Capítulo 24

Cambio de Variables en la Integral Múltiple

En la demostración del teorema del cambio de variable utilizaremos con frecuencia que el carácter medible de los conjuntos es una propiedad que se mantiene por aplicaciones de clase C^1. Este resultado es una consecuencia del hecho de que toda aplicación de clase C^1 en un abierto de $\mathbb{R}^n$ es lipschitziana sobre cada compacto contenido en él:

Transformación de conjuntos medibles por funciones de clase C^1

Lema 24.1 *Sea $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1. Supongamos en $\mathbb{R}^n$ la norma $\| \ \|_\infty$ y sea Q un cubo cerrado contenido en U, entonces*

(i) *Si $\|DT(u)\| \leq \alpha$, para todo $u \in Q$, entonces $m^*(T(Q)) \leq \alpha^n \, m(Q)$.*

(ii) *T transforma conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula.*

(iii) *T transforma conjuntos medibles en conjuntos medibles.*

Demostración. i) Sea u_0 el centro de Q y l el lado. Como Q es convexo, del teorema del valor medio se deduce que

$$\|T(u) - T(u_0)\|_\infty \leq \alpha \|u - u_0\|, \quad \forall u \in Q$$

lo que nos indica que $T(Q)$ está contenido en el cubo centrado en $T(u_0)$ y de lado $\alpha \, l$. Por tanto

$$m^*(T(Q)) \leq (\alpha \, l)^n = \alpha^n \, m(Q)$$

ii) Sea N un conjunto de medida nula contenido en U. Consideremos para cada u del abierto U una bola cerrada centrada en u y contenida en U. Entonces, teniendo en cuenta que cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de Lindelöf, podemos escribir

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(u_i, r_i).$$

Si denotamos entonces por $N_i = N \cap B(u_i, r_i)$, para que el conjunto $T(N)$ sea de medida nula bastará con que cada uno de los conjuntos $T(N_i)$ lo sean. Tomemos V un conjunto abierto contenido en $B(u_i, r_i)$ tal que

$$N_i \subset V\,; \quad m(V) < \varepsilon$$

y escribamos $V = \cup Q_k$, como unión numerable de semicubos disjuntos. Puesto que DT es continua en el compacto $B[u_i, r_i]$, existe $\alpha \geq 0$ tal que $||DT(u)|| \leq \alpha$ para todo $u \in V$. Aplicando entonces i), se tiene

$$\begin{aligned} m^*(T(N_i)) &\leq m^*(T(V)) \leq \sum m^*(T(Q_k)) \\ &\leq \sum \alpha^n m(Q_k) = \alpha^n m(V) < \alpha^n \varepsilon. \end{aligned}$$

Del carácter arbitrario de ε se deduce ya que $m^*(T(N_i)) = 0$.

iii) Sea $B \subset U$ un conjunto medible. Por tanto $B = H \cup N$ donde H es un F_σ y N un conjunto de medida nula. Es fácil comprobar que H puede escribirse como unión numerable de conjuntos compactos y por tanto $T(H)$ (debido a la continuidad de T) es también un conjunto F_σ. Por tanto $T(B) = T(H) \cup T(N)$ es unión de un boreliano y un conjunto de medida nula, luego es medible. ∎

Lema 24.2 *Si L es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$m^*(L(E)) = |\det L| \cdot m^*(E). \tag{24.1}$$

Demostración. Si L es singular, $L(E)$ está contenido en un subespacio de dimensión $r < n$. Este subespacio será por lo tanto isomorfo al subespacio vectorial, $\mathbb{R}^r \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$, y como él será, según el resultado anterior, un conjunto de medida nula. Se deduce pues que $L(E)$ es de medida nula y por tanto la fórmula (24.1) es válida en este caso.

