

GRAVITACIÓN  
NEWTONIANA  
Y  
RELATIVIDAD

Juan A. Navarro González  
Juan B. Sancho de Salas

9 de marzo de 2004



*So fest der Meinung Gegensatz des Wahren und des Falschen wird, so pflegt sie auch entweder Beistimmung oder Widerspruch gegen ein vorhandenes philosophisches System zu erwarten, und in einer Erklärung über ein solches nur entweder das eine oder das andere zu sehen. Sie begeift die Verschiedenheit philosophischer Systeme nicht so sehr als die fortschreitende Entwicklung der Wahrheit, als sie in der Verschiedenheit ...*

*[Der Geist] gewinnt seine Wahrheit nur, indem er in der absoluten Zerrissenheit sich selbst findet. Diese Macht ist er nicht, als das Positive, welches von dem Negativen wegsieht, wie wenn wir von etwas sagen, dieß ist nichts oder falsch, und nun, damit fertig, davon weg zu irgend etwas anderen übergehen; sondern er ist diese Macht nur, indem er dem Negativen ins Angesicht schaut, bei ihm verweilt. Dieses Verweilen ist die Zauberkraft, die es in das Sein umkehrt ...*

( G. W. F. Hegel: *Das Phaänomenologie des Geistes*)

(Cuando arraiga la opinión del antagonismo entre lo verdadero y lo falso, dicha opinión suele esperar también, ante un sistema dado, el asentimiento o la contradicción. No concibe la diversidad de los sistemas como el desarrollo progresivo de la verdad, sino que sólo ve en la diversidad la contradicción.

El espíritu no conquista su verdad como lo positivo que se aparta de lo negativo, como cuando decimos de algo que no es nada o que es falso y pasamos sin más a otra cosa; sino sólo cuando mira cara a cara y permanece cerca de lo negativo. Esta permanencia es la fuerza mágica que hace que lo negativo vuelva a ser...)



# Prefacio

La representación más simple de las teorías científicas afirma que cada una debe formar una construcción racional, con sus consecuencias lógicas bien definidas, que prediga sin vaguedad los resultados de las experiencias que podamos realizar en el ámbito que la propia teoría delimite. Se supone que, cuando diferentes teorías que hagan referencia a una misma parcela de la realidad sean contradictorias, la realización de experimentos adecuados debe decidir cuál es falsa. Si el resultado de alguna experiencia difiere de la predicción, la teoría resulta ser falsa o, cuando menos, altamente problemática; pero la concordancia no nos certifica la verdad de la misma, pues no impide la existencia de pruebas futuras que la refuten. Nunca podríamos afirmar que una teoría es verdadera, sólo que no hemos comprobado que sea errónea, ya que si disponemos de la posibilidad de comprobar la falsedad de una teoría, no tenemos medio alguno para mostrar que es cierta. Lo dicho no niega la existencia de teorías verdaderas; pero nunca podríamos saber si estamos en ellas. Sólo del error podemos estar seguros. Parece como si en la Ciencia la verdad únicamente pudiera abrazar al error. Así, durante algún tiempo se consideró la Ley de la Gravitación Universal descubierta por Newton como absolutamente correcta para describir los movimientos de los cuerpos celestes. A pesar del increíble éxito que supuso el descubrimiento en 1846 de Neptuno por la desviación que provoca en la órbita de Urano, a finales del siglo XIX se comprobó que la trayectoria de Mercurio no coincide totalmente con la que predice tal ley, incluso considerando las interacciones con los restantes planetas, mientras que la Teoría de la Relatividad sí puede dar cuenta del avance del perihelio de Mercurio. Si a la Mecánica Clásica le ha esperado tal destino, a pesar de sus extraordinarios éxitos e impresionante belleza, ¿qué podemos esperar para las restantes teorías? ¿sólo una agonía más lenta, tal vez eterna? ¿está llamada la historia de la Física a ser un camino lleno de cadáveres? En este modo de comprender las teorías, éstas sólo pueden aspirar a ser meras aproximaciones, cada vez mejores, de la realidad. De una realidad que no nos es dado alcanzar o, caso de conseguirlo, saber que lo hemos logrado. Desde esta comprensión, para explicar el interés de las teorías científicas es necesario argumentar que aproximan bien la realidad, que sus conclusiones son prácticamente correctas en muchas situaciones. Se introduce así entre la verdad y el error una extraña situación: la del error que casi es cierto, aunque pequeñas diferencias en las predicciones numéricas puedan suponer enormes modificaciones en los conceptos<sup>1</sup>. El interés de las teorías ya no puede radicar

---

<sup>1</sup>Baste observar que la Teoría de la Relatividad y la Gravitación newtoniana difieren muy poco en la predicción del movimiento de los planetas, a pesar de sus grandes diferencias en la concepción del

en su capacidad para iluminar y volver inteligible la estructura de la realidad, sino en su utilidad para las cuestiones prácticas, donde la existencia de pequeños errores numéricos no es esencial. Esta aceptación de la inutilidad de todos nuestros esfuerzos por captar la verdad está muy extendida en nuestro tiempo y se encuentra a menudo en la historia. Por ejemplo en la Grecia antigua, baste recordar los dos primeros principios de Gorgias (*nada existe, y si algo existiera no podría ser conocido*), o en la época de la decadencia de la vida pública romana, cuando Pilatos contesta al Cristo *¿qué es la verdad?*, queriendo decir que ya estamos más allá de la verdad, donde no merece la pena conocerla ni hablar de ella.

Otra representación más profunda de la teorías físicas, pero aún muy insuficiente como veremos más adelante, se fundamenta en el descubrimiento de que toda observación pretendidamente objetiva presupone teoría y conceptos. En efecto, aunque una visión superficial de la Ciencia pudiera llevarnos a aceptar que se basa en una acumulación de hechos objetivos y que, tras la reiterada comprobación de regularidades, coincidencias y simetrías, se establecen los conceptos y las teorías que dan cuenta de los hechos, la falsedad de este punto de vista se manifiesta en el análisis de cualquier “hecho objetivo”. La teoría y los conceptos son previos a los hechos observados. Consideremos, a título de ejemplo, la observación diaria del movimiento solar en el cielo. Para reconocer este hecho es necesaria la disposición previa, más o menos implícita, del concepto de movimiento (y otros) y todo cambio en nuestra concepción del movimiento modifica radicalmente el hecho observado. El hombre antiguo observaba el movimiento diario del Sol, pues entendía el movimiento como desplazamiento respecto de la superficie terrestre. Tras el giro copernicano y la concepción del movimiento como aceleración respecto de los sistemas de referencia inerciales, se observaba la Tierra girando diariamente sobre un eje, mientras el Sol y las estrellas fijas definían prácticamente un sistema inercial. Ahora, de acuerdo con la visión einsteiniana del movimiento, vemos la aceleración de la Tierra respecto del traslado paralelo que define la medida del tiempo. Esto puede llevar a algunos a opinar que carece de sentido preguntarse si realmente gira el Sol o la Tierra, pues la respuesta dependería de una concepción previa del movimiento, que no podría ser rechazada en base a “hechos objetivos” que la presuponen. Incapaces de captar entre dos teorías otra relación que no sea la contradicción o la absoluta independencia, esto les lleva a ver las teorías científicas en una especie de lucha darwinista, reduciendo su verdad a una mera supervivencia histórica, a una adaptación al medio, y les conduce a abordar los cambios de teoría únicamente en su aspecto externo y descriptivo: las actitudes de los científicos relevantes que intervienen, el proceso histórico de competencia entre partidarios de dos teorías diferentes, etc.. Pero todo ello como si ambas teorías fueran inconmensurables, sin captar que tales cambios están determinados ante todo por las teorías en cuestión y sus relaciones internas<sup>2</sup>.

Los dos puntos de vista anteriores no captan más relación entre teorías científicas que el puro “éxito histórico” o el grado de aproximación a las “medidas objetivas”. Aunque antagónicos, tienen una raíz común: sólo alcanzan a ver teorías contradictorias o inconmensurables. Son incapaces de concebir una relación asimétrica entre teorías,

---

espacio y el tiempo.

<sup>2</sup>Relaciones que pretendemos aclarar en el caso de la Gravitación newtoniana y la Teoría de la Relatividad.

cuando su relación esencial, la capacidad de una teoría para explicar y dar cuenta de otra, en absoluto es simétrica. Consideremos, a título de ejemplo bien conocido, la concepción plana de la superficie terrestre frente a la teoría de su carácter curvo:

La Geometría plana clásica pretendía ser la expresión de las relaciones métricas que se dan en la superficie terrestre, tal y como su nombre *geo-metría* indica. Al proponer la teoría de que su superficie es esférica, a primera vista se trata de dos teorías contradictorias porque predicen resultados bien distintos para las medidas de grandes círculos y triángulos, y la medición cuidadosa de varias distancias nos decide rápidamente a favor de la segunda. Sin embargo, una vez aceptada la curvatura de la Tierra, la nueva teoría nos muestra que la primitiva recogía la estructura del plano tangente en un punto, dando cuenta de su error en las mediciones y de la verdad que contiene: *es la geometría de una región infinitesimal de la superficie terrestre*. Nos hace ver que la vieja teoría no puede ser desechada como falsa sin más, pues es un paso indispensable para enseñar, entender y establecer, incluso desde un punto de vista lógico, la nueva teoría. La Geometría euclidiana es un prerrequisito de la Geometría riemanniana, porque las variedades riemannianas se definen precisamente por la condición de que sus espacios tangentes sean euclidianos. Prácticamente todas las demostraciones de la teoría de superficies de Riemann usan sistemáticamente las propiedades de la Geometría euclidiana. La vieja teoría no es una más entre el enjambre de posibles teorías contradictorias o inconmensurables con la nueva, sino el paso previo y absolutamente necesario, no sólo desde un punto de vista histórico o pedagógico sino desde el punto de vista lógico, lo que es más importante. Es el peldaño que se ha de pisar para luego levantar el pie y alcanzar el siguiente.

Y esta relación no es simétrica. Si se afirma la falsedad de la teoría plana, no lo es en el sentido en que sería falsa una teoría esférica en caso de ser realmente una superficie plana, aunque el grado de aproximación en las medidas numéricas sea el mismo que en la situación inversa. En este hipotético caso no habría explicación alguna para el error previo, pues de la geometría plana no se deriva canónicamente ninguna geometría esférica.

Igualmente la Teoría de la Relatividad Especial recoge la estructura infinitesimal del espacio y el tiempo que exhibe la Teoría de la Relatividad General. Este libro pretende mostrar que una situación análoga se da entre la Gravitación newtoniana y la Teoría de la Relatividad General. Intenta desentrañar en qué sentido la Relatividad aclara, explica y da cuenta de la Física newtoniana, y la necesita como paso previo. Al igual que el espacio tangente presenta con rigor nuestra intuición del límite de una región cuando su diámetro tiende a cero, nuestro propósito es precisar, en la teoría relativista de la gravitación, el concepto de *límite cuando la velocidad de la luz tiende a infinito*, porque tal límite ha de ser la teoría newtoniana<sup>3</sup> de la gravitación.

Así como la geometría riemanniana no supone el rechazo de la geometría euclídea

---

<sup>3</sup>Conviene notar que, al referirnos a la teoría newtoniana, no queremos indicar su exposición por Newton, sino tal y como es ahora para nosotros, después de las sucesivas aclaraciones realizadas por Euler, Poisson, Cartan y muchos otros. No tenemos nada que ver con los muertos, dejando que entierren sus muertos, y sí con los vivos, con la Física newtoniana expuesta con el máximo rigor y claridad que sepamos alcanzar. No se trata aquí de las relaciones que históricamente se dieron entre ambas teorías (aunque para algunos parece que no pueda haber más verdad que la histórica) sino de estudiar las relaciones que efectivamente tienen como tales teorías.

sino su entronación como estructura infinitesimal de toda teoría de las relaciones métricas, la Teoría de la Relatividad General no es la refutación de la física newtoniana, sino que la exhibe como estructura límite del espacio y el tiempo necesariamente presente a los ojos de los observadores. El conocimiento humano, lejos de ser una hilera de cadáveres, es la aclaración de estructuras cada vez más vivas y presentes.

*ad maiorem Dei gloriam*

# Índice General

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>1 Espacio-tiempo de Galileo</b>	<b>1</b>
1.1 Espacio y Tiempo en la Mecánica Clásica . . . . .	1
1.2 Sistemas de Referencia . . . . .	8
1.3 Estructura Infinitesimal . . . . .	10
1.4 El Principio de Inercia . . . . .	11
<b>2 Gravitación Newtoniana</b>	<b>15</b>
2.1 Conexiones de Cartan . . . . .	16
2.2 Densidad de Masa . . . . .	20
2.3 Sistemas de Referencia Inerciales . . . . .	24
2.4 Potencial Gravitatorio . . . . .	26
2.5 Ley de la Gravitación Universal . . . . .	29
2.6 Forma de Impulso . . . . .	31
2.7 Mecánica de Fluidos . . . . .	40
2.8 Ecuaciones de Campo . . . . .	45
2.9 Estructura Local de la Gravitación Newtoniana . . . . .	48
<b>3 Espacio-tiempo de Minkowski</b>	<b>53</b>
3.1 Relatividad Especial . . . . .	54
3.2 Sistemas de Referencia Inerciales . . . . .	56
3.3 Partículas . . . . .	58
3.4 Efectos Relativistas . . . . .	60
3.5 Leyes de Conservación . . . . .	66
<b>4 Gravitación Relativista</b>	<b>71</b>
4.1 Relatividad General . . . . .	72
4.2 Forma de Impulso . . . . .	75
4.3 Tensor de Einstein y Forma de Cartan . . . . .	77
4.4 Ejemplos . . . . .	83
<b>A Geometría Euclídea</b>	<b>89</b>

<b>B Cálculo Diferencial Valorado</b>	<b>93</b>
B.1 Formas diferenciales valoradas . . . . .	93
B.2 Conexiones en fibrados vectoriales . . . . .	96
B.3 Derivada de Lie y diferencial exterior . . . . .	97
B.4 Curvatura . . . . .	100
B.5 Ecuaciones de estructura de Cartan . . . . .	101
<b>C Electromagnetismo</b>	<b>103</b>
C.1 Interpretación en el Espacio-Tiempo . . . . .	105
C.2 Ley de Lorentz . . . . .	110
C.3 Ecuaciones de Maxwell Clásicas . . . . .	111
C.4 Notas . . . . .	111
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

# Capítulo 1

## Espacio-tiempo de Galileo

En este capítulo precisaremos las hipótesis sobre el espacio, el tiempo y la inercia aceptadas, más o menos implícitamente, en la Mecánica Clásica, intentando aclarar de paso el fundamento empírico de cada una. Vamos a exponer la estructura del espacio y el tiempo en la Mecánica Clásica, aceptando el Principio de Inercia bajo la forma de que las trayectorias inerciales definen una estructura afín sobre el espacio-tiempo. El punto de llegada será la definición del espacio-tiempo de Galileo, que recoge la estructura del espacio, el tiempo y la inercia en la Mecánica Clásica.

### 1.1 Espacio y Tiempo en la Mecánica Clásica

La primera hipótesis que vamos a establecer expresará que, para determinar un “¿qué-ahora?”, para fijar el lugar y el momento en que ocurre un suceso cercano, necesitamos 4 escalares; que cada observador necesita 4 coordenadas para localizar los sucesos en su entorno. En la Mecánica Clásica se acepta además que las mediciones tienen siempre alguna imprecisión, por lo que carece de sentido preguntarse si cierto observable es o no una función continua o diferenciable, así que siempre podemos suponer que las observaciones son diferenciables. En particular, lo serán también los cambios de coordenadas entre los diversos observadores:

**Hipótesis 0:** *El espacio-tiempo es una variedad diferenciable de dimensión 4, que denotaremos  $X$ , y los puntos de  $X$  se llamarán sucesos.*

De ahora en adelante *todas las variedades se supondrán de clase  $C^\infty$  y base numerable, y todas las aplicaciones, funciones, tensores, conexiones, etc. se supondrán de clase  $C^\infty$ .*

Es verdaderamente notable que una hipótesis tan básica, y aparentemente inocua, sobre la estructura del espacio y el tiempo permita ya demostrar que en cada suceso  $p \in X$  tenemos un espacio vectorial real de dimensión 4: el espacio tangente  $T_p X$ . Tal espacio se obtiene al despreciar (= hacer cociente por) los infinitésimos de orden mayor

que 1, de modo que  $T_p X$  debe entenderse como una región del espacio-tiempo infinitesimalmente pequeña<sup>1</sup> alrededor de  $p$ . **La estructura del espacio tangente  $T_p X$  recoge la estructura infinitesimal del espacio-tiempo.** La hipótesis 0 implica que infinitesimalmente el espacio-tiempo tiene estructura de espacio afín de dimensión 4, que en las regiones infinitesimalmente pequeñas del espacio-tiempo disponemos de los conceptos de recta, plano, paralelismo y demás conceptos afines, con las propiedades usuales; aunque no podamos relacionar estas estructuras afines en dos sucesos distintos ni tenga sentido preguntar qué curvas son rectas en el espacio-tiempo.

Así pues, esta hipótesis es de largas consecuencias y tiene un gran contenido arbitrario, pues establece, frente a la posibilidad de un Universo de naturaleza discreta, su carácter continuo. En su disertación sobre las hipótesis de la geometría, B. Riemann decía en 1854:

*Las cuestiones acerca de las relaciones métricas del espacio en lo inconmensurablemente pequeño no son ociosas . . . Ahora bien, parece que las nociones empíricas sobre las que se basan las relaciones métricas del espacio, el concepto de cuerpo rígido y de rayo de luz, pierden su validez en lo infinitamente pequeño; así que es perfectamente posible que las relaciones métricas del espacio en lo infinitamente pequeño no se adecúen a las hipótesis de la Geometría, y de hecho deberíamos aceptarlo tan pronto como esto permita un modo más sencillo de explicar los fenómenos.*

*La cuestión de la validez de las hipótesis de la Geometría en lo infinitamente pequeño está relacionada con el problema de los fundamentos de las relaciones métricas del espacio. En relación con esta cuestión, que puede entenderse como parte del estudio del espacio, es válida la observación de que en una variedad discreta el principio de sus relaciones métricas ya está contenido en el concepto de variedad, mientras que en una continua debe proceder de otra cosa. Por tanto, o bien la realidad subyacente al espacio es una variedad discreta, o la base de sus relaciones métricas debe buscarse fuera de él en unas fuerzas que actúen sobre él.*

A pesar de su aspecto inocente, esta hipótesis 0 es una afirmación fortísima sobre los fenómenos físicos en las regiones infinitamente pequeñas del espacio-tiempo, que en gran parte no tiene fundamento fáctico ni de razón, sino que está subordinada a nuestra incapacidad para contrastarla frente a hipótesis alternativas que ni siquiera podemos concebir. Debido al estado actual del desarrollo de la Geometría no disponemos aún de un marco conceptual que nos permita eliminar en la hipótesis 0 lo que no corresponda a los hechos físicos que pretende recoger. A este respecto sólo nos queda añadir que esperamos que futuras profundizaciones del concepto de geometría continúen ayudando a aclarar la estructura del espacio y el tiempo implícita en la Mecánica Clásica.

## El tiempo

La siguiente hipótesis expresará que la simultaneidad y las proporciones entre diversos intervalos de tiempo tienen carácter absoluto: son independientes de los observadores, unidades de medida, etc. Es decir, frente a la pregunta de si dos sucesos son simultáneos

<sup>1</sup>Pues en una región muy pequeña las variaciones de nuestras medidas también lo serán y, en consecuencia, las sumas finitas de sus productos serán despreciables.

o de si el intervalo de tiempo transcurrido entre ellos coincide con (o duplica a, etc.) el transcurrido entre otros dos, la respuesta correcta es un Sí o un No absolutos, sin compañía de un "respecto de ..." un "para ..." un "dependiendo de ...". La respuesta, si de algo depende, sólo es de la estructura del espacio-tiempo, de la estructura que ha dado sentido y ha hecho posible la propia pregunta.

**Hipótesis 1:** *El tiempo es absoluto: es una proyección regular  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  valorada en una recta<sup>2</sup> afín orientada.*

Los puntos de esta recta afín  $\mathbb{A}_1$  se llamarán *instantes* de tiempo y la fibra  $\mathcal{E}_t$  de la proyección  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  sobre un instante  $t \in \mathbb{A}_1$  es el *espacio* en ese instante  $t$ , el Universo que observamos en el instante  $t$ . Llamaremos *vectores espaciales* a los vectores tangentes al espacio, es decir, a los vectores tangentes a  $X$  con proyección nula según el tiempo  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$ .

En  $X$  disponemos de una 1-forma estructural  $\omega$  (bien definida salvo un factor positivo) que es la imagen inversa por  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  de la 1-forma constante en  $\mathbb{A}_1$  dada por su estructura afín y su orientación. Diremos que un vector  $D$  tangente a  $X$  está orientado al *futuro* o al *pasado* (o que es espacial) según que  $\omega(D)$  sea positivo o negativo (o nulo). La métrica  $g := \omega \otimes \omega$  se llama *métrica del tiempo* y será de importancia fundamental.

Los vectores espaciales son los vectores incidentes con  $\omega$  ó, lo que es igual, son los vectores del radical de  $g$ . Fijar la métrica  $g$  equivale a elegir una unidad de tiempo. Si elegimos además un instante (considerado como origen del tiempo) la recta  $\mathbb{A}_1$  puede identificarse con los números reales y el tiempo  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  puede entenderse como una función real diferenciable  $t$ , y es claro que tenemos

$$\omega = dt \quad , \quad g = dt \otimes dt \quad , \quad (1.1)$$

de modo que la medida  $t(q) - t(p)$  del tiempo transcurrido entre dos sucesos  $p, q$  es precisamente la integral de  $\omega$  a lo largo de cualquier curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  que los una,  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = q$ ; ó bien su longitud respecto de  $g$  (siempre que supongamos que  $g$  es definido-positiva sobre  $\gamma$ ):

$$t(q) - t(p) = \int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sqrt{g(\gamma_*(\partial/\partial s), \gamma_*(\partial/\partial s))} ds .$$

Si consideramos un cuerpo puntual, en cada instante  $t$  ocupará una posición  $p_t$  en el espacio, así que las sucesivas posiciones del cuerpo definen una aplicación  $p: \mathbb{A}_1 \rightarrow X$  tal que  $p(t) = p_t$  siempre es un suceso que ocurre en el instante  $t$ . Por eso llamaremos *trayectoria* de un móvil u *observador* a las secciones (diferenciables) del tiempo:

$$p: \mathbb{A}_1 \longrightarrow X \quad , \quad t \circ p = id .$$

---

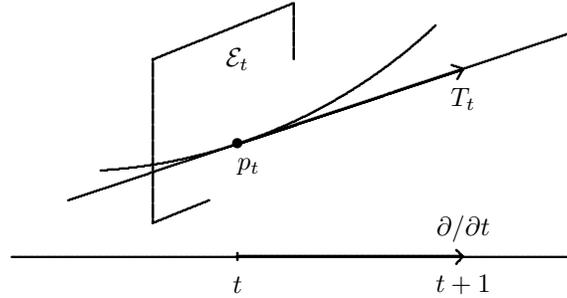
<sup>2</sup>Hemos supuesto que los instantes de tiempo forman una recta afín sin principio ni final, cuando sería más acorde con nuestras limitadas observaciones suponer sólo que forman un intervalo de una recta afín; pero tal variación no modificaría en nada nuestra exposición y, en orden a su sencillez, supondremos que el tiempo valora en una recta completa.

Las trayectorias del movimiento son las curvas diferenciables en el espacio-tiempo parametrizadas por el tiempo.

Dada la trayectoria  $p : \mathbb{A}_1 \rightarrow X$  de un móvil, tenemos un campo de vectores tangentes a  $X$  (con soporte en dicha trayectoria):

$$T := p_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1.2)$$

que recibe el nombre de *velocidad* del móvil considerado. En cada instante  $t$  la velocidad  $T_t$  del cuerpo es un vector tangente a su trayectoria, totalmente determinado por la condición  $\omega(T_t) = 1$  (en particular la velocidad *nunca* es un vector espacial y *siempre* está orientada al futuro).



Por definición la velocidad  $T_t$  depende de la unidad de tiempo elegida, pues depende  $\omega = dt$ . Quien no depende es la recta  $\{\lambda T_t\}$ , que es la recta tangente a la trayectoria en  $p_t$ , y realmente es la velocidad del cuerpo en el instante  $t$ . *La velocidad de un móvil puntual es la recta tangente a su trayectoria* y sólo por comodidad la representaremos por uno de sus vectores  $T_t$ , aunque éste sí dependa de la unidad de tiempo.

Diremos que un vector  $D$  tangente a  $X$  es una *velocidad* si  $\omega(D) = 1$ .

## El espacio

En la Mecánica Clásica se acepta sin más que, en el espacio que observamos, los conceptos de la Geometría euclídea son absolutos y satisfacen los teoremas de tal geometría. Por eso introducimos la hipótesis de que, en cada instante, en el espacio son válidas las relaciones métricas propias de la Geometría euclídea:

**Hipótesis 2:** *En cada instante  $t = a$  el espacio  $\mathcal{E}_a$  es un espacio euclídeo orientado de dimensión 3.*

Esta hipótesis nos permite, en un instante dado, hablar de proporciones, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, etc. de las figuras que formen diversos móviles y aplicarles todos los recursos de la Geometría euclídea. En particular los vectores libres de  $\mathcal{E}_a$  forman un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3 que denotaremos  $E_a$ .

Sin embargo, la relación entre el espacio que observamos ahora con el que hemos observado cierto tiempo atrás no está tan clara. Por un lado no hay experimento imaginable que pueda decidir si un cuerpo está en reposo absoluto, de modo que no tiene sentido preguntar dónde está un punto de  $\mathcal{E}_a$  después de transcurrir cierto tiempo: la estructura del espacio y el tiempo no permite definir ninguna identificación de  $\mathcal{E}_a$  con  $\mathcal{E}_b$  cuando  $a \neq b$ . Por otra parte, aunque el reposo absoluto sea siempre un concepto relativo a cierto cuerpo que arbitrariamente se considere "inmóvil", el movimiento relativo sí es un concepto absoluto en la Mecánica Clásica: tiene significado absoluto afirmar que un cuerpo permanece en reposo respecto de otro. Cuando transcurre el tiempo podemos comparar vectores espaciales en instantes distintos, decidir si dos vectores espaciales  $e \in T_p(\mathcal{E}_a)$  y  $e' \in T_{p'}(\mathcal{E}_b)$  coinciden, aunque  $a \neq b$ . Tenemos procedimientos para mantener las direcciones espaciales (por ejemplo mediante un giroscopio), para distinguir unos ejes en reposo de otros que giren (recuérdese la famosa diferencia entre un cubo con agua en reposo y girando). Dicho de otro modo, cuando  $a \neq b$ , hay una identificación entre los vectores libres de  $\mathcal{E}_a$  y los de  $\mathcal{E}_b$  que tiene significado absoluto:

**Hipótesis 3 (Principio de existencia de rotaciones absolutas):** *Los vectores libres del espacio no dependen del instante dado:  $E_a = E_b$ . Este espacio vectorial euclídeo orientado común se denotará  $E$ .*

Todo vector de  $E$  define en cada punto  $p \in X$  un vector espacial; luego  $E \subseteq T_p X$  y así obtenemos un isomorfismo canónico entre  $E$  y el subespacio formado por los vectores espaciales en un punto  $p$  dado, de modo que cada vector  $v \in E$  define un campo de vectores espaciales en  $X$ . Por otra parte, el producto escalar de  $E$  induce un producto escalar en su dual  $E^*$  y, considerando la proyección natural  $T_p^* X \rightarrow E^*$ , obtenemos un campo tensorial contravariante de orden 2 simétrico  $g^*$  sobre  $X$  cuyo radical en cada punto  $p$  es el núcleo de  $T_p^* X \rightarrow E^*$ , que es el incidente de los vectores espaciales: el radical de  $g^*$  es el subespacio vectorial de  $T_p^* X$  generado por  $\omega$ . Fijar esta métrica  $g^*$ , que está indeterminada en un factor constante positivo, es fijar el producto escalar de  $E$ , así que equivale a elegir una unidad de longitud, por lo que  $g^*$  se llamará *métrica del espacio*. Elegida la unidad de longitud, la orientación de  $E$  induce en  $X$  una 3-forma  $\Omega_E$ , definida únicamente para vectores espaciales.

## Resumen

De acuerdo con las hipótesis 2 y 3, el espacio vectorial  $E$  actúa transitivamente y sin puntos fijos en las fibras del tiempo  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$ , así que podemos resumir las 4 hipótesis anteriores en una sola:

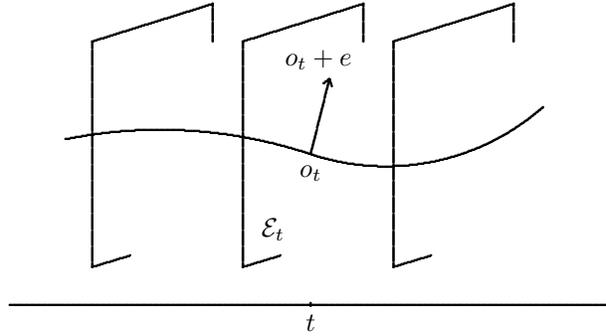
*En la Mecánica Clásica el espacio-tiempo tiene estructura de fibrado principal de clase  $C^\infty$  sobre una recta afín orientada  $t: X \rightarrow \mathbb{A}_1$ , de grupo estructural  $E$  un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión tres.*

Es decir, el espacio-tiempo  $X$  es una variedad diferenciable dotada de una proyección regular  $t: X \rightarrow \mathbb{A}_1$  y una acción diferenciable  $+: X \times E \rightarrow X$  tales que:

1.  $t(p) = t(p + e)$  para todo  $p \in X$ ,  $e \in E$ .

2. Si  $t(p) = t(q)$ , existe un único  $e \in E$  tal que  $q = p + e$ .
3. Para cada  $a \in \mathbb{A}_1$  existe un entorno  $V_a$  de  $a$  y un difeomorfismo  $\phi: V_a \times E \simeq t^{-1}(V_a)$  tal que  $\phi(b, e + e') = \phi(b, e) + e'$ .

Es importante observar de nuevo que, con la estructura del espacio y el tiempo propias de la Mecánica Clásica, *el reposo no es un concepto absoluto*. Los estados de reposo y movimiento de un móvil puntual dependen de su posición respecto de un cuerpo fijado arbitrariamente como "inmóvil". Toda frase "tal cuerpo (puntual) está en reposo" "está en movimiento" carece de sentido en la Mecánica Clásica mientras no se acompañe, explícita o implícitamente, de la aclaración "respecto de tal trayectoria". Fijada una trayectoria  $o_t: \mathbb{A}_1 \rightarrow X$ , que se toma como origen para determinar la posición de los cuerpos, la trayectoria  $p_t: \mathbb{A}_1 \rightarrow X$  de cualquier móvil está totalmente determinada por los vectores espaciales de *posición relativa*  $r_t = o_t \vec{p}_t \in E$ , y diremos que tal móvil está en *reposo* (respecto de la trayectoria  $o_t$  fijada) cuando la posición relativa no dependa del tiempo:  $r_t = r_{t'}$  aunque  $t \neq t'$ . Así, cada trayectoria  $o_t: \mathbb{A}_1 \rightarrow X$  define un difeomorfismo  $\phi: \mathbb{A}_1 \times E \simeq X$ ,  $\phi(t, e) = o_t + e$ , que conmuta con la acción de  $E$ ,



y las trayectorias en reposo respecto de  $o_t$  son las que se corresponden, vía  $\phi$ , con las curvas horizontales  $\mathbb{A}_1 \times \{e\}$  de  $\mathbb{A}_1 \times E$ .

La existencia de trayectorias en reposo sigue del hecho de que todo fibrado principal sobre una recta es trivializable (en el sentido de que es isomorfo al fibrado principal trivial  $\pi_1: \mathbb{A}_1 \times E \rightarrow \mathbb{A}_1$ ). Cada trayectoria define una trivialización  $\phi: \mathbb{A}_1 \times E \simeq X$ ; pero depende de la trayectoria elegida y afirmar que el reposo es un concepto relativo es decir que ninguna trivialización de  $X$  puede ser definida partiendo sólo de la estructura del espacio-tiempo: que  $X$  es un fibrado principal *trivializable*, pero no está *trivializado*. Afirmación que puede probarse sin más que notar que los automorfismos del fibrado principal  $t: X \rightarrow \mathbb{A}_1$  actúan transitivamente sobre sus secciones diferenciables, de modo que si partiendo de la estructura de fibrado principal pudiera definirse el concepto de trayectoria en reposo y existiera alguna, todas las trayectorias estarían en reposo, lo que es contradictorio.

Por ejemplo, cuando en la vida cotidiana usamos el concepto de reposo en expresiones tales como "un hombre corre o se para", "los árboles no se desplazan y sí los animales", etc., se entiende que el movimiento lo es respecto de cierto lugar implícito

de la superficie terrestre. Cuando decimos que los planetas giran en órbitas elípticas, se entiende que es respecto del Sol, pues claramente su movimiento relativo a la Tierra está muy lejos de ser elíptico. Sería tan cierto afirmar que la Tierra recorre anualmente una órbita elíptica con un foco en el Sol, que está en reposo, como decir que es el Sol quien describe una elipse con un foco en la Tierra, que está en reposo, pues ambos enunciados son igualmente válidos (cada uno respecto de cierta trayectoria considerada implícitamente "inmóvil"); pero no tiene sentido preguntarse si es el Sol o la Tierra el que realmente (= de modo absoluto) se mueve<sup>3</sup>. De ningún cuerpo puntual puede decirse que está en reposo o en movimiento: *no tiene significado físico afirmar que después de un tiempo un cuerpo está en el mismo lugar que antes*. No podemos identificar el espacio en dos instantes diferentes, la estructura del espacio y el tiempo no define ningún isomorfismo  $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b$  cuando  $a \neq b$ .

Hace tres siglos, cuando no eran concebibles siquiera las geometrías euclídeas de dimensión mayor que 3, sólo era posible pensar que  $X$  descompone en producto directo de una recta afín y un espacio euclídeo tridimensional, lo que obligaba a aceptar el significado absoluto del reposo y el movimiento. Como esto contradecía el carácter relativo del reposo que la Filosofía había descubierto – ya Aristóteles era muy explícito al respecto, pues llamaba lugar ( $\tau\omicron\pi\omicron\sigma$ ) a la relación de un cuerpo con los de su entorno – en su famoso escolio Newton dice:

*Como las partes del espacio no pueden verse ni distinguirse unas de otras mediante nuestros sentidos, les aplicamos medidas sensibles. Pues por las posiciones y distancias de las cosas respecto de cualquier cuerpo que se considere inmóvil definimos todos los lugares y luego calculamos todos los movimientos ... Por lo cual usamos lugares y movimientos relativos en vez de absolutos ...*

*Es posible que en las regiones de las estrellas fijas, o aún más lejos, pueda existir algo que esté en absoluto reposo; pero siendo imposible saber por la posición de los cuerpos unos respecto de otros en nuestras regiones si alguno mantiene la misma posición respecto a ese cuerpo remoto, se sigue que el reposo absoluto no puede determinarse partiendo de la posición de los cuerpos en nuestras regiones.*

Aún comprendiendo que el reposo no tiene significado físico absoluto, sin suponerlo le era imposible utilizar la Geometría, la única pensable para él, en el desarrollo de la Mecánica (algo parecido nos pasa a nosotros con la hipótesis 0) y Newton era consciente de la estrecha relación entre Mecánica y Geometría. Así, en el Prefacio de los Principia afirma:

*La geometría no es sino la parte de la mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir ... resulta que la geometría se refiere habitualmente a su magnitud y la mecánica a su movimiento.*

No obstante, el Principio de existencia de rotaciones absolutas afirma que las direcciones espaciales tienen significado absoluto, que la variación de la posición relativa sí es un concepto absoluto. Si en cada instante elegimos tres ejes espaciales, tiene sentido

<sup>3</sup>Esto se refiere al movimiento de traslación anual. Cuestión distinta es el movimiento diario de rotación, como veremos más adelante.

preguntarse si se mantienen constantes a lo largo del tiempo o si están girando. Afirmar que la Tierra gira cada 24 horas alrededor de un diámetro no equivale a decir que es el Sol el que diariamente gira alrededor de la Tierra, y por eso es posible plantearse la pregunta de qué ocurre realmente y darle cumplida respuesta.

