea entonces E medible y acotado. Se puede encontrar un conjunto G_δ y acotado $G \supset E$ tal que el conjunto $N = G \setminus E$ es de medida nula, luego $\mathcal{X}_E = \mathcal{X}_G - \mathcal{X}_N$. De nuevo, teniendo en cuenta el apartado (a) de 23.2, para probar que $\mathcal{X}_E$ satisface F-T bastará que lo satisfagan las funciones características de conjuntos acotados del tipo G_δ o de medida nula.

3. Si G es un conjunto acotado y G_δ, entonces es fácil ver que existe una sucesión de abiertos acotados $\{U_k\}$ tal que

$$\mathcal{X}_{U_1} \geq \mathcal{X}_{U_2} \geq \ldots \geq \mathcal{X}_{U_k} \geq \ldots \to \mathcal{X}_G.$$

En virtud del apartado (c) de 23.2, bastará que la función característica de conjuntos abiertos satisfagan F-T para que también lo satisfaga $\mathcal{X}_G$.

4. Si U es abierto, entonces $U = \cup C_k$ donde los conjuntos C_k son (n+p)-semicubos disjuntos dos a dos. Luego

$$\mathcal{X}_U = \sum \mathcal{X}_{C_k}.$$

De nuevo, utilizando (d) de 23.2, bastará que las funciones características de semintervalos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ satisfagan F-T para garantizar que $\mathcal{X}_U$ también lo satisface.

5. Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+k}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, escribiremos $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k \colon (x, y) \in E\}$. Análogamente $E(y)$. Puesto que el conjunto E es medible si y sólo si $\mathcal{X}_E$ es una función medible, el teorema 23.1 para $f = \mathcal{X}_E$ se enuncia entonces así: Si $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es un conjunto medible, entonces

(i) El conjunto $E(x)$ es medible p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) La función $g(x) = m^*(E(x))$, es medible.

(iii) $m(E) = \int m^*(E(x))dx$.

6. Sea $E = I \times J$ un semintervalo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ y veamos que E satisface F-T:

$$E(x) = \begin{cases} J & \text{si } x \in I \\ \emptyset & \text{si } x \notin I \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = m(E(x)) = m(J)\mathcal{X}_I(x).$$

g es pues una función simple y su integral, $\int g = m(J) \cdot m(I) = m(E)$.

7. Por último veamos que si N es acotado y de medida nula la función $\mathcal{X}_N$ satisface F-T:

Sea G un conjunto acotado y G_δ tal que $N \subset G$ y $m(G) = 0$. Como G satisface el teorema, entonces

$$0 = m(G) = \int m(G(x))dx$$

de lo que se deduce que $G(x)$ y también $N(x) \subset G(x)$ son de medida nula p.c.t. x (ver Proposición 22.7). Por tanto, $N(x)$ medible p.c.t. x, $g(x) = m(N(x)) = 0$ *c.s.*, (luego g es medible) y $\int g = 0 = m(N)$. ∎

El teorema de Fubini

Como ya señalamos al principio las integrales iteradas también coinciden con la integral de la función cuando ésta es una función integrable. El enunciado preciso de este hecho lo constituye el teorema de Fubini:

Teorema 23.4 *Sea $f\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces:*

(i) *La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x,-)\colon y \to f(x,y)$, es integrable p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) *La función g, definida p.c.t. x por $g(x) = \int f(x,y)\,dy$, es integrable.*

(iii) *$\int g\,dx = \int f$ (es decir la integral de f coincide con sus integrales iteradas).*