La demostración en el caso en que L sea no singular, se basa en la existencia de una descomposición de L en término de aplicaciones lineales elementales de uno de estos tres tipos:

($L_{i,j}$) Permutación de dos coordenadas.

$$L_{i,j}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n).$$

(L_{ci}) Multiplicar una coordenada por un número real.

$$L_{ci}(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, cu_i, \ldots, u_n).$$

(L_{i+cj}) Sumar a una coordenada otra multiplicada por un número real.

$$L_{i+cj}(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_i + cu_j, \ldots, u_n).$$

(Para simplificar, denotaremos de la misma forma a una aplicación lineal y a su matriz asociada).

Es fácil ver que la matriz de $L_{i,j}$ se obtiene permutando las filas i y j en la matriz identidad, I. Si T es una aplicación lineal, la multiplicación $L_{i,j}T$, produce una matriz en la que se han permutado las filas i y j de T.

Análogamente, la matriz L_{ci} se obtiene multiplicando por c la fila i de I. Y la matriz L_{i+cj} sumándole a la fila i de esta matriz la j multiplicada por c. La multiplicación $L_{ci}T$ o $L_{i+cj}T$, produce los efectos anteriores, pero sobre la matriz T en lugar de la I.

Vamos a ver que mediante sucesivas transformaciones de los tres tipos anteriores se puede reducir la aplicación lineal L a la identidad. El procedimiento es como el utilizado para obtener ceros en un determinante

Paso 1. Conseguir un 1 en el lugar (1,1) de L mediante:

- Transposición de dos filas de L, para conseguir un elemento no nulo (por ejemplo, igual a c) en posición (1,1).
- Multiplicación de la primera fila de la matriz obtenida por 1/c.

Paso 2. Obtener ceros en la primera columna, sin más que restar a cada fila la primera multiplicada por el número que corresponda.

Paso 3. Conseguir de forma análoga un 1 en el lugar (2,2) y un 0 en los demás términos de la segunda columna. Análogamente con las demás columnas.

De esta forma, mediante un número finito de estas transformaciones, denotémoslas por ejemplo $L_1, L_2, \dots, L_p$, hemos reducido (componiendo a la izquierda con $L_1, L_2, \dots, L_p$) la aplicación L a la identidad I, es decir

$$L_p L_{p-1} \dots L_1 L = I$$

Como $L_{i,j}^{-1} = L_{j,i}\,,\quad L_{ci}^{-1} = L_{1/c\,i}\,,\quad L_{i+cj}^{-1} = L_{i-cj}$, se deduce inmediatamente de lo anterior que L es una composición de aplicaciones elementales de los tipos descritos. Y puesto que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, la fórmula (24.1) sólo será preciso probarla para estas aplicaciones elementales.

Supongamos primero que E es un semintervalo, $E = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$, y observemos que $|\det L_{i,j}| = 1\,,\ \det L_{ci} = c\,,\ \det L_{i+cj} = 1$. Entonces,

1. $L_{i,j}(E) = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_j, b_j] \times \dots \times (a_i, b_i] \times \dots \times (a_n, b_n]$. Luego

$$m(L_{i,j}(E)) = m(E) = |\det L_{i,j}| \cdot m(E).$$

2. $L_{ci}(E) = (a_1, b_1] \times \dots \times (ca_i, cb_i] \times \dots \times (a_n, b_n]$. Luego

$$m(L_{ci}(E)) = |c| m(E) = |\det L_{ci}| \cdot m(E).$$

3. Veamos, por último, el caso de aplicaciones del tipo L_{i+cj}. Para calcular $m(L_{i+cj}(E))$ vamos a utilizar el teorema de Fubini. Podemos suponer para concretar y simplificar que $i = 2,\ j = 1$. Entonces:

$$F = L_{(2)+c(1)}(E) = \{(u_1, u_2 + cu_1, u_3, \dots, u_n) \colon u_i \in (a_i, b_i]\},$$

luego

$$\begin{aligned} m(F) = \int_F \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n &= \int_B \left(\int_{F(x_1,x_2)} \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \dots \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \prod_{i=3}^n (b_i - a_i) \int_B \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_A \left(\int_B (x_1) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2+cx_1}^{b_2+cx_2} \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 &= \int_{a_1}^{b_1} (b_2 - a_2) \mathrm{d}x_1 = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1). \end{aligned}$$