Por otra parte, aunque hemos supuesto que el tiempo y el espacio están orientados, en la Física newtoniana no hay modo de distinguir el futuro del pasado ni la derecha de la izquierda, por lo que en principio hubiera sido más interesante desarrollar la teoría sin esta hipótesis. No obstante, nuestra experiencia nos grita diariamente que el tiempo sí está orientado y, aunque no nos muestre la orientación del espacio, sin duda éste lo está (como muestra la violación de la paridad en las interacciones débiles), aunque se deba a fenómenos fuera del ámbito de la Física newtoniana.

## 1.2 Sistemas de Referencia

**Definición:** Dar un *sistema de referencia* (con ejes cartesianos rectangulares) en el espacio-tiempo  $X$  es dar la trayectoria de un observador  $o_t: \mathbb{A}_1 \rightarrow X$  junto con tres vectores  $e_1, e_2, e_3$  de  $E$ , llamados *ejes* del sistema de referencia, que formen una base ortonormal orientada de  $E$ .

Elegido un sistema de referencia, cada suceso  $p \in X$  es simultáneo con un único punto  $o_t$  de la trayectoria del observador, así que existe un único vector  $e \in E$  tal que  $p = o_t + e$ . Por tanto existen cuatro números reales  $t, x_1, x_2, x_3$ , que reciben el nombre de *coordenadas* de  $p$  en el sistema de referencia considerado, tales que

$$p = o_t + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 .$$

Así cada sistema de referencia define un sistema de coordenadas globales  $(t, x_1, x_2, x_3)$  en el espacio-tiempo  $X$ . En estas coordenadas la trayectoria del observador es  $o_t = (t, 0, 0, 0)$ , y las correspondientes derivadas parciales forman una base de campos tangentes a  $X$ , y se denotarán

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \partial_1 := \frac{\partial}{\partial x_1} \quad , \quad \partial_2 := \frac{\partial}{\partial x_2} \quad , \quad \partial_3 := \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Nótese que  $e_1 = \partial_1$ ,  $e_2 = \partial_2$ ,  $e_3 = \partial_3$  y que la coordenada  $t$  es precisamente el tiempo, así que

$$\begin{aligned} g &= dt \otimes dt \\ g^* &= \partial_1 \otimes \partial_1 + \partial_2 \otimes \partial_2 + \partial_3 \otimes \partial_3 \end{aligned}$$

son las expresiones de la métrica del tiempo y la del espacio en este sistema de coordenadas. La velocidad de una trayectoria  $p_t = (t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  es el vector

$$T = \partial_t + x'_1(t) \partial_1 + x'_2(t) \partial_2 + x'_3(t) \partial_3 . \quad (1.3)$$

En particular,  $\partial_t$  es la velocidad del observador y la de los cuerpos en reposo aparente.

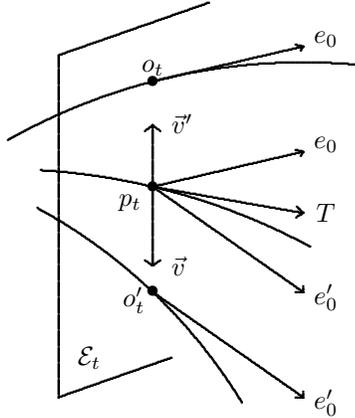
Cuando el movimiento se considera respecto de un observador implícito, cada móvil  $p_t$  se representa por la curva en  $E$  dada por la *posición aparente*

$$\vec{r}_t := o_t \vec{p}_t = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3 ,$$

y la *velocidad aparente* y la *aceleración aparente* del móvil para el observador son

$$\begin{aligned} \vec{v} &:= x'_1(t)e_1 + x'_2(t)e_2 + x'_3(t)e_3 = T - \partial_t \\ \vec{a} &:= x''_1(t)e_1 + x''_2(t)e_2 + x''_3(t)e_3 \end{aligned}$$

respectivamente. La velocidad aparente  $\vec{v}$ , que no es más que la diferencia entre la velocidad del móvil y la del observador implícito, siempre es un vector espacial, eventualmente nulo, y no tiene carácter absoluto, mientras que la velocidad  $T$  nunca es espacial ni nula, y es independiente del observador. Vemos que así se desprecia el campo tangente  $e_0$  definido por la velocidad del observador y de los cuerpos en reposo aparente (campo que en las coordenadas del observador es  $\partial_t$ ). Si consideramos otro observador  $o'_t$ , con velocidad  $e'_0$ , tenemos



de modo que la velocidad aparente del móvil para ambos observadores es distinta, y la diferencia  $\vec{v}' - \vec{v}$  es precisamente el opuesto  $e_0 - e'_0$  de la diferencia de las velocidades de los observadores, que es precisamente la velocidad aparente del primer observador para el segundo.

**Nota:** Pudiera objetarse al planteamiento anterior que hemos llamado velocidad en un instante  $t$  a la recta tangente a la trayectoria espacio-temporal ( $T_t$  nunca es un vector espacial), con lo que cambiamos el significado tradicional del concepto de velocidad y no deberíamos extrañarnos si los consiguientes resultados fueran dispares de los tradicionales. Pero la realidad es que la definición dada coincide totalmente con el concepto usual de velocidad. En efecto, tradicionalmente se entiende por velocidad instantánea el espacio recorrido por unidad de tiempo (cuando ésta es infinitamente pequeña) de modo que siempre es un vector espacial, en aparente contradicción con la definición que hemos dado. No obstante, si un observador afirma que cierto móvil parte en dirección Sur a 60 km/h y otro nos dice que se desplaza en tal dirección con una

velocidad de 1 kilómetro por minuto, no consideramos que discrepen en la velocidad del móvil, aunque el segundo nos dé un vector espacial 60 veces menor, porque usa otra unidad de tiempo. Cuando la velocidad se entiende como vector espacial, depende de la unidad de tiempo, de modo que la velocidad es realmente una aplicación de las unidades de tiempo en los vectores espaciales, aplicación que siempre es lineal porque a doble, triple, etc. unidad de tiempo le corresponde un vector doble, triple, etc. Como las unidades de tiempo son los intervalos de la trayectoria del observador, las unidades infinitesimalmente pequeñas son los vectores tangentes a su trayectoria, y la velocidad del móvil es una aplicación lineal de la recta tangente a la trayectoria del observador en los vectores espaciales, aplicación que se identifica canónicamente con su "gráfica", que es precisamente la recta tangente a la trayectoria del móvil: la velocidad en el sentido que le hemos dado.

### 1.3 Estructura Infinitesimal

Veamos la estructura infinitesimal del espacio y el tiempo en la Mecánica Clásica que hemos desentrañado en el largo apartado anterior; es decir, la estructura del espacio tangente  $T_p X$  que se deduce de las hipótesis establecidas. La estructura infinitesimal del espacio y el tiempo en la Mecánica Clásica es la de un espacio vectorial real  $V$  de dimensión 4 dotado de:

- Una *medida del tiempo*  $\{\lambda^2 g\}$ , dada por una métrica covariante simétrica sobre  $V$  de tipo  $(+, 0, 0, 0)$ , bien definida salvo un factor positivo.
- Una *orientación del tiempo*  $W_+$ ; es decir, una de las dos componente conexas del abierto formado por los vectores  $v \in V$  tales que  $g(v, v) > 0$ .
- Una *medida de longitudes*  $\{\lambda^2 g^*\}$ , dada por una métrica contravariante simétrica sobre  $V$  de tipo  $(0, +, +, +)$ , bien definida salvo un factor positivo, verificando la condición de que los radicales de  $g$  y  $g^*$  sean mutuamente incidentes.
- Una *orientación del espacio*  $[\Omega_E]$ ; es decir, una orientación del radical  $E$  de  $g$ .

y fijar representantes  $g$  y  $g^*$  en estas dos familias de métricas significa elegir unidades de tiempo y longitud. En tal caso fijar la orientación del tiempo  $W_+$  equivale a dar una de las dos raíces cuadradas  $\omega$  de  $g$ , la única que es positiva en  $W_+$ , y fijar la orientación de  $E = \text{rad } g$  equivale a dar una forma de volumen  $\Omega_E \in \Lambda_3 E$ , porque  $g^*$  induce un producto escalar en  $E$ . Fijadas unidades de tiempo y longitud, la estructura infinitesimal del espacio y el tiempo en la Mecánica Clásica es la de un espacio vectorial real  $V$  de dimensión 4 dotado de:

- Una métrica covariante simétrica  $g$  sobre  $V$  de tipo  $(+, 0, 0, 0)$ , llamada *métrica del tiempo*.
- Una 1-forma lineal  $\omega$  sobre  $V$ , llamada *orientación del tiempo*, tal que  $g = \omega \otimes \omega$ .

–. Una métrica contravariante simétrica  $g^*$  sobre  $V$  de tipo  $(0, +, +, +)$ , llamada *métrica del espacio*, cuyo radical sea  $\mathbb{R}\omega$ , de modo que  $g^*$  induce un producto escalar  $E \times E \rightarrow E$ , donde  $E = \text{rad}(g) = \ker(\omega)$ .

–. Una forma de volumen  $\Omega_E \in \Lambda_3 E$ , llamada *orientación del espacio*, que en toda base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $E$  tome valor  $\Omega_E(e_1, e_2, e_3) = \pm 1$ .

Aunque la primera de estas dos definiciones sea la que recoge exactamente la estructura infinitesimal del espacio-tiempo en la Mecánica Clásica siempre supondremos, para simplificar la exposición, que se han fijado unidades de longitud y tiempo. Así, la estructura infinitesimal del espacio-tiempo que tendremos presente será:

$$\boxed{(T_p X; g, \omega, g^*, \Omega_E)}$$

Además, a menudo fijaremos implícitamente un instante, de modo que el tiempo pueda entenderse como una función diferenciable  $t$  en  $X$  tal que  $\omega = dt$ . En contrapartida, estas elecciones arbitrarias nos obligarán a comprobar si las definiciones son independientes de las unidades de medida fijadas o si dependen y en qué forma.

## 1.4 El Principio de Inercia

La afirmación de que el reposo relativo tiene carácter absoluto significa que disponemos de una noción de paralelismo entre las velocidades de los diferentes cuerpos en un mismo instante. Dadas dos velocidades  $T \in T_p X$  y  $\bar{T} \in T_{\bar{p}} X$  en dos sucesos simultáneos  $p, \bar{p}$ , de modo que  $\omega(T) = \omega(\bar{T}) = 1$ , diremos que  $T$  y  $\bar{T}$  son vectores paralelos o coincidentes si son las velocidades de dos trayectorias en reposo relativo; es decir, cuando los observadores que pasan por  $p$  con velocidad  $T$  observen que los móviles en  $\bar{p}$  con velocidad  $\bar{T}$  tienen velocidad aparente nula. Esta noción de paralelismo define un isomorfismo canónico  $T_p X = T_{\bar{p}} X$  que coincide con el que induce la traslación en  $X$  por el vector  $\bar{p} - p$ . Así la estructura de fibrado principal permite comparar velocidades en sucesos simultáneos; pero no en sucesos que ocurran en momentos diferentes, de forma que no compara las velocidades de un móvil a lo largo de su trayectoria: la estructura del espacio-tiempo que hemos desentrañado aún no permite dar sentido a la variación de la velocidad de un móvil. Cierto es que los giroscopios detectan los cambios de dirección, pero sólo de las direcciones espaciales, no de las direcciones espacio-temporales, y la velocidad de un móvil nunca es espacial, sólo su velocidad aparente lo es. Los giroscopios dan sentido al concepto de trayectoria de velocidad aparente constante (para un observador prefijado), no al de trayectoria con velocidad constante, y sería absurdo decir que los móviles de velocidad constante son los de velocidad aparente constante respecto de un observador adecuado, pues toda trayectoria tiene velocidad aparente constante para un observador: el que siga su misma trayectoria.

El Principio de Inercia suele enunciarse afirmando que, en ausencia de fuerzas, los cuerpos se mueven con velocidad constante, suponiendo implícitamente que las trayectorias con velocidad constante son las rectas de una estructura afín sobre el espacio-tiempo  $X$ :

**Principio de Inercia:** *El espacio-tiempo tiene una estructura de espacio afín de dimensión 4 cuyas trayectorias rectilíneas son las trayectorias inerciales.*

Cuando en la Mecánica Clásica se asume el Principio de Inercia, se admite que  $X$  tiene la estructura de un espacio afín  $\mathbb{A}_4$  de dimensión 4, en cuyo espacio de vectores libres  $V$  tenemos la estructura infinitesimal puesta de manifiesto en el apartado 1.3:

**Definición:** El *espacio-tiempo de la Mecánica Clásica* (o *espacio-tiempo de Galileo*) es un espacio afín real  $\mathbb{A}_4$  de dimensión 4, cuyo espacio de vectores libres  $V$  está dotado de una métrica  $g$  (llamada *métrica del tiempo*), una forma lineal  $\omega$  (llamada *orientación del tiempo*) tal que  $g = \omega \otimes \omega$ , una métrica contravariante  $g^*$  (llamada *métrica del espacio*) que define un producto escalar sobre el radical  $E$  de  $g$ , y una forma de volumen  $\Omega_E$  en  $E$  (llamada *orientación del espacio*) que tome valor  $\pm 1$  en las bases ortonormales:

$$(\mathbb{A}_4, V, g, \omega, g^*, \Omega_E)$$

Esta estructura afín adicional permite definir los conceptos de trayectoria inercial y de sistema de referencia inercial:

Diremos que una trayectoria  $p_t: \mathbb{A}_1 \rightarrow X = \mathbb{A}_4$  es *inercial* cuando sea una aplicación afín (es decir, cuando su imagen sea una recta).

Diremos que un sistema de referencia afín  $(p_0; v_0, e_1, e_2, e_3)$  es *inercial* cuando  $\omega(v_0) = 1$  y  $\{e_1, e_2, e_3\}$  sea una base ortonormal y orientada de  $E$ . En el correspondiente sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  tenemos que  $v_0 = \partial_t$ ,  $e_1 = \partial_1$ ,  $e_2 = \partial_2$ ,  $e_3 = \partial_3$ .

Nótese que la trayectoria  $p_0 + tv_0$  del origen del sistema de referencia es inercial y su velocidad es  $v_0 = \partial_t$ .

Ahora el Principio de Inercia puede enunciarse afirmando que, en ausencia de fuerzas, los móviles siguen trayectorias inerciales; es decir, que su velocidad  $T$  es un campo de vectores auto-paralelo:

$$T^\nabla T = 0,$$

donde  $\nabla$  denota la conexión lineal definida por la estructura afín del espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$ . En efecto, si  $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  son las coordenadas de la trayectoria de un móvil en cierto sistema de referencia inercial, la velocidad del móvil es

$$T = \partial_t + x'_1(t)\partial_1 + x'_2(t)\partial_2 + x'_3(t)\partial_3;$$

luego su aceleración  $T^\nabla T$  es

$$T^\nabla T = x''_1(t)\partial_1 + x''_2(t)\partial_2 + x''_3(t)\partial_3,$$

de modo que  $T^\nabla T$  siempre es un vector espacial y coincide con la aceleración aparente del móvil en el sistema de referencia dado. En particular, la aceleración aparente del móvil es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.

Si introducimos el vector de *impulso*  $I$  de una partícula de masa  $m \neq 0$  y velocidad  $T$ :

$$I := mT = m(\partial_t + \vec{v}) = m\partial_t + m\vec{v} ,$$

vector que para cada observador recoge la masa y la cantidad de movimiento o momento  $m\vec{v}$  de la partícula, entonces la condición

$$0 = I^\nabla I \Leftrightarrow 0 = T^\nabla I = (Tm)T + T^\nabla T$$

de que el campo de vectores  $I$  sea auto-paralelo equivale a la anulación de  $Tm$  y de  $T^\nabla T$ , porque  $T$  nunca es un vector espacial y  $T^\nabla T$  siempre lo es. Vemos así que la Ley de conservación del impulso ( $I^\nabla I = 0$ ) recoge tanto la Ley de conservación de la masa ( $Tm = 0$ ) como la Ley del movimiento inercial ( $T^\nabla T = 0$ ).

**El grupo de Galileo:** Se llama *transformación de Galileo* a toda afinidad  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  del espacio-tiempo de Galileo que conserve su estructura; es decir, tal que  $\varphi^*\omega = \omega$  ( $\omega \circ \varphi = \omega$ ) y  $\varphi: E \rightarrow E$  sea una isometría de  $g^*$ . Las transformaciones de Galileo forman un grupo respecto de la composición de aplicaciones, llamado *grupo de Galileo*.

Es claro que las transformaciones de Galileo llevan sistemas de referencia inerciales en sistemas de referencia inerciales. Además, si tomamos dos sistemas de referencia inerciales

$$(p_0; v_0, e_1, e_2, e_3) \quad , \quad (\bar{p}_0; \bar{v}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

es sencillo comprobar que la única afinidad  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  que transforma el primero en el segundo

$$\varphi(p_0) = \bar{p}_0 \quad , \quad \vec{\varphi}(v_0) = \bar{v}_0 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_1) = \bar{e}_1 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_2) = \bar{e}_2 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_3) = \bar{e}_3$$

es una transformación de Galileo. Así pues, *todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes*. En este sentido el espacio-tiempo de Galileo es isótropo. Además, las ecuaciones que relacionan las coordenadas en los sistemas de referencia inerciales coinciden con las ecuaciones de las transformaciones de Galileo en los sistemas de referencia inerciales:

$$\begin{cases} \bar{t} = t + c \\ \bar{x}_i = b_i + v_i t + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

donde la matriz  $A = (a_{ij})$  es ortogonal:  $A^t A = I$ .

**Ejercicio:** Hemos fijado unidades de tiempo y longitud. Si admitimos sistemas de referencia inerciales con unidades diferentes, determinar las ecuaciones de los correspondientes cambios de coordenadas.

Cuando se acepta el Principio de Inercia, tiene sentido preguntarse si es la Tierra la que anualmente traza una órbita elíptica alrededor del Sol o viceversa, entendiendo la pregunta en el sentido de saber si es el Sol o la Tierra quien sigue una trayectoria inercial. El Principio de Inercia permite restringir la descripción del movimiento de los cuerpos refiriéndolos siempre, si así lo deseamos, a sistemas de referencia inerciales;

pero este principio es muy problemático y cuestionable, pues todo intento de señalar un sistema de referencia inercial (o una experiencia que permita decidir si un observador es inercial) conduce a un fracaso o a oscuras consideraciones sobre cuerpos lejanos. No es posible especificar la clase privilegiada de observadores inerciales sin involucrar la totalidad del Universo o experimentos absurdos en “ausencia de fuerzas”, mientras que nuestra percepción intuitiva del movimiento no se funda en ninguna experiencia que realicemos sobre todo el Universo. Por eso sería deseable desarrollar una teoría del movimiento que sólo incluya conceptos locales.

Lo que sí es cierto es que infinitesimalmente el espacio-tiempo  $X$ , como cualquier otra variedad diferenciable, tiene una estructura afín, pues el espacio tangente  $T_p X$  es un espacio vectorial. En las regiones infinitamente pequeñas el concepto de trayectoria inercial no presenta problema: cualquier observador puede ser considerado inercial en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño. Parece que el Principio de Inercia extiende arbitrariamente a la totalidad del espacio-tiempo  $X$  su estructura infinitesimal, la que desentrañamos en nuestra experiencia cotidiana, sin más que hacer abstracción del suceso  $p$ , decretando que la estructura vectorial que diariamente vemos en  $T_p X$  ha de ser sustituida por una estructura de espacio afín en  $X$ .

Veremos en el próximo capítulo cómo la teoría newtoniana de la gravitación supera esta situación, pudiendo desarrollarse satisfactoriamente sin necesidad de introducir sistemas de referencia inerciales. Así comprenderemos que el Principio de Inercia sólo tiene sentido en regiones infinitamente pequeñas, cuando el espacio-tiempo se reemplaza por su espacio tangente, o es una ficción irreal que introducimos cuando, por algún motivo, deseamos estudiar un fenómeno en “ausencia de fuerzas gravitatorias”. La estructura del espacio, el tiempo y la inercia en la Mecánica Clásica expuesta en este capítulo, que supone una estructura de espacio afín sobre el espacio-tiempo, sólo es adecuada para estudiar la estructura infinitesimal del espacio-tiempo o su comportamiento en ausencia de fenómenos gravitatorios.

## Capítulo 2

# Gravitación Newtoniana

Lo verdaderamente importante en el Principio de Inercia es que afirma la posibilidad de comparar vectores en dos puntos de una misma trayectoria, el carácter absoluto del concepto de velocidad constante. La estructura necesaria para dar sentido a la variación de vectores a lo largo de curvas en una variedad diferenciable es la existencia de una conexión lineal o derivada covariante. El Principio de Inercia presupone pues una conexión lineal sobre el espacio-tiempo  $X$  y, al afirmar la existencia de una estructura de espacio afín en  $X$ , le impone la condición de ser plana, de tener curvatura y torsión nulas. Podemos resumir y aclarar el Principio de Inercia afirmando que las propiedades inerciales vienen dadas por una conexión lineal plana y sin torsión sobre el espacio-tiempo  $X$  cuyas trayectorias geodésicas son las trayectorias inerciales. Tal conexión lineal, al ser simétrica, está totalmente determinada por sus geodésicas: fijar dicha conexión plana equivale a dar las trayectorias inerciales.

En esta forma de entender el Principio de Inercia es sospechosa la exigencia de que tal conexión lineal tenga curvatura nula, pues no es necesaria para dar sentido a su enunciado y la única razón clara para introducirla es que hace dos siglos no se conocía más noción de paralelismo que la propia de la geometría afín. Para enunciar el Principio de Inercia sólo se precisa una estructura afín infinitesimal sobre el espacio-tiempo; es decir, un traslado paralelo de vectores a lo largo de curvas. Cartan estudió la posibilidad de que, en ausencia de fuerzas, las trayectorias de los móviles fueran geodésicas de una conexión lineal con curvatura y demostró que así se obtiene la teoría newtoniana de la gravitación. Es decir, las trayectorias de los cuerpos en caída libre son geodésicas de una conexión lineal (de una estructura afín infinitesimal) sobre el espacio-tiempo. A Einstein se debe la afirmación, tan crucial como sencilla, de que en una primera aproximación los observadores en caída libre, bajo la acción únicamente de la gravedad, son indistinguibles de los observadores inerciales. En un experimento mental nos invitó a considerar un observador en caída libre hacia el Sol encerrado dentro de un ascensor (una pequeña región del espacio-tiempo). Desde la Tierra diríamos que no sigue una trayectoria inercial, sino que sufre una aceleración creciente en dirección al Sol debida a la acción de la gravedad. Sin embargo, sin mirar fuera del ascensor, a este observador no le es posible decidir si sigue una trayectoria inercial o si está en caída libre bajo la acción de un poderoso campo gravitatorio: si suelta un objeto, éste

permanece en reposo aparente<sup>1</sup> y si le aplica una fuerza, tal objeto se desplaza con una aceleración aparente proporcional a la fuerza aplicada. Einstein llamó Principio de Equivalencia a la afirmación de que la estructura de las trayectorias en caída libre ha de coincidir infinitesimalmente con la de las trayectorias inerciales; es decir, que las trayectorias en caída libre han de ser las trayectorias geodésicas de una conexión lineal  $\nabla$  sobre el espacio-tiempo  $X$ , conexión que no es razonable exigir que sea plana por ser ésta una condición sobre el segundo entorno infinitesimal (más allá de las medidas realizadas en un ascensor).

En este capítulo mantendremos la estructura del espacio y el tiempo desentrañada en el apartado 1.1, afirmando que el espacio-tiempo es un fibrado principal  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  de grupo estructural un espacio vectorial euclídeo orientado  $E$  de dimensión 3, de modo que infinitesimalmente seguirá siendo galileano. Pero no mantendremos la hipótesis de que las propiedades inerciales vienen dadas por una estructura afín sobre  $X$ , sino por una conexión lineal compatible con tal estructura de fibrado principal<sup>2</sup>. No obstante, tal estructura no viene definida por condiciones locales, por lo que en el último apartado introduciremos las modificaciones necesarias para que adquiriera carácter local, obteniendo así el punto de llegada de este capítulo, que son los conceptos locales de espacio, tiempo, inercia y materia propios de la gravitación newtoniana.

## 2.1 Conexiones de Cartan

A la vista de las consideraciones anteriores, rechazando la formulación clásica del Principio de Inercia, lo reemplazamos por la siguiente hipótesis:

*Las trayectorias en ausencia de fuerzas son las trayectorias geodésicas de una conexión lineal  $\nabla$  sobre el espacio-tiempo  $X$ .*

En consecuencia, disponemos en  $X$  de todos los conceptos asociados a una conexión lineal: derivada covariante de tensores en la dirección de un campo tangente, traslado paralelo de tensores a lo largo de una curva (y por tanto variación de un campo tensorial con soporte en una curva), diferencial covariante de campos tensoriales, etc., y de todos sus invariantes, siendo el más importante su *tensor de curvatura*  $R_{2,1}$ , que a cada terna de campos tangentes  $D_1, D_2, D_3$  asigna el campo tangente

$$R_{2,1}(D_1, D_2, D_3) := D_1^\nabla(D_2^\nabla D_3) - D_2^\nabla(D_1^\nabla D_3) - [D_1, D_2]^\nabla D_3,$$

donde  $D^\nabla D'$  denota la derivada covariante de  $D'$  en la dirección  $D$  y  $[D, D'] := D \circ D' - D' \circ D$  denota el corchete de Lie de los campos tangentes  $D$  y  $D'$ .

<sup>1</sup>Cierto es que en su caída hacia el Sol tal objeto no permanece exactamente en reposo respecto del observador, sino que experimenta un ligero acercamiento debido a que las rectas que los unen con el centro del Sol no son paralelas. Dicho objeto se aproxima lentamente al observador. Con medidas absolutamente exactas (irreales, más allá de la precisión de nuestros instrumentos) sí se podría diferenciar entre ambas posibilidades, por eso decimos que son indistinguibles en primera aproximación, en un entorno infinitesimal.

<sup>2</sup>Conexiones que llamaremos de Cartan en honor de E. Cartan, que introdujo el concepto general de conexión en [4] y [5], aplicándolo al estudio de la Gravitación newtoniana.

Esta conexión  $\nabla$ , que define la geometría del espacio-tiempo, no es totalmente arbitraria, porque infinitesimalmente ha de tener las propiedades del espacio-tiempo de Galileo: el traslado paralelo de vectores ha de conservar los intervalos de tiempo, el traslado paralelo de vectores a lo largo de cualquier curva espacial ha de venir dado por las traslaciones definidas por los vectores espaciales, y para vectores espaciales el traslado paralelo ha de coincidir con el que determinan los giroscopios. Esto nos lleva a introducir el siguiente concepto:

**Definición:** Sea  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  un fibrado principal sobre una recta afín orientada, de grupo estructural un espacio vectorial euclídeo  $E$  de dimensión 3. Diremos que una conexión lineal  $\nabla$  sobre  $X$  es de *Cartan* cuando verifique las siguientes condiciones:

1. El traslado paralelo conserva la métrica del tiempo:  $\nabla g = 0$ .
2. Si  $\bar{D}$  es un campo tangente invariante por la acción de  $E$ , entonces  $D^\nabla \bar{D} = 0$  para todo campo de vectores espaciales  $D$ .
3. El campo de vectores espaciales  $V$  definido por cualquier vector  $v \in E$  es paralelo:  $\nabla V = 0$  ; i.e., tenemos que  $D^\nabla V = 0$  para todo campo tangente  $D$ .

Dada una conexión de Cartan  $\nabla$ , llamaremos *aceleración* de una trayectoria de velocidad  $T$  al campo tangente  $T^\nabla T$ , que tiene soporte en dicha trayectoria.

Veamos la expresión de los símbolos de Christoffel de una conexión de Cartan  $\nabla$  en el sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  de un observador arbitrario. La condición 2 significa que los campos tangentes  $\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3$  tienen derivada covariante nula en todas las direcciones espaciales. La condición 3 afirma que los campos tangentes  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  son paralelos y, en presencia de estas igualdades, la condición 1 equivale a que el campo tangente  $\partial_t^\nabla \partial_t$  sea espacial. Obtenemos así los

### 2.1.1 (Símbolos de Christoffel de las conexiones de Cartan)

$$\begin{aligned} \partial_i^\nabla \partial_j &= \partial_i^\nabla \partial_t = 0 & , & \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \partial_t^\nabla \partial_i &= 0 & , & \quad i = 1, 2, 3 \\ \partial_t^\nabla \partial_t &= -F_1(t, x_1, x_2, x_3) \partial_1 - F_2(t, x_1, x_2, x_3) \partial_2 - F_3(t, x_1, x_2, x_3) \partial_3 \end{aligned}$$

Es decir, las conexiones de Cartan se caracterizan por el hecho de que, en el sistema de coordenadas de un observador, todos los símbolos de Christoffel son nulos salvo los símbolos  $\Gamma_{00}^i = -F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Consideremos ahora un móvil de trayectoria  $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  en las coordenadas del observador. Su velocidad  $T$  viene dada por la fórmula 1.3; luego, de acuerdo con 2.1.1, su aceleración es

$$T^\nabla T = \partial_t^\nabla \partial_t + x_1''(t) \partial_1 + x_2''(t) \partial_2 + x_3''(t) \partial_3 ,$$

de modo que la diferencia entre la aceleración  $T^\nabla T$  del móvil y la aceleración  $\partial_t^\nabla \partial_t$  del observador es justamente la *aceleración aparente* relativa al observador

$$x_1''(t) e_1 + x_2''(t) e_2 + x_3''(t) e_3 .$$

Por tanto, en cualquier sistema de referencia (arbitrariamente acelerado) las **ecuaciones del movimiento**  $T^\nabla T = 0$  son

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(t, x_1, x_2, x_3) \quad , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (2.1)$$

Vemos así que para cualquier observador el movimiento en ausencia de fuerzas ocurre “como si existiera una intensidad de fuerza gravitatoria

$$\vec{F} := -\partial_t^\nabla \partial_t$$

que sobre cada cuerpo de masa inerte  $m$  ejerciese una fuerza  $m\vec{F}$  y la aceleración aparente de los cuerpos, multiplicada por su masa inerte, coincidiera con la fuerza de la gravedad”. Por eso diremos que el opuesto  $\vec{F}$  de la aceleración del observador es la *intensidad de fuerza gravitatoria*<sup>3</sup> para el observador, y que las trayectorias geodésicas de  $\nabla$  son las *trayectorias en caída libre*. Esta fuerza gravitatoria es aparente en el mismo sentido que lo son las fuerzas de Coriolis, las fuerzas centrífugas y demás fuerzas de inercia.

Cuando se cambia el observador, las funciones  $F_i$  no varían como las componentes de un campo tangente sino como los símbolos de Christoffel de una conexión lineal. Si  $\vec{F}$  es la intensidad de fuerza gravitatoria aparente para un observador y en su sistema de coordenadas la trayectoria de otro observador es  $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , para el nuevo observador la intensidad de fuerza gravitatoria aparente  $\vec{F}'$  es

$$\vec{F}' = \vec{F} - x_1''(t) \partial_1 - x_2''(t) \partial_2 - x_3''(t) \partial_3 = \vec{F} - \vec{a} \quad (2.2)$$

de modo que *la diferencia  $\vec{F} - \vec{F}'$  entre las fuerzas gravitatorias observadas por ambos es justamente la aceleración relativa*.

La fuerza gravitatoria aparente puede ser nula para un observador y no nula para otro. No obstante, *fijado el observador, la geometría  $\nabla$  del espacio-tiempo está totalmente determinada por la intensidad de fuerza gravitatoria aparente  $\vec{F}$* . Además, de acuerdo con 2.1.1, *las conexiones de Cartan tienen torsión nula y, por tanto, están determinadas por sus geodésicas: Las trayectorias en caída libre determinan la geometría  $\nabla$  del espacio-tiempo*.

**Ejemplo 2.1.2** Cualquiera de los campos gravitatorios considerados tradicionalmente en la teoría newtoniana de la gravitación define una conexión de Cartan mediante las igualdades 2.1.1. Así la conexión de Cartan  $\nabla$  que define un cuerpo puntual de masa  $m$  que sigue una trayectoria  $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , cuando se supone que produce una fuerza gravitatoria proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es

$$\partial_t^\nabla \partial_t = Gm \left( \frac{x_1 - x_1(t)}{r^3} \partial_1 + \frac{x_2 - x_2(t)}{r^3} \partial_2 + \frac{x_3 - x_3(t)}{r^3} \partial_3 \right) ,$$

donde  $G$  es una constante que depende de las unidades de medida y

$$r(t, x_1, x_2, x_3) := \sqrt{(x_1 - x_1(t))^2 + (x_2 - x_2(t))^2 + (x_3 - x_3(t))^2}$$

<sup>3</sup>O que es la fuerza gravitatoria, con un abuso claro del lenguaje.

es la función “distancia a la partícula” (aunque esta conexión lineal sólo esté definida fuera de la trayectoria considerada, es obvia la extensión de la definición de conexión de Cartan a las conexiones lineales definidas en el complementario de un número finito de trayectorias).

**Ejemplo 2.1.3** Análogamente, la conexión de Cartan que define una distribución de masas de densidad  $\rho(t, x_1, x_2, x_3)$  es

$$\partial_t^\nabla \partial_t = \sum_{i=1}^3 \left( \iiint \frac{G(x_i - y_i) \rho(t, y_1, y_2, y_3)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{3/2}} dy_1 dy_2 dy_3 \right) \partial_i$$

(se supone que en cada instante la función  $\rho$  se anula fuera de un compacto, para que las integrales sean finitas). En particular, la conexión de Cartan que define un campo gravitatorio nulo (en ausencia de masas) tiene curvatura nula: es la conexión de un espacio afín. Vemos así que el espacio-tiempo de Galileo puede entenderse tanto como estructura infinitesimal del espacio-tiempo como un caso particular de conexión de Cartan: el de gravedad nula<sup>4</sup>. El espacio-tiempo de Galileo sólo es adecuado para estudiar pequeñas regiones del espacio-tiempo o para tratar cuestiones en las que se puedan despreciar los fenómenos gravitatorios (o sustituir por “fuerzas” *ad hoc*).

**Definición:** Sea  $\nabla$  una conexión de Cartan. Diremos que el espacio-tiempo  $(X, \nabla)$  es *plano* si para algún observador la intensidad de fuerza gravitatoria  $\vec{F} = -\nabla_{\partial_t} \partial_t$  es nula. Es decir, si en algún sistema de referencia las ecuaciones de las trayectorias en caída libre son de la forma

$$x_1 = a_1 t + b_1 \quad , \quad x_2 = a_2 t + b_2 \quad , \quad x_3 = a_3 t + b_3 \quad ,$$

donde los coeficientes  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  son constantes.

El espacio-tiempo es plano precisamente cuando su geometría  $\nabla$  es la de un espacio afín de dimensión 4; es decir, cuando  $(X, \nabla)$  es el espacio-tiempo de Galileo.

**Teorema 2.1.4** *Sea  $\nabla$  una conexión de Cartan. La condición necesaria y suficiente para que el espacio-tiempo  $(X, \nabla)$  sea plano es que se anule el tensor de curvatura de  $\nabla$ .*

*Demostración:* Si expresamos el tensor de curvatura de  $\nabla$  en un sistema de referencia, las únicas componentes que pueden ser distintas de cero son

$$R_{2,1}(\partial_t, \partial_i, \partial_t, dx_j) = -R_{2,1}(\partial_i, \partial_t, \partial_t, dx_j) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

y su anulación significa que  $\vec{F}$  sólo depende del tiempo, no de la posición, y que en cada instante todas las trayectorias en caída libre tienen igual aceleración aparente. Si elegimos un observador en caída libre, la fuerza gravitatoria es nula a lo largo de su trayectoria, pues su aceleración aparente es obviamente nula. Luego  $\vec{F} = 0$  para este observador y concluimos que el espacio-tiempo es plano.

El recíproco es inmediato a partir de las igualdades 2.3.

<sup>4</sup>Totalmente similar a lo que ocurre con la geometría euclidiana, que es tanto la estructura infinitesimal de toda variedad riemanniana con un caso particular de variedad riemanniana: el de curvatura nula.