Demostración. Sea $f = f^+ - f^-$. Por hipótesis f^+ y f^- son integrables y al ser también no negativas, satisfacen el teorema de Tonelli, es decir

$$\int \Big(\int f^+(x,y)\,dy\Big)dx = \int f^+ < +\infty\,,$$
$$\int \Big(\int f^-(x,y)\,dy\Big)dx = \int f^- < +\infty,$$

por tanto, si denotamos por $g_1(x) = \int f^+(x,y)\,dy$, se tiene que g_1 es una función de x integrable y en consecuencia finita c.s.(ver ejercicio 22P) o lo que es lo mismo $f^+(x,-)$ es integrable p.c.t. x. Análogamente se prueba que $f^-(x,-)$ es integrable p.c.t. x y $g_2(x) = \int f^-(x,y)\,dy$ es integrable, luego $f(x,-) = f^+(x,-) - f^-(x,-)$ es integrable p.c.t. x. La función

$$g(x) = \int f(x,y)\,dy = \int f^+(x,y)\,dy - \int f^-(x,y)\,dy = g_1(x) - g_2(x)$$

está definida c.s. y es integrable, por ser diferencia de dos funciones integrables. Por último,

$$\int g(x)\,dx = \int g_1(x)\,dx - \int g_2(x)\,dx$$
$$= \int \Big(\int f^+(x,y)\,dy\Big)dx - \int \Big(\int f^-(x,y)\,dy\Big)dx = \int f^+ - \int f^- = \int f.$$

Nota. Para aplicar el teorema de Fubini-Tonelli a funciones cuyo dominio no es todo $\mathbb{R}^{n+k}$, basta tener en cuenta la fórmula

$$\int_E f = \int f\mathcal{X}_E.$$

Por tanto, si $f \geq 0$ o integrable sobre el conjunto medible E, se tiene que

$$\int_E f = \int f\mathcal{X}_E = \int \Big(\int_{E(x)} f(x,y)dy\Big)dx = \int_A \Big(\int_{E(x)} f(x,y)dy\Big)dx,$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon m(E(x)) > 0\}$. Los conjuntos A y $E(x)$ son "los límites de integración", y el proceso descrito para su obtención será el que se seguirá habitualmente en la práctica.

Ejercicios

23A Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{n+k}$. Probar que E es de medida nula si y sólo p.c.t $x \in \mathbb{R}^n$, $m(E(x)) = 0$.

23B Sean A, B subconjuntos cualesquieras de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente, G un conjunto medible tal que $A \times B \subset G$ y $m^*(A \times B) = m(G)$ y $g(x) = m^*(G(x))$. Probar que $A \times [0, m^*(B)] \subset \operatorname{Ord}(g)$ y deducir de esto la fórmula

$$m^*(A \times B) = m^*(A) \cdot m^*(B).$$

23C Consideremos la función

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Probar las dos integrales iteradas de f sobre el conjunto $B=[0,1]\times[0,1]$ existen pero son diferentes.

23D Sea f una función medible. Probar que f es integrable si y sólo si alguna de las integrales iteradas de la función $|f|$ es finita.

23E Determinar el recinto B para que

$$\int_B f(x,y)dxdy=\int_0^1\Big(\int_{x^2}^x f(x,y)dy\Big)dx$$

23F (a) Probar que en las condiciones de aplicabilidad del teorema de Fubini-Tonelli, se tiene que

$$\int_a^b\Big(\int_a^x f(x,y)dy\Big)dx=\int_a^b\Big(\int_y^b f(x,y)dx\Big)dy$$

(b) Deducir que si $f(x,y)=f(y,x)$ en el rectángulo $B=[a,b]\times[a,b]$ entonces el valor común de las integrales anteriores es

$$\frac{1}{2}\int_B f(x,y)dxdy.$$

(c) En particular, demostrar que si $a>0$ entonces

$$\int_0^a\Big(\int_x^a\frac{f(y)}{y}dy\Big)dx=\int_0^a f(x)dx.$$

23G Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x}},\quad g(x)=\frac{1}{x}$$

y la recta $x=1$.

23H Hallar

$$\int_D yzdxdydz,$$

donde D es el recinto limitado por los planos coordenados y los planos $x+y=1$ y $z=4$.

23I Calcular

$$\int_B \operatorname{sen}(x+y)dxdy,$$

donde $B=\{(x,y)\colon 0\le x\le y;\ 0\le y\le 1;\ x+y\le\pi/2\}$.