Se tiene pues que

$$m(L_{i+cj}(E)) = |\det L_{i+cj}| \cdot m(E).$$

Sea ahora E un conjunto cualquiera y L una aplicación lineal de uno de los tipos descritos antes. Entonces, para $\varepsilon > 0$, tomemos $\{I_k\}$ una colección numerable de semintervalos tal que

$$E \subset \cup I_k\,, \quad \sum m(I_k) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

entonces, utilizando la monotonía y la subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$m^*(L(E)) \leq \sum m(L(I_k)) = |\det L| \sum m(I_k) \leq |\det L| \big(m^*(E) + \varepsilon\big),$$

lo que, debido al carácter arbitrario de ε, implica que

$$m^*(L(E)) \leq |\det L| m^*(E).$$

Puesto que la aplicación L^{-1} es del mismo tipo que L, se obtiene la desigualdad contraria:

$$m^*(E) = m^*(L^{-1}L(E)) \leq |\det L^{-1}| m^*(L(E)) = \frac{1}{|\det L|} m^*(L(E)),$$

por tanto $m^*(L(E)) = |\det L| m^*(E)$. ∎

El teorema del cambio de variables en la integración Lebesgue

Teorema 24.3 (El teorema del cambio de variables (TCV) *Sea $T : U \to T(U)$ un difeomorfismo de clase C^1 entre los abiertos U y $T(U)$ de $\mathbb{R}^n$ y f una aplicación de $T(U)$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces para cada conjunto medible $E \subset U$ se tiene:*

$$\int_{T(E)} f = \int_E (f \circ T)\,|\det\, DT|$$

(En el sentido de que la existencia de una de las integrales implica la existencia de la otra y la igualdad entre ambas).

Obsérvese en primer lugar que por ser T un difeomorfismo, del lema 24.1 ii) se deduce que la función f es medible sobre $T(E)$ si y sólo si $f \circ T$ es medible sobre E, y por ser $|\det DT|$ continua y $\neq 0$, si y sólo si $(f \circ T)\,|\det\, DT|$ es medible.

Para la demostración del caso general consideraremos algunas reducciones. En primer lugar, puesto que f es medible si y sólo si f^+ y f^- lo son, bastará demostrar el teorema para funciones no negativas.

Por otra parte, será suficiente con probar que

$$\int_{T(E)} f \leq \int_E (f \circ T)\,|\det\, DT| \quad (f \geq 0), \tag{24.2}$$

pues entonces, considerando el difeomorfismo T^{-1} y la función $g = (f \circ T)\,|\det\, DT|$, al aplicar (24.2) resulta que

$$\int_E g \leq \int_{T(E)} (g \circ T^{-1})\,|\det\, DT^{-1}| = \int_{T(E)} f.$$

Es inmediato comprobar que para la validez de (24.2) sólo es preciso que ésta se satisfaga en el caso en que $E = U$, es decir que

$$\int_{T(U)} f \leq \int_U (f \circ T)\,|\det\, DT| \quad (f \geq 0), \tag{24.3}$$

y aún es posible reducir la demostración de (24.3) al caso particular en que $f = \mathcal{X}_{T(Q)}$ donde Q es un semicubo de adherencia contenida en U, es decir a probar que

$$m(T(Q)) \leq \int_Q |\det DT|. \tag{24.4}$$

En efecto, (24.4) se extiende sin dificultad primero a los conjuntos abiertos. A continuación podemos extenderla a conjuntos medibles E que sean subconjuntos de "cubos abiertos"de adherencia contenida en U: Sea Q un cubo abierto tal que $\overline{Q} \subset U$ y $E \subset Q$. Entonces, por la regularidad de la medida y la continuidad absoluta de la integral, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ y un conjunto abierto $O \subset Q$ tales que