## 2.2 Densidad de Masa

Si en el tensor de curvatura  $R_{2,1}$  de una conexión lineal  $\nabla$  contraemos el índice contra-variante con el primer índice covariante, se obtiene el *tensor de Ricci*  $R_2$  de  $\nabla$ . Si  $\nabla$  es una conexión de Cartan, es sencillo comprobar que  $R_2(D, D') = 0$  cuando el vector  $D$  ó  $D'$  es espacial. Luego el tensor de Ricci  $R_2$  de cualquier conexión de Cartan  $\nabla$  es proporcional a la métrica del tiempo  $g$ : existe una única función diferenciable  $f$  sobre  $X$  tal que  $R_2 = fg$ . Calculando el tensor de Ricci en el sistema de coordenadas de un observador, a partir de 2.3, se concluye que la igualdad anterior es justamente  $\partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2 + \partial F_3/\partial x_3 = -f$ . Comparándola con la clásica ecuación de Gauss  $\partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2 + \partial F_3/\partial x_3 = -4\pi G\rho$  vemos que en el caso de las fuerzas gravitatorias que se derivan de la Ley de la Gravitación Universal de Newton, tal función  $f$  es proporcional a la densidad de masa gravitatoria  $\rho$ . Consideremos ahora el extraño coeficiente de proporcionalidad  $4\pi G$  que aparece en la ecuación de Gauss:

**2.2.1 (La constante de la Gravitación universal  $G$ )** Recuérdesse que la métrica  $g$  depende de la unidad de tiempo. Si la unidad de tiempo se divide por un factor  $\lambda$ , la métrica del tiempo queda multiplicada por  $\lambda^2$ , luego  $f$  queda dividida por  $\lambda^2$ , ya que el tensor de Ricci  $R_2$  no depende de las unidades de medida, pues  $\nabla$  no depende. Fijadas unidades de longitud y tiempo  $cm$  y  $s$ , la densidad de masa se mide en  $s^{-2}$ . Luego  $cm^3/s^2$  ha de ser una unidad de masa: *La unidad natural de masa es  $cm^3s^{-2}$* , la masa que a la distancia de  $1 cm$  determina una aceleración gravitatoria de un  $cm/s^2$ . En estas unidades naturales la constante universal de la gravitación  $G$  es 1. Cuando se fijan unidades de longitud, tiempo y masa  $cm$ ,  $s$ ,  $gr$ , suponiendo que son independientes, de hecho se han introducido dos unidades de masa,  $gr$  y  $cm^3/s^2$ , y dicha constante universal  $G$  es sólo la proporción entre ambas. *En la gravitación newtoniana la masa, la longitud y el tiempo no son magnitudes independientes.* Al igual que si medimos longitudes en centímetros y áreas en acres las fórmulas se llenarán de la constante de conversión de acres a  $cm^2$ , en el sistema centímetro-gramo-segundo el número de  $cm^3/s^2$  que tiene un gramo es  $G \approx 6.6 \cdot 10^{-8}$ , y no es más universal que el número de  $cm^2$  que tiene un acre. Lo más natural sería fijar unidades de longitud y tiempo  $cm$ ,  $s$  para medir a continuación las masas gravitatorias con la unidad natural  $cm^3/s^2$ ; pero no es esta la costumbre más extendida, sino que se elige otra unidad de masa  $gr$  que tendrá  $G cm^3/s^2$  y obliga a introducir tal constante  $G$  en las fórmulas, constante que siempre puede suponerse que es  $G = 1$  con una adecuada elección de la unidad de masa. La razón del factor  $4\pi$  en la igualdad  $f = 4\pi G\rho$  se debe precisamente a que, cuando determinemos la fuerza gravitatoria en función de la densidad de masa  $\rho$  (ver 2.5.3) la unidad de masa induzca una aceleración aparente de  $G cm/s^2$  a la distancia de  $1 cm$ ; es decir, para que la unidad de masa fijada sea precisamente de  $G cm^3/s^2$ .

Usaremos siempre unidades naturales, para que  $G = 1$ ; luego la densidad de masa ha de definirse del siguiente modo:

**Definición:** Llamaremos *densidad de masa* (gravitatoria) de una conexión de Cartan  $\nabla$  a la única función diferenciable  $\rho$  sobre el espacio-tiempo  $X$  tal que el tensor de

Ricci  $R_2$  de  $\nabla$  es

$$\boxed{R_2 = (4\pi\rho)g} \quad (2.4)$$

En el sistema de coordenadas de cualquier observador, de acuerdo con 2.3, esta igualdad es la **ecuación de Gauss** (que por tanto es válida en sistemas de referencia arbitrariamente acelerados):

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = -4\pi\rho .$$

### 2.2.2 (Evolución del Universo)

La ecuación de Gauss  $R_2 = (4\pi\rho)g$  muestra que la densidad de masa es una manifestación de una propiedad local de la geometría del espacio-tiempo y nos proporciona una relación cuantitativa entre ambas. Esta relación es de gran importancia, porque del conocimiento de la distribución de las masas podemos inferir las propiedades geométricas del espacio-tiempo. Por ejemplo, ya implica la imposibilidad de un Universo estático cuando la densidad de masa no es idénticamente nula, pues el espacio-tiempo sería plano y en consecuencia su tensor de Ricci tendría que anularse.

Aunque en las regiones pequeñas el Universo está formado por enormes espacios casi vacíos y diminutas concentraciones de gran densidad, es de importancia crucial la observación de que a gran escala su densidad es prácticamente constante. Por ello, en este apartado supondremos que el Universo es uniforme, que en cada instante  $t$  la densidad de masa es una constante positiva  $\rho(t)$ . Además, las velocidades de las galaxias que llenan el Universo definen un campo tangente  $U$  que ha de ser geodésico,  $U^\nabla U = 0$ , si consideramos que, salvo la gravedad, la acción de las restantes fuerzas es despreciable.

Supondremos también que la evolución del Universo es isótropa, que sólo se produce por dilataciones o contracciones; es decir, que las aplicaciones  $\tau_t: \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_t$  definidas por el grupo uniparamétrico del campo  $U$  son homotecias:

$$\tau_t(p) - \tau_t(q) = r(t)(p - q)$$

para algún número real  $r(t)$ . Es evidente que  $r(0) = 1$  y que  $r(t)$  ha de ser siempre positivo. Es sugerente decir que  $r(t)$  es “el radio” del Universo en el instante  $t$  (o mejor, su proporción con el radio actual) porque el volumen de cualquier región espacial actual (en el instante  $t = 0$ ) al evolucionar durante un tiempo  $t$  queda afectado por el factor  $r(t)^3$ .

En el sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  de un observador cuya trayectoria sea una curva integral del campo  $U$  (es decir, que se mueva con la galaxia donde habite) tendremos

$$\begin{aligned} \tau_t(0, a_1, a_2, a_3) &= (t, r(t)a_1, r(t)a_2, r(t)a_3) \\ U &= \partial_t + y(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3) \end{aligned}$$

donde  $y(t) := r'/r$  es la *velocidad de expansión* del Universo. Luego la *ley del movimiento*  $U^\nabla U = 0$  se expresa

$$F_i = (y' + y^2)x_i = r''r^{-1}x_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.5)$$

donde  $F_1\partial_1 + F_2\partial_2 + F_3\partial_3 = -\partial_t^\nabla\partial_t$ . Para los observadores que se muevan con los cuerpos celestes, sea cual sea su posición, la fuerza gravitatoria aparente siempre está dirigida hacia el observador, lo cual sería absurdo si la fuerza de la gravedad fuese un campo de vectores con realidad física independiente. En este ejemplo puede verse muy bien que el campo gravitatorio es una conexión lineal, no un campo tangente. Por otra parte, si exigimos que se verifique la *ley de conservación de la masa*

$$\rho(t) = \rho_0 r(t)^{-3} ,$$

donde  $\rho_0 = \rho(0)$  es la densidad de masa actual, de la ecuación de Gauss se sigue la siguiente **ecuación de evolución**:

$$r'' = -\frac{\zeta}{r^2} \quad , \quad \zeta = \frac{4\pi\rho_0}{3} . \quad (2.6)$$

En particular, la segunda derivada de  $r(t)$  siempre es negativa, porque  $\rho_0$  es positiva, de modo que la gráfica de  $r(t)$  siempre está por debajo de sus rectas tangentes. La pendiente de tal recta en el instante  $t = 0$  es precisamente la velocidad de expansión actual  $H = r'(0) = y(0)$ , también llamada *constante de Hubble*, así que corta al eje de abscisas en el punto  $t = -1/H$ . Si  $H$  es positiva, concluimos que el grupo uniparamétrico  $\tau_t$  no puede estar definido cuando  $t \leq -1/H$ : la edad del Universo ha de ser menor que  $1/H$ . Si  $H$  es negativa, se obtiene que la duración del Universo será menor que  $-1/H$ .

Para resolver la ecuación de evolución introducimos la función  $z = r'$ . Tenemos que calcular las curvas integrales del campo de vectores

$$D = z \frac{\partial}{\partial r} - \zeta r^{-2} \frac{\partial}{\partial z} .$$

Como  $z dz + \zeta r^{-2} dr = d(z^2/2 - \zeta/r)$ , las ecuaciones de las curvas integrales son

$$r = \frac{2\zeta}{z^2 - H^2 + 2\zeta} \quad , \quad H = y(0) .$$

La forma de estas curvas depende del signo de  $H^2 - 2\zeta$ , por lo que introducimos la constante auxiliar  $a^2 = |H^2 - 2\zeta|$ :

$H^2 < 2\zeta$  : El origen del Universo tuvo lugar cuando

$$t = Ha^{-2} + 2\zeta a^{-3} \arctan(H/a) - \pi\zeta a^{-3}$$

y se expande hasta alcanzar un radio  $r = 2\zeta a^{-2}$ , para contraerse a continuación hasta llegar a un colapso final. La duración total del Universo es  $2\pi\zeta a^{-3}$ .

$H^2 \geq 2\zeta$  y  $H > 0$  : El Universo se expande indefinidamente con velocidad decreciente desde un origen que tuvo lugar cuando

$$t = -Ha^{-2} - \zeta a^{-3} \ln \left( \frac{H-a}{H+a} \right) .$$

$H^2 \geq 2\zeta$  y  $H < 0$  : El Universo se contrae desde siempre con velocidad creciente hasta llegar a un final que tendrá lugar cuando

$$t = Ha^{-2} + \zeta a^{-3} \ln \left( \frac{H - a}{H + a} \right) .$$

Las afirmaciones sobre la duración de los intervalos de tiempo se prueban integrando una 1-forma cuyo valor sobre el campo tangente  $D$  sea 1, por ejemplo  $\omega = z^{-1}dr$ . Si  $H^2 \geq 2\zeta$ , entonces  $a^2 = H^2 - 2\zeta$  y tenemos

$$\int \frac{dr}{z} = -4\zeta \int \frac{dz}{(z^2 - a^2)^2} = \frac{2\zeta z}{a^2(z^2 - a^2)} + \zeta a^{-3} \ln \left( \frac{z - a}{z + a} \right)$$

y si  $H^2 < 2\zeta$ , entonces  $a^2 = 2\zeta - H^2$  y tenemos

$$\int \frac{dr}{z} = -4\zeta \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2} = -2\zeta a^{-3} \left( \frac{az}{z^2 + a^2} + \arctan \left( \frac{z}{a} \right) \right) .$$

## Observaciones astronómicas

Hemos visto que para determinar la evolución del Universo, bajo las hipótesis impuestas, necesitamos conocer su densidad actual  $\rho_0$  y su velocidad de expansión actual  $H = y(0)$ . Tomaremos como unidad de tiempo  $10^9$  años. Según las observaciones astronómicas ahora el Universo está en expansión ( $H > 0$ ) y se estima que cada año aumenta en la proporción  $(5'5 \pm 0'5)10^{-11}$ . Luego, en nuestras unidades, tenemos

$$0'05 \leq H \leq 0'06 ,$$

lo que nos da una cota de 20 mil millones de años para la edad del Universo. El Universo se contraerá hasta llegar a un colapso cuando  $\rho_0$  sea mayor que  $3H^2/8\pi$ . Si aceptamos para  $H$  el valor  $1/18$ , tenemos que  $3H^2/8\pi \approx 3'7 \cdot 10^{-4}$ . Ahora bien, en todas nuestras fórmulas  $\rho$  es la densidad expresada en el inverso del cuadrado de la unidad de tiempo elegida, que es el millar de millones de años. Si queremos expresar tal densidad en  $gr/cm^3$  tendremos

$$\rho = d \cdot G \cdot b \approx 6'6 \cdot 10^{25} \cdot d ,$$

donde  $d$  es la densidad expresada en  $gr/cm^3$ ,  $G \approx 6'6 \cdot 10^{-8}$  es la constante universal de la gravitación en el sistema centímetro-gramo-segundo (número de  $cm^3/s^2$  que tiene un gramo) y  $b \approx 10^{33}$  es el cuadrado del número de segundos que tiene nuestra unidad de tiempo ( $10^9$  años).

En resumen, bajo las simplificaciones introducidas y de acuerdo con la teoría newtoniana de la gravitación, el Universo se contraerá siempre que su densidad actual supere los  $5'55 \cdot 10^{-30} gr/cm^3$ . Es muy difícil calcular la densidad actual; pero los valores aproximados que suelen proponer los astrónomos oscilan entre  $10^{-31} gr/cm^3$  y  $5 \cdot 10^{-29} gr/cm^3$ . Por ejemplo, si tal densidad fuera  $10^{-30}$ , el origen habría ocurrido hace 15 mil millones de años y continuará su expansión indefinidamente. Si fuera  $5 \cdot 10^{-29} gr/cm^3$ , colapsaría dentro de 17 mil millones de años.

Estos términos de origen y colapso del Universo deben entenderse más bien como una autolimitación del alcance de la gravitación newtoniana, ya que las singularidades del campo  $U$  han de considerarse como sucesos en los que el Universo queda fuera de la teoría, no como predicciones de la misma sobre lo que allí ocurre. Es asombroso que las sencillas hipótesis de la gravitación newtoniana impliquen la existencia de un momento en que la teoría misma ya no puede formar parte de la estructura del Universo. A veces este “origen” del Universo se identifica con la creación del mismo, es decir, con el fundamento de la existencia del mundo físico. Este malentendido se basa en la identificación ingenua del orden causal con el orden temporal, ignorando que más bien es una ordenación según la aclaración. Ser el fundamento de algo no significa precederlo en el tiempo sino dar razón del mismo aunque su manifestación haya sido posterior. Lo que sí es cierto es que, donde la estructura de la gravitación newtoniana deje de ser válida, sin duda aflorará una estructura más básica del espacio-tiempo que explique la teoría newtoniana en condiciones similares a las actuales.

### 2.3 Sistemas de Referencia Inerciales

Tradicionalmente los sistemas de referencia inerciales se distinguían por la condición de que la velocidad aparente de los cuerpos suficientemente lejanos fuera prácticamente constante.

**Definición:** Diremos que un sistema de referencia es *inercial* si en cada instante la intensidad de fuerza gravitatoria aparente  $\vec{F} := -\partial_t \nabla \partial_t$  tiende a cero hacia el infinito.

La condición de que un observador sea inercial obviamente no depende de la base de vectores espaciales elegida sino sólo de su trayectoria (y de la conexión de Cartan  $\nabla$ ). Puede ocurrir que no existan tales observadores inerciales. Por ejemplo, las conexiones 2.5 utilizadas en el estudio de la evolución del Universo no admiten ningún sistema de referencia inercial cuando la densidad de masa  $\rho$  no es nula, pues para cualquier observador en caída libre la intensidad de fuerza gravitatoria aparente  $\vec{F}$  siempre es directamente proporcional a la posición relativa, de modo que el módulo de  $\vec{F}$  tiende a infinito con la distancia al observador.

Si  $\vec{F}$  es la intensidad de fuerza gravitatoria aparente para un observador inercial y en su sistema de coordenadas la trayectoria de otro observador es  $(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , de acuerdo con 2.2 la intensidad de fuerza gravitatoria aparente  $\vec{F}'$  para el nuevo observador es

$$\vec{F}' = \vec{F} - x_1''(t) \partial_1 - x_2''(t) \partial_2 - x_3''(t) \partial_3 ,$$

de modo que el nuevo observador es inercial precisamente cuando la aceleración relativa es nula. Por tanto, todos los observadores inerciales miden igual fuerza gravitatoria aparente, y la relación entre las coordenadas en dos sistemas de referencia inerciales es una transformación de Galileo.

## El Principio de Inercia

Si una conexión de Cartan  $\nabla$  admite sistemas de referencia inerciales, entonces define una conexión de Cartan plana  $\nabla_0$ , totalmente determinada por la condición de que las trayectorias de inerciales de  $\nabla$  sean geodésicas de  $\nabla_0$ . Ahora bien, la diferencia  $D_2 = \nabla - \nabla_0$  de dos conexiones lineales siempre es un tensor covariante de orden 2 valorado en los campos tangentes. Si la conexión  $\nabla_0$  es de Cartan, la condición necesaria y suficiente para que lo sea  $\nabla$  es que su diferencia  $D_2$  valore en los vectores espaciales y su radical contenga a todos los vectores espaciales; es decir que

$$\nabla = \nabla_0 - \omega \otimes \omega \otimes \vec{F}$$

para algún campo de vectores espaciales  $\vec{F}$ . Cuando la existencia de sistemas de referencia inerciales se establece como una de las hipótesis básicas de la Mecánica Clásica, se enuncia el Principio de Inercia bajo la forma de que las trayectorias inerciales son las geodésicas de una conexión de Cartan plana  $\nabla_0$ , se introduce luego un campo de vectores espaciales  $\vec{F}$  y se postula que las trayectorias en caída libre son geodésicas de la conexión  $\nabla = \nabla_0 - \omega \otimes \omega \otimes \vec{F}$ . Estas hipótesis presentan la estructura de la gravitación newtoniana como un par  $(\nabla_0, \vec{F})$ , donde  $\nabla_0$  es una conexión de Cartan plana y  $\vec{F}$  es un campo de vectores espaciales, lo que equivale a presentarla como un par de conexiones de Cartan  $(\nabla_0, \nabla)$ , donde  $\nabla_0$  es plana. Por el contrario, en las páginas precedentes se expone la gravitación newtoniana como la estructura geométrica definida por una única conexión de Cartan  $\nabla$ , sin necesidad de introducir sistemas de referencia inerciales. Sólo en determinados casos particulares, cuando existan sistemas de referencia inerciales,  $\nabla$  define una conexión de Cartan plana  $\nabla_0$  y, por tanto, un campo de vectores espaciales  $\vec{F}$ .

Dado que ambas teorías originan las mismas ecuaciones del movimiento, una visión superficial del problema podría estar tentada de afirmar que son físicamente equivalentes (observacionalmente indistinguibles) y que sólo razones estéticas, de simplicidad o economía permitirían fundamentar la elección de una sobre otra. Pero este análisis pasa por alto el hecho de que las teorías, además de ecuaciones, incluyen conceptos, sin los cuales las ecuaciones carecen de sentido. Si el espacio-tiempo (o cualquier otro ámbito de la realidad) tiene determinada estructura, los conceptos que de ella se deriven canónicamente (de modo absoluto, sin elecciones arbitrarias) también formarán parte de la estructura del espacio-tiempo. Si dos teorías son equivalentes en el sentido de que en coordenadas convenientes originan idénticas ecuaciones, pero involucran conceptos diferentes, entonces son físicamente distinguibles, pues tiene sentido plantear la cuestión de si todos los conceptos que intervienen en la estructura considerada admiten una descripción operacional en términos físicos o si, por el contrario, son observacionalmente fantasmagóricos.

Si bien es cierto que una vez fijada una conexión de Cartan plana  $\nabla_0$  los campos de vectores espaciales se corresponden con las conexiones de Cartan, esta correspondencia no es canónica, pues obviamente depende de  $\nabla_0$ . Esta falta de naturalidad significa que la existencia de una conexión de Cartan  $\nabla$  no es equivalente a la existencia de un par  $(\nabla_0, \vec{F})$ , aunque ambas teorías proporcionen las mismas ecuaciones. Por eso podemos preguntarnos si la estructura de la gravitación newtoniana viene dada por una conexión de Cartan  $\nabla$  o por un par  $(\nabla_0, \nabla)$ . Como la segunda opción se reduce a superponer

la conexión  $\nabla_0$ , la cuestión se reduce a decidir si  $\nabla_0$  puede distinguirse mediante algún experimento físico de carácter local<sup>5</sup>, si los sistemas de referencia inerciales son observacionalmente distinguibles mediante mediciones locales. Hasta el día de hoy no hemos visto ningún experimento local que permita reconocer las trayectorias inerciales y, hasta que llegue (si es que llega), no podemos afirmar que la estructura local del espacio-tiempo en la gravitación newtoniana incluya algo más que una conexión de Cartan con curvatura eventualmente no nula. Los intentos más serios de aclarar el concepto de los sistemas inerciales en la Mecánica Clásica llevaron siempre (ver el libro de E. Mach) a relacionarlos con la distribución de masas en todo el Universo. Y es que, como hemos visto, en ciertos casos la geometría global del espacio-tiempo (pues la definición 3.1 es claramente de carácter global) permite definir una conexión de Cartan plana  $\nabla_0$ , disponiendo entonces en el entorno de aquí-ahora de los conceptos de trayectoria inercial (geodésica de  $\nabla_0$ ) y de trayectoria en caída libre (geodésica de  $\nabla$ ).

Éste es un buen momento para retomar con más claridad la pregunta sobre la posibilidad de distinguir con mediciones locales todos los elementos de la estructura de la gravitación newtoniana que hemos ido desentrañando. Dejando de lado las orientaciones del tiempo y el espacio (y sería muy interesante discutir su legitimidad), sólo la estructura diferenciable del espacio-tiempo falla en el cumplimiento de esta exigencia, resaltando de nuevo el carácter arbitrario de nuestra hipótesis 0, su introducción por razones nada observacionales, sino por nuestra limitación en la aclaración de estructuras más básicas que posibiliten la fundamentación del movimiento.

Por último, conviene observar que en la estructura infinitesimal del espacio-tiempo (1.3L.3) sí tiene sentido el concepto de sistema de referencia inercial, pues las líneas rectas del espacio vectorial  $V$  pueden tomarse como trayectorias inerciales:

**Definición:** Un *sistema de referencia inercial infinitesimal* en un suceso  $p \in X$  es una base  $\{v_0, e_1, e_2, e_3\}$  del espacio tangente  $T_p X$  tal que

$$\begin{aligned} \omega(v_0) &= 1 \quad , \quad \omega(e_1) = \omega(e_2) = \omega(e_3) = 0 \\ g^* &= e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 \\ \Omega_E(e_1, e_2, e_3) &= 1 \end{aligned}$$

## 2.4 Potencial Gravitatorio

Sea  $\nabla$  una conexión de Cartan. Por definición  $\nabla$  conserva la métrica del tiempo,  $\nabla g = 0$ , así que los vectores  $R_{2,1}(D_1, D_2, D_3)$  siempre son espaciales y podemos definir el *tensor de Riemann-Christoffel*  $R_{2,2}$  de una conexión de Cartan  $\nabla$ , al menos cuando el vector  $V_3$  es espacial:

$$R_{2,2}(D_1, D_2; V_3, D_4) := R_{2,1}(D_1, D_2, D_4) * V_3 \ ,$$

---

<sup>5</sup>Pues el concepto de conexión lineal es local y, por otra parte, nuestra toma de conciencia del espacio, el tiempo y el movimiento no presupone ninguna medida sobre la totalidad del espacio-tiempo.

donde  $*$  denota el producto escalar asociado a la métrica del espacio  $g^*$ . Este tensor es hemisimétrico en sus dos primeros índices porque lo es el tensor de curvatura  $R_{2,1}$ ; pero en general carece de la simetría

$$R_{2,2}(V_1, D_1; V_2, D_2) = R_{2,2}(V_2, D_2; V_1, D_1) \quad (2.7)$$

(donde los vectores  $V_1$  y  $V_2$  son espaciales) propia de los tensores de Riemann-Christoffel de las métricas no-singulares. De acuerdo con 2.3, si expresamos esta condición en un sistema de referencia arbitrario, obtenemos

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad ,$$

lo que equivale a la existencia de una función diferenciable  $u(t, x_1, x_2, x_3)$  tal que

$$F_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ;$$

es decir,  $\vec{F} = \text{grad } u$  es una fuerza conservativa.

Ahora bien, en sentido estricto  $R_{2,2}$  no es un tensor, pues sólo está definido cuando la tercera variable es espacial. Para expresar la condición 2.7 mediante un verdadero tensor sobre  $X$ , en el tensor de curvatura  $R_{2,1}$  de  $\nabla$  transformamos un índice covariante en contravariante mediante la métrica  $g^*$ , obteniendo el tensor

$$R_2^2(\omega_1, D_1, \omega_2, D_2) := \omega_2 (R_{2,1}(i_{\omega_1} g^*, D_1, D_2)) \quad ,$$

así que la condición 2.7 puede expresarse también del siguiente modo:

$$R_2^2(\omega_1, D_1, \omega_2, D_2) = R_2^2(\omega_2, D_2, \omega_1, D_1) \quad . \quad (2.8)$$

**Definición:** Dada una conexión de Cartan  $\nabla$ , diremos que las fuerzas gravitatorias son *conservativas* si verifica la condición 2.8; en cuyo caso para cada observador existe una función diferenciable  $u$  tal que tal que  $\vec{F} = \text{grad } u$ . Tal función  $u$  está bien definida salvo la adición de una función arbitraria del tiempo y diremos que es el *potencial gravitatorio* para tal observador.

El potencial  $u$ , al igual que la fuerza de la gravedad  $\vec{F}$ , depende de la trayectoria del observador. Si la aceleración relativa de otro observador es  $a_1(t)\partial_1 + a_2(t)\partial_2 + a_3(t)\partial_3$ , de 2.2 se sigue que para el nuevo observador el potencial gravitatorio  $u'$  es

$$u' = u - a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - a_3(t)x_3 - b(t) \quad (2.9)$$

para cierta función diferenciable  $b(t)$ .

De la definición y de la ecuación de Gauss se sigue que para cualquier observador el potencial gravitatorio  $u$  verifica la **ecuación de Poisson**:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -4\pi\rho \quad .$$

En particular, en cada instante el potencial es una función armónica en el vacío.

Aunque el tensor de Riemann-Christoffel  $R_{2,2}$  sólo esté definido cuando la tercera variable es espacial, la simetría 2.7 es justo la condición necesaria y suficiente para que  $R_{2,2}$  exista, entendido como métrica simétrica sobre la segunda potencia exterior  $\Lambda^2(TX)$  de los campos tangentes:

**Teorema 2.4.1** *Para que las fuerzas gravitatorias sean conservativas es necesario y suficiente que exista una métrica simétrica  $R_{2,2}$  sobre  $\Lambda^2(TX)$  tal que*

$$R_{2,2}(D_1 \wedge D_2, V_3 \wedge D_4) = R_{2,1}(D_1, D_2, D_4) * V_3$$

cuando el vector  $V_3$  es espacial. En tal caso la métrica  $R_{2,2}$  es única.

*Demostración:* La condición es suficiente porque el carácter simétrico de tal métrica implica claramente la propiedad 2.7.

Recíprocamente, si las fuerzas gravitatorias son conservativas, consideramos un sistema de referencia y la correspondiente base  $\{\partial_t \wedge \partial_1, \partial_t \wedge \partial_2, \partial_t \wedge \partial_3; \partial_2 \wedge \partial_3, \partial_3 \wedge \partial_1, \partial_1 \wedge \partial_2, \}$  de los 2-vectores. Se comprueba sin dificultad que la métrica simétrica

$$R_{2,2} := \begin{pmatrix} -H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix} ,$$

donde 0 denota la matriz nula  $3 \times 3$ , satisface la condición requerida.

**Definición:** Diremos que una conexión de Cartan  $\nabla$  es *newtoniana* si satisface las siguientes condiciones:

1. Carácter conservativo:  $R_2^2(\omega_1, D_1, \omega_2, D_2) = R_2^2(\omega_2, D_2, \omega_1, D_1)$
2. En cada instante el tensor de curvatura de  $\nabla$  tiende a cero en el infinito.
3. El soporte de la densidad de masa  $\rho$  de  $\nabla$  es *espacialmente compacto*<sup>6</sup>.

La segunda condición, que junto con la tercera se introduce para evitar la consideración de condiciones de frontera, tiene significado intrínseco, pues, al ser  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  un fibrado principal, los espacios tangentes a  $X$  en sucesos simultáneos son canónicamente isomorfos. En cualquier sistema de referencia, la condición 2 significa que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.10)$$

donde  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  es la función “distancia a la trayectoria del observador”.

En cuanto a la primera condición, que para cada observador significa que las fuerzas gravitatorias son conservativas, no podemos justificarla a partir de la estructura del espacio y el tiempo. Se verificaría automáticamente si  $\nabla$  fuera la conexión asociada

<sup>6</sup>En el sentido de que, en cada instante, la densidad de masa es nula fuera de una esfera suficientemente grande.

a una métrica no-singular. Esta condición, que ahora se nos presenta artificial, será una consecuencia necesaria de la estructura del espacio y el tiempo en la Teoría de la Relatividad, así que la explicación de esta hipótesis se basará en que la Gravitación newtoniana es un caso límite de una mecánica más perfecta donde la geometría  $\nabla$  deriva de una métrica del tiempo no-singular; pero el estudio de las relaciones entre la gravitación newtoniana y relativista se hará en el último capítulo.

## 2.5 Ley de la Gravitación Universal

La existencia de una estrecha relación entre la geometría  $\nabla$  del espacio-tiempo y la densidad de masa  $\rho$  plantea la cuestión de saber si  $\nabla$  está determinada por  $\rho$  (si cada conexión de Cartan está determinada por su tensor de Ricci). La respuesta es esencialmente positiva cuando  $\nabla$  es newtoniana y la expresión analítica de  $\nabla$  en función de  $\rho$  es precisamente la famosa Ley de la Gravitación universal descubierta por Newton.

**Teorema 2.5.1** *Si dos conexiones newtonianas tienen el mismo tensor de Ricci y una trayectoria geodésica común, entonces son iguales. (Si un observador en caída libre conoce la densidad de masa  $\rho$ , puede determinar la geometría  $\nabla$  del espacio-tiempo).*

*Demostración:* Sean  $\nabla$  y  $\nabla'$  dos conexiones newtonianas que tengan un observador en caída libre común y sean  $u, u'$  sus respectivos potenciales para dicho observador. Si ambas conexiones definen la misma densidad de masa, de la ecuación de Poisson se sigue que  $\Delta(u' - u) = 0$ . Luego las segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2(u' - u)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial(F'_i - F_i)}{\partial x_j}$$

son funciones armónicas en cada instante, y tienden a cero en el infinito de acuerdo con 2.10. Podemos concluir que estas derivadas son nulas, así que

$$F'_i = F_i + a_i(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ,$$

para ciertas funciones diferenciables  $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ . Ahora bien, por hipótesis el observador está en caída libre respecto de ambas conexiones, así que de las ecuaciones del movimiento 2.1 se deduce que tanto  $\vec{F}$  como  $\vec{F}'$  se anulan a lo largo de la trayectoria del observador. Luego  $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = 0$  y concluimos que  $\vec{F}' = \vec{F}$ , lo que significa que ambas conexiones coinciden.

**Corolario 2.5.2** *La condición necesaria y suficiente para que una conexión newtoniana sea plana es que su densidad de masa sea nula.*

*Demostración:* Es obvio que las conexiones planas tienen densidad de masa nula. Recíprocamente, si la densidad de masa  $\rho$  de una conexión newtoniana  $\nabla$  es nula, consideramos un observador en caída libre para  $\nabla$  y la conexión newtoniana plana  $\nabla_0$  que también lo admita como trayectoria geodésica (es decir, el potencial de  $\nabla_0$  para tal observador es idénticamente nulo). De acuerdo con 2.5.1 concluimos que  $\nabla = \nabla_0$ ; luego  $\nabla$  es una conexión plana.

**Teorema 2.5.3 (Ley de la Gravitación universal)** *Toda conexión newtoniana  $\nabla$  admite sistemas de referencia inerciales, y las ecuaciones del movimiento en caída libre, en cualquier sistema de referencia inercial, son*

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \\ u(t, x_1, x_2, x_3) &= \iiint \frac{\rho(t, y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}} dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa de  $\nabla$ . En particular cada conexión newtoniana está determinada por su densidad de masa y una trayectoria inercial.

*Demostración:* Sea  $u$  la función a que se refiere el enunciado, usualmente llamada *potencial newtoniano* de  $\rho$ . Es bien conocido que satisface la ecuación  $\Delta u = -4\pi\rho$  y que sus derivadas  $\partial u/\partial x_i$  y  $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$  tienden a cero hacia el infinito. Consideremos la intensidad de fuerza gravitatoria aparente  $\vec{F}$  para un observador. El razonamiento dado en la demostración del teorema anterior, donde ahora  $u$  es el potencial newtoniano y  $u'$  es el potencial de  $\nabla$  para el observador elegido, prueba que tenemos

$$F_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_i(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ,$$

para ciertas funciones diferenciables  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$ . Para un observador con aceleración relativa  $a_1(t)\partial_1 + a_2(t)\partial_2 + a_3(t)\partial_3$  la intensidad de fuerza gravitatoria  $\vec{F}'$ , de acuerdo con 2.2, será

$$F'_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.11)$$

de modo que este nuevo observador es inercial. Obtenemos así la existencia de sistemas de referencia inerciales para  $\nabla$  y que, al menos para un observador inercial, la fuerza de la gravedad viene dada por las igualdades 2.11. Como la aceleración relativa entre observadores inerciales siempre es nula, concluimos que las igualdades 2.11 son válidas en todos los sistemas de referencia inerciales.

**Nota:** El factor  $4\pi$  que aparece en la definición de la densidad de masa se introduce para que en el teorema anterior la constante de la gravitación universal sea  $G = 1$ . Es decir, si se opta por definir la densidad de masa  $\rho$  mediante la igualdad  $R_2 = \rho g$ , entonces en la Ley de la Gravitación Universal aparecería el factor  $(4\pi)^{-1}$ , de modo que tal elección corresponde a fijar como unidad de masa la que define un campo gravitatorio  $\vec{F}$  con flujo 1 a través de cualquier superficie que la rodee.

Como resumen de lo visto hasta ahora podemos decir que, dada una conexión newtoniana  $\nabla$ , hemos demostrado que el movimiento en caída libre ocurre como si cada masa produjese una intensidad de fuerza gravitatoria inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y lo hemos probado partiendo de una hipótesis arbitraria: el carácter conservativo de la fuerza de la gravedad. Pero sólo hemos demostrado la Ley de la Gravitación universal para partículas test, para cuerpos con masa tan pequeña

que podamos despreciarla y suponer que no influye en la fuerza gravitatoria, lo que, en sentido estricto, nunca ocurre. Nótese que en el teorema 2.5.3 la función  $\rho$  es arbitraria (la única condición es que en cada instante su soporte sea compacto). Las condiciones impuestas a  $\nabla$  no implican que la masa total

$$m(t) := \iiint \rho(t, x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

sea constante, ni impiden que el soporte de  $\rho$  pueda estar formado por dos esferas con cualquier movimiento relativo ridículo, acercándose durante algún tiempo, permaneciendo luego en reposo relativo y finalmente girar vertiginosamente para luego alejarse. Dada cualquier función diferenciable  $\rho(t, x_1, x_2, x_3)$  con soporte compacto en cada instante, las ecuaciones de 2.5.3 definen una conexión newtoniana  $\nabla$  cuya densidad de masa es precisamente  $\rho$ .

Ahora nuestro propósito es formular condiciones sobre  $\nabla$  que impliquen la Ley de conservación de la masa y la Ley del movimiento para las masas que la originan (para  $\rho$ ). Estas ecuaciones de campo sobre  $\nabla$  no tendrán más justificación, por el momento, que expresar de forma compacta y manejable estas dos leyes fundamentales de la Física newtoniana que aún no hemos sabido recoger. Si nos preguntamos por qué son válidas, por ahora no daremos más razón que su reiterada comprobación fáctica, lo que vale tanto como decir que carecemos de verdadera justificación, que deberíamos incluirlas como dos hipótesis arbitrarias adicionales de la Gravitación newtoniana. Dedicaremos el último capítulo a demostrar que estas dos leyes, al igual que el carácter conservativo de las fuerzas gravitatorias, son consecuencias de la hipótesis de que la teoría newtoniana es una degeneración de una mecánica donde la medida del tiempo viene dada por una métrica no-singular: la Mecánica Relativista. Pero volvamos ahora a lo nuestro, a la determinación de las ecuaciones de campo que han de satisfacer las conexiones de Cartan aceptadas en la Gravitación newtoniana. Previamente examinaremos los fundamentos de la Mecánica de fluidos, pues su punto de vista nos proporcionará la adecuada comprensión de las ecuaciones de campo de la Gravitación newtoniana.

## 2.6 Forma de Impulso

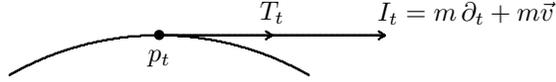
En este apartado  $\nabla$  seguirá denotando una conexión de Cartan sobre un fibrado principal  $X \rightarrow \mathbb{A}_1$  de grupo estructural un espacio euclídeo orientado  $E$  de dimensión 3.

### Partículas

Según vimos en 1.2, la velocidad de una partícula puntual es la recta tangente a su trayectoria, que por comodidad representamos por el único vector tangente  $T$  tal que  $\omega(T) = 1$ . Pero cada partícula tiene además una masa y tradicionalmente el producto de la masa por la velocidad aparente recibía el nombre de cantidad de movimiento de la partícula, lo que nos lleva a entender cada partícula puntual como un campo tangente  $I$  con soporte en una trayectoria (llamada *trayectoria de la partícula*) que sea tangente a la misma y tal que  $\omega(I)$  sea una constante positiva. Tal vector  $I$  recibe el nombre de

*impulso* de la partícula y  $m = \omega(I)$  se llamará *masa* de la partícula. Por definición el impulso de una partícula de masa  $m$  y velocidad  $T$  es  $I = mT$ .

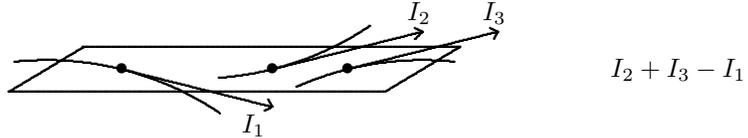
De acuerdo con 1.3, en el sistema de coordenadas de cualquier observador, el impulso de una partícula de trayectoria  $p_t = (t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  y masa  $m$  es



(por lo que  $I$  también podría llamarse vector de masa-cantidad de movimiento o masa-momento). Su coordenada temporal, la masa  $m = \omega(I)$ , no depende del observador, mientras que su componente espacial  $m\vec{v} = m(x'_1(t)\partial_1 + x'_2(t)\partial_2 + x'_3(t)\partial_3)$ , que se llama *momento* o *cantidad de movimiento*, sí depende de la velocidad del observador.

## Fluidos

Imaginemos ahora gran cantidad de partículas moviéndose por el Universo y veamos cómo puede recogerse tal situación en el caso continuo. Consideremos una pequeña región orientada tridimensional del espacio-tiempo. Como las trayectorias de las partículas son curvas en un espacio de dimensión 4, en general dicha región tridimensional cortará la trayectoria de unas cuantas partículas. Sumemos<sup>7</sup> los impulsos de las partículas en el momento de traspasar tal región, con signo + si el impulso de la partícula apunta hacia fuera, signo - si apunta hacia dentro y signo 0 si es tangente:



Aclaremos la cuestión del signo. La orientación del tiempo  $\omega$  y la del espacio  $\Omega_E$  definen una 4-forma  $\Omega_X := \omega \wedge \Omega_E$  llamada *forma de hipervolumen* del espacio-tiempo  $X$ , y por tanto una orientación espacio-temporal. En el sistema de coordenadas de cualquier observador tenemos que

$$\Omega_X = dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$$

Ahora, dada una hipersuperficie y un vector no tangente  $N$  en uno de sus puntos, tenemos una orientación local de la hipersuperficie, definida por la restricción de  $i_N(\Omega_X)$ , y decimos que  $N$  apunta hacia fuera respecto de tal orientación de la hipersuperficie. Por ejemplo, la orientación del espacio  $\Omega_E$  es la que induce la velocidad de cualquier

<sup>7</sup>La suma tiene sentido, aunque los sumandos sean vectores en sucesos no simultáneos, porque se supone que la región es tan pequeña que puede considerarse como parte del espacio tangente al espacio-tiempo, que sí tiene una noción de paralelismo de vectores.

partícula, así que cuando una región espacial se orienta con  $\Omega_E$ , el impulso de cualquier partícula contenida en ella se cuenta siempre con signo +.

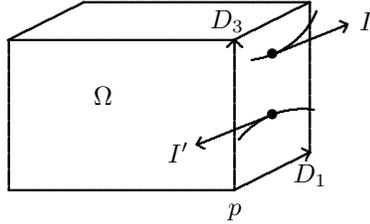
Para conocer el impulso que traspasa cualquier región tridimensional infinitamente pequeña es suficiente determinarlo en el caso de los paralelogramos, por lo que para cada terna de vectores  $D_1, D_2, D_3 \in T_p X$  pondremos:

$$\Pi_3(D_1, D_2, D_3) := \left( \begin{array}{l} \text{Suma, con su signo, de los impulsos de las} \\ \text{partículas que traspasan el paralelogramo} \\ \text{infinitesimal orientado } \{D_1, D_2, D_3\} \end{array} \right)$$

donde el signo que afecta al impulso  $I$  de una partícula es

- + cuando  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  sea una base orientada positivamente.
- cuando  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  sea una base orientada negativamente.
- 0 cuando  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  son linealmente dependientes.

Quizás sea más fácil entender esta definición si vemos el paralelogramo de aristas  $\{D_1, D_2, D_3\}$  como la cara de un “cubo” tetradimensional  $\Omega$ , suponiendo que los vectores  $\{D_1, D_2, D_3\}$  están orientados positivamente respecto de la orientación inducida por  $\Omega$  en su borde (si no, se cambia por un cubo adyacente al otro lado):



$$\Pi_3(D_1, D_2, D_3) = I - I'$$

Si un vector  $I$  apunta hacia fuera del cubo  $\Omega$ , entonces la base  $\{I, D_1, D_2, D_3\}$  está orientada positivamente (respecto de la forma de hipervolumen  $\Omega_X$ ). Entonces tenemos que

$$\Pi_3(D_1, D_2, D_3) = \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de las} \\ \text{partículas que pasan la cara} \\ \{D_1, D_2, D_3\} \text{ saliendo de } \Omega \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de las} \\ \text{partículas que pasan la cara} \\ \{D_1, D_2, D_3\} \text{ entrando en } \Omega \end{array} \right)$$

Por ejemplo, para un observador cualquiera tendremos que

$$\begin{aligned} \Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3) &= \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de las partículas} \\ \text{contenidas en el cubo } \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\} \end{array} \right) \\ \Pi_3(\partial_t, \partial_i, \partial_j) &= \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de las partículas que en la} \\ \text{unidad de tiempo traspasan el cuadrado } \{\partial_j, \partial_i\}, \\ \text{con signo + si la velocidad aparente apunta hacia} \\ \text{fuera, - si apunta hacia dentro y 0 si es tangente} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Esta aplicación  $\Pi_3$ , que recoge de modo continuo las masas y velocidades de las partículas que se mueven por el Universo, no puede ser totalmente arbitraria. En

efecto, la aplicación

$$(\Pi_3 \cdot \partial_t)(D_1, D_2, D_3) := \Pi_3(D_1, D_2, D_3) \cdot \partial_t = \omega(\Pi_3(D_1, D_2, D_3))$$

(donde el producto se realiza con la métrica del tiempo  $g$ ) mide la masa que traspasa cada región tridimensional del espacio-tiempo, así que en cada región espacial mide la masa total de las partículas contenidas en la misma. Luego la restricción de  $\Pi_3 \cdot \partial_t$  a cualquier hipersuperficie espacial  $\mathcal{E}_a$  ha de coincidir con el producto de la densidad de masa  $\rho$  de  $\nabla$  por la forma de volumen  $\Omega_E$  del espacio:

$$\rho\Omega_E = (\Pi_3 \cdot \partial_t)|_{t=a} . \quad (2.12)$$

Por otra parte, si todas las partículas están en reposo para el observador, tendremos que  $\Pi_3(a\partial_t + \vec{v}_1, b\partial_t + \vec{v}_2, c\partial_t + \vec{v}_3) = \Pi_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ . Como la cantidad de movimiento de cualquier partícula es nula,  $\Pi_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  ha de ser un vector proporcional a  $\partial_t$ ; luego  $\Pi_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\Pi_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \cdot \partial_t) \partial_t$ . Por último 2.12 permite obtener que  $\Pi_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\rho\Omega_E)(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \partial_t$ . Concluimos que en este caso

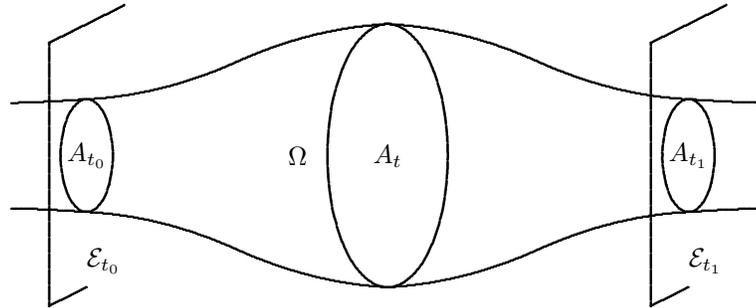
$$\Pi_3 = \rho(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \otimes \partial_t \quad (2.13)$$

y, en particular,  $\Pi_3$  es una 3-forma valorada en los vectores tangentes al espacio-tiempo  $X$ , que se anula al contraer el índice contravariante con cualquier índice covariante,  $C_1^1 \Pi_3 = 0$ .

Si consideramos que cada partícula ocupa una pequeña región alrededor de su trayectoria y suponemos que no gira sobre sí misma<sup>8</sup>, de modo que todas sus partes tienen la misma velocidad (y están todas en reposo para un observador que se mueva con la partícula), entonces contribuye a  $\Pi_3$  con un sumando del tipo 2.13. Luego  $\Pi_3$  ha de ser una 3-forma valorada en el fibrado tangente  $TX$ , llamada forma de impulso, que verifica la siguiente condición de simetría:

$$C_1^1(\Pi_3) = 0 . \quad (2.14)$$

Por último, consideremos una pequeña región espacial variable  $A_t$  durante un corto intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_1$  (es decir, un tubo tetradimensional  $\Omega$  en el espacio-tiempo)



<sup>8</sup>Las consideraciones que siguen dejarán de ser válidas en cuanto se admita la posibilidad de que las partículas tengan spin o cualquier otra característica además de la masa y la trayectoria.

y apliquemos el Teorema de Stokes<sup>9</sup>:

$$\int_{\Omega} d\Pi_3 = \int_{\partial\Omega} \Pi_3 = \int_{A_{t_0}} \Pi_3 + \int_{A_{t_1}} \Pi_3 + \int_{\text{lado}} \Pi_3 .$$

En la región  $A_{t_0}$  el vector de impulso de cualquier partícula apunta hacia dentro de  $\Omega$ , porque está orientado al futuro:

$$\int_{A_{t_0}} \Pi_3 = - \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de las partículas} \\ \text{que están en } A \text{ en el instante } t = t_0 \end{array} \right)$$

En la región  $A_{t_1}$  el impulso de todas las partículas apunta hacia fuera:

$$\int_{A_{t_1}} \Pi_3 = \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de las partículas} \\ \text{que están en } A \text{ en el instante } t = t_1 \end{array} \right)$$

En el borde lateral del tubo, cuando el impulso de una partícula apunta hacia fuera, se trata de una partícula que antes estaba dentro de  $A$  y después fuera, de una partícula que sale de  $A$ , y cuando apunta hacia dentro se trata de una partícula que entra en  $A$ :

$$\int_{\text{lado}} \Pi_3 = \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de} \\ \text{las partículas que salen} \\ \text{de } A \text{ entre } t = t_0 \text{ y } t = t_1 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de} \\ \text{las partículas que entran} \\ \text{en } A \text{ entre } t = t_0 \text{ y } t = t_1 \end{array} \right)$$

Por tanto, la condición

$$d\Pi_3 = 0$$

significa que la variación del impulso total de las partículas contenidas en  $A$  coincide con el de las partículas que han entrado en  $A$  menos el de las que han salido: es una ley de conservación del impulso en las regiones infinitesimalmente pequeñas, y para cada observador da una ley infinitesimal de conservación de la masa y la cantidad de movimiento.

Todos estos argumentos<sup>10</sup> nos llevan a representar la masa y la cantidad de movimiento en la gravitación newtoniana del siguiente modo:

**Definición:** Dada una conexión de Cartan  $\nabla$ , llamaremos *forma de impulso* de un fluido a toda 3-forma  $\Pi_3$  de clase  $C^\infty$  sobre  $X$ , valorada en los campos tangentes a  $X$ , que verifique las siguientes condiciones:

1. La restricción de  $\Pi_3 \cdot \partial_t$  a los vectores espaciales coincide con  $\rho\Omega_E$  (donde  $\rho$  denota la densidad de masa de  $\nabla$  y  $\Omega_E$  la forma de volumen del espacio).
2. Es *simétrica*:  $C_1^1(\Pi_3) = 0$ .
3. **Ley de conservación infinitesimal del impulso:**  $d\Pi_3 = 0$  (donde  $d$  denota la diferencial exterior respecto de la conexión lineal  $\nabla$ ).

<sup>9</sup>La integración de formas valoradas en un fibrado vectorial sólo tiene sentido cuando se realiza con una conexión de curvatura nula, lo que no es el caso de las conexiones de Cartan arbitrarias. No obstante, toda conexión lineal es infinitesimalmente plana, razón por la que hemos considerado un tubo infinitesimalmente pequeño, aunque no sepamos dar sentido totalmente riguroso a tal noción.

<sup>10</sup>Quien se sienta incómodo con los razonamientos anteriores, que no son deductivos sino buscan establecer las definiciones que serán el punto de partida de las demostraciones al uso, puede tomarlos simplemente como motivación más o menos sugerente de la definición del concepto de forma de impulso.

## Ejemplos

**Nubes de polvo:** Consideremos un fluido y supongamos que partículas cercanas tienen trayectorias aproximadas, lo que no siempre se cumple (así, el gas de una habitación, aunque a gran escala sigue la trayectoria de la superficie terrestre, se trata de un movimiento medio, pues en realidad está formado por partículas que se mueven en todas direcciones). Es decir, suponemos que existe un campo tangente  $T$  que da el movimiento de las partículas del fluido; en particular  $\omega(T) = 1$ . En realidad debemos imaginar que cada trayectoria representa una pequeña región con bastantes partículas, de modo que la densidad de materia puede variar de una regiones a otras.

Sea  $\{D_1, D_2, D_3\}$  una base ortonormal y orientada positivamente de los campos de vectores espaciales, y sea  $\{\theta_0 = dt, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  la base dual de  $\{D_0 = T, D_1, D_2, D_3\}$ . Como el impulso de todas las partículas es proporcional a  $T$ , también ha de serlo  $\Pi_3(D_1, D_2, D_3)$ , y 2.12 permite concluir que tal coeficiente de proporcionalidad ha de ser precisamente la densidad de masa  $\rho$ ; es decir, que  $\Pi_3(D_1, D_2, D_3) = \rho T$ . Además  $\Pi_3(T, D_i, D_j) = 0$  porque en este caso las trayectorias son tangentes al borde del paralelogramo. Como  $\Omega_X = dt \wedge \Omega_E = \theta_0 \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3$ , la forma de impulso es

$$\Pi_3 = (\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \otimes (\rho T) = \rho(i_T \Omega_X) \otimes T = C_1^1(\Omega_X \otimes (\rho T \otimes T))$$

y diremos que este caso es el de una *nube de polvo* de densidad  $\rho$  y velocidad  $T$ . La condición de simetría  $C_1^1 \Pi_3 = 0$  se cumple automáticamente

$$C_1^1(\Pi_3) = \rho(i_T(i_T \Omega_X)) = 0$$

mientras que la igualdad  $d\Pi_3 = 0$  impone condiciones diferenciales sobre  $\rho$  y  $T$ :

$$\begin{aligned} d\Pi_3 &= d(\rho(\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \otimes T) = d(\rho \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \otimes T - \rho \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge (dT) \\ dT &= \sum_{i=0}^3 \theta_i \otimes (D_i^\nabla T) \quad \text{se prueba contrayendo con } D_i \\ d\Pi_3 &= d(\rho \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \otimes T + \rho(\theta_0 \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \otimes (T^\nabla T) . \end{aligned}$$

Como  $T^\nabla T$  siempre es un vector espacial y  $T$  nunca lo es, la anulación de  $d\Pi_3$  equivale a la de cada uno de los dos sumandos:

$$\begin{aligned} 0 &= d(\rho \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \\ 0 &= T^\nabla T \quad \text{donde } \rho \neq 0 . \end{aligned}$$

La primera igualdad es la ley de conservación de la masa, porque

$$\begin{aligned} T^L(\rho \Omega_X) &= (di_T + i_T d)(\rho \Omega_X) = d(i_T(\rho \Omega_X)) = \\ &= d(i_T(\rho \theta_0 \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3)) = d(\rho \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) , \end{aligned}$$

mientras que la segunda es la ley del movimiento, pues afirma que el fluido se mueve en caída libre (por geodésicas de  $\nabla$ ).

**Fluidos perfectos:** Vamos a calcular la forma de impulso en el caso de que para cierto observador las velocidades aparentes de las partículas se distribuyan aleatoriamente y con igual probabilidad en todas direcciones. Por razones de simetría tendremos

$$\begin{aligned}
\Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3) &= \rho \partial_t \\
\Pi_3(\partial_t, \partial_1, \partial_2) &= \left( \left( \begin{array}{c} \text{Masa que sale} \\ \text{por la cara } \partial_2, \partial_1 \text{ en} \\ \text{la unidad de tiempo} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Masa que entra} \\ \text{por la cara } \partial_2, \partial_1 \text{ en} \\ \text{la unidad de tiempo} \end{array} \right) \right) \partial_t + \\
&+ \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de movimiento} \\ \text{que sale por la cara } \partial_2, \partial_1 \\ \text{en la unidad de tiempo} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de movimiento} \\ \text{que entra por la cara } \partial_2, \partial_1 \\ \text{en la unidad de tiempo} \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de movimiento} \\ \text{en la dirección del eje } x_3 \\ \text{que sale por la cara } \partial_2, \partial_1 \\ \text{en la unidad de tiempo} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de movimiento} \\ \text{en la dirección del eje } x_3 \\ \text{que entra por la cara } \partial_2, \partial_1 \\ \text{en la unidad de tiempo} \end{array} \right) \\
&= 2 \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de movimiento en la dirección del eje } x_3 \\ \text{que sale por la cara } \partial_2, \partial_1 \text{ en la unidad de tiempo} \end{array} \right) = -p \partial_3
\end{aligned}$$

donde  $p > 0$  es el doble de la suma (del módulo) de la cantidad de movimiento en la dirección del eje  $x_3$  de las partículas que salen (o entran, pues coinciden por razones de simetría) por la cara  $\partial_2, \partial_1$ . Luego  $p$  es la presión que el fluido ejercería sobre tal cara si hiciéramos el vacío por su parte interior, ya que cada partícula, al rebotar en dicha cara, le comunica en la dirección perpendicular una cantidad de movimiento doble de la que tenía la partícula. Análogamente tendremos  $\Pi_3(\partial_t, \partial_1, \partial_3) = p \partial_2$  y  $\Pi_3(\partial_t, \partial_2, \partial_3) = -p \partial_1$ . Luego

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= \rho(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \otimes \partial_t + p(dt \wedge dx_2 \wedge dx_1) \otimes \partial_3 + \\
&+ p(dt \wedge dx_1 \wedge dx_3) \otimes \partial_2 + p(dt \wedge dx_3 \wedge dx_2) \otimes \partial_1 = \\
&= \rho(i_{\partial_t} \Omega_X) \otimes \partial_t + p C_1^1(\Omega_X \otimes g^*)
\end{aligned}$$

donde  $g^*$  denota la métrica del espacio. Por tanto, en este caso la forma de impulso del fluido es

$$\Pi_3 = C_1^1(\Omega_X \otimes (\rho T \otimes T + p g^*))$$

para cierto campo de velocidades  $T$ . Diremos que este caso es el de un *fluido perfecto* de densidad  $\rho$ , *presión*  $p$  y *velocidad media*  $T$ .

Un cálculo similar al realizado en el ejemplo anterior prueba que la anulación de  $d\Pi_3$  equivale a la ley de conservación de la masa  $T^L(\rho \Omega_X) = 0$  y la ley del movimiento de los fluidos perfectos:

$$\rho(T^\nabla T) = -\text{grad } p,$$

porque  $d(\rho C_1^1(\Omega_X \otimes g^*)) = \Omega_X \otimes (\text{grad } p)$ , como puede comprobarse directamente en un sistema de referencia.

### 2.6.1 (Expresiones en coordenadas)

De ahora en adelante, en orden a la claridad de las fórmulas, si tenemos un sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$ , para cada función diferenciable  $f(t, x_1, x_2, x_3)$  pondremos

$$f_t := \partial f / \partial t \quad , \quad f_1 := \partial f / \partial x_1 \quad , \quad f_2 := \partial f / \partial x_2 \quad , \quad f_3 := \partial f / \partial x_3 \quad .$$

De acuerdo con las condiciones 1 y 2 de la definición de forma de impulso, en el sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  definido por cualquier observador (arbitrariamente acelerado) tendremos:

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \otimes \left( \rho \partial_t + \sum_{i=1}^3 w_i \partial_i \right) \\ & + (dt \wedge dx_3 \wedge dx_2) \otimes \left( w_1 \partial_t + \sum_{j=1}^3 h_{1j} \partial_j \right) \\ & + (dt \wedge dx_1 \wedge dx_3) \otimes \left( w_2 \partial_t + \sum_{j=1}^3 h_{2j} \partial_j \right) \\ & + (dt \wedge dx_2 \wedge dx_1) \otimes \left( w_3 \partial_t + \sum_{j=1}^3 h_{3j} \partial_j \right) \end{aligned}$$

para ciertas funciones diferenciables  $w_i, h_{ij} = h_{ji}$  de las coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$ . Ahora debemos imponer la condición de que la diferencial exterior de  $\Pi_3$  es nula. Como  $d(\partial_i) = 0$  y  $d(\partial_t) = -dt \otimes \vec{F}$ , tenemos que

$$d\Pi_3 = \Omega_X \otimes \left( \left( \rho_t + \sum_{j=1}^3 w_{j,j} \right) \partial_t - \rho \vec{F} + \sum_{i=1}^3 \left( w_{i,t} + \sum_{j=1}^3 h_{ij,j} \right) \partial_i \right) ;$$

así que, en cualquier sistema de referencia, la anulación de la diferencial exterior de la forma de impulso,  $d\Pi_3 = 0$ , viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \rho_t + \operatorname{div} \vec{w} & \text{ecuación de continuidad} \\ \rho F_i = w_{i,t} + \operatorname{div} \vec{h}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 & \text{ecuaciones de Euler} \end{cases} \quad (2.15)$$

donde  $\vec{w} := w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2 + w_3 \partial_3$  y  $\vec{h}_i := h_{i1} \partial_1 + h_{i2} \partial_2 + h_{i3} \partial_3$ . Nótese que  $\vec{w}$  es la cantidad de movimiento por unidad de volumen.

## Unidades de medida

Casi todos los conceptos definidos dependen de las unidades elegidas. Sólo la conexión  $\nabla$ , y por tanto su tensor de curvatura  $R_{2,1}$  y su tensor de Ricci  $R_2$ , son independientes de toda unidad de medida. Fijadas unidades de longitud y tiempo  $cm, s$ , decimos que determinado concepto, definido a partir de la estructura  $(g, g^*, \nabla)$  del espacio-tiempo, se mide en  $cm^n s^m$  cuando, al sustituir  $g^*$  por  $\mu^{-2} g^*$  (lo que equivale a multiplicar por  $\mu^2$  el producto escalar asociado a  $g^*$ ) y  $g$  por  $\lambda^2 g$ , la definición de tal concepto quede afectada de un factor  $\mu^n \lambda^m$ , donde  $\lambda$  y  $\mu$  se suponen positivos. Por tanto, los términos de cualquier igualdad han de ser cantidades homogéneas, en el sentido de que sus unidades de medida deben coincidir. Veamos, a título de ejemplo, algunas

unidades:

<u>Concepto</u>	<u>unidad</u>
métrica del tiempo $g$	$s^2$
orientación del tiempo $\omega$	$s$
vector velocidad $T$	$s^{-1}$
métrica del espacio $g^*$	$cm^{-2}$
producto escalar *	$cm^2$
orientación espacial $\Omega_E$	$cm^3$
orientación espacio-temporal $\Omega_X$	$cm^3 s$
vector de velocidad aparente $\vec{v}$	$s^{-1}$
módulo de la velocidad aparente $v$	$cm/s$
velocidad del observador $\partial_t$	$s^{-1}$
ejes del sistema de referencia $\partial_i$	$cm^{-1}$
aceleración $T^\nabla T$	$s^{-2}$
módulo de la aceleración aparente	$cm/s^2$
intensidad de fuerza gravitatoria $\vec{F}$	$s^{-2}$
componentes $F_i$ de la intensidad de fuerza	$cm/s^2$
densidad de masa $\rho$	$s^{-2}$
masa $m$ de la partícula	$cm^3/s^2$
cantidad de movimiento $m\vec{v}$	$cm^3/s^3$
tensor $R_2^2$	$cm^{-2}$
potencial gravitatorio $u$	$cm^2/s^2$

El impulso  $I = m\partial_t + m\vec{v}$  de una partícula, al igual que la 3-forma de impulso  $\Pi_3$  de un fluido se mide en  $cm^3/s^3$ . Por eso, en la definición de la 3-forma de impulso de un fluido, con todo rigor hemos debido decir “Es un tensor, medido en  $cm^3/s^3$ , que ...”; pero si bien está claro qué significa decir que determinado tensor, definido a partir de  $(g, g^*, \nabla)$ , se mida en  $cm^3/s^3$  ¿qué es dar un tensor medido en  $cm^a s^b$ ?

Si un tensor se mide en  $s^{-2}$ , como es el caso de la densidad de masa  $\rho$  o del vector aceleración  $T^\nabla T$ , entonces su producto tensorial con  $g = \omega \otimes \omega$  no depende de las unidades de medida, es un tensor con significado físico absoluto. Así, los tensores  $\rho g$  y  $(T^\nabla T) \otimes g$  sólo dependen de la estructura del espacio-tiempo, no de nuestras elecciones (sistemas de referencia y unidades). Sea  $\mathbf{T} := (\mathbb{R}\omega)^*$  el dual del espacio vectorial de dimensión 1 generado por  $\omega$  (que no depende de la unidad de tiempo). Los tensores  $T_p^q$  que se miden en  $s^b$  son los tensores de tipo  $(p, q)$  sobre  $X$  valorados en  $\mathbf{T}^{\otimes b}$ . Si fijamos el espacio vectorial  $\mathbf{L}$  generado por un tensor que se mida en  $cm^{-1}$ , entonces podremos definir el concepto de *tensor medido* en  $cm^a s^b$  como los tensores sobre  $X$  valorados en la recta vectorial  $\mathbf{L}^{\otimes a} \otimes \mathbf{T}^{\otimes b}$ . Hasta el momento los únicos tensores que hemos encontrado medidos en  $cm$  han sido las diferenciales  $dx_i$  de las coordenadas cartesianas; pero dependen de un sistema de referencia, no sólo de las unidades de medida. Por eso es preferible considerar el dual del producto tensorial de la orientación del espacio  $\Omega_E$  con  $g^*$ ; es decir,  $\mathbf{L}^* := (\mathbb{R}\Omega_E) \otimes (\mathbb{R}g^*)$ .

## 2.7 Mecánica de Fluidos

En este apartado veremos cómo la forma de impulso  $\Pi_3$  de cada fluido se corresponden naturalmente con una métrica contravariante simétrica  $T^2$  de divergencia nula, que tiene la ventaja de ser independiente de la orientación espacio-temporal fijada.

### Tensor de energía-momento

**Lema 2.7.1** *Sea  $\Omega_V$  una forma de volumen no nula sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ . Las aplicaciones lineales*

$$\phi^p: \Lambda^p V \longrightarrow \Lambda_{n-p} V \quad , \quad \phi^p(e^p) = C_{1\dots p}^{1\dots p} \left( \frac{\Omega_V \otimes e^p}{p!} \right)$$

son isomorfismos y

$$\phi = \phi^1 \otimes 1: V \otimes V \xrightarrow{\sim} (\Lambda_{n-1} V) \otimes V \quad , \quad \phi(T^2) = C_1^1(\Omega_V \otimes T^2) \quad ,$$

induce un isomorfismo entre los tensores contravariantes simétricos de orden 2 y las  $(n-1)$ -formas  $\Pi_{n-1}$  valoradas en  $V$  que son simétricas en el sentido de que  $C_1^1(\Pi_{n-1}) = 0$ .

*Demostración:* Para ver que las aplicaciones lineales  $\phi^p$  son isomorfismos basta considerar las bases usuales de  $\Lambda^p V$  y  $\Lambda_{n-p} V$  y observar que

$$\phi^p(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = i_{v_1} \dots i_{v_p} \Omega_V = \Omega_V(v_1, \dots, v_p, -, \dots, -)$$

para cualesquiera vectores  $v_1, \dots, v_p \in V$ . Además, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes V & \xrightarrow{H} & \Lambda^2 V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi^2 \\ (\Lambda_{n-1} V) \otimes V & \xrightarrow{C_1^1} & \Lambda_{n-2} V \end{array}$$

$$\begin{aligned} C_1^1(\phi(e \otimes v)) &= C_1^1(\phi^1(e) \otimes v) = C_1^1((i_e \Omega_V) \otimes v) \\ &= i_v i_e \Omega_V = \phi^2(e \wedge v) = \phi^2(H(e \otimes v)) \end{aligned}$$

donde  $H(e \otimes v) := e \otimes v - v \otimes e = e \wedge v$  es el operador de hemisimetrización. Si  $T^2 \in V \otimes V$  y ponemos  $\Pi_{n-1} := \phi(T^2)$ , entonces  $C_1^1 \Pi_{n-1} = 0$  justamente cuando  $H(T^2) = 0$ ; es decir, cuando  $T^2$  es simétrico.

**Proposición 2.7.2** *Sea  $X$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  dotada de una conexión lineal sin torsión  $\nabla$  y una forma de volumen no nula  $\Omega_X$  autoparalela:  $\nabla \Omega_X = 0$ . Las  $(n-1)$ -formas simétricas  $\Pi_{n-1}$  valoradas en los campos tangentes y con diferencial exterior nula se corresponden de modo natural, vía la igualdad*

$$\Pi_{n-1} = C_1^1(\Omega_X \otimes T^2) \quad ,$$

con las métricas contravariantes simétricas  $T^2$  de divergencia nula.

*Demostración:* Dado un punto  $p \in X$ , consideremos una base de campos tangentes  $\{D_1, \dots, D_n\}$  en un entorno de  $p$  tal que  $(\nabla D_i)_p = 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Si  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  es la base dual, entonces  $(\nabla \theta_i)_p = 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Como la torsión de  $\nabla$  es nula,  $d\theta_i$  es la hemisimetrización de  $\nabla \theta_i$ , de modo que también  $d\theta_i = 0$ . Si  $\Omega_X = h\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n$ , la condición  $\nabla \Omega_X = 0$  implica que  $d_p h = (\nabla h)_p = 0$ , y por tanto  $d(i_{D_i} \Omega_X)$  se anula en  $p$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Calculemos:

$$\begin{aligned}
T^2 &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij} D_i \otimes D_j \\
(\nabla T^2)_p &= \sum_{i,j=1}^n (d_p f_{ij}) \otimes (D_i)_p \otimes (D_j)_p \\
(\operatorname{div}_{\nabla} T^2)_p &= \left( \sum_j \left( \sum_i D_i f_{ij} \right) D_j \right)_p \\
\Pi_{n-1} &= C_1^1(\Omega_X \otimes T^2) = \sum_{i,j} f_{ij} (i_{D_i} \Omega_X) \otimes D_j \\
d\Pi_{n-1} &= \sum_{i,j} (d_p f_{ij}) \wedge (i_{D_i} \Omega_X)_p \otimes (D_j)_p = \\
&= \left( \sum_j \left( \sum_i D_i f_{ij} \right) \Omega_X \otimes D_j \right)_p
\end{aligned}$$

y está claro que tanto la anulación en  $p$  de la divergencia de  $T^2$  como de la diferencial exterior de  $\Pi_{n-1}$  equivalen a la anulación en  $p$  de las funciones  $\sum_i D_i f_{ij}$  para todo índice  $j$ .

**Corolario 2.7.3** *Las formas de impulso  $\Pi_3$  de los fluidos se corresponden, vía la igualdad  $\Pi_3 = C_1^1(\Omega_X \otimes T^2)$ , con las métricas contravariantes  $T^2$  tales que*

1.  $T^2(\omega, \omega) = \rho$ .
2.  $T^2$  es simétrica.
3.  $\operatorname{div}_{\nabla} T^2 = 0$ .

*Demostración:* De acuerdo con 2.7.2, basta probar que  $T^2(\omega, \omega) = \rho$  precisamente cuando  $\Pi_3 \cdot \partial_t$  coincida con  $\rho \Omega_E$  en los vectores espaciales. Concluimos al observar que

$$\begin{aligned}
(\Pi_3 \cdot \partial_t)|_{t=a} &= C_1^1(\omega \otimes \Pi_3)|_{t=a} \\
&= C_{12}^{12}(\omega \otimes T^2 \otimes (\omega \wedge \Omega_E))|_{t=a} = T^2(\omega, \omega) \Omega_E.
\end{aligned}$$

**Definición:** Dada la forma de impulso  $\Pi_3$  de un fluido, diremos que la única métrica contravariante simétrica  $T^2$  tal que  $\Pi_3 = C_1^1(\Omega_X \otimes T^2)$  es el *tensor de energía-momento* del fluido.

En presencia de la métrica del tiempo  $g: TX \rightarrow T^*X$ , el tensor de energía-momento de un fluido  $T^2: T^*X \rightarrow TX$ , al igual que cualquier otra métrica contravariante, define un endomorfismo  $T_1^1: TX \rightarrow TX$  y una métrica covariante  $T_2: TX \rightarrow T^*X$ :

$$\begin{aligned} T_1^1(D) &:= T^2(gD) = i_{gD}T^2 & , & & T_1^1 = C_1^1(g \otimes T^2) \\ T_2(D, D') &:= T(D) \cdot D' = T^2(gD, gD') & , & & T_2 = C_1^1(g \otimes T_1^1) \end{aligned}$$

donde  $gD := i_Dg$ . De acuerdo con 2.7.3, estos tensores  $T^2$ ,  $T_1^1$ ,  $T_2$  tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} T^2(dt, dt) &= \rho & , & & \operatorname{div}_\nabla T^2 = 0 \\ T_1^1(\partial_t, dt) &= \rho & , & & \operatorname{div}_\nabla T_1^1 = 0 \\ T_2(\partial_t, \partial_t) &= \rho & , & & \operatorname{div}_\nabla T_2 = 0 \end{aligned}$$

y, como el radical de  $T_2$  ha de contener al de  $g$ , tenemos que

$$T_2 = \rho g = \rho dt^2 . \quad (2.16)$$

de modo que la primera condición  $T^2(\omega, \omega) = \rho$  de 2.7.3 afirma que el tensor de Ricci es  $R_2 = 4\pi T_2$ , de modo que puede expresarse de modo análogo a la ecuación de Einstein:

$$R_2 = 8\pi \left( T_2 - \frac{\alpha}{2} g \right)$$

donde  $\alpha$  denota la contracción total de  $g \otimes T^2$ ; i.e., la traza de  $T_1^1$ .

### Tensor de tensiones

Sea  $\Pi_3$  la forma de impulso de un fluido. La restricción de  $\Pi_3$  a los vectores espaciales será  $\Omega_E \otimes I$  para cierto campo tangente  $I$  que llamaremos *densidad de impulso* del fluido, porque representa la masa y la cantidad de movimiento del fluido por unidad de volumen. La primera condición de la definición de forma de impulso afirma que  $\omega(I) = I \cdot \partial_t = \rho$ , de modo que  $I = \rho \partial_t + \vec{w}$ , donde  $\vec{w}$  es la *densidad de momento* para el observador  $\partial_t$ . La condición de simetría que satisface  $\Pi_3$  implica (ver la expresión en coordenadas 2.6.1) que la 3-forma ordinaria<sup>11</sup>  $\Pi_3 \cdot \partial_t$  coincide con  $i_I \Omega_X$ , de modo que la densidad de impulso  $I$  coincide con  $i_\omega T^2$ . En efecto, poniendo  $\bar{I} := i_\omega T^2 = C_1^1(\omega \otimes T^2)$ , tenemos

$$i_{\bar{I}} \Omega_X = C_1^1(\Omega_X \otimes \bar{I}) = C_{12}^{12}(\omega \otimes \Omega_X \otimes T^2) = C_1^1(\omega \otimes \Pi_3) = \Pi_3 \cdot \partial_t = i_I \Omega_X$$

y concluimos que  $I = i_\omega T^2$ .

**Corolario 2.7.4** *Si la densidad de impulso  $I$  de un fluido es divisible por la densidad de masa  $\rho$ , entonces existe un único campo de velocidades  $T$  sobre el soporte de  $\rho$  y una única métrica simétrica covariante  $\mathcal{T}_2$ , definida sobre los vectores espaciales, tales que*

$$T^2 = \rho T \otimes T + \mathcal{T}^2 ,$$

donde  $\mathcal{T}^2$  es la métrica contravariante que el producto escalar de vectores espaciales asocia a  $\mathcal{T}_2$ .

<sup>11</sup>Que mide la masa que traspasa cada región tridimensional del espacio-tiempo.

*Demostración:* Sea  $T = I/\rho$ . Claramente  $T^2 = \rho T \otimes T + \mathcal{T}^2$ , donde  $\omega$  está en el radical de  $\mathcal{T}^2$ . Además, en el abierto  $\rho \neq 0$  (y por tanto en su cierre, que es el soporte de  $\rho$ )  $T$  es un campo de velocidades:  $\omega(T) = \omega(I)/\rho = 1$ .

Ahora bien,  $\mathcal{T}^2$  viene definida por una métrica sobre el dual  $E^* = T^*X/\mathbb{R}\omega$  del incidente  $E$  de  $\omega$ . Como el producto escalar de  $E$  induce un isomorfismo  $E \simeq E^*$ , permite entender cada métrica  $\mathcal{T}^2$  sobre  $E^*$  como una métrica  $\mathcal{T}_2$  sobre  $E$ .

Por último, la unicidad de la descomposición es evidente.

**Corolario 2.7.5** *Dar la forma de impulso  $\Pi_3$  de un fluido, cuya densidad de impulso  $I$  sea divisible por la densidad de masa  $\rho$ , equivale a dar un campo de velocidades  $T$  sobre el soporte de  $\rho$  y una métrica simétrica espacial  $\mathcal{T}_2$  tal que*

$$\operatorname{div}_{\nabla} (\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2) = 0 ,$$

donde  $\mathcal{T}^2$  es la métrica contravariante asociada a  $\mathcal{T}_2$  mediante el producto escalar. La relación entre ambos datos es

$$\Pi_3 = C_1^1 (\Omega_X \otimes (\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2)) .$$

**Definición:** Cuando la densidad de impulso  $I$  de un fluido sea divisible por la densidad de masa  $\rho$ , diremos que tal campo de velocidades  $T$  es la *velocidad media* del fluido y la métrica espacial  $\mathcal{T}_2$  recibe el nombre de *tensor de tensiones* del fluido.

Vemos así que el concepto de velocidad media exige una hipótesis de divisibilidad de la densidad de momento  $\vec{w}$  por la densidad de masa  $\rho$ , por lo que lo evitaremos en lo posible.

**Proposición 2.7.6** *Sea  $T$  un campo de velocidades y sea  $\mathcal{T}_2$  una métrica covariante definida sobre los vectores espaciales. La condición necesaria y suficiente para que la divergencia de  $\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2$  sea nula es que verifiquen*

$$1. \text{ Ley de conservación de la masa: } T^L(\rho\Omega_X) = 0$$

$$2. \text{ Ley del movimiento: } \rho(T^{\nabla}T) = -\operatorname{div}_{\nabla} \mathcal{T}^2$$

*Demostración:* En primer lugar calculamos  $\nabla(\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2)$  :

$$\nabla(\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2) = d\rho \otimes T \otimes T + \rho(\nabla T) \otimes T + \rho T \otimes (\nabla T) + \nabla \mathcal{T}^2$$

y, al contraer los dos primeros índices, obtenemos la divergencia

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\nabla}(\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2) &= (T\rho)T + \rho(\operatorname{div}_{\nabla} T)T + \rho \cdot i_T(\nabla T) + \operatorname{div}_{\nabla} \mathcal{T}^2 \\ &= (T\rho + \rho(\operatorname{div}_{\nabla} T))T + \rho(T^{\nabla}T) + \operatorname{div}_{\nabla} \mathcal{T}^2 . \end{aligned}$$

Ahora, como  $Tt = 1$  y la conexión  $\nabla$  es de Cartan, el campo tangente  $T^{\nabla}T$  es espacial. También el campo tangente  $\operatorname{div}_{\nabla} \mathcal{T}^2$  es espacial, porque  $\nabla \partial_i = 0$  cuando  $i = 1, 2, 3$ . Se sigue que la divergencia de  $\rho T \otimes T + \mathcal{T}^2$  es nula precisamente cuando

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(T^{\nabla}T) + \operatorname{div}_{\nabla} \mathcal{T}^2 \\ 0 &= T\rho + \rho(\operatorname{div}_{\nabla} T) \end{aligned}$$

Esta última condición es equivalente a la Ley de conservación de la masa, pues

$$T^L(\rho\Omega_X) = (T\rho)\Omega_X + \rho(T^L\Omega_X) = (T\rho + \rho\operatorname{div}_\nabla T)\Omega_X$$

al ser  $T^L\Omega_X = (\operatorname{div}_\nabla T)\Omega_X$  cuando la conexión  $\nabla$  es de Cartan.

## Expresiones en coordenadas

Usando las notaciones de 2.15, en el sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  definido por un observador arbitrariamente acelerado tendremos que el tensor de energía-momento  $T^2$  de un fluido es

$$\begin{aligned} T^2 &= \rho\partial_t \otimes \partial_t + \sum_{i=1}^3 w_i(\partial_t \otimes \partial_i + \partial_i \otimes \partial_t) + \sum_{i,j=1}^3 h_{ij}\partial_i \otimes \partial_j \\ T_1^1 &= (\rho\partial_t + w_1\partial_1 + w_2\partial_2 + w_3\partial_3) \otimes dt \\ T_2 &= \rho dt \otimes dt \\ I &= i_{dt}T^2 = \rho\partial_t + w_1\partial_1 + w_2\partial_2 + w_3\partial_3 \end{aligned}$$

Cuando la densidad de impulso  $I = \rho\partial_t + \vec{w}$  es divisible por  $\rho$ , tenemos definida la velocidad media  $T$  del fluido y su tensor de tensiones  $\mathcal{T}_2$ :

$$\begin{aligned} T &= \partial_t + v_1\partial_1 + v_2\partial_2 + v_3\partial_3 \\ \mathcal{T}_2 &= \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij}dx_i \otimes dx_j \end{aligned}$$

donde  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  y las funciones  $v_i$  están bien definidas en el soporte de  $\rho$ . El campo tangente  $\vec{v} := v_1\partial_1 + v_2\partial_2 + v_3\partial_3 = T - \partial_t$  es la *velocidad media aparente* del fluido para el observador fijado. La igualdad  $T^2 = \rho T \otimes T + \mathcal{T}_2$  de 2.7.4 significa que

$$\begin{aligned} w_i &= \rho v_i & i &= 1, 2, 3 \\ h_{ij} &= \rho v_i v_j + \tau_{ij} & i, j &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Introduciendo estas igualdades en las ecuaciones 2.15 y simplificando las tres últimas con ayuda de la ecuación de continuidad, obtenemos las clásicas **ecuaciones de la Mecánica de fluidos**:

$$\begin{cases} 0 = \rho_t + (\rho v_1)_1 + (\rho v_2)_2 + (\rho v_3)_3 \\ \rho F_i = \rho(v_{i,t} + v_1 v_{i,1} + v_2 v_{i,2} + v_3 v_{i,3}) + \tau_{i1,1} + \tau_{i2,2} + \tau_{i3,3} \end{cases}$$

## Ejemplos

**Nubes de polvo:** Son los fluidos en que el tensor de esfuerzos es nulo,  $\mathcal{T}_2 = 0$ ; es decir, su tensor de energía-momento es de la forma

$$T^2 = \rho T \otimes T$$

para algún campo de velocidades  $T$ .

**Fluidos perfectos:** En el caso de un fluido perfecto de velocidad media  $T$  y presión  $p$ , el tensor de energía-momento es

$$T^2 = \rho T \otimes T + p g^* .$$

**Fluidos viscosos:** En general, se llama *presión*  $p$  de un fluido a la traza de su tensor de esfuerzos  $\mathcal{T}_2$ , afectada del factor  $1/3$ :

$$p := \frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} .$$

Consideremos las partículas contenidas en una unidad de volumen alrededor de un suceso, que vendrán dadas por campos  $I_k = m_k T_k$  con soporte en ciertas trayectorias de velocidad  $T_k$ . El tensor de energía-momento del fluido en tal suceso es

$$T^2 = \sum_k m_k T_k \otimes T_k ,$$

así que la presión es

$$p = \sum_k m_k \frac{v_{k1}^2 + v_{k2}^2 + v_{k3}^2}{3} ,$$

donde  $v_{k1}\partial_1 + v_{k2}\partial_2 + v_{k3}\partial_3$  es la velocidad aparente de la partícula  $k$ -ésima para un observador cuya velocidad coincida con la velocidad media  $T$  del fluido (es decir, para este observador  $T = \partial_t$ , lo que equivale a decir que  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ ).

## 2.8 Ecuaciones de Campo

La ecuación de Poisson, que es la única ecuación de campo que hemos impuesto a la geometría  $\nabla$  del espacio-tiempo, no da cuenta de la Ley de conservación de la masa ni de la Ley del movimiento, pues la función

$$\iiint \frac{\rho(t, y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}}$$

satisface la ecuación de Poisson, cualquiera que sea función diferenciable con soporte espacialmente compacto  $\rho(t, x_1, x_2, x_3)$ . Para que la geometría  $\nabla$  del espacio-tiempo verifique tales leyes es necesario imponerle ecuaciones de campo adicionales, que ahora buscaremos aunque por el momento no tengan más interés que su equivalencia con estas leyes; lo que es tanto como decir que no tienen más justificación que su comprobación fáctica.

Sea  $\nabla$  una conexión de Cartan y sea  $\rho$  su función de densidad. Vamos a imponer sobre  $\nabla$  la condición de que admita la 3-forma de impulso de algún sistema aislado:

**2.8.1 (Ecuaciones de campo)** Existe una métrica simétrica contravariante  $T^2$ , con soporte espacialmente compacto<sup>12</sup> tal que:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_{\nabla} T^2 &= 0 \\ T^2(\omega, \omega) &= \rho\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, y para recoger el caso de varios cuerpos, vamos a fijar una descomposición del soporte de  $T^2$  como unión disjunta de dos cerrados  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sop} T^2 &= K_1 \amalg K_2 \\ T^2 &= T^2|_{K_1} + T^2|_{K_2} \\ \rho &= \rho|_{K_1} + \rho|_{K_2}\end{aligned}$$

**Teorema 2.8.2** *Si una conexión de Cartan  $\nabla$  verifica las ecuaciones de campo 2.8.1, entonces la masa contenida en  $K_1 \cap \mathcal{E}_t$*

$$m_1(t) := \int_{\mathcal{E}_t} (\rho|_{K_1}) \Omega_E$$

es una función constante del tiempo.

*Demostración:* Consideremos una variedad compacta con borde  $S$  en  $\mathcal{E}_t$  que separe a  $K_1 \cap \mathcal{E}_t$  de  $K_2 \cap \mathcal{E}_t$ , es decir, que contenga al primer compacto en su interior y no corte al segundo<sup>13</sup>. De acuerdo con la ecuación de continuidad 2.7.5, en un sistema de referencia tenemos

$$m'_1(t) = \int_S \rho_t dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_S (\operatorname{div} \vec{w}) \Omega_E = - \int_{\partial S} i_{\vec{w}} \Omega_E = 0$$

porque  $\vec{w}$  se anula en el borde de  $S$ , ya que  $T^2$  se anula.

**Corolario 2.8.3** *Si una conexión de Cartan  $\nabla$  verifica las ecuaciones de campo 2.8.1, entonces la masa total del Universo*

$$\int_{\mathcal{E}_t} \rho \Omega_E$$

permanece constante a lo largo del tiempo.

*Demostración:* Basta tomar  $K_2 = \emptyset$  en el teorema anterior.

Una vez obtenida la Ley de conservación de la masa, pasemos a estudiar el movimiento del centro de masas de la materia contenida en  $K_1$ , que tiene las siguientes coordenadas (en un sistema de referencia):

$$x_i(t) = \frac{1}{m_1} \int_{\mathcal{E}_t} (x_i \rho|_{K_1}) \Omega_E,$$

donde  $m_1$  denota la masa contenida en  $K_1$  en cualquier instante  $t$ , pues no depende del tiempo.

<sup>12</sup>En el sentido de que sea compacta la intersección de tal soporte con cada hiperplano espacial.

<sup>13</sup>Tal variedad existe porque cada punto del primer compacto admite un entorno que es un cubo y no corta al segundo compacto, y la unión finita de cubos es una variedad con borde.

**Teorema 2.8.4 (Ley de la Gravitación Universal)** *Sea  $\nabla$  una conexión newtoniana que verifique las ecuaciones de campo 2.8.1. En cualquier sistema de referencia inercial de  $\nabla$ , el centro de masas de la materia contenida en  $K_1$  satisface las ecuaciones*

$$m_1 x_i''(t) = \int_{\mathcal{E}_t} (\rho|_{K_1} \bar{F}_i) \Omega_E \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ,$$

donde  $\bar{F} = \bar{F}_1 \partial_1 + \bar{F}_2 \partial_2 + \bar{F}_3 \partial_3$  es el gradiente del potencial newtoniano de las masas que están fuera de  $K_1$  (es decir, del potencial newtoniano de  $\rho|_{K_2}$ ).

*Demostración:* La ecuación de continuidad 2.15 permite obtener la velocidad aparente del centro de masas considerado, pues

$$\begin{aligned} m_1 x_i'(t) &= \frac{1}{m_1} \int_S (\rho_t x_i) \Omega_E = -\frac{1}{m_1} \int_S (\operatorname{div} \vec{w}) \Omega_E \\ &= -\frac{1}{m_1} \int_S (\operatorname{div} (x_i \vec{w}) - w_i) \Omega_E \\ &= \frac{-1}{m_1} \int_{\partial S} x_i (i_{\vec{w}} \Omega_E) + \frac{1}{m_1} \int_S w_i \Omega_E \\ &= 0 + \frac{1}{m_1} \int_S w_i \Omega_E \quad , \end{aligned}$$

porque  $\vec{w}$  se anula en el borde de  $S$ , ya que  $T^2$  se anula. Ahora calculamos la aceleración aparente del centro de masas aplicando las ecuaciones de Euler 2.15. Tenemos

$$\begin{aligned} x_i''(t) &= \frac{1}{m_1} \int_S w_{i,t} \Omega_E \\ &= -\frac{1}{m_1} \int_S (\operatorname{div} \vec{h}_i) \Omega_E + \frac{1}{m_1} \int_S (\rho F_i) \Omega_E \\ &= -\frac{1}{m_1} \int_{\partial S} i_{\vec{h}_i} \Omega_E + \frac{1}{m_1} \int_S (\rho F_i) \Omega_E \\ &= 0 + \frac{1}{m_1} \int_S (\rho F_i) \Omega_E \end{aligned}$$

porque  $\vec{h}_i$  se anula en el borde de  $S$ , al anularse  $T^2$ .

Según 2.5.3, el campo de vectores espaciales  $\vec{F} = F_1 \partial_1 + F_2 \partial_2 + F_3 \partial_3$  es el gradiente del potencial newtoniano de  $\rho = \rho|_{K_1} + \rho|_{K_2}$ , y obtenemos que  $\vec{F} = \tilde{F} + \bar{F}$ , donde  $\tilde{F}$  y  $\bar{F}$  son los gradientes de  $\rho|_{K_1}$  y  $\rho|_{K_2}$  respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} x_i''(t) &= \frac{1}{m_1} \int_S \rho (\tilde{F}_i + \bar{F}_i) \Omega_E = \\ &= \frac{1}{m_1} \int_{\mathcal{E}_t} (\rho|_{K_1} \tilde{F}_i) \Omega_E + \frac{1}{m_1} \int_{\mathcal{E}_t} (\rho|_{K_1} \bar{F}_i) \Omega_E \end{aligned}$$

porque  $\rho|_{K_1}$  se anula fuera de  $S$  y coincide con  $\rho$  en  $S$ . Concluimos al aplicar el siguiente resultado a la conexión newtoniana definida por  $\tilde{F}$ :

**Lema 2.8.5** Si  $\vec{F}$  es la intensidad de fuerza gravitatoria de una conexión newtoniana en un sistema de referencia inercial, en cada fibra espacial  $\mathcal{E}_t$  tenemos que

$$\int_{\mathcal{E}_t} (\rho F_i) \Omega_E = 0 .$$

*Demostración:* Se tiene

$$\begin{aligned} -4\pi\rho F_i &= F_i(\operatorname{div} \vec{F}) = \operatorname{div}(F_i \vec{F}) - (\operatorname{grad} F_i) \vec{F} \\ &= \operatorname{div}(F_i \vec{F}) - \partial_i(\vec{F} \cdot \vec{F})/2 = \operatorname{div}(F_i \vec{F}) - \operatorname{div}\left((\vec{F} \cdot \vec{F})\partial_i\right) . \end{aligned}$$

Integrando en una bola  $B$  que contenga al soporte  $\rho$  en el instante  $t$ , resulta

$$\begin{aligned} -4\pi \int_{\mathcal{E}_t} (\rho F_i) \Omega_E &= \int_B \operatorname{div}(F_i \vec{F}) \Omega_E - 2 \int_B \operatorname{div}\left((\vec{F} \cdot \vec{F})\partial_i\right) \Omega_{\mathcal{E}_t} \\ &= \int_{\partial B} F_i(i_{\vec{F}} \Omega_E) - 2 \int_{\partial B} (\vec{F} \cdot \vec{F})(i_{\partial_i} \Omega_E) \\ &= \int_{\partial B} F_i(\vec{F} \cdot N) \Omega_S - 2 \int_{\partial B} (\vec{F} \cdot \vec{F})(\partial_i \cdot N) \Omega_S , \end{aligned}$$

donde  $N$  es el vector unitario normal a la esfera  $\partial B$  y  $\Omega_S$  es su forma de área. Teniendo en cuenta que estas dos últimas integrales tienden a cero cuando el radio de  $B$  tiende a infinito, se concluye que

$$-4\pi \int_{\mathcal{E}_t} (\rho F_i) \Omega_E = 0 .$$

## 2.9 Estructura Local de la Gravitación Newtoniana

Como ya señalamos, nuestra percepción intuitiva del tiempo, el espacio y el movimiento no se funda en ninguna experiencia que realicemos sobre la totalidad del espacio-tiempo. Por eso, en orden a fundamentar cualquier teoría mecánica, sólo hemos de observar la estructura local del espacio, el tiempo y el movimiento, para luego suponer que es válida en cualquier otro lugar y momento. El **Principio de la uniformidad** del Universo no debe enunciarse afirmando que éste se ve igual desde todos sus puntos (lo que obviamente es falso), sino que su estructura local es la misma en todas partes. Aunque se desee una teoría global, de la totalidad del espacio-tiempo, la estructura del espacio y el tiempo ha de estar definida mediante conceptos y relaciones locales. *La estructura del espacio-tiempo debe decidirse localmente*<sup>14</sup>.

La estructura newtoniana del espacio y el tiempo que hemos desentrañado en los apartados precedentes no es de carácter local, porque no lo es la estructura de fibrado principal. El concepto de fibrado principal  $X \rightarrow S$  es local en la base  $S$ ; pero no en  $X$ , lo que en nuestro caso significa que la hipótesis 1 (ver I.1) no plantea ningún problema, pues para que adquiera carácter local basta modificarla en el sentido de que el tiempo sea una proyección regular sobre un intervalo de una recta afín orientada

<sup>14</sup>Incluso sería más deseable que viniera dada por condiciones infinitesimales; más aún, por condiciones sobre el primer entorno infinitesimal, sin involucrar la curvatura.

y no sobre toda la recta. Esto no introduce ninguna modificación en el desarrollo subsiguiente. La hipótesis 2 es la que no tiene carácter local, pues afirma que las fibras del tiempo son espacios euclídeos, y debe sustituirse por la exigencia de que sean variedades riemannianas de curvatura nula, lo que nos obliga a modificar ligeramente la definición del espacio-tiempo en la Gravitación newtoniana<sup>15</sup> que dimos en 1.1, para que adquiriera carácter local:

**Definición:** Un *espacio-tiempo newtoniano*<sup>16</sup> es una variedad diferenciable  $X$  de dimensión 4

$$(X, g, g^*, \nabla)$$

junto con una métrica simétrica covariante  $g$ , llamada *métrica del tiempo*, una métrica simétrica contravariante  $g^*$ , llamada *métrica del espacio*, y una conexión lineal sin torsión  $\nabla$  que verifican las siguientes condiciones:

**(Axioma 1)** La métrica del tiempo  $g$  es de tipo  $(+, 0, 0, 0)$  en todos los puntos de  $X$ .

Esta hipótesis afirma que localmente  $g = \omega \otimes \omega$  para alguna 1-forma  $\omega$  sobre  $X$  que no se anula en ningún punto. Esta 1-forma  $\omega$  está bien definida salvo un signo. Llamaremos *espaciales* a los vectores del radical de  $g$ , es decir, a los vectores incidentes con  $\omega$ . Este axioma afirma que, en cada punto de  $X$ , los vectores espaciales forman un subespacio vectorial de dimensión 3. El producto de vectores con la métrica del tiempo  $g$  se denota con un punto:

$$D \cdot D' := g(D, D') .$$

**(Axioma 2)** La métrica del espacio  $g^*$  es de tipo  $(0, +, +, +)$  en todos los puntos de  $X$  y su radical es el incidente del radical de  $g$ .

Esta condición expresa que  $g^*$  induce un producto escalar definido únicamente para vectores espaciales, que denotaremos  $*$ .

**(Axioma 3)** El transporte paralelo asociado a  $\nabla$  conserva las métricas del tiempo y el espacio:

$$\nabla g = 0 \quad , \quad \nabla g^* = 0 .$$

Según veremos en el siguiente lema, la condición  $\nabla g = 0$  implica que  $\omega$  es una diferencial localmente exacta,  $g = dt^2$ , y las hipersuperficies donde  $g$  se anula (que localmente son  $t = cte.$ ) se llamarán *espaciales*. La condición  $\nabla g = 0$  también implica que la derivada covariante de campos espaciales siempre es espacial, así que las hipersuperficies espaciales son totalmente geodésicas y  $\nabla$  especializa a tales hipersuperficies.

La condición  $\nabla g^* = 0$  implica que la especialización de  $\nabla$  a las hipersuperficies espaciales es precisamente la conexión de Levi-Civita de la métrica riemanniana que induce  $g^*$ .

<sup>15</sup>El desarrollo de este capítulo no ha sido más que la justificación razonada de la siguiente definición de los conceptos de espacio, tiempo, inercia y materia en la teoría newtoniana de la gravitación.

<sup>16</sup>Para simplificar la exposición supondremos que se han fijado unidades de longitud y tiempo, y no introduciremos orientaciones del espacio y el tiempo, pues no intervendrán en las páginas restantes.

**(Axioma 4) Carácter conservativo de las fuerzas gravitatorias:**

$$R_2^2(\omega_1, D_1; \omega_2, D_2) = R_2^2(\omega_2, D_2; \omega_1, D_1)$$

donde  $R_2^2(\omega_1, D_1; \omega_2, D_2) := \omega_2(R_{2,1}(i_{\omega_1}g^*, D_1, D_2))$  y  $R_{2,1}$  denota el tensor de curvatura de  $\nabla$ .

**(Axioma 5) Principio de existencia de rotaciones absolutas:**

$$R_{2,1}(D_1, D_2, V) = 0$$

cuando el vector  $V$  es espacial.

En particular es nulo el tensor de curvatura de la especialización de  $\nabla$  a cualquier hipersuperficie espacial, de modo que éstas son localmente isométricas a un espacio euclídeo.

**Lema 2.9.1** *Sea  $g$  una métrica de rango 1 y signo positivo sobre una variedad diferenciable  $X$ . Si existe una conexión lineal sin torsión  $\nabla$  sobre  $X$  tal que  $\nabla g = 0$ , entonces localmente  $g$  es el cuadrado de una diferencial exacta:  $g = dt \otimes dt$ .*

*Demostración:* Localmente  $g = \omega \otimes \omega$  para alguna 1-forma  $\omega$ . La condición  $\nabla(\omega \otimes \omega) = 0$  implica que  $\nabla \omega = 0$ . Como la torsión de  $\nabla$  es nula,  $d\omega$  es la hemisimetrización de  $\nabla \omega$ ; luego  $d\omega = 0$  y concluimos que localmente  $\omega$  es exacta.

**Teorema 2.9.2** *En cada punto de un espacio-tiempo newtoniano  $(X, g, g^*, \nabla)$  existen sistemas de coordenadas locales  $(t, x_1, x_2, x_3)$  tales que*

- 1)  $g = dt \otimes dt$
- 2)  $g^* = \partial_1 \otimes \partial_1 + \partial_2 \otimes \partial_2 + \partial_3 \otimes \partial_3$
- 3)  $\partial_i^\nabla \partial_j = 0$  ,  $i, j = 1, 2, 3$
- 4)  $\partial_t^\nabla \partial_j = 0$  ,  $i = 1, 2, 3$
- 5)  $\partial_t^\nabla \partial_t = -\text{grad } u := -(\partial_1 u)\partial_1 - (\partial_2 u)\partial_2 - (\partial_3 u)\partial_3$

para alguna función diferenciable  $u(t, x_1, x_2, x_3)$ .

*Demostración:* Dado un punto  $p$  de  $X$ , en virtud de 2.9.1, en algún entorno de  $p$  tendremos  $\omega = dt$  para cierta función diferenciable  $t$ . Fijemos ahora un observador que pase por  $p$ , es decir, una curva  $p(t)$  que pase por  $p$  y en la que  $t$  sea una coordenada local, junto con una base ortonormal  $\{V_1, V_2, V_3\}$  de los vectores espaciales en  $p$ . Trasladando paralelamente estos vectores, en cada punto de la curva  $p(t)$  obtendremos una base ortonormal de los vectores espaciales porque  $\nabla g^* = 0$ . Podemos suponer que esta curva corta a las hipersuperficies espaciales  $t = \text{cte}$ . en un único punto, así que en cada una tenemos una base ortonormal del espacio tangente en un punto. Tal base ortonormal define un sistema de coordenadas locales  $(x_1, x_2, x_3)$  en dicha hipersuperficie. De este modo obtenemos un sistema de coordenadas locales  $(t, x_1, x_2, x_3)$  en un entorno de  $p$  y vamos a demostrar que en estas coordenadas se verifican las igualdades 1,2,3,4,5.

La primera se debe a que los vectores  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  son espaciales, y a que  $\omega(\partial_t) = 1$  al ser  $\omega = dt$ .

Las igualdades 2 y 3 son consecuencias directas del modo en que hemos construido las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$ , ya que las hipersuperficies  $t = cte.$  son planas.

Derivando con  $\partial_t$  las igualdades  $g(\partial_t, \partial_j) = 0$  se obtiene que los campos  $\partial_t^\nabla \partial_i$  son espaciales:

$$\partial_t^\nabla \partial_i = G_{i1}\partial_1 + G_{i2}\partial_2 + G_{i3}\partial_3 \quad , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Por otra parte, en virtud del axioma 5 tenemos

$$0 = R_{2,1}(\partial_j, \partial_t, \partial_i) = \partial_j^\nabla (\partial_t^\nabla \partial_i) = (\partial_j G_{i1})\partial_1 + (\partial_j G_{i2})\partial_2 + (\partial_j G_{i3})\partial_3$$

para todo  $i, j = 1, 2, 3$ ; así que las funciones  $G_{ij}$  sólo dependen del tiempo. Por construcción, los campos  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  son paralelos a lo largo de la trayectoria del observador; luego las funciones  $G_{ij}$  se anulan en dicha trayectoria y podemos concluir que todas las funciones  $G_{ij}$  son nulas. Es decir, la igualdad 4 es cierta.

Por último, al ser  $\nabla g = 0$ , tenemos que  $0 = \partial_t (g(\partial_t, \partial_t)) = 2g(\partial_t^\nabla \partial_t, \partial_t)$ ; luego  $\vec{F} := \partial_t^\nabla \partial_t$  es un campo de vectores espaciales:

$$\partial_t^\nabla \partial_t = -F_1\partial_1 - F_2\partial_2 - F_3\partial_3 .$$

El carácter conservativo de las fuerzas gravitatorias implica las igualdades  $\partial_j F_i = \partial_i F_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , que equivalen a la existencia local de una función diferenciable  $u$  tal que  $\vec{F} = \text{grad } u$ , lo que concluye la demostración del teorema.

**Definición:** Dado un espacio-tiempo newtoniano  $X$ , diremos que un sistema de coordenadas locales en  $X$  es un *sistema de referencia* si se verifican las igualdades del teorema anterior. En tal caso la curva  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  se llama *trayectoria* del observador y diremos que la función  $u(t, x_1, x_2, x_3)$  es el *potencial gravitatorio* en tal sistema de referencia.

**Definición:** Una *gravitación newtoniana*<sup>17</sup> es un espacio-tiempo newtoniano

$$(X, g, g^*, \nabla, T^2)$$

dotado de una métrica contravariante simétrica  $T^2$ , que recibe el nombre de *tensor de energía-momento*, tal que:

$$\text{(Axioma 6)} \quad C_{12}^{12}(T^2 \otimes g) = \rho \quad (\text{es decir, } T^2(dt, dt) = \rho)$$

$$\text{div}_\nabla T^2 = 0 \quad (\text{Ley de conservación del impulso})$$

**Definición:** Un *isomorfismo* de una gravitación newtoniana  $(X, g, g^*, \nabla, T^2)$  en otra  $(\bar{X}, \bar{g}, \bar{g}^*, \bar{\nabla}, \bar{T}^2)$  es un difeomorfismo  $\phi: X \rightarrow \bar{X}$  tal que

$$\phi^*(\bar{g}) = \lambda^2 g \quad , \quad \phi^*(\bar{g}^*) = \mu^{-2} g^* \quad , \quad \phi^*(\bar{\nabla}) = \nabla \quad , \quad \phi^*(\bar{T}^2) = \lambda^{-4} T^2$$

<sup>17</sup>Sin orientación del tiempo ni el espacio, y con unidades de tiempo y longitud fijadas.

para ciertas (funciones localmente) constantes  $\lambda$  y  $\mu$ .

En particular tenemos definido el concepto de *automorfismo* o *simetría* de una gravitación newtoniana. Análogamente se definen los *isomorfismos locales* y las *inmersiones abiertas* entre gravitaciones newtonianas, porque para tales aplicaciones diferenciables tiene sentido la imagen inversa de campos tangentes.

Cuando decimos que determinado concepto  $C$  de la gravitación newtoniana se mide en  $cm^a s^b$  queremos decir que los isomorfismos lo transforman según la regla  $\phi^*(\bar{C}) = \lambda^b \mu^a C$ .

**Nota:** Los axiomas impuestos a la gravitación newtoniana ya son locales; pero el Carácter conservativo y el Principio de existencia de rotaciones absolutas involucran la curvatura, lo que los vuelve problemáticos, sobre todo el último. Sería natural eliminar el carácter euclídeo del espacio, que es el quinto axioma cuando los vectores  $D_1$ ,  $D_2$  son espaciales, admitiendo en las hipersuperficies espaciales  $t = cte.$  geometrías riemannianas arbitrarias; pero, si el Principio del giroscopio es válido cuando los vectores  $D_1$ ,  $D_2$  son temporales, por continuidad también es válido cuando son espaciales.

## Capítulo 3

# Espacio-tiempo de Minkowski

Cuando se emite un rayo de luz, su trayectoria es independiente del estado de movimiento de la fuente emisora, de modo que las velocidades de los posibles rayos de luz que pueden emitirse en un suceso  $p$  del espacio-tiempo  $X$  forman un cono en el espacio tangente  $T_pX$ , llamado cono de luz. Que en el vacío la velocidad aparente de la luz es finita e igual en todas direcciones es un hecho experimental bien establecido, así que en ciertas coordenadas el cono de luz viene dado por la anulación de la forma cuadrática

$$dt^2 - c^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

donde  $c$  es la velocidad aparente de la luz en tal sistema de referencia. Es decir, el cono de luz está definido por una *métrica de Lorentz* (una métrica de tipo  $+, -, -, -$ ). Como esta métrica es no-singular, permite identificar  $T_pX$  con su espacio dual, de modo que la medida del tiempo  $\omega = dt$  define una recta tangente en  $T_pX$ , recta que no puede ser espacial en virtud de la finitud de la velocidad aparente de la luz. Obtenemos así en cada suceso  $p$  una recta tangente canónica: *En presencia de la estructura de la Mecánica Clásica, la finitud e isotropía de la velocidad de la luz, y su independencia del estado de movimiento del emisor, implican el carácter absoluto del estado de reposo.*

La velocidad de la luz, aún siendo finita, es enormemente grande ( $c \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ ), por lo que el cono de luz  $dt^2 = c^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$  coincide prácticamente con el hiperplano de vectores espaciales  $dt^2 = 0$  definido por la métrica del tiempo  $g = dt^2$ . Si rechazamos la posibilidad de que el estado de reposo tenga significado físico independiente del observador, nos vemos forzados a admitir que la medida de intervalos de tiempo no viene dada por una métrica singular de rango 1, como se supone en la Mecánica Clásica, sino por la métrica que define el cono de luz, que es una métrica no singular de tipo  $(+, -, -, -)$ . La hipótesis fundamental de la Teoría de la Relatividad es que la métrica del tiempo es una métrica de Lorentz.

Aunque este cambio afecte muy poco a las predicciones numéricas de los fenómenos ordinarios, porque  $c^{-2} \approx 10^{-21}$  en las unidades centímetro-segundo, representa una gran diferencia conceptual y estructural, pues supone sustituir una métrica de rango 1 por una métrica no-singular. En este capítulo estudiaremos las principales consecuencias de tal cambio, manteniendo la hipótesis de que las propiedades inerciales vienen dadas por una estructura de espacio afín sobre el espacio-tiempo. La Teoría especial de

la Relatividad es el análogo relativista de la Mecánica Clásica expuesta en el capítulo I, cuando la métrica del tiempo  $g$  se sustituye por una métrica de tipo  $(+, -, -, -)$ . El espacio-tiempo de Minkowski recoge la estructura infinitesimal<sup>1</sup> del espacio y el tiempo en la teoría relativista de la Gravitación en el mismo sentido que el espacio-tiempo de Galileo nos la presenta en la Gravitación newtoniana.

### 3.1 Relatividad Especial

**Definición 1.1:** El *espacio-tiempo de Minkowski* es un espacio afín  $\mathbb{A}_4$  de dimensión 4 cuyo espacio de vectores libres  $V$  está dotado de una métrica de Lorentz  $\{\lambda^2 g\}$ , bien definida salvo un factor positivo y llamada *métrica del tiempo*, de una *orientación del tiempo*  $W_+$  (una de los dos componentes conexas de  $W = \{v \in V : g(v, v) > 0\}$ ), llamada *futuro*, y una orientación  $[\Omega_V]$  de  $V$ , llamada *orientación espacio-temporal*:

$$(\mathbb{A}_4, V, \{\lambda^2 g\}, W_+, [\Omega_V])$$

La otra componente conexa de  $W$  se denotará  $W_-$  y se llamará *pasado*:

$$W = W_+ \amalg W_- .$$

Diremos que un vector no nulo  $v \in V$  es de tipo *tiempo*, de tipo *espacio* o de tipo *luz* según que  $g(v, v)$  sea positivo, negativo o nulo respectivamente. Los vectores temporales son los de  $W$ , y diremos que un vector de tipo tiempo está orientado hacia el futuro o el pasado según esté en  $W_+$  ó en  $W_-$ . Para un vector de tipo luz no nulo también tiene sentido decir que están orientado hacia el futuro o el pasado, según esté en el cierre de  $W_+$  o de  $W_-$ ; pero carece de sentido afirmar que un vector de tipo espacio apunta al futuro o al pasado.

Llamaremos *trayectoria de un móvil* u *observador* a toda curva<sup>2</sup> temporal (en el sentido de que la restricción de  $g$  sea definido-positiva). Fijada la métrica del tiempo  $g$ , sobre cada trayectoria existe un único campo tangente  $U$ , orientado al futuro, tal que  $g(U, U) = 1$ , y diremos que es la *velocidad* del móvil. Llamaremos *tiempo propio* de una trayectoria a su longitud respecto de la métrica  $g$ ; es decir, a la parametrización que define el campo tangente  $U$ . El tiempo propio  $\tau$  transcurrido entre dos sucesos  $p, q$  de la trayectoria es

$$\tau = \int_p^q \bar{\omega} \quad , \quad \bar{\omega}(U) = 1 \quad ,$$

donde la integral se extiende a la trayectoria comprendida entre  $p$  y  $q$ , así que depende claramente de la trayectoria, no sólo de  $p$  y  $q$ . Vemos así que fijar la métrica del tiempo  $g$  significa elegir una unidad de tiempo. En tal caso existe un único representante  $\Omega_V$  de la orientación de  $V$  tal que  $\Omega_V(e_0, e_1, e_2, e_3) = \pm 1$  para toda base ortonormal  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  de  $g$ , así que al fijar una unidad de tiempo también fijamos una unidad de volumen espacio-temporal.

<sup>1</sup>La estructura del espacio tangente.

<sup>2</sup>Subvariedad diferenciable conexa de dimensión 1.

Diremos que un observador es *inercial* cuando su trayectoria sea una recta, pues son los observadores de velocidad constante.

Llamaremos *trayectorias de la luz* a las rectas del espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$  que sean de tipo luz, en el sentido de que su dirección  $\mathbb{R}e$  está formada por vectores isótropos:  $g(e, e) = 0$ .

Fijemos ahora un observador inercial de velocidad  $v \in V$ . La métrica  $g$  le permite descomponer el espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$  en producto directo de su trayectoria por el subespacio  $E := (\mathbb{R}v)^\perp$  ortogonal a su velocidad. Los vectores de  $E$  reciben el nombre de *vectores espaciales* (o de simultaneidad) para el observador inercial en cuestión, de modo que dos sucesos  $p, q$  se llaman simultáneos para el observador cuando  $q - p \in E$ : *La simultaneidad depende de la velocidad del observador*. La métrica del tiempo  $g$  es definido-negativa sobre  $E$ . Además, este espacio vectorial euclídeo  $(E, \{-\lambda^2 g\})$  está orientado por  $[\Omega_E] := [i_v \Omega_V]$ . Por tanto, el hiperplano  $\mathcal{E}$  formado por todos los sucesos simultáneos con un suceso tiene estructura de espacio euclídeo orientado de dimensión 3.

Esta descomposición del espacio-tiempo también permite al observador inercial medir intervalos de *tiempo* con el tiempo propio de su trayectoria; es decir, con la función lineal  $\omega := i_v g = g(v, -)$ . El tiempo  $t$  transcurrido para el observador entre dos sucesos  $p, q$  es

$$t := g(v, q - p) .$$

Vemos así cómo los observadores inerciales disponen de todos los elementos para desarrollar la mecánica; pero ahora la medida de intervalos de tiempo  $\omega = i_v g$  no es un concepto absoluto, sino que depende de la velocidad del observador. El que sí tiene carácter absoluto es el tiempo propio; pero, al ser la longitud de una curva, no es una función sobre el espacio-tiempo: el tiempo propio transcurrido entre dos sucesos depende de la trayectoria que los una.

Nótese que al elegir la unidad de tiempo, que determina la métrica  $g$ , tenemos ya fijada una unidad natural de longitud: la que define  $-g$ . En la Teoría de la Relatividad las unidades de longitud y tiempo no son independientes. No obstante, muchas veces, después de elegir una unidad de tiempo con  $g$ , se elige una unidad de longitud con otra métrica  $g_*$  que no es la natural  $-g$ , lo que llena las fórmulas con el número  $c$  de tales unidades que tenga la unidad natural:

$$g_* = -c^2 g \quad , \quad c > 0 .$$

Vamos a desarrollar el resto de este apartado bajo la suposición de que se han elegido unidades de longitud y tiempo arbitrarias, para comprender mejor las degeneraciones de métricas de Lorentz cuando  $c \rightarrow \infty$  que estudiaremos en el último Capítulo, y pondremos:

$$\begin{aligned} e \cdot v &:= g(e, v) \\ e * v &:= g_*(e, v) = -c^2(e \cdot v) . \end{aligned}$$

Si se prefiere usar la unidad natural de longitud, bastará poner  $g_* = -g$  y  $c = 1$  en todas partes.

## 3.2 Sistemas de Referencia Inerciales

**Definición:** Fijadas unidades de tiempo y longitud, dadas por sendas métricas  $g$  y  $g_* = -c^2g$ , un *sistema de referencia inercial* en el espacio-tiempo de Minkowski es un observador inercial, cuya velocidad denotaremos  $e_0$ , junto con un suceso  $p_0$  de su trayectoria, llamado *origen del tiempo*, y tres vectores ortonormales  $e_1, e_2, e_3$  (respecto de  $g_*$ ) de  $(\mathbb{R}e_0)^\perp$ , llamados *ejes*, de modo que la base  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  de  $V$  esté orientada positivamente.

Es decir, es un sistema de referencia afín  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  tal que  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  es una base orientada positivamente y la matriz de la métrica  $g$  en tal base es

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-2} \end{pmatrix}$$

### 3.2.1 (Coordenadas en un sistema de referencia inercial)

Fijado un sistema de referencia inercial  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$ , cada suceso  $p \in \mathbb{A}_4$  está totalmente determinado por el vector que determina con el origen del tiempo  $p_0$ ,

$$p - p_0 = te_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3,$$

y diremos que  $(t, x_1, x_2, x_3)$  son las coordenadas de  $p$  en tal sistema de referencia inercial. Nótese que  $t = g(e_0, p - p_0)$ , de modo que  $t$  es precisamente el tiempo transcurrido para el observador inercial entre los sucesos  $p_0$  y  $p$ . Es claro que  $(t, x_1, x_2, x_3)$  es un sistema de coordenadas globales sobre el espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$  y que

$$e_0 = \partial_t, \quad e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \partial_2, \quad e_3 = \partial_3.$$

En el sistema de coordenadas de un observador inercial tenemos que ( $I_3$  denota la matriz unidad de 3 filas y columnas):

$$\begin{aligned} g &= dt^2 - c^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^{-2}I_3 \end{pmatrix} \\ \Omega_V &= c^{-3}dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ W_+ &= \{\lambda\partial_t + \mu_1\partial_1 + \mu_2\partial_2 + \mu_3\partial_3 : \lambda > 0, \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 < c^2\lambda^2\} \\ g_* &= -c^2dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ g^* &= -c^{-2}\partial_t \otimes \partial_t + \partial_1 \otimes \partial_1 + \partial_2 \otimes \partial_2 + \partial_3 \otimes \partial_3 = \begin{pmatrix} -c^{-2} & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde hemos puesto la métrica contravariante  $g^*$ , dual de la métrica del espacio  $g_*$ , a efectos de comparación con la métrica espacial del caso newtoniano que, al ser singular, no puede entenderse como métrica covariante.

Además  $(x_1, x_2, x_3)$  es un sistema orientado de coordenadas cartesianas rectangulares en cada uno de los hiperplanos espaciales  $\mathcal{E}_t$  (que son los hiperplanos de simultaneidad), por lo que las distancias, ángulos, etc., entre sucesos simultáneos para el observador se expresan en estas coordenadas con las fórmulas usuales.

### 3.2.2 (Móviles)

Consideremos ahora la trayectoria de un móvil. La condición de que  $g$  sea definido-positiva sobre sus vectores tangentes impide que éstos puedan ser ortogonales a  $e_0$ , así que la función  $t$  induce una coordenada local en cada punto de la trayectoria del móvil. Como ésta se supone conexa,  $t$  define un difeomorfismo de la trayectoria del móvil con un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  (¡no se puede retornar al pasado!). Luego, en las coordenadas de un observador inercial, la trayectoria de cualquier móvil es de la forma

$$(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad , \quad a < t < b \quad ,$$

para ciertas funciones diferenciables  $x_i(t)$ . Se sigue que un vector tangente  $T$  a la trayectoria del móvil es la suma de la velocidad  $\partial_t$  del observador inercial con la velocidad aparente  $\vec{v}$  del móvil:

$$\begin{aligned} T &:= \partial_t + x'_1(t)\partial_1 + x'_2(t)\partial_2 + x'_3(t)\partial_3 = \partial_t + \vec{v} \\ \vec{v} &:= x'_1(t)\partial_1 + x'_2(t)\partial_2 + x'_3(t)\partial_3 \\ v &:= \sqrt{v * v} = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2} \end{aligned}$$

Ahora, como  $T \cdot T = 1 - (v/c)^2$ , la condición de que el vector tangente  $T$  sea de tipo tiempo equivale a que la velocidad aparente  $v$  del móvil sea menor que  $c$ , de modo que para los observadores inerciales los móviles no pueden tener velocidades aparentes arbitrariamente grandes:

$$v < c \tag{3.1}$$

por lo que el cono formado por los vectores isótopos, usualmente llamado *cono de luz*, es el cono de velocidades máximas. El desarrollo de la Mecánica relativista no se basa en una teoría del Electromagnetismo, sino en la hipótesis de que las velocidades posibles de los móviles forman un cono, de que sus velocidades aparentes no son arbitrariamente grandes.

El vector tangente  $T := \partial_t + \vec{v}$ , aunque está orientado al futuro, no es la velocidad  $U$  del móvil considerado (salvo cuando la velocidad aparente sea nula) porque  $T \cdot T \neq 1$ . Para obtener la velocidad  $U$  del móvil hemos de dividir el vector tangente  $T$  por  $\sqrt{T \cdot T}$ :

$$U = \left( \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)^{-1} \partial_t + \left( \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)^{-1} \vec{v} .$$

En cuanto a la relación entre el tiempo propio y el tiempo medido por un observador inercial, el tiempo propio  $\tau$  de la trayectoria entre los sucesos observados en los instantes  $t = a$  y  $t = b$  es

$$\tau = \int_a^b \sqrt{T \cdot T} dt = \int_a^b \sqrt{1 - (vc)^2} dt \quad ,$$

así que siempre es menor ó igual que  $b - a$ , que es el tiempo medido entre ambos sucesos por el observador inercial. La igualdad  $\tau = b - a$  entre el tiempo propio de un móvil y el tiempo medido por el observador inercial sólo se da cuando  $v = 0$ ; es decir, cuando el móvil esté en reposo para el observador inercial.

Por otra parte, análogo razonamiento prueba que la velocidad aparente de una trayectoria de la luz, para cualquier observador inercial, es precisamente  $c$ , así que la desigualdad 3.1 afirma la imposibilidad de que un móvil alcance la velocidad de la luz (i.e., la velocidad máxima). Además,  $c = 1$  precisamente cuando la unidad de longitud sea el espacio recorrido, para un observador inercial, por la luz en la unidad de tiempo. Ésta es por tanto la unidad natural de longitud: si medimos el tiempo en años, lo natural es medir longitudes en años-luz. Si optamos por usar unidades convencionales, tenemos que  $c \approx 300.000$  km/s.

### 3.2.3 (Grupo de Poincaré)

Las transformaciones de Poincaré son las afinidades  $\varphi: \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$  del espacio-tiempo de Minkowski tales que  $\vec{\varphi}: V \rightarrow V$  es una isometría de la métrica del tiempo  $g$  que conserva la orientación espacio-temporal,  $[\vec{\varphi}^* \Omega_V] = [\Omega_V]$ , y la orientación del tiempo,  $\vec{\varphi}(W_+) = W_+$ . Forman un grupo respecto de la composición de aplicaciones, llamado *grupo de Poincaré*, y está claro que transforman sistemas de referencia inerciales en sistemas de referencia inerciales.

Si  $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$  y  $(p'_0; e'_0, e'_1, e'_2, e'_3)$  son dos sistemas de referencia inerciales, es sencillo comprobar la existencia de una única transformación de Poincaré  $\varphi$  tal que

$$\varphi(p_0) = p'_0 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_0) = e'_0 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_1) = e'_1 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_2) = e'_2 \quad , \quad \vec{\varphi}(e_3) = e'_3 \quad .$$

## 3.3 Partículas

**Definición:** Una *partícula* es una trayectoria, llamada *trayectoria de la partícula*, con un campo de vectores tangente  $I \neq 0$ , orientado al futuro y llamado *impulso* de la partícula.

Diremos que una partícula es un *fotón* si su trayectoria es de tipo luz, de modo que  $I \cdot I = 0$ . En caso contrario diremos que

$$m := \sqrt{I \cdot I}$$

es la *masa en reposo* de la partícula<sup>3</sup>.

La Ley del movimiento por inercia (en ausencia de fuerzas) se enuncia afirmando que las partículas definen trayectorias geodésicas

$$I^\nabla I = 0 \quad ,$$

de modo que sus trayectorias son líneas rectas y la masa en reposo es constante, al serlo  $I \cdot I$ .

Consideremos una partícula de masa en reposo  $m$ . Dado un sistema de referencia inercial, como el vector  $T := \partial_t + \vec{v}$  también es tangente a la trayectoria de la partícula, ha de ser proporcional al vector de impulso  $I$ :

$$I = m_{ap}(\partial_t + \vec{v}) = m_{ap}\partial_t + m_{ap}\vec{v}$$

<sup>3</sup>En el caso de los fotones no hablaremos de su masa en reposo, pues un fotón nunca está en reposo para ningún observador.

por lo que el factor de proporcionalidad  $m_{ap}$  se llama *masa aparente* de la partícula y el vector espacial  $\vec{p} := m\vec{v}$  recibe el nombre de *momento* o *cantidad de movimiento* de la partícula. La masa aparente medida por el observador inercial depende de su velocidad, al igual que el momento. Por definición, la masa de la partícula para un observador inercial es

$$m_{ap} = \partial_t \cdot I \quad (3.2)$$

y el momento aparente de la partícula en la dirección del eje  $i$ -ésimo es

$$p_i = \partial_i * I = -c^2(\partial_i \cdot I) . \quad (3.3)$$

Como  $v < c$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} m^2 &= I \cdot I = (m_{ap}\partial_t + m_{ap}\vec{v}) \cdot (m_{ap}\partial_t + m_{ap}\vec{v}) = m_{ap}^2 - m_{ap}^2 \frac{v^2}{c^2} \\ m_{ap} &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m + \frac{1}{2c^2}mv^2 + \frac{3mv^4}{8c^4} + \dots \\ \vec{p} &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} \end{aligned}$$

así que la masa  $m_{ap}$  medida por el observador siempre es mayor o igual que la masa en reposo  $m$ , y sólo se da la igualdad cuando  $v = 0$ ; es decir, cuando la partícula esté en reposo para el observador inercial.

En el caso de los fotones no hablamos de su masa sino de su energía. La *energía*  $e$  de una partícula para un observador inercial de velocidad  $\partial_t$  se define por la igualdad

$$e := -\partial_t * I = (\partial_t \cdot I)c^2 \quad (3.4)$$

y depende claramente de la velocidad del observador inercial. Para una partícula de masa aparente  $m_{ap}$  tenemos que  $e = m_{ap}c^2$ . Salvo por el factor  $c^2$ , que es 1 cuando se usa la unidad natural de longitud, la masa y la energía son el mismo concepto, por lo que a menudo hablaremos de la masa-energía  $\partial_t \cdot I$  de la partícula medida por un observador inercial.

En la teoría de la Relatividad especial, la leyes de conservación de la energía, la masa y la cantidad de movimiento se enuncian como conservación del impulso, afirmando que al colisionar ciertas partículas de impulsos  $I_i$ , produciendo otras partículas de impulsos  $I'_j$ , se tiene

$$\sum_i I_i = \sum_j I'_j$$

pues para cada observador inercial esta igualdad significa que se conserva la energía (y, por tanto, la masa aparente)

$$\sum_i e_i = \sum_j e'_j \quad , \quad e_i = -\partial_t * I_i \quad , \quad e'_j = -\partial_t * I'_j$$

y el momento total, porque es la componente espacial del impulso

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_j \vec{p}'_j ;$$

pero este principio de conservación no implica que se conserve la masa en reposo, pues no afirma que  $\sum_i \sqrt{I_i \cdot I_i} = \sum_j \sqrt{I'_j \cdot I'_j}$ .

### 3.3.1 (Fluidos)

Como cada partícula está definida por un campo de vectores tangente a su trayectoria y disponemos de una orientación espacio-temporal, un fluido (gran cantidad de partículas distribuidas por el espacio-tiempo) vendrá representado de modo continuo por una 3-forma  $\Pi_3$  sobre el espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{A}_4$  valorada en los vectores tangentes a  $\mathbb{A}_4$  (ver 2.6), que recoge el impulso que traspasa cada región tridimensional infinitamente pequeña y ha de ser simétrica en el sentido de que  $C_1^1(\Pi_3) = 0$ .

De acuerdo con 2.6.1, existe un único tensor contravariante simétrico  $T^2$  tal que

$$\Pi_3 = C_1^1(\Omega_V \otimes T^2) .$$

Ahora, como en el caso relativista la métrica del tiempo  $g$  no es singular, define un isomorfismo  $g: TX \simeq T^*X$ ,  $(gD)(D') := D \cdot D'$ , así que la métrica contravariante  $T^2: T^*X \rightarrow TX$  puede entenderse como un endomorfismo  $T: TX \rightarrow TX$  y como una métrica covariante  $T_2: TX \rightarrow T^*X$ :

$$\begin{aligned} T(D) &:= T^2(gD) = T^2 \cdot D \\ T_2(D, D') &:= T(D) \cdot D' = T^2(gD, gD') = T^2 \cdot (D \otimes D') \end{aligned}$$

donde el producto  $T^2 \cdot D$  se realiza considerando  $T^2$  como una 1-forma valorada en los vectores (hay dos modos posibles; pero son indiferentes al ser  $T^2$  simétrico).

Estos tres tensores  $T^2$ ,  $T$ ,  $T_2$  se determinan mutuamente y cualquiera de ellos puede ser considerado como el tensor de energía-momento del fluido; aunque, por analogía con el caso newtoniano, donde sólo la métrica contravariante  $T^2$  determina los otros dos tensores, preferentemente usaremos el tensor  $T^2$ . No obstante, nótese que  $T^2$  y  $T$  dependen de la unidad de tiempo, porque  $\Omega_V$  depende; pero que  $T_2$  no depende, lo que hace que la métrica  $T_2$  sea más natural.

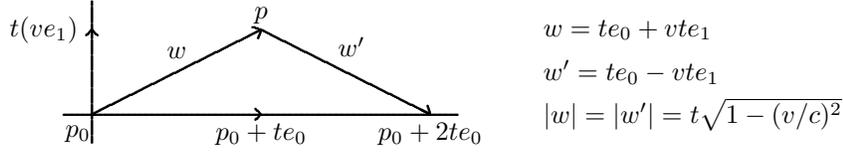
## 3.4 Efectos Relativistas

A título de ejemplo vamos a examinar algunas de las diferencias más llamativas entre la Mecánica clásica y la relativista. Veremos que, para los observadores inerciales, ambas teorías coinciden sobre los móviles en reposo aparente, y difieren tanto más cuanto más se aproxime la velocidad aparente  $v$  del móvil a la de la luz  $c$ .

### 3.4.1 (Paradoja de los gemelos)

Supongamos que nos movemos con un sistema de referencia inercial y que en el instante  $t = 0$  un viajero parte con velocidad constante  $ve_1$ . Después de cierto tiempo  $t$  cambia de dirección y regresa con velocidad aparente  $-ve_1$ . Al llegar el tiempo medido por

nosotros es  $2t$ . Calculemos el tiempo propio del viajero:



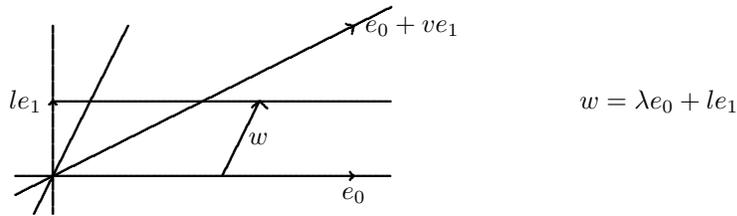
Luego su tiempo propio es  $\tau = 2t\sqrt{1 - (v/c)^2}$ , que es menor que  $2t$  cuando  $v > 0$ .

Si  $v \ll c$ , tenemos que  $\sqrt{1 - (v/c)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} (v/c)^2$ , así que la diferencia entre el tiempo observado y el tiempo propio del viajero es aproximadamente  $t(v/c)^2$ . Por ejemplo, si viajase durante 1 año a 10.000 km/h para regresar después a igual velocidad, entonces  $v/c \approx 10^{-5}$  y para él habrían pasado 3 milésimas de segundo menos que para nosotros: *Viajar rejuvenece (un poco)*.

La paradoja surgiría al considerar que tal viajero también es un observador inercial, tanto en el viaje de ida como en el de vuelta, y que nuestra velocidad aparente para él también es  $v$ , por lo que debería observar que nuestro tiempo propio es  $\tau\sqrt{1 - (v/c)^2} = 2(1 - (v/c)^2)$  años, lo que es absurdo pues a la llegada comprueba que para nosotros han pasado 2 años. La falacia de este razonamiento radica en suponer que el punto de nuestra trayectoria que el viajero considera simultáneo con  $p$  es el mismo al llegar con velocidad  $w$  que al salir con velocidad  $w'$ , olvidando que la noción de simultaneidad depende de la velocidad del observador inercial.

### 3.4.2 (Contracción de Lorentz-Fitzgerald)

Consideremos ahora una varilla rectilínea de longitud  $l$  en reposo respecto de un sistema de referencia inercial. Vamos a calcular la longitud de la misma varilla medida por un observador inercial que se aleje con velocidad aparente  $v$  en la dirección de la varilla (digamos  $e_1$ ). El vector  $w$  que en un instante dado determine la varilla para el nuevo observador



es espacial para este observador, luego  $w = \lambda e_0 + l e_1$  ha de ser ortogonal a la velocidad del observador, que es proporcional a  $e_0 + v e_1$

$$\begin{aligned}
 0 &= w \cdot (e_0 + v e_1) = \lambda - vl/c^2 \quad , \quad \lambda = vl/c^2 \\
 w &= l \left( \frac{v}{c^2} e_0 + e_1 \right)
 \end{aligned}$$

y concluimos que para el nuevo observador la longitud  $l'$  de la varilla es

$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt{w * w} = l\sqrt{1 - (v/c)^2} \\ l' &= l\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = l - \frac{v^2 l}{2c^2} - \dots \end{aligned}$$

La longitud se contrae aproximadamente en  $lv^2/2c^2$  unidades cuando  $v \ll c$ . Por ejemplo, como el diámetro de la Tierra es de unos 12.700 kilómetros, el viajero del ejemplo anterior observaría una contracción de 0'6 milímetros en la dirección en que se aleja.

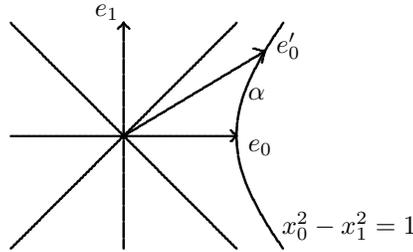
Al considerar la trayectoria de un móvil, siempre hemos supuesto que éste es puntual, de modo que su trayectoria es una curva en el espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$ . En general, la trayectoria de un móvil no-puntual será una región  $F \subset \mathbb{A}_4$  y el lugar que ocupa el móvil en un instante  $t$ , para un observador inercial, es  $\mathcal{E}_t \cap F$ , por lo que la forma de un cuerpo (que es el lugar que ocupa, salvo semejanzas) depende de la velocidad del observador.

### 3.4.3 (Adición de velocidades)

Por razones de simplicidad, supondremos que el espacio vectorial  $V$  de los vectores libres del espacio-tiempo tiene dimensión 2 y no 4, de modo que la métrica del tiempo  $g$  es de tipo  $(+, -)$ , y sea  $\{e_0, e_1\}$  una base de  $V$  en que la matriz de  $g$  sea

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si  $e'_0$  es otro vector tal que  $g(e'_0, e'_0) = 1$



entonces las coordenadas de  $e'_0$  son  $x_0 = \cosh \alpha$ ,  $x_1 = \sinh \alpha$ , donde  $\alpha$  es la longitud (respecto de  $g$ ) del arco que une  $e_0$  con  $e'_0$  en la hipérbola  $x_0^2 - x_1^2 = 1$ . Luego la velocidad aparente de cualquier móvil de velocidad  $e'_0$  es precisamente  $\operatorname{tgh} \alpha$ . Si consideramos unidades convencionales, de modo que  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$ , la velocidad aparente  $v$  de tal móvil será

$$v = c(\operatorname{tgh} \alpha).$$

Consideremos tres observadores inerciales con velocidades  $e_0, e'_0, e''_0$  y sea  $v_{i/j}$  la velocidad aparente del  $i$ -ésimo para el observador  $j$ -ésimo. Si  $\alpha$  es la longitud del arco

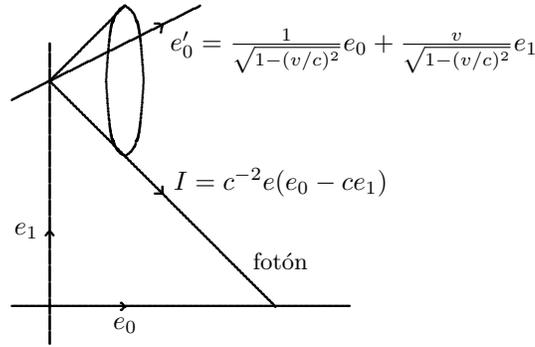
que una  $e_0$  con  $e'_0$  en la hipérbola y  $\beta$  es la longitud del que una  $e'_0$  con  $e''_0$ , tendremos

$$\begin{aligned} v_{2/1} &= c(\operatorname{tgh} \alpha) \\ v_{3/2} &= c(\operatorname{tgh} \beta) \\ v_{3/1} &= c(\operatorname{tgh}(\alpha + \beta)) = c \frac{\operatorname{tgh} \alpha + \operatorname{tgh} \beta}{1 + \operatorname{tgh} \alpha \operatorname{tgh} \beta} \\ v_{3/1} &= \frac{v_{3/2} + v_{2/1}}{1 + \frac{v_{3/2} v_{2/1}}{c^2}} \end{aligned}$$

### 3.4.4 (Fotones)

Un fotón es una recta de tipo luz en el espacio-tiempo  $\mathbb{A}_4$  junto con un vector  $I$  de su dirección, orientado al futuro, de modo que  $I \cdot I = 0$ . Su energía para un observador inercial de velocidad  $e_0$  es  $e := c^2(e_0 \cdot I) = -e_0 * I$ .

Supongamos que nos movemos con un sistema de referencia inercial y que recibimos un fotón emitido por una estrella que se aleje con velocidad aparente  $ve_1$ . Si medimos la energía del fotón y obtenemos un valor  $e$ , el impulso del fotón es  $I = c^{-2}e(e_0 - ce_1)$ , porque es un vector isótropo:



La energía  $e'$  del fotón, medida por un observador inercial situado en la estrella, es

$$\begin{aligned} e' &= -e'_0 * I = \frac{e}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{e(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ e' &= e \left( \frac{1+(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) = e + \frac{ev}{c} + \frac{ev^2}{2c^2} + \dots \end{aligned}$$

así que  $e < e'$ : La energía de los fotones absorbidos es menor que la energía con que se emiten, cuando la fuente se aleja. Si la estrella, en vez de alejarse se acerca con velocidad aparente  $-ve_1$ , su velocidad  $e'_0$  es

$$e'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} e_0 - \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} e_1$$

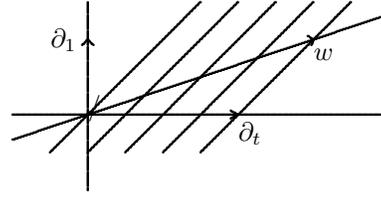
y la energía  $e'$  con que emite los fotones es

$$e' = e \left( \frac{1-(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right),$$

de modo que  $e > e'$ : La energía de los fotones absorbidos es mayor que la energía con que se emiten, cuando la fuente se acerca.

### 3.4.5 (Efecto Doppler)

Supongamos que un observador inercial envía una señal luminosa con una frecuencia  $f$ , por ejemplo emite  $f$  fotones por unidad de tiempo. Vamos a calcular la frecuencia  $f'$  de la señal para un observador que se aleje con velocidad aparente  $ve_1$ .



Consideremos el intervalo  $w$  de la trayectoria del receptor determinado por los  $f$  fotones emitidos durante una unidad de tiempo, que ha de ser proporcional al vector  $\partial_t + v\partial_1$ :

$$\begin{aligned} w &= \partial_t + \lambda(\partial_t + c\partial_1) \\ v &= \frac{c\lambda}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{v}{c - v} \\ w &= \frac{1}{1 - v/c}\partial_t + \frac{v}{1 - v/c}\partial_1 \\ \sqrt{w \cdot w} &= \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \end{aligned}$$

Como  $\sqrt{w \cdot w}$  es el tiempo que mide el receptor durante la absorción de esos  $f$  fotones, recibe una señal de frecuencia menor

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Si en vez de alejarse, el receptor se acerca con velocidad aparente  $-v\partial_1$ , entonces  $w$  ha de ser proporcional al vector  $\partial_t - v\partial_1$  y un razonamiento análogo permite concluir que el receptor observa una señal de frecuencia mayor

$$f' = f \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

## Ejercicios

(1) En la teoría de la relatividad el segundo es una unidad de longitud, así que también es una unidad de masa; pues la masa se mide en  $cm^3s^{-2}$ . Tanto el segundo

como el centímetro y el gramo son unidades de masa, longitud y tiempo, lo que permite plantear y responder preguntas tan sorprendentes como ¿cuántos gramos dura un día?, ¿cuántos gramos mide el diámetro del Sol ( $\approx 1'4 \cdot 10^6$  kilómetros)?, ¿cuántos segundos tiene la masa del Sol ( $\approx 2 \cdot 10^{33}$  gramos), ¿cuántos centímetros tiene la masa de la Tierra? (su densidad es  $\approx 5'5 \text{ gr/cm}^3$ ). Usando 2.2.1, comprobar que

$$\begin{aligned} 1 \text{ s} &\approx 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \approx 4 \cdot 10^{38} \text{ gr} \\ 1 \text{ cm} &\approx 1'4 \cdot 10^{28} \text{ gr} \approx 3'3 \cdot 10^{-11} \text{ s} \\ 1 \text{ gr} &\approx 7'3 \cdot 10^{-29} \text{ cm} \approx 2'4 \cdot 10^{-39} \text{ s} \end{aligned}$$

(2) Si dos sucesos pueden unirse con una trayectoria, probar que por ellos pasa una trayectoria inercial.

(3) Sean  $o$  y  $o'$  dos observadores inerciales. Si para  $o$  la velocidad aparente de  $o'$  es  $v$ , calcular la velocidad aparente de  $o$  para  $o'$ .

(4) Si una trayectoria inercial une dos sucesos  $p, q$ , probar que su tiempo propio  $\tau$  entre  $p$  y  $q$  es mayor que el tiempo propio de cualquier otra trayectoria que también los una, y es menor que el intervalo de tiempo entre  $p$  y  $q$  medido por cualquier otro observador inercial.

(5) Dado un observador inercial  $o$ , probar que cada suceso  $p$  es simultáneo con un único suceso  $p'$  de la trayectoria de  $o$ .

Además, el intervalo de tiempo entre dos sucesos  $p, q$  medido por  $o$  es el tiempo propio transcurrido entre los sucesos  $p', q'$  de su trayectoria que sean simultáneos con  $p$  y  $q$  respectivamente.

(6) Si la vida media en reposo de ciertas partículas es de  $10^{-8}$  segundos, calcular su vida media cuando se mueven con velocidad  $3c/4$ .

(7) Probar que la condición necesaria y suficiente para que el intervalo  $e = q - p$  entre dos sucesos sea temporal es que para algún observador inercial ambos sucesos ocurran en el mismo lugar. En tal caso  $\sqrt{e \cdot e}$  es el intervalo de tiempo medido por tal observador entre  $p$  y  $q$ , y para cualquier otro observador inercial transcurre más tiempo entre  $p$  y  $q$ . En particular estos sucesos nunca pueden ser simultáneos.

Probar que la condición necesaria y suficiente para que el intervalo  $e = q - p$  entre dos sucesos sea espacial es que para algún observador inercial ambos sucesos sean simultáneos. En tal caso  $\sqrt{e * e}$  es la distancia medida por tal observador entre  $p$  y  $q$ , y para cualquier otro observador inercial la distancia que separa los lugares en que ocurren  $p$  y  $q$  es mayor. En particular estos sucesos nunca pueden ocurrir en el mismo lugar (no hay relación causal entre ellos).

(8) Si un cuerpo está en reposo para un observador inercial  $o$  (en el sentido de que ocupa el mismo lugar en todo instante), probar que los lugares que ocupa para otro observador inercial  $o'$  en dos momentos distintos difieren en una traslación. En particular su forma para  $o'$  es constante.

(9) Si para un observador inercial un cuerpo es esférico y está en reposo, ¿qué forma tiene para otro observador inercial?

(10) Si para un observador inercial el volumen de un cuerpo en reposo es  $V$ , probar que el volumen de tal cuerpo para otro observador inercial que se mueva con velocidad aparente  $v$  es

$$V' = V \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} .$$

(11) Hemos visto en 5.2 que, en unidades naturales, las velocidades aparentes de los móviles se suman de acuerdo con la siguiente ley de adición:

$$u \oplus v := \frac{u + v}{1 + uv} .$$

¿Define  $\oplus$  una estructura de grupo en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ ?

### 3.5 Leyes de Conservación

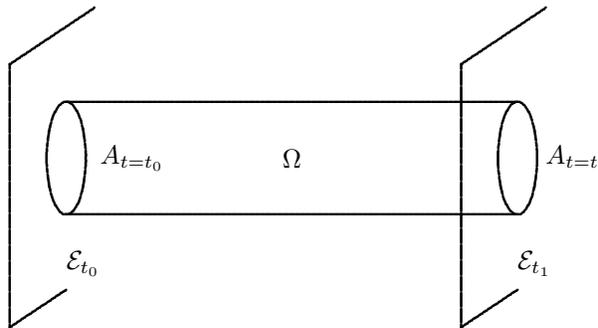
Si  $\Pi_3$  es la forma de impulso de un fluido en el espacio-tiempo de Minkowski  $\mathbb{A}_4$ , vamos a ver cómo las leyes de conservación de la masa y el momento aparentes para cualquier observador inercial quedan recogidas por la condición  $d\Pi_3 = 0$  que, de acuerdo con II.7.2, equivale a la condición  $\operatorname{div} T^2 = 0$ .

En general, si  $\Omega$  es una región de dimensión 4 en el espacio-tiempo de Minkowski, en virtud del Teorema de Stokes tendremos que

$$\int_{\Omega} d\Pi_3 = \int_{\partial\Omega} \Pi_3 = \left( \begin{array}{c} \text{Suma de los impulsos} \\ \text{de las partículas} \\ \text{que salen de } \Omega \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Suma de los impulsos} \\ \text{de las partículas} \\ \text{que entran en } \Omega \end{array} \right) \quad (3.5)$$

por lo que la condición  $d\Pi_3 = 0$  expresa la coincidencia del impulso de las partículas que entran en cualquier región  $\Omega$  con el de las que salen.

Consideremos ahora un observador inercial que estudie cierta región espacial acotada  $A$  durante un intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_1$



lo que determina un cilindro tetradimensional  $\Omega$  en el espacio-tiempo de Minkowski. Aplicando el Teorema de Stokes obtenemos

$$0 = \int_{\Omega} d\Pi_3 = \int_{\partial\Omega} \Pi_3 = \int_{A_{t=t_1}} \Pi_3 - \int_{A_{t=t_0}} \Pi_3 + \int_{\text{lado}} \Pi_3$$

donde el signo  $-$  se debe a que la orientación de  $A_{t=t_0}$  inducida por  $\Omega$  es la opuesta de la orientación espacial  $\Omega_E := i_{\partial_t}\Omega_X$ . Luego

$$\begin{aligned} & \int_{A_{t=t_1}} \Pi_3 - \int_{A_{t=t_0}} \Pi_3 = - \int_{\text{lado}} \Pi_3 \\ & \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de} \\ \text{las partículas que están en} \\ A \text{ en el instante } t = t_1 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de} \\ \text{las partículas que están en} \\ A \text{ en el instante } t = t_0 \end{array} \right) = \\ & = - \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de} \\ \text{las partículas que salen de} \\ A \text{ entre } t = t_0 \text{ y } t = t_1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Suma de los impulsos de} \\ \text{las partículas que entran en} \\ A \text{ entre } t = t_0 \text{ y } t = t_1 \end{array} \right) \\ & \left( \begin{array}{l} \text{Variación del impulso} \\ \text{contenido en } A \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Impulso que traspasa} \\ \text{el borde de } A \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si el soporte de  $\Pi_3$  es espacialmente compacto, tomando la región  $A$  suficientemente grande se anula la integral de  $\Pi_3$  sobre el borde lateral de  $\Omega$ , y su integral sobre  $A$  coincide con la integral sobre todo el espacio. Obtenemos así la ley de conservación, para todo observador inercial, del impulso total contenido en el Universo:

$$\int_{\mathcal{E}_t} \Pi_3 \quad \text{no depende del instante } t. \quad (3.7)$$

Ahora, de acuerdo con 3.2 y 3.4, la 3-forma ordinaria  $\Pi_3 \cdot \partial_t$  da la masa-energía medida por el observador inercial en cada región tridimensional, y de acuerdo con 3.3, las 3-formas  $\Pi_3 \cdot \partial_i$  dan los momentos medidos en las direcciones de los ejes  $\partial_i$  (salvo un factor constante). Como los campos tangentes  $\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3$  son autoparalelos, la condición  $d\Pi_3 = 0$  implica que

$$0 = d(\Pi_3 \cdot \partial_t) = d(\Pi_3 \cdot \partial_i)$$

y obtenemos leyes de conservación, análogas a 3.6 y 3.7 para la masa-energía y el momento medidos por cualquier observador inercial.

En general, dado un campo tangente  $D$  arbitrario,  $\Pi_3 \cdot D$  es una 3-forma ordinaria sobre el espacio-tiempo de Minkowski, y tenemos que

$$\begin{aligned} \Pi_3 \cdot D &= D \cdot C_1^1(\Omega_V \otimes T^2) = C_1^1(\Omega_V \otimes T(D)) = i_{T(D)}\Omega_V \\ d(\Pi_3 \cdot D) &= d(i_{T(D)}\Omega_V) = (d \circ i_{T(D)} + i_{T(D)} \circ d)\Omega_V = \\ &= T(D)^L\Omega_V = (\text{div } T(D))\Omega_V \end{aligned}$$

Luego la anulción de la divergencia del campo  $T(D)$  equivale a la de  $d(\Pi_3 \cdot D)$  y, por tanto, implica leyes de conservación análogas a 3.6 y 3.7 para la magnitud medida por

$$\Pi_3 \cdot D = i_{T(D)}\Omega_V.$$

En particular, la igualdad  $\operatorname{div} T(\partial_t) = 0$  recoge la ley de conservación de la masa-energía para el observador inercial de velocidad  $\partial_t$ , y las igualdades  $\operatorname{div} T(\partial_i) = 0$  recogen la ley de conservación del momento para tal observador.

**Proposición 3.5.1** *Sea  $\Pi_3$  una 3-forma simétrica sobre el espacio-tiempo de Minkowski valorada en los campos tangentes. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Ley de conservación del impulso:  $d\Pi_3 = 0$ .*
2. *Las leyes de conservación de la energía y el momento,  $d(\Pi_3 \cdot \partial_t) = d(\Pi_3 \cdot \partial_i) = 0$ , se verifican en todos los sistemas de referencia inerciales.*
3. *Las leyes de conservación de la energía y el momento,  $d(\Pi_3 \cdot \partial_t) = d(\Pi_3 \cdot \partial_i) = 0$ , se verifican en algún sistema de referencia inercial.*
4. *La ley de conservación de la energía  $d(\Pi_3 \cdot \partial_t) = 0$  se verifica en todos los sistemas de referencia inerciales.*

*Demostración:* Consideremos una base  $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$  de los campos tangentes autoparalelos sobre  $\mathbb{A}_4$ . Como la métrica del tiempo  $g$  no es singular, la condición  $d\Pi_3 = 0$  equivale a que  $D_i \cdot (d\Pi_3) = 0$  para todo  $0 \leq i \leq 3$ . Además, tenemos que  $D_i \cdot (d\Pi_3) = d(\Pi_3 \cdot D_i)$  porque los campos  $D_i$  son autoparalelos.

Tomando la base  $\{\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$  que define un sistema de referencia inercial, concluimos la equivalencia de las tres primeras condiciones.

En cuanto a la última condición, basta observar que  $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$  puede elegirse de modo que los cuatro campos tangentes  $D_i$  sean las velocidades de sendos observadores inerciales. En efecto, fijado un sistema de referencia inercial, los campos tangentes

$$\partial_t \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\partial_t + \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_1 \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\partial_t + \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_2 \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\partial_t + \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_3$$

son velocidades de ciertas trayectorias inerciales; a saber: la del observador inercial dado y las de tres observadores inerciales que se alejen de él a la mitad de la velocidad de la luz en las direcciones  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  respectivamente.

### 3.5.2 (Nubes de polvo)

Supongamos que partículas cercanas tienen trayectorias muy aproximadas, de modo que las velocidades de las partículas vienen dadas por un campo tangente  $U$ , orientado al futuro y tal que  $U \cdot U = 1$  (conviene imaginar cada curva integral de  $U$  con cierto grosor, representando una pequeña región con bastantes partículas, de modo que la densidad puede variar de unas partes a otras). Sea  $\{U = D_0, D_1, D_2, D_3\}$  una base ortonormal orientada positivamente y sea  $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  la base dual. Como el impulso de cualquier partícula es proporcional a  $U$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \Pi_3(T, D_i, D_j) &= 0 \\ \Pi_3(D_1, D_2, D_3) &= \rho U \end{aligned}$$

para cierta función diferenciable  $\rho$ . Es decir,

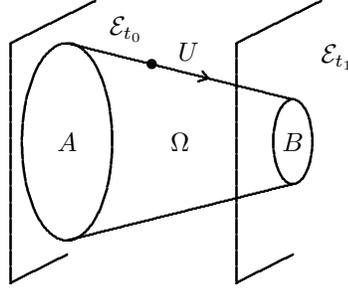
$$\begin{aligned}\Pi_3 &= \rho(\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) \otimes U \\ T^2 &= \rho U \otimes U\end{aligned}\quad (3.8)$$

Para interpretar tal función  $\rho$  fijamos un suceso  $p \in \mathbb{A}_4$  y consideramos un sistema de referencia inercial tal que  $U_p = (\partial_t)_p$  y  $(D_i)_p = c\partial_i$ :

$$\rho(p) = \Pi_3((D_1)_p, (D_2)_p, (D_3)_p) \cdot (\partial_t)_p = c^3 \Pi_3((\partial_1)_p, (\partial_2)_p, (\partial_3)_p) \cdot (\partial_t)_p$$

y concluimos que  $\rho(p)$  es la suma de las masas de las partículas contenidas en el cubo de aristas la unidad de longitud para un observador inercial en reposo respecto del fluido en  $p$ , afectada del factor  $c^3$ ; es decir,  $\rho$  es la “densidad de masa para un observador en reposo que use unidades de longitud naturales”.

Consideremos ahora un observador inercial que estudia cierta región  $A$  del fluido en un instante  $t_0$  y su evolución hasta transformarse en otra región  $B$  en un instante posterior  $t_1$ :



Aplicando el Teorema de Stokes al tubo tetradimensional  $\Omega$  así formado obtenemos que

$$\int_{\Omega} d\Pi_3 = \int_B \Pi_3 - \int_A \Pi_3 + \int_{\text{lado}} \Pi_3 = \int_B \Pi_3 - \int_A \Pi_3$$

porque, según 3.8, la forma  $\Pi_3$  se anula en cualquier hipersuperficie tangente a  $U$  y, por hipótesis, el borde del tubo lo es. Por tanto, la condición  $d\Pi_3 = 0$  significa que  $\int_A \Pi_3 = \int_B \Pi_3$ ; es decir, que se conserva el impulso de las partículas contenidas en una región espacial al evolucionar ésta con el fluido, lo que también nos da la conservación de la masa-energía y de la cantidad de movimiento medidas por el observador inercial.

Más explícitamente, en el sistema de coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  del observador inercial tendremos que  $\Pi_3(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \tilde{\rho}T = \tilde{\rho}\partial_t + \tilde{\rho}\vec{v}$  para cierta función diferenciable  $\tilde{\rho}$ . Luego

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \otimes (\tilde{\rho}\partial_t + \tilde{\rho}\vec{v}) + \text{términos con } dt \\ \int_A \Pi_3 &= \int_A (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \otimes (\tilde{\rho}\partial_t + \tilde{\rho}\vec{v}) = \\ &= \left( \int_A \tilde{\rho} dx_1 dx_2 dx_3 \right) \partial_t + \sum_{i=1}^3 \left( \int_A \tilde{\rho} v_i dx_1 dx_2 dx_3 \right) \partial_i\end{aligned}$$

y análogamente para la región espacial  $B$ . Vemos así que  $\tilde{\rho}$  es la densidad de masa-energía medida por el observador inercial, y tenemos las siguientes leyes de conservación:

$$\begin{aligned}\int_A \tilde{\rho} dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_B \tilde{\rho} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \int_A \tilde{\rho} v_i dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_B \tilde{\rho} v_i dx_1 dx_2 dx_3\end{aligned}$$

En resumen, en el espacio-tiempo de Minkowski, la condición  $d\Pi_3 = 0$  recoge leyes de conservación del impulso, la masa-energía y la cantidad de movimiento para cualquier observador inercial, y la condición  $\operatorname{div} T(D) = 0$  recoge la ley de conservación de la magnitud medida por la 3-forma  $\Pi_3 \cdot D = i_{T(D)}\Omega_V$ .

### Ejercicios

(1) Supongamos que todas las partículas de una nube de polvo tienen igual masa en reposo  $m \neq 0$  y pongamos  $I := mT$ . Si  $T^2 = fI \otimes I$  para cierta función diferenciable  $f$ , entonces la 3-forma  $i_{fI}\Omega_V$  mide el número de partículas, y la igualdad  $\operatorname{div}(fI) = 0$  recoge leyes de conservación del número de partículas para cualquier observador inercial.

(2) El tensor de energía-momento de una nube de polvo de velocidad aparente  $\vec{v}$  y densidad  $\tilde{\rho}$  para un observador inercial es

$$T^2 = \frac{c^3 \tilde{\rho}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (\partial_t + \vec{v}) \otimes (\partial_t + \vec{v}).$$

## Capítulo 4

# Gravitación Relativista

En el capítulo 3 hemos estudiado la Teoría de la Relatividad suponiendo que las propiedades inerciales vienen dadas por una estructura afín sobre el espacio-tiempo. Ahora bien, de acuerdo con el Principio de Equivalencia, el movimiento uniforme lejos de las masas es infinitesimalmente indistinguible del movimiento en caída libre cerca de grandes masas, así que el espacio-tiempo de Minkowski recoge la estructura infinitesimal del espacio-tiempo y la Teoría de la Relatividad especial es la Mecánica relativista en ausencia de fuerzas gravitatorias. La Teoría de la Relatividad General es el análogo relativista de la Gravitación newtoniana expuesta en el capítulo 2, cuando la métrica del tiempo  $g$  se sustituye por una métrica de tipo  $(+, -, -, -)$ .

Dar una estructura afín infinitesimal sobre una variedad diferenciable no es más que dar una conexión lineal, y el Principio de Equivalencia puede entenderse como la afirmación de que las trayectorias en caída libre son geodésicas de una conexión lineal  $\nabla$  sobre el espacio-tiempo<sup>1</sup>, conexión que infinitesimalmente ha de tener las propiedades de la Relatividad especial. En particular el traslado paralelo asociado a  $\nabla$  ha de conservar la métrica del tiempo, que en cada punto es de tipo  $(+, -, -, -)$  y por tanto no es singular. Un resultado absolutamente fundamental y sorprendente es la existencia de una única conexión lineal sin torsión que conserva una métrica no-singular dada: *En la Teoría de la Relatividad la medida de intervalos de tiempo, que viene dada por una métrica de tipo  $(+, -, -, -)$ , ya determina las trayectorias en caída libre.* Más aún, el objeto de este capítulo es mostrar cómo cualquier métrica de Lorentz  $g$ , entendida como métrica del tiempo, ya define todos los elementos propios de una teoría de la gravitación:

- La métrica del espacio es  $-g$ .
- Las trayectorias en caída libre son las geodésicas de  $g$ . Es decir, en ausencia de fuerzas, la ley del movimiento para partículas test de impulso  $I$  es  $I^\nabla I = 0$ .
- La 3-forma de impulso de la materia es la forma de Cartan de  $g$  (donde  $\widehat{R}$  denota

---

<sup>1</sup>Siempre podemos suponer que tal conexión lineal no tiene torsión, porque toda conexión lineal tiene las mismas geodésicas que alguna conexión simétrica.

el tensor de curvatura de  $g$  entendido como 2-forma valorada en los 2-vectores):

$$\mathcal{C}_3 := *(\widehat{R} \wedge Id) .$$

Así, en la Teoría de la Relatividad General el estudio de la gravitación se subsume en el de las métricas de Lorentz, y se hace innecesaria la introducción de hipótesis adicionales, porque el tensor de Riemann-Christoffel de una métrica no-singular siempre tiene la simetría 2.7, y la forma de Cartan siempre tiene diferencial nula, en virtud de la identidad diferencial de Bianchi  $dR = 0$  y de la anulación del tensor de torsión  $d(Id) = \text{Tor } \nabla = 0$ .

## 4.1 Relatividad General

**Definición:** Una *variedad de Lorentz* es una variedad diferenciable  $X$  de dimensión 4 con una métrica covariante simétrica  $g$  de tipo  $(+, -, -, -)$  en todos los puntos de  $X$ , en cuyo caso pondremos

$$D \cdot D' := g(D, D') .$$

Un vector no nulo  $D$  tangente a  $X$  es de *tipo tiempo, espacio o luz* según que  $D \cdot D$  sea positivo, negativo ó nulo. Diremos que una subvariedad diferenciable de  $X$  es temporal, espacial o de luz cuando lo sean todos sus vectores tangentes no nulos.

**Definición:** Una variedad de Lorentz  $(X, g)$  es *orientable en el tiempo* si en  $X$  existe algún campo tangente  $D$  de tipo tiempo, en cuyo caso diremos que dos campos tangentes temporales  $D, D'$  definen la misma orientación cuando  $D \cdot D'$  sea positivo, y llamaremos *orientaciones del tiempo* en  $X$  a las correspondientes clases de equivalencia de campos tangentes temporales.

Si una variedad de Lorentz conexa  $X$  es orientable en el tiempo, entonces tiene exactamente dos orientaciones del tiempo. En efecto, si  $D, D'$  son campos temporales en  $X$ , entonces  $D \cdot D'$  no puede anularse en ningún punto y, al ser  $X$  conexa concluimos que o bien  $D \cdot D' > 0$ , caso en que  $D'$  define la misma orientación del tiempo que  $D$ , ó bien  $D \cdot D' < 0$ , y  $D'$  define la misma orientación del tiempo que  $-D$ . Es decir,  $X$  es orientable cuando el abierto del fibrado tangente  $TX$  formado por los vectores de tipo tiempo tiene dos componentes conexas, componentes que son precisamente las dos posibles orientaciones temporales de  $X$ .

**Teorema 4.1.1** *Sea  $g$  una métrica simétrica no-singular sobre una variedad diferenciable  $X$ . Existe una única conexión lineal sin torsión  $\nabla$  en  $X$  que conserva la métrica  $g$ ; es decir, tal que  $\nabla g = 0$ . Esta conexión lineal  $\nabla$  recibe el nombre de conexión de Levi-Civita de  $g$ .*

*Demostración:* La demostración usual para métricas riemannianas es válida en el caso de métricas no-singulares arbitrarias.

**Definición:** Llamaremos *espacio-tiempo relativista*<sup>2</sup> a toda variedad de Lorentz orientada

$$(X, g, \nabla, [\Omega_X], [D])$$

con una orientación del tiempo  $[D]$  y una conexión lineal sin torsión  $\nabla$  tal que<sup>3</sup>  $\nabla g = 0$ . La métrica  $g$  recibe el nombre de *métrica del tiempo*.

Llamaremos *isomorfismo* de un espacio-tiempo relativista  $(X, g, \nabla, [\Omega_X], [D])$  con otro espacio-tiempo relativista  $(\bar{X}, \bar{g}, \bar{\nabla}, [\Omega_{\bar{X}}], [\bar{D}])$  a todo difeomorfismo  $\phi: X \rightarrow \bar{X}$  tal que, para alguna (función localmente) constante  $\lambda$ , tenemos

$$\phi^*(\bar{g}) = \lambda^2 g \quad , \quad \phi^*(\bar{\nabla}) = \nabla \quad , \quad [\phi^*\Omega_{\bar{X}}] = [\Omega_X] \quad , \quad [\phi^*\bar{D}] = [D] \quad .$$

Diremos que un campo tangente temporal  $D$  apunta al *futuro* cuando está en la orientación del tiempo prefijada, y diremos que apunta al *pasado* cuando  $-D$  apunte al futuro. Además, existe un único representante  $\Omega_X$  de la orientación de  $X$  tal que

$$\Omega_X(e_0, e_1, e_2, e_3) = \pm 1$$

para toda base  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  donde la matriz de  $g$  sea  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Es decir, al fijar una unidad de tiempo, también fijamos una unidad de volumen espacio-temporal.

En la Teoría de la Relatividad los conos de luz y una unidad de tiempo (es decir, la métrica  $g$ ) ya permiten definir los conceptos de *movimiento*, *tiempo*, *espacio*, *inercia*, *partícula* y *fotón*:

Dado un espacio-tiempo relativista  $X$ , llamaremos *trayectoria* de un móvil u *observador* en  $X$  a toda curva conexa temporal  $\gamma \subset X$ . La *velocidad* de una trayectoria  $\gamma$  es su único campo tangente  $U$ , orientado al futuro, tal que  $U \cdot U = 1$ . Este campo tangente  $U$  permite parametrizar la trayectoria  $\gamma$ , y diremos que tal parámetro es el *tiempo propio* del móvil. El tiempo propio  $\tau$  de un observador entre dos sucesos  $p, q$  de su trayectoria  $\gamma$  es la longitud de  $\gamma$  entre  $p$  y  $q$  (respecto de la métrica del tiempo  $g$ ):

$$\tau := \int_p^q \omega \quad , \quad \omega(U) = 1 \quad .$$

Además, si  $\mathcal{E} \subset X$  es una subvariedad espacial,  $-g$  define en  $\mathcal{E}$  una estructura de variedad riemanniana<sup>4</sup>, que está orientada por  $[(i_D\Omega_X)|_{\mathcal{E}}]$ , donde  $D$  es cualquier campo tangente en  $X$  que apunte al futuro.

Una *partícula de masa en reposo*  $m > 0$  es una trayectoria  $\gamma$  en  $X$  junto con un campo de vectores  $I$  tangente a  $\gamma$  tal que  $I \cdot I = m^2$ . La conexión de Levi-Civita

<sup>2</sup>Por simplicidad suponemos fijada una unidad de tiempo.

<sup>3</sup>Por supuesto que esta condición implica que tal conexión es necesariamente la conexión de Levi-Civita de la variedad de Lorentz en cuestión, lo que permitiría eliminar la conexión lineal de la definición de espacio-tiempo relativista; pero hemos preferido incluirla tanto para resaltar su extrema importancia como para sugerir la posibilidad de una conexión lineal con torsión.

<sup>4</sup>En la Teoría de la Relatividad general siempre elegiremos la métrica del tiempo y el espacio de modo que coincidan salvo el signo, siempre usaremos unidades naturales. Fijada la unidad de tiempo, mediremos longitudes con la correspondiente unidad, de modo que la velocidad de la luz sea 1.

$\nabla$  de la métrica del tiempo  $g$  determina las propiedades inerciales de  $X$ . Llamaremos móviles u observadores en *caída libre* a las trayectorias geodésicas de  $\nabla$ . En caída libre (en ausencia de fuerzas) cada partícula define una geodésica

$$I^\nabla I = 0$$

de modo que su trayectoria  $\gamma$  es una geodésica de  $\nabla$  y la masa en reposo  $m$  es constante.

Un *fotón* es una geodésica de  $\nabla$ , de tipo luz, junto con un campo tangente  $I$  auto-paralelo:  $I^\nabla I = 0$ .

En general no existe el concepto de sistema de referencia inercial. Todo lo más que puede hacer un observador en caída libre es coordinar un entorno de su trayectoria mediante la aplicación exponencial. Es decir, puede completar su velocidad  $U_p$  en un suceso  $p \in X$  hasta obtener una base ortonormal  $\{U, D_1, D_2, D_3\}$  de  $T_p X$  y trasladarla paralelamente a lo largo de su trayectoria  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow X$ , lo que permite coordinar un entorno de su trayectoria mediante la aplicación exponencial:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \dashrightarrow & X \\ (t, x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \exp_{\sigma(t)}(\sum_i x_i D_i) \end{array}$$

Si la trayectoria del observador no es geodésica, al trasladar paralelamente los vectores  $D_i$  pueden obtenerse vectores que no son ortogonales a la velocidad  $U$  del observador (que no son espaciales para el observador), por lo que es necesario proyectarlos ortogonalmente para que sigan siendo vectores espaciales, y coordinar después un entorno de la trayectoria del observador mediante la aplicación exponencial.

No obstante, si convenimos en llamar *observador infinitesimal* a todo vector  $D_p \in T_p X$  tal que  $D_p \cdot D_p = 1$ , cada observador infinitesimal define un *sistema de referencia inercial infinitesimal* en  $T_p X$ , que es un espacio-tiempo de Minkowski.

## Ejercicios

(1) Sea  $\{U_i\}$  un recubrimiento abierto de una variedad de Lorentz  $X$ . Dadas orientación del tiempo  $[D_i]$  en cada abierto  $U_i$ , si las orientaciones de  $U_i$  y  $U_j$  inducen la misma orientación del tiempo en  $U_i \cap U_j$  para todo par de índices  $i, j$ , entonces existe una única orientación del tiempo en  $X$  que en cada abierto  $U_i$  coincide con  $[D_i]$ .

(2) Probar que la condición necesaria y suficiente para que una variedad diferenciable  $X$  de dimensión 4 admita alguna métrica de Lorentz es que su fibrado tangente  $TX$  admita algún subfibrado de línea. (*Indicación:* Si  $g$  es una métrica de Lorentz sobre  $X$ , considerar el endomorfismo  $T$  asociado a  $g$  y a una métrica riemanniana sobre  $X$ , y el fibrado de vectores propios de  $T$  de valor propio positivo. Recíprocamente, si  $L$  es un subfibrado de línea de  $TX$ , considerar la descomposición  $TX = L \oplus L^\perp$ .)

(3) Probar que la condición necesaria y suficiente para que una variedad diferenciable  $X$  de dimensión 4 admita alguna métrica de Lorentz orientada en el tiempo es que exista algún campo tangente a  $X$  que no se anule en ningún punto.

Concluir que la condición necesaria y suficiente para que una variedad diferenciable compacta  $X$  de dimensión 4 admita alguna estructura de espacio-tiempo relativista es que sea orientable y su característica de Euler-Poincaré  $\chi(X)$  sea nula. (*Indicación:* El número de ceros de cualquier campo tangente a  $X$  coincide con  $\chi(X)$ ).

## 4.2 Forma de Impulso y Tensor de Energía-Momento

Sea  $X$  un espacio-tiempo relativista y consideremos un flujo de innumerables partículas puntuales dado por una 3-forma  $\Pi_3$  sobre  $X$  valorada en los campos tangentes a  $X$ . Según vimos en II.6, si excluimos la posibilidad de giros en las partículas que forman el fluido, entonces la forma de impulso  $\Pi_3$  ha de ser simétrica,

$$C_1^1 \Pi_3 = 0 ,$$

lo que equivale a la anulación de  $\Pi_3 \wedge \text{Id}$  como 4-forma valorada en  $\Lambda^2 TX$ . Además, en el apartado 3.5 hemos visto que la condición

$$d\Pi_3 = 0$$

recoge leyes infinitesimales de conservación del impulso, la masa-energía y el momento. El adjetivo infinitesimal hace referencia a que la igualdad  $d\Pi_3 = 0$  sólo implica verdaderas leyes de conservación con formulación integral en presencia de la estructura infinitesimal del espacio-tiempo (en el espacio-tiempo de Minkowski) porque el Teorema de Stokes no es válido cuando la conexión lineal tiene curvatura no nula.

De acuerdo con 2.7.2, existe un único tensor contravariante simétrico  $T^2$  tal que

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= C_1^1(\Omega_X \otimes T^2) \\ 0 &= \text{div}_\nabla T^2 \end{aligned}$$

y, como la métrica del tiempo define un isomorfismo  $g: TX \simeq T^*X$ ,  $(gD)(D') = D \cdot D'$ , cada métrica contravariante  $T^2: T^*X \rightarrow TX$  puede entenderse como un endomorfismo  $T = T_1^1: TX \rightarrow TX$  y como una métrica covariante  $T_2: TX \rightarrow T^*X$ :

$$\begin{aligned} T(D) &:= T^2(gD) = T^2 \cdot D \\ T_2(D, D') &:= T(D) \cdot D' = T^2(gD, gD') = T^2 \cdot (D \otimes D') \end{aligned}$$

donde el producto  $T^2 \cdot D$  se realiza considerando  $T^2$  como una 1-forma valorada en los vectores (hay dos modos posibles; pero son indiferentes al ser  $T^2$  simétrico). Estos tres tensores  $T^2$ ,  $T$ ,  $T_2$  se determinan mutuamente y cualquiera de ellos puede ser considerado como el tensor de energía-momento del fluido. No obstante,  $T^2$  y  $T$  dependen de la unidad de tiempo, porque  $\Omega_X$  depende; pero  $T_2$  no depende, lo que hace que la métrica  $T_2$  sea más natural.

Por último, recuérdese que en el apartado 3.5 vimos que la igualdad  $\text{div}_\nabla T(D) = 0$  recoge leyes infinitesimales de conservación de la magnitud medida por la 3-forma ordinaria  $\Pi_3 \cdot D = i_{T(D)}\Omega_X$ .

Por otra parte, un fluido es una nube de polvo cuando su tensor de energía-momento es de la forma  $T^2 = \rho(U \otimes U)$ . En tal caso la ley infinitesimal de conservación del impulso  $\operatorname{div}_\nabla T^2 = 0$  puede expresarse del siguiente modo:

**Teorema 4.2.1** *Sea  $U$  un campo de velocidades,  $U \cdot U = 1$ , y sea  $\rho$  una función diferenciable sobre un espacio-tiempo relativista  $X$ . La anulaci3n de la divergencia de  $\rho(U \otimes U)$  equivale a las siguientes condiciones:*

1.  $\operatorname{div}_\nabla(\rho U) = 0$  (Conservaci3n infinitesimal de la masa en reposo).
2.  $U^\nabla U = 0$  en el abierto  $\rho \neq 0$ . (Flujo geodésico)

*Demostraci3n:*  $\nabla T^2 = \nabla(\rho U) \otimes U + \rho U \otimes (\nabla U)$

$$\operatorname{div}_\nabla T^2 := C_1^1(\nabla T^2) = [\operatorname{div}_\nabla(\rho U)] U + \rho(U^\nabla U)$$

y la anulaci3n de este campo tangente equivale a la de ambos sumandos, porque los campos tangentes  $U$  y  $U^\nabla U$  son ortogonales:

$$2U \cdot (U^\nabla U) = (U^\nabla U) \cdot U + U \cdot (U^\nabla U) = U(U \cdot U) = U(1) = 0 .$$

Por último, vamos a ver c3mo a cada grupo uniparamétrico de simetrías de la métrica del tiempo  $g$  le corresponde una ley infinitesimal de conservaci3n:

**Proposici3n 4.2.2** *Sea  $(X, g)$  un espacio-tiempo relativista y sea  $D$  un campo tangente sobre  $X$  tal que  $D^L g = 0$ . Para cada métrica simétrica  $T^2$  con divergencia nula tenemos que*

$$\operatorname{div}_\nabla T(D) = 0 .$$

*Demostraci3n:* Sea  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  un sistema de coordenadas locales en  $X$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} T^2 &= \sum_{ij} h_{ij} \partial_i \otimes \partial_j \quad , \quad h_{ij} = h_{ji} \\ \nabla T^2 &= \sum_{ij} [(dh_{ij}) \otimes \partial_i \otimes \partial_j + h_{ij}(\nabla \partial_i) \otimes \partial_j + h_{ij} \partial_i \otimes (\nabla \partial_j)] \\ \operatorname{div}_\nabla T^2 &= C_1^1(\nabla T^2) = \sum_{ij} [(\partial_i h_{ij}) \partial_j + h_{ij}(\operatorname{div}_\nabla \partial_i) \partial_j + h_{ij}(\partial_i^\nabla \partial_j)] = 0 \\ T(D) &= T^2 \cdot D = \sum_{ij} h_{ij}(\partial_j \cdot D) \partial_i \\ \nabla(T(D)) &= \sum_{ij} [(\partial_j \cdot D) dh_{ij} \otimes \partial_i + h_{ij} d(\partial_j \cdot D) \otimes \partial_i + h_{ij}(\partial_j \cdot D)(\nabla \partial_i)] \\ \operatorname{div}_\nabla T(D) &= \sum_{ij} [(\partial_i h_{ij})(\partial_j \cdot D) + h_{ij}(\partial_i(\partial_j \cdot D)) + h_{ij}(\operatorname{div}_\nabla \partial_i)(\partial_j \cdot D)] \\ \operatorname{div}_\nabla T(D) &= \operatorname{div}_\nabla T(D) - (\operatorname{div}_\nabla T^2) \cdot D = \sum_{ij} [h_{ij} \partial_i(\partial_j \cdot D) - h_{ij}(\partial_i^\nabla \partial_j) \cdot D] \end{aligned}$$

y, al ser  $h_{ij} = h_{ji}$ , para ver que  $\operatorname{div}_{\nabla} T(D) = 0$ , basta probar la anulaci3n de

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_j \cdot D) - (\partial_i^{\nabla} \partial_j) \cdot D + \partial_j(\partial_i \cdot D) - (\partial_j^{\nabla} \partial_i) \cdot D &= \\ &= \partial_j \cdot (D^{\nabla} \partial_i) - \partial_j \cdot (D^L \partial_i) + \partial_i \cdot (D^{\nabla} \partial_j) - \partial_i \cdot (D^L \partial_j) \\ &= D(\partial_i \cdot \partial_j) - D(\partial_i \cdot \partial_j) = 0 \end{aligned}$$

porque la condici3n  $D^L g = 0$  significa precisamente que, para cada par de campos tangentes  $D_1, D_2$ , se verifica:  $D(D_1 \cdot D_2) = (D^L D_1) \cdot D_2 + D_1 \cdot (D^L D_2)$ .

**Ejemplo:** La m3trica  $g = dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$  admite las siguientes simetrías:

Simetrías	Generador inf.	Ley de conservaci3n
Traslaci3n temporal	$\partial_t$	Masa-energía
Traslaciones espaciales	$\partial_i$	Momento
Giros espaciales	$x_j \partial_i - x_i \partial_j$	Momento angular
Giros temporales	$x_i \partial_t + t \partial_i$	Velocidad del centro de masas

El nombre de la última se debe a que, cuando el soporte de  $\Pi_3$  es espacialmente compacto, para cualquier observador inercial la integral de  $\Pi_3 \cdot (x_i \partial_t + t \partial_i)$  sobre todo el Universo es constante

$$\int_{\mathcal{E}_t} (x_i \omega_M - t \omega_{P_i}) = cte. \quad , \quad i = 1, 2, 3 ,$$

donde  $\omega_M := \Pi_3 \cdot \partial_t$  es la forma de masa-energía y  $\omega_{P_i} := -\Pi_3 \cdot \partial_i$  es la forma de momento en la direcci3n  $\partial_i$ . Luego

$$\frac{\int x_i \omega_M}{\int \omega_M} = \frac{\int \omega_{P_i}}{\int \omega_M} t + a_i = b_i t + a_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 ,$$

para ciertas constantes  $a_i, b_i$ . Es decir, el centro de masas sigue una trayectoria inercial con velocidad aparente igual al promedio de las velocidades aparentes.

### 4.3 Tensor de Einstein y Forma de Cartan

Sea  $X$  un espacio-tiempo relativista. La materia ha de venir representada por una 3-forma simétrica valorada en los campos tangentes  $\Pi_3$  que es cerrada,  $d\Pi_3 = 0$ . O bien por la m3trica contravariante simétrica  $T^2$  tal que

$$\Pi_3 = C_1^1(\Omega_X \otimes T^2) \quad , \quad \operatorname{div}_{\nabla} T^2 = 0 ,$$

o por la correspondiente m3trica covariante  $T_2$ .

#### Tensor de Einstein

Analicemos la relaci3n del tensor de energía-impulso  $T^2$  con la m3trica del tiempo  $g$  y su conexi3n asociada  $\nabla$ . En el caso newtoniano tal relaci3n se expresa con el tensor de Ricci  $R_2$  (véase 2.4 y 2.7.3.1):

$$R_2 = (4\pi\rho)g = 4\pi T^2(dt, dt)g .$$

Por tanto es razonable suponer que para cada observador infinitesimal  $D$  (vector temporal orientado al futuro y  $D \cdot D = 1$ ) la métrica del tiempo  $g$  determine la densidad de masa observada  $T_2(D, D) = T^2(D^*, D^*)$ . Como tales vectores y sus proporcionales forman el interior de un cono, y la forma cuadrática de una métrica está totalmente determinada por su restricción a un abierto no vacío, el tensor de energía-momento  $T_2$  ha de quedar totalmente determinado por  $g$ . Ha de existir algún modo de asociar a cada variedad de Lorentz  $(X, g)$  un tensor covariante de orden 2 simétrico  $T_2(g)$  que describa el comportamiento de la materia contenida en  $X$ . Además la definición de  $T_2(g)$  ha de ser intrínseca, en el sentido de que  $\phi^*T_2(g) = T_2(\phi^*g)$  para todo difeomorfismo  $\phi: X' \simeq X$ :

*El tensor de energía-impulso ha de ser una métrica covariante simétrica con divergencia nula asociada naturalmente a la métrica del tiempo.*

Si exigimos que  $T_2(g)$  sólo dependa del 1-jet de  $g$ , no existen tales métricas; aunque sí existen dependientes del 2-jet de  $g$  (ver [12] 17.1) y todas las que dependen linealmente de las segundas derivadas de los coeficientes  $g_{ij}$  de  $g$  son combinaciones lineales de  $g$ , del tensor de Ricci  $R_2 := C_1^1 R_{2,1}^1$  y de  $\kappa g$ , donde  $\kappa := C_{12} R_2$  es la *curvatura escalar* de  $g$ :

$$T_2 = \alpha R_2 + \beta \kappa g + \lambda g .$$

La anulación de la *constante cosmológica*  $\lambda$  equivale al hecho de que el tensor de energía-impulso  $T_2$  sea nulo en el espacio de Minkowski, y también a la independencia de  $T_2$  de la unidad de tiempo, por lo que de ahora en adelante supondremos  $\lambda = 0$ :

$$T_2 = \alpha R_2 + \beta \kappa g . \quad (4.1)$$

Impongamos ahora la condición de que la divergencia de  $T_2$  sea nula, usando el siguiente

**Lema 4.3.1**  $div_{\nabla}(\kappa g) = d\kappa$  ,  $div_{\nabla} R_2 = \frac{1}{2}d\kappa$  .

*Demostración:* Como  $\nabla g = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla(\kappa g) &= d\kappa \otimes g + \kappa(\nabla g) = d\kappa \otimes g \\ div_{\nabla}(\kappa g) &= C_{12}(d\kappa \otimes g) = d\kappa \end{aligned}$$

En cuanto a la divergencia del tensor de Ricci, se obtiene de la segunda identidad de Bianchi

$$B_{01234} + B_{20134} + B_{12034} = 0 ,$$

donde  $B_{01234} := \nabla R_{2,2}$  es la diferencial covariante del tensor de Riemann-Christoffel  $R_{2,2}$  (y los tensores  $B_{20134}$ ,  $B_{12034}$  se obtienen de  $B_{01234}$  permutando los argumentos según indica la correspondiente permutación de índices), por contracción del índice 2

con el 4, y del 0 con el 3:

$$\begin{aligned}
C_{24,03}B_{01234} &= C_{02}(C_{24}B_{01234}) = C_{02}(\nabla R_2) = \operatorname{div}_{\nabla} R_2 \\
C_{24,03}B_{20134} &= C_{14,23}B_{01234} = C_{12}(C_{14}B_{01234}) = \\
&= C_{12}(-\nabla R_2) = -\nabla(C_{12}R_2) = -\nabla\kappa = -d\kappa \\
C_{24,03}B_{12034} &= C_{13,04}B_{01234} = C_{02}(C_{13}B_{01234}) = C_{02}(R_2) = \operatorname{div}_{\nabla} R_2 \\
0 &= C_{24,03}(B_{01234} + B_{20134} + B_{12034}) = 2(\operatorname{div}_{\nabla} R_2) - d\kappa
\end{aligned}$$

y concluimos que  $\operatorname{div}_{\nabla} R_2 = \frac{1}{2}d\kappa$ .

Retomemos nuestro argumento y, usando este lema, impongamos en 4.1 la condición de que la divergencia de  $T_2$  sea nula:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\alpha}{2}d\kappa + \beta d\kappa \quad , \quad \beta = -\frac{\alpha}{2} \\
T_2 &= \alpha \left( R_2 - \frac{1}{2}\kappa g \right)
\end{aligned}$$

**Definición:** Llamaremos *tensor de Einstein* de una métrica covariante simétrica no-singular  $g$  al tensor

$$G_2 := R_2 - \frac{1}{2}\kappa g$$

y, al ser  $g$  no-singular,  $G_2$  define también un operador de Einstein  $G$  y un tensor de Einstein  $G^2$  contravariante:

$$G_2(D, D') = G(D) \cdot D' \quad , \quad G^2(gD, gD') = G_2(D, D') \quad . \quad (4.2)$$

El tensor de Einstein  $G_2$  es una métrica covariante simétrica con divergencia nula, y la hipótesis más sencilla es suponer que el tensor de energía-momento  $T_2$  de cualquier espacio-tiempo relativista ha de ser proporcional al tensor de Einstein  $G_2$  de la métrica del tiempo  $g$

$$T_2 = \alpha G_2 \quad . \quad (4.3)$$

Para calcular tal coeficiente  $\alpha$  vamos a suponer que en algún caso el tensor de energía-momento es de la forma

$$T^2 = \rho(U \otimes U) \quad , \quad U \cdot U = 1 \quad .$$

Tomando trazas en 4.3 obtenemos

$$\begin{aligned}
C_{12}T_2 &= C_{12}(T^2) = C_{12}(\rho(U \otimes U)) = \rho(U \cdot U) = \rho \\
C_{12}(\alpha E_2) &= \alpha \left( C_{12}R_2 - \frac{\kappa}{2}C_{12}g \right) = \alpha(\kappa - 2\kappa) = -\alpha\kappa \\
T_2 &= \alpha R_2 + \frac{\rho}{2}g
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Supongamos ahora que, en un entorno de algún suceso  $p \in X$ , un observador que se mueve con el fluido puede degenerar<sup>5</sup> la métrica  $g$  de modo que el límite sea

<sup>5</sup>En sentido lógico estricto esta parte final del argumento debería posponerse a la discusión de las degeneraciones newtonianas de métricas de Lorentz que haremos en el próximo capítulo. Por eso la definición del tensor de energía-impulso que cierra este capítulo es realmente la conclusión final de todo el libro.

una gravitación newtoniana  $(\bar{X}, \bar{g}, \bar{g}^*, \bar{\nabla}, \bar{T}^2)$ . De acuerdo con 2.7.3.1 y 2.16, en el límite  $\bar{X}$  tendremos que  $\bar{R}_2 = (4\pi\bar{\rho})\bar{g}$  y  $\bar{T}_2 = \bar{\rho}\bar{g}$ . Pasando 4.4 al límite, como la densidad de masa  $\bar{\rho}(p)$  debe coincidir con  $\rho(p)$ , porque el fluido está en  $p$  en reposo para el observador (caso en que las medidas newtonianas coinciden con las relativistas), obtenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\bar{g} = \bar{T}_2 &= \alpha\bar{R}_2 + \frac{\rho}{2}\bar{g} = (4\pi\alpha\bar{\rho})\bar{g} + \frac{\rho}{2}\bar{g} \\ 2\rho &= 8\pi\alpha\rho + \rho \\ \alpha &= (8\pi)^{-1}\end{aligned}$$

**Definición:** El *tensor de energía-momento*  $T_2$  de un espacio-tiempo relativista es el tensor de Einstein afectado del factor  $\frac{1}{8\pi}$ :

$$G_2 = 8\pi T_2 \quad \text{(Ecuación de Einstein)}$$

$\text{Ricci} - \frac{\text{Curvatura escalar}}{2}g = 8\pi(\text{Energía-momento})$
-------------------------------------------------------------------------------------

**Definición:** El tensor de energía-momento es el de un *fluido perfecto* cuando es de la forma

$$T^2 = (\rho + p)(U \otimes U) + p(-g^*)$$

donde  $U \cdot U = 1$ . El campo tangente  $U$  recibe el nombre de *velocidad media* del fluido y las funciones  $\rho, p$  se llaman *densidad de energía* y *presión* del fluido respectivamente (entendiendo que son la presión y densidad medidas por un observador que se mueva con el fluido; es decir, con velocidad  $U$ . El aparentemente extraño coeficiente de  $U \otimes U$  se toma así para que la densidad  $\rho$  coincida con  $T^2(U, U)$ , que es la densidad medida por el observador infinitesimal  $U$ .)

**Definición:** El tensor de energía-momento es el de una *nube de polvo* cuando es el de un fluido perfecto con presión nula:

$$T^2 = \rho(U \otimes U) .$$

**Definición:** Un espacio-tiempo relativista está *vacío* cuando su tensor de energía-momento es nulo:

$$G^2 = 0 .$$

**Proposición 4.3.2** *La condición necesaria y suficiente para que un espacio-tiempo relativista esté vacío es que su tensor de Ricci sea nulo.*

*Demostración:* Si  $R_2 = 0$ , entonces  $\kappa := C_{12}R_2 = 0$  y  $G_2 := R_2 - \frac{1}{2}\kappa g = 0$ .

Recíprocamente, si  $G_2 = 0$ , entonces  $0 = C_{12}G_2 = C_{12}R_2 - \frac{1}{2}\kappa C_{12}g = \kappa - 2\kappa = -\kappa$ . Luego  $R_2 = G_2 + \frac{1}{2}\kappa g = 0$ .

**Nota:** El extraño coeficiente  $8\pi$  se debe al coeficiente  $4\pi$  de la ecuación de Poisson  $R_2 = 4\pi g$ ; luego, en última instancia, se debe al modo de fijar la unidad de masa a partir de las unidades de longitud y tiempo. Tanto el impulso de las partículas como la 3-forma de impulso  $\Pi_3$  y el tensor de energía-momento  $T_2$  son independientes de la

unidad de tiempo elegida; pero sí dependen del modo en que ésta determine la unidad de masa. Así, fijar la unidad de masa por la condición de que la aceleración gravitatoria a la unidad de distancia sea 1 (es decir,  $G = 1$  en la Ley de la Gravitación Universal) equivale a elegir el coeficiente  $8\pi$  en la ecuación de Einstein. Si se hubiera fijado por la condición de que el flujo del campo gravitatorio  $\vec{F}$  sea 1, la ecuación de Einstein sería  $G_2 = 2T_2$ . También puede fijarse la unidad de masa para que tal coeficiente sea la unidad, coincidiendo entonces el tensor de Einstein con el de energía-momento,  $G_2 = T_2$ .

### Operador de curvatura

El invariante más importante de un espacio-tiempo relativista es el tensor de curvatura  $R_{2,1}$ , cuyo conocimiento es esencialmente equivalente al tensor de Riemann-Christoffel

$$R_{2,2}(D_1, D_2, D_3, D_4) := R_{2,1}(D_1, D_2, D_4) \cdot D_3 .$$

Este tensor  $R_{2,2}$  es alternado en sus dos primeras variables y en las dos últimas, y  $R_{2,2}(D_1, D_2, D_3, D_4) = R_{2,2}(D_3, D_4, D_1, D_2)$ . Por tanto  $R_{2,2}$  puede entenderse como una métrica simétrica sobre  $\Lambda^2(TX)$

$$R_{2,2}(D_1 \wedge D_2, D_3 \wedge D_4) := R_{2,2}(D_1, D_2, D_3, D_4) .$$

Por otra parte,  $g$  induce también una métrica simétrica no-singular  $\Lambda^p g$  sobre  $\Lambda^p(TX)$

$$(\Lambda^p g)(D_1 \wedge \dots \wedge D_p, D'_1 \wedge \dots \wedge D'_p) := \det(D_i \cdot D'_j) .$$

**Definición:** El *operador de curvatura* es el único endomorfismo  $\widehat{R}$  de  $\Lambda^2(TX)$  tal que

$$R_{2,2}(D_1 \wedge D_2, D_3 \wedge D_4) = (\Lambda^2 g) \left( D_1 \wedge D_2, \widehat{R}(D_3 \wedge D_4) \right) .$$

Es decir,  $\widehat{R}$  es el tensor de tipo (2,2) que se obtiene al subir, mediante la métrica  $g$ , el tercer índice covariante del tensor de curvatura  $R_{2,1}$ . El tensor de curvatura  $R_{2,1}$  y el operador de curvatura  $\widehat{R}$  se determinan mutuamente; pero éste último está definido en  $\Lambda^2(TX)$ , que tiene una estructura muy rica. Además de las métricas  $\Lambda^2 g$  y  $R_{2,2}$  ya consideradas, el producto exterior induce en  $\Lambda^2(TX)$  una métrica simétrica  $< , >$  y, por tanto, un automorfismo  $*$ :

En efecto,  $\Omega_X$  define productos bilineales  $\Lambda^p(TX) \times \Lambda^{4-p}(TX) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle e^p, e^{4-p} \rangle := \Omega_X(e^p \wedge e^{4-p})$$

que inducen isomorfismos  $*$ :  $\Lambda^p(TX) \simeq \Lambda^{4-p}(TX)$ , pues la métrica  $\Lambda^{4-p} g$  permite identificar  $\Lambda^{4-p}(TX)$  con su propio dual:

$$(\Lambda^{4-p} g)(*e^p, e^{4-p}) := \langle e^p, e^{4-p} \rangle := \Omega_X(e^p \wedge e^{4-p}) .$$

En particular, cuando  $p = 2$ , obtenemos un automorfismo  $*$  de  $\Lambda^2(TX)$ , y es sencillo comprobar que  $*^2 = -1$ , de modo que  $*$  define una estructura de espacio vectorial complejo sobre cada espacio vectorial  $\Lambda^2(T_x X)$ . Aunque no lo necesitemos en lo sucesivo,

es conveniente saber (véase [3] 3.20) que en el vacío el operador de curvatura también es un endomorfismo de esta estructura compleja:

**Teorema:** Si el tensor de Ricci es nulo, entonces  $\widehat{R}^* = *\widehat{R}$ .

### Forma de Cartan

El operador de curvatura  $\widehat{R}$  es una 2-forma valorada en los 2-vectores. A su vez la identidad  $I$  de  $TX$  es una 1-forma valorada en los vectores, de modo que  $\widehat{R} \wedge I$  es una 3-forma valorada en los 3-vectores, y su diferencial es nula porque la identidad y el operador de curvatura tienen diferencia nula. La identidad porque  $dI$  es la torsión de  $\nabla$  y  $\widehat{R}$  en virtud de la identidad diferencial de Bianchi  $dR = 0$  (ver Apéndice B). Luego  $*(\widehat{R} \wedge I)$  es una 3-forma, valorada en los vectores, con diferencial nula:

**Definición:** La *forma de Cartan* de un espacio-tiempo relativista es la 3-forma

$$\mathcal{C}_3 := *(\widehat{R} \wedge I)$$

**Lema 4.3.3**  $\mathcal{C}_3 = C_1^1(\Omega_X \otimes G^2)$ .

*Demostración:* En un sistema de referencia inercial infinitesimal  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  tendremos

$$\begin{aligned} \widehat{R} &= \sum_{i < j} \sum_{k < l} R_{ij}^{kl} (\omega_i \wedge \omega_j) \wedge (e_k \wedge e_l) \\ \widehat{R} \wedge I &= \sum_r \sum_{i < j} \sum_{k < l} R_{ij}^{kl} (\omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_r) \wedge (e_k \wedge e_l \wedge e_r) \\ *(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) &= -e_0 \\ *(e_0 \wedge e_2 \wedge e_3) &= -e_1 \\ *(e_0 \wedge e_1 \wedge e_3) &= e_2 \\ *(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) &= -e_3 \\ G^2 &= \sum_{ijk} R_i^{ijk} e_j \otimes e_k - \frac{r}{2} \sum_k g_{kk} e_k \otimes e_k \end{aligned}$$

así que  $C_1^1(\Omega_X \otimes G^2)$  vale

$$\sum_k \left( \left( \sum_{ij} R_i^{ijk} (-1)^j \omega_0 \wedge \dots \widehat{\omega}_j \dots \wedge \omega_3 \right) - \frac{r}{2} g_{kk} \omega_0 \wedge \dots \widehat{\omega}_k \dots \wedge \omega_3 \right) \wedge e_k$$

donde  $r = \sum_{ij} R_{ij}^{ij}$  y  $R_i^{ijk} = g_{kk} R_{ik}^{ij}$ . Un cálculo directo, usando que  $R_{ij}^{kl} = -R_{ji}^{kl} = -R_{ij}^{lk}$ , permite concluir que  $C_1^1(\Omega_X \otimes G^2) = *(\widehat{R} \wedge I)$ .

**Definición:** La *forma de impulso*  $\Pi_3$  de un espacio-tiempo relativista es la forma de Cartan afectada del factor  $\frac{1}{8\pi}$ :

$$\mathcal{C}_3 := *(R \wedge I) = (8\pi)\Pi_3$$

Para interpretar geoméricamente la forma de Cartan, y por tanto la forma de impulso, consideramos un paralelepípedo infinitesimal definido por tres vectores tangentes  $D_1, D_2, D_3$ . Por definición

$$\mathcal{C}_3(D_1, D_2, D_3) = * \left( \widehat{R}(D_1, D_2) \wedge D_3 \right) + * \left( \widehat{R}(D_3, D_1) \wedge D_2 \right) + * \left( \widehat{R}(D_2, D_3) \wedge D_1 \right)$$

La orientación del paralelepípedo induce una orientación en cada una de sus caras. Si  $m_{ij}$  denota el centro de la cara orientada por los vectores  $D_i, D_j$  tenemos que

$$\begin{aligned} D_1 &= m_{23} - m_{32} = (m_{23} - a) + (a - m_{32}) \\ D_2 &= m_{31} - m_{13} = (m_{31} - a) + (a - m_{13}) \\ D_3 &= m_{12} - m_{21} = (m_{12} - a) + (a - m_{21}) \end{aligned}$$

donde  $a$  es un punto arbitrario. Luego

$$\mathcal{C}_3(D_1, D_2, D_3) = \sum_{i,j} * \left( \widehat{R}(D_i, D_j) \wedge (m_{ij} - a) \right) .$$

Ahora, para interpretar  $* \left( \widehat{R}(D, D') \wedge (m - a) \right)$ , al menos cuando  $m - a$  no sea isótropo, observamos que  $\widehat{R}(D, D')$  es un 2-vector, así que puede proyectarse ortogonalmente al hiperplano  $(m - a)^\perp$  donde, al considerar la orientación  $i_{m-a}\Omega_X$ , cada 2-vector  $e^2$  vendrá representado por un vector  $*e^2$ .

Elegido un punto arbitrario  $a$ , el valor de la forma de Cartan en un paralelepípedo infinitesimal se obtiene sumando el producto de la distancia de  $a$  al centro  $m$  de cada cara por el vector que representa la proyección ortogonal sobre  $(m - a)^\perp$  del 2-vector asociado a tal cara.

## 4.4 Ejemplos

### 4.4.1 (El espacio-tiempo de Minkowski)

El espacio-tiempo definido en la variedad diferenciable  $X := \mathbb{R}^4$  por los siguientes datos<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} g &:= dt^2 - c^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \\ [\Omega_X] &:= [dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3] \\ \partial_t &\text{ está orientado al futuro} \end{aligned}$$

es el *espacio-tiempo de Minkowski*. Es el espacio-tiempo de la relatividad especial y representa el comportamiento del Universo en ausencia de fenómenos gravitatorios.

Diremos que un espacio-tiempo relativista es *plano* cuando localmente sea isomorfo al espacio-tiempo de Minkowski. Razonamientos análogos a los que se usan en la

<sup>6</sup>En los ejemplos omitiremos la conexión lineal, pues siempre ha de ser la conexión de Levi-Civita de la métrica del tiempo.

caracterización local de la geometría euclídea como variedad riemanniana de curvatura nula, prueban que

*La condición necesaria y suficiente para que un espacio-tiempo relativista sea plano es que su tensor de curvatura sea nulo.*

#### 4.4.2 (Métricas de Schwarzschild)

Sea  $(S_2, d\sigma^2, \Omega_{S_2})$  una esfera orientada de radio unidad y sea  $m$  un número positivo. Los datos

$$g := \left(1 - \frac{2m}{rc^2}\right) dt^2 - c^{-2} \left(\frac{1}{1 - \frac{2m}{rc^2}} dr^2 - r^2(d\sigma^2)\right)$$

$$[\Omega_X] := [dt \wedge dr \wedge \Omega_{S_2}]$$

$$\partial_t \text{ está orientado al futuro}$$

definen una estructura de espacio-tiempo relativista en el abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times S_2$  donde  $r \neq 2mc^{-2}$ . Este espacio-tiempo está vacío, aunque no es plano, y admite como simetrías todos los giros de  $S_2$  y las traslaciones  $t \mapsto t + a$ . Además es invariante por la simetría  $t \mapsto -t$ ; luego las hipersuperficies  $t = a$  son totalmente geodésicas y, por tanto, son espaciales para los observadores de velocidad  $\partial_t$ , que son inerciales hacia el infinito (cuando  $r \rightarrow \infty$ ).

El abierto  $r \neq 2mc^{-2}$  tiene dos componentes conexas. La componente conexa  $r > 2mc^{-2}$  recibe el nombre de *espacio-tiempo normal de Schwarzschild* de masa activa  $m$ , y representa el campo gravitatorio debido a un cuerpo esférico situado “fuera” de la región que describen nuestras coordenadas. La componente conexa  $0 < r < 2mc^{-2}$  recibe el nombre de *agujero negro de Schwarzschild* de masa activa  $m$ , porque ningún fotón emitido en esta región puede salir de ella (ninguna geodésica isótropa que pase por un punto de esta región podrá alcanzar su borde  $r = 2mc^{-2}$  en el futuro).

#### 4.4.3 (Métricas de Robertson-Walker)

La esfera  $S_n$  de curvatura constante  $K$  puede construirse tomando en  $\mathbb{R}^{n+1}$  la métrica riemanniana  $T_2 := dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$  y considerando en  $S_n := \{e \in \mathbb{R}^{n+1} : T_2(e, e) = K^2\}$  la métrica riemanniana inducida por  $T_2$ . Análogamente, el *espacio hiperbólico*  $\mathbb{H}_n$  de curvatura constante  $K$  se construye tomando en  $\mathbb{R}^{n+1}$  la métrica  $T_2 := dt^2 - dx_1^2 - \dots - dx_n^2$  y considerando en  $\mathbb{H}_n := \{e \in \mathbb{R}^{n+1} : T_2(e, e) = K^2\}$  la métrica riemanniana inducida por  $-T_2$ . En este apartado  $(S, d\sigma^2)$  denotará una de las siguientes variedades riemannianas de curvatura constante: una esfera, un espacio euclídeo o un espacio hiperbólico. La curvatura de  $S$  se denotará  $K$  y, para simplificar supondremos que  $K = 1, 0$  ó  $-1$ .

Sea  $I$  un intervalo de la recta real y consideremos en  $X = I \times S$  la estructura de espacio-tiempo relativista definida por los datos

$$g := dt^2 - r(t)^2 d\sigma^2 \quad , \quad r(t) > 0$$

$$[\Omega_X] := [dt \wedge \Omega_S]$$

$$\partial_t \text{ está orientado al futuro}$$

donde  $r(t)$  es una función positiva sobre el intervalo  $I$ , y  $\Omega_S$  es una orientación prefijada de  $S$ . Este espacio-tiempo debe considerarse como un Universo que evoluciona de modo que en cada instante  $t$  tiene curvatura constante  $r(t)^{-2}K$ , y la función  $r(t)$  recibe el nombre de *radio del Universo* (recuérdese que suponemos  $K = 0, \pm 1$ ). Las trayectorias integrales del campo  $\partial_t$ , que es un campo geodésico, han de considerarse como las trayectorias que siguen los cúmulos de galaxias (un punto se asimila con unos cien millones de años luz), de suerte que todas las galaxias tienen un tiempo común  $t: X \rightarrow I$ , llamado *tiempo cosmológico*.

Además, cada isometría de  $S$  induce una simetría de  $X$ . Como las isometrías de  $S$  actúan transitivamente en las direcciones tangentes a  $S$ , es sugerente decir que en estos modelos relativistas el espacio es homogéneo e isótropo. La existencia de tantas simetrías en  $X$  permite calcular su tensor de energía-momento  $T_2$ . Si  $E$  es un vector tangente a  $S$ , define un campo tangente  $E$  sobre  $X$  y tenemos que

- 1)  $T_2(\partial_t, \partial_t)$  sólo depende de  $t$ , porque  $\partial_t$  es invariante por las isometrías de  $S$ .
- 2)  $T_2(\partial_t, E)$  es nulo, porque existe una isometría de  $S$  que transforma  $E$  en  $-E$ .
- 3)  $T_2(E, E)$  sólo depende de  $t$ . Luego en cada instante  $T_2$  define una métrica sobre  $S$  invariante por las isometrías de  $S$ , luego proporcional a  $d\sigma^2$ .

En resumen,

$$T_2 = \rho(t)dt^2 + p(t)r(t)^2 d\sigma^2 = (\rho(t) + p(t))dt^2 - p(t)g$$

para ciertas funciones diferenciables

$$\begin{aligned} \rho(t) &:= T_2(\partial_t, \partial_t) \\ p(t) &:= T_2(E, E) \quad \text{donde } E \text{ tiene módulo } 1 \end{aligned}$$

sobre el intervalo  $I$ . El tensor de energía-momento es el de un fluido perfecto con velocidad media  $\partial_t$ , densidad de masa-energía  $\rho(t)$  y presión  $p(t)$ . Calculando directamente (ver [13] 12.11) el tensor de energía-momento  $T_2$  a partir de  $g$  se obtienen las siguientes **ecuaciones de evolución**:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi\rho}{3} &= \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{K}{r^2} \\ -8\pi p &= 2\frac{r''}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{K}{r^2} \end{aligned}$$

donde  $H := r'/r$  recibe el nombre de *velocidad de expansión* del Universo. La velocidad de expansión actual  $H_0 := r'(t_0)/r(t_0)$ , llamada *constante de Hubble*, es aproximadamente de  $(5'5 \pm 0'5)10^{-11}$  cada año. Como

$$\rho - \frac{3H^2}{8\pi} = \frac{3K}{8\pi r^2}$$

tiene claramente el mismo signo que  $K$ , si convenimos en llamar *densidad crítica* a  $\rho_c := 3H_0^2/8\pi \approx 5'5 \cdot 10^{-30}$  gr/cm<sup>3</sup>, la densidad actual  $\rho_0 := \rho(t_0)$  del Universo determina el

signo de su curvatura  $K$ :

- Si  $\rho_0 > \rho_c$ , la curvatura  $K$  del Universo es positiva.
- Si  $\rho_0 = \rho_c$ , la curvatura  $K$  del Universo es nula.
- Si  $\rho_0 < \rho_c$ , la curvatura  $K$  del Universo es negativa.

#### 4.4.4 (Modelos de Friedman)

Son los modelos de Robertson-Walker con presión nula,  $p(t) = 0$ . En tal caso el tensor de energía-impulso es  $T^2 = \rho(\partial_t \otimes \partial_t)$ ; luego  $\text{div}_\nabla(\rho\partial_t) = 0$  y tenemos una ley de conservación para  $i_{\rho\partial_t}\Omega_X$  cuando las regiones espaciales evolucionan según las trayectorias del campo  $\partial_t$ . Es decir, si para cada región  $Z \subseteq S$  ponemos  $Z_t := t \times Z$ , entonces

$$\int_{Z_t} i_{\rho\partial_t}\Omega_X = \int_{Z_t} \rho\Omega_{S_t} = \int_Z \rho(t)r(t)^3\Omega_S$$

no depende del instante  $t$  considerado. La primera igualdad se debe a que  $i_{\partial_t}\Omega_X$  es la forma de volumen de  $S_t$ , y la segunda a que  $\Omega_{S_t} = r(t)^3\Omega_S$ , porque la restricción de la métrica  $-g$  a  $S_t$  es precisamente  $r(t)^3 d\sigma^2$ .

Se sigue que  $M := \rho(t)r(t)^3$  es una constante (relacionada claramente con la masa total del Universo), y que  $8\pi M/3 = (r')^2 r + Kr$ . Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial para el radio del Universo:

$$(r')^2 + K = \frac{A}{r} \quad , \quad A := \frac{8\pi M}{3} \quad .$$

Si  $K = 0$ , tenemos  $\sqrt{A} = r^{1/2}r'$ . Integrando, y fijando la constante de integración de modo que  $r(0) = 0$  (para que el Big-Bang tenga lugar en  $t = 0$ )

$$r(t) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{At} \right)^{\frac{2}{3}}$$

y obtenemos el **modelo de Einstein-DeSitter**:

$$g = dt^2 - Ct^{\frac{2}{3}}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad .$$

En este espacio-tiempo el Universo se expande indefinidamente, y su edad actual  $t_0$  puede calcularse a partir de la constante de Hubble  $H_0 := H(t_0)$ :

$$H := \frac{r'}{r} = \frac{2}{3t}$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 12 \cdot 10^9 \text{ años}$$

Si  $K = 1$ , introducimos una variable auxiliar  $\theta$  tal que  $d\theta = r(t)^{-1}dt$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 1 &= \frac{A}{r} \\ (dr/d\theta)^2 + r^2 &= Ar \\ 2\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2r &= A \\ r &= \frac{A}{2}(1 - \cos\theta) \quad , \quad t = \int r d\theta = \frac{A}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

y concluimos que la gráfica de la función  $r(t)$  es la cicloide de una rueda de diámetro  $A$ . El Universo se expande entre  $0 < t < \pi A/2$  hasta alcanzar un radio máximo  $2A$ , para contraerse después hasta colapsar cuando  $t = \pi A$ .

Si  $K = -1$ , se comprueba que el Universo se expande indefinidamente:

$$r = \frac{A(\cosh \lambda - 1)}{2} \quad , \quad t = \frac{A(\operatorname{senh} \lambda - \lambda)}{2} .$$



# Apéndice A

## Geometría Euclídea

Entre los diversos modos equivalentes de fundamentar la geometría euclídea, el más adecuado a nuestros propósitos es el siguiente:

**Espacios afines:** Dar una estructura de *espacio afín real* en un conjunto  $\mathbb{A}$  es dar un espacio vectorial real  $E$  de dimensión finita y una acción  $+: \mathbb{A} \times E \rightarrow \mathbb{A}$  de  $E$  en  $\mathbb{A}$  que sea fiel y transitiva; es decir, para cada punto  $p \in \mathbb{A}$  y cada vector  $e \in E$  hay que dar un punto de  $\mathbb{A}$ , que denotaremos  $p + e$  y diremos que es el *trasladado* del punto  $p$  por el vector  $e$ , verificando las siguientes condiciones:

1.  $p + 0 = p$
2.  $(p + e) + \bar{e} = p + (e + \bar{e})$
3. Si  $p, q \in \mathbb{A}$ , entonces  $q = p + e$  para un único vector  $e \in E$  (que denotaremos  $\vec{pq}$  ó  $q - p$ ).

En tal caso diremos que  $E$  es el espacio de *vectores libres* del espacio afín  $\mathbb{A}$  y llamaremos *dimensión* de  $\mathbb{A}$  a la dimensión del espacio vectorial  $E$ .

Llamaremos *orientaciones* de un espacio afín  $\mathbb{A}_n$  de dimensión  $n$  a las orientaciones de su espacio de vectores libres  $E$ , que son las dos componentes conexas de  $\Lambda_n E - \{0\}$ . Es decir, fijar una orientación de  $\mathbb{A}_n$  es elegir una  $n$ -forma lineal no nula  $\Omega_n$ , salvo un factor positivo. En tal caso diremos que una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  tiene *orientación positiva* o *negativa* según sea el signo de  $\Omega_n(e_1, \dots, e_n)$ . En las rectas afines ( $n = 1$ ) las orientaciones se corresponden con las componentes conexas de  $E - \{0\}$ , así que orientar una recta afín es elegir, salvo un factor positivo, un vector no nulo; lo que clasifica a los vectores no nulos en vectores de sentido positivo y negativo.

**Espacios euclídeos:** Un *espacio vectorial euclídeo* es un par  $(E, \mathcal{Q})$ , donde  $E$  es un espacio vectorial real de dimensión finita y  $\mathcal{Q} = \{\lambda T_2\}$  es un subespacio vectorial de dimensión 1 del espacio  $S_2 E$  de las métricas simétricas sobre  $E$ , con la condición de que todas las métricas no nulas  $T_2 \in \mathcal{Q}$  carezcan de vectores isótopos, lo que equivale a que  $T_2$  sea definido-positivo o definido-negativo (es decir,  $\mathcal{Q}$  es una cuádrlica no singular

imaginaria en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(E)$  de las direcciones de  $E$ , usualmente llamada *absoluto*; pero no usaremos este punto de vista de la Geometría Proyectiva).

Dar una estructura de *espacio euclídeo* en un espacio afín real  $\mathbb{A}$  es dar una estructura de espacio vectorial euclídeo en su espacio de vectores libres  $E$ . En tal caso, el absoluto  $\mathcal{Q}$  permite definir todos los conceptos de la Geometría euclídea: perpendicularidad, ángulos, semejanzas, movimientos, etc.<sup>1</sup>

Dado un par de puntos distintos  $p, q$  en un espacio euclídeo  $(\mathbb{A}, E, \mathcal{Q})$ , el segmento  $pq$  define una medida de longitudes en  $\mathbb{A}$ , en el sentido de que existe un único representante definido-positivo del absoluto  $T_2 \in \mathcal{Q}$  tal que  $T_2(q - p, q - p) = 1$ , en cuyo caso pondremos

$$e \cdot \bar{e} := T_2(e, \bar{e})$$

y diremos que es el *producto escalar* de los vectores  $e$  y  $\bar{e}$ . Ahora el producto escalar permite definir la *medida de la distancia* entre dos puntos  $r, s \in \mathbb{A}$  como el módulo  $\sqrt{e \cdot e}$  del vector  $e = q - p$ . Tal medida de distancias depende obviamente de la unidad de longitud fijada, en el sentido de que depende de la clase de congruencia del segmento  $pq$ ; pero sólo en tanto depende de  $T_2$ : *Fijar una unidad de longitud en un espacio euclídeo equivale a fijar un representante definido-positivo del absoluto*. Fijado el producto escalar, sólo existen dos formas de volumen  $\pm\Omega_E \in \Lambda_n E$  tales que  $\Omega_E(e_1, \dots, e_n) = \pm 1$  para toda base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ . Luego, fijada una unidad de longitud, *dar una orientación en un espacio euclídeo es fijar una de estas dos formas de volumen*.

En el caso particular de las rectas afines, como el espacio vectorial  $S_2 E$  de las métricas simétricas sobre  $E$  tiene dimensión 1, cada recta afín tiene una única estructura euclídea:  $\mathcal{Q} = S_2 E$ . Luego cada vector no nulo  $e$  determina una orientación y un producto escalar  $T_2$ , el único tal que  $T_2(e, e) = 1$ , y está determinado por ambos: *en las rectas afines dar un vector no nulo equivale a fijar una orientación y una unidad de longitud*. Ahora bien, en una recta, elegir un vector no nulo  $e$  equivale a fijar una forma lineal no nula  $\omega$ , la única tal que  $\omega(e) = 1$ ; luego en las rectas afines dar una forma lineal no nula  $\omega$  es fijar un producto escalar  $T_2 = \omega \otimes \omega$  y una orientación (los vectores de sentido positivo son aquellos en que el valor de  $\omega$  es positivo).

**Sistemas de referencia afines:** Dar un *sistema de referencia afín* en un espacio afín  $(\mathbb{A}_n, E)$  es fijar un punto  $p_0 \in \mathbb{A}_n$  junto con una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ . En tal caso, cada punto  $p \in \mathbb{A}_n$  se pone de modo único en la forma

$$p = p_0 + e = p_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

y diremos que  $(x_1, \dots, x_n)$  son las *coordenadas* de  $p$  en dicho sistema de referencia afín.

<sup>1</sup>Esta definición del concepto de espacio euclídeo no satisface nuestra exigencia de introducir únicamente hipótesis lo más cercanas posible a nuestra intuición y evidencia, pues aceptar los axiomas de espacio vectorial y producto escalar es tanto como dar por sentada la estructura de los escalares y el Teorema de Tales, que no son evidentes ni intuitivos. En el libro de E. Artin puede verse una excelente exposición de los fundamentos de la Geometría euclídea y su relación con los conceptos de espacio vectorial, producto escalar y espacio afín.

Obtenemos así una biyección  $\mathbb{A}_n \simeq \mathbb{R}^n$  que define en  $\mathbb{A}_n$  una estructura de variedad diferenciable, estructura que no depende del sistema de referencia afín elegido. Fijado un punto  $p \in \mathbb{A}_n$ , la derivada direccional  $D_p^e$  según un vector  $e \in E$ :

$$D_p^e(f) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te) - f(p)}{t}$$

define un vector tangente a  $\mathbb{A}_n$  en el punto  $p$ , y es directo comprobar que si  $e = \sum_i \lambda_i e_i$ , entonces

$$D_p^e = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p . \quad (\text{A.1})$$

Vemos así que cada espacio afín  $\mathbb{A}$  tiene una estructura natural de variedad diferenciable y su espacio de vectores libres  $E$  se identifica canónicamente con el espacio tangente  $T_p \mathbb{A}$  en cualquiera de sus puntos  $p \in \mathbb{A}$ . Por tanto, cada tensor sobre  $E$  define un campo de tensores del mismo tipo y clase  $C^\infty$  sobre la variedad diferenciable  $\mathbb{A}$ . En particular, cada orientación de  $\mathbb{A}$  define una orientación en el sentido de las variedades diferenciables y cada vector  $e \in E$  induce un campo tangente que también denotaremos  $e$ . Nótese que, según la igualdad A.1, en cada sistema de referencia afín tenemos que

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} , \dots , e_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

**Traslado paralelo de vectores en los espacios afines:** Al disponer de una identificación entre los espacios tangentes a un espacio afín  $\mathbb{A}$  en dos puntos cualesquiera,  $\mathbb{A}$  adquiere una conexión lineal canónica  $\nabla$ : Si  $D, D'$  son campos tangentes a  $\mathbb{A}$  y  $\{\tau_t\}$  es el grupo uniparamétrico local del campo  $D$ , entonces

$$D^\nabla D' := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D'_{\tau_t(p)} - D'_p}{t} ,$$

donde el límite se toma identificando  $T_{\tau_t(p)} \mathbb{A} = E = T_p \mathbb{A}$ . En cualquier sistema de coordenadas afines  $(x_1, \dots, x_n)$  tenemos que

$$D^\nabla \left( \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_i (Df_i) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Por definición, si  $e \in E$ , entonces  $D^\nabla e = 0$  para todo campo tangente  $D$ ; es decir, los campos tangentes definidos por los vectores de  $E$  son paralelos (= constantes respecto de  $\nabla$ ). En particular, en cada recta afín tenemos un campo constante de vectores no nulos, bien definido salvo un factor escalar no nulo, una forma lineal constante no nula, única salvo un factor escalar no nulo, un producto escalar constante, etc.

**Afinidades:** Sean  $(\mathbb{A}, E)$  y  $(\bar{\mathbb{A}}, \bar{E})$  dos espacios afines. Se dice que una aplicación  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$  es *afín* si existe una aplicación lineal  $\bar{\varphi}: E \rightarrow \bar{E}$  tal que  $\varphi(p + e) = \varphi(p) + \bar{\varphi}(e)$  para todo  $p \in \mathbb{A}$ ,  $e \in E$ . En tal caso dicha aplicación lineal  $\bar{\varphi}$  es única. Cada aplicación afín  $\varphi$  está totalmente determinada por la imagen de un punto  $p \in \mathbb{A}$

y la aplicación lineal asociada  $\vec{\varphi}$ . Diremos que una aplicación afín  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  es una *afinidad* si  $\vec{