$$m(O \setminus E) < \delta; \quad \int_{O\setminus E} |\det DT| < \varepsilon. \tag{24.5}$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} m(T(E)) \leq m(T(O)) \leq \int_O |\det DT| \\ = \int_E |\det DT| + \int_{O\setminus E} |\det DT| < \int_E |\det DT| + \varepsilon, \end{aligned}$$

de lo que resulta, debido al carácter arbitrario de ε, que

$$m(T(E)) \leq \int_E |\det DT|.$$

Sea ahora E medible contenido en U, y sea $\{Q_i\}$ una partición numerable de U por semicubos de adherencia contenida en U. Bastará probar que para cada uno de estos semicubos se tiene

$$m(T(E \cap Q_i)) \leq \int_{E \cap Q_i} |\det DT|.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} m(T(E \cap Q_i)) &= m(T(E \cap \overset{\circ}{Q_i})) + m(T(E \cap Fr\,(Q_i)) = m(T(E \cap \overset{\circ}{Q_i})) \\ &\leq \int_{E \cap \overset{\circ}{Q_i}} |\det DT| = \int_{E \cap Q_i} |\det DT|. \end{aligned}$$

Por la linealidad de la integral la fórmula (24.3) quedaría ya establecida para funciones simples. Con ello, y teniendo en cuenta que toda función medible no negativa, f, puede aproximarse por funciones simples, la desigualdad (24.3) se obtiene para f por el teorema de la convergencia monótona.

El teorema del cambio de variable queda sólo pendiente de la demostración del lema:

Lema 24.4 *Supongamos que $T\colon U \to T(U)$ es un difeomorfismo entre los abiertos U y $T(U)$ y sea Q es un semicubo tal que $\overline{Q} \subset U$, entonces:*

i) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si C es un semicubo de lado menor igual que δ, contenido en Q,*

$$m(T(C)) \leq (1+\varepsilon)^n |\det DT(v)|\, m(C)\,, \quad \forall v \in C.$$

ii) $m(T(Q)) \leq \int_Q |\det DT|$.

Demostración. (En $\mathbb{R}^n$ trabajaremos con la norma $\|\ \|_\infty$). i) Puesto que T es un difeomorfismo, es fácil comprobar que la aplicación, $u \to DT(u)^{-1}$, es continua sobre U. Por tanto

$$\sup_{v \in \overline{Q}} \|DT(v)^{-1}\| < \infty.$$

Teniendo en cuenta ahora que DT es uniformemente continua sobre $\overline{Q}$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\|u_1 - u_2\| \leq \delta\,,\ u_1, u_2 \in \overline{Q} \ \Rightarrow\ \|DT(u_1) - DT(u_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{\sup_{v \in \overline{Q}} \|DT(v)^{-1}\|}.$$

Sea $C \subset Q$ un semicubo de lado menor que δ. Fijemos un punto $v \in C$ cualquiera y consideremos el difeomorfismo $T_1 = DT(v)^{-1} \circ T$. Utilizando los lemas 24.1 y 24.1, podemos escribir:

$$m(T_1(C)) = |\det DT(v)^{-1}| \cdot m(T(C)) \leq \alpha^n\, m(C),$$

donde $\alpha = \sup_{u\in\overline{Q}} \|DT_1(u)\|$.

Se deduce pues que

$$m(T(C)) \leq \alpha^n\, |\det DT(v)| \cdot m(C),$$

y como

$$\begin{aligned}\alpha = \sup_{u\in\overline{Q}} \|DT_1(u)\| &= \sup_{u\in\overline{Q}} \|DT(v)^{-1} \circ DT(u)\| \\ &= \sup_{u\in\overline{Q}} \|I + DT(v)^{-1} \circ (DT(u) - DT(v))\| \\ &\leq 1 + \|DT(v)^{-1}\| \cdot \|DT(u) - DT(v)\| \leq 1 + \varepsilon,\end{aligned}$$

se tiene ya, que

$$m(T(C)) \leq (1+\varepsilon)^n\, |\det DT(v)| \cdot m(C)\,,\ \forall v \in C$$

ii) Para cada número natural p tomemos δ_p, asociado a $\varepsilon = 1/p$ en i), tal que la sucesión $\{\delta_p\}$ tienda a 0, y sea $\{C_{ip}\}$ una partición finita de Q mediante semicubos de lado menor o igual que δ_p. Fijemos $v_{ip} \in C_{ip}$. Por i) sabemos que

$$m(T(C_{ip})) \leq (1+1/p)^n\, |\det DT(v_{ip})| \cdot m(C_{ip}). \tag{24.6}$$

Consideremos entonces para cada p la función simple

$$s_p = \sum |\det DT(v_{ip})|\, \mathcal{X}_{C_{ip}}.$$

De (24.6) se deduce fácilmente que

$$\int s_p \geq \frac{1}{(1+1/p)^n}\, m(T(Q)).$$

Por otra parte, la sucesión $\{s_p\}$ converge uniformemente (en Q) a la función $|\det DT|$. En efecto, sea $\delta > 0$ asociado a ε por la continuidad uniforme de la función $|\det DT|$. Entonces, si $u \in Q$ y C_{ip} es el semicubo de la partición en el que está u (luego $\|u - v_{ip}\| < \delta_p$), se tiene que

$$\big|s_p(u) - |\det DT(u)|\big| = \big||\det DT(v_{ip})| - |\det DT(u)|\big| < \varepsilon\,, \quad \text{si } \ \delta_p < \delta.$$

El teorema de la convergencia dominada nos permite deducir ya

$$\int_Q |\det DT| = \lim_{p\to\infty} \int s_p \geq m(T(Q)).$$

∎

Ejercicios

24A (a) Utilizar coordenadas polares para deducir la fórmula que da el área del círculo

(b) Considerar la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Utilizar el cambio de coordenadas $x = au$; $y = bv$ para demostrar que el área limitada por la esta elipse es igual a πab.

24B Sea $z = f(y)$ una función de una variable, $A = [a, b]$ y $B = Ord_A(f)$.

(a) Probar que el volumen del sólido obtenido al girar B en torno al eje Y es

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy.$$

(b) Probar que el volumen del sólido obtenido a girar B en torno al eje Z es

$$V = 2\pi \int_a^b yf(y)dy.$$

INDICACIÓN. Utilizar coordenadas cilíndricas.

(c) Obtener el volumen del toro obtenido al girar el círculo $z^2 + (y-a)^2 \leq R^2$ en torno al eje Z (Sol: $2\pi^2 R^2 a$).

24C Obtener el volumen del recinto $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9;\ x^2 + z^2 \leq 9\}$.

24D Obtener el área encerrada por la curva cuya ecuación en polares es $r = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

24E Obtener el área de uno de los segmentos circulares en que divide el eje Y al círculo de ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$.

24F Calcular el área de uno de los bucles de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

24G (a) Mediante el cambio a polares para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.

(b) Utilizar (a) para calcular $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$

24H Calcular el área limitada por las curvas:

$$x^2 + y^2 = 2x; \quad x^2 + y^2 = 4x; \quad y = x; \quad y = 0.$$

24I Calcular

$$\int_B \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy,$$

donde B es el recinto limitado por los ejes y la recta $x + y = 1$ (Hacer el cambio $x - y = u$; $x + y = v$).

24J Calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y el cilindro $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

24K Calcular

$$\int_D \frac{xz^2}{y} dxdydz,$$

siendo $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;\ 0 \leq x \leq y\}$.

24L Calcular $\int_D zdxdydz$, siendo $D = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4;\ z^2 \geq x^2+y^2;\ 0 \leq z \leq \sqrt{3}\}$ (Utilizar coordenadas esféricas).

24M Calcular el volumen del sólido que se encuentra fuera del cono de ecuación $x^2+y^2 = z^2$ y dentro de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 4z$ (utilizar coordenadas esféricas).

24N Determinar el volumen de la zona interior al cilindro de altura 4, $x^2+y^2 = 2y$ y al paraboloide $z = x^2 + y^2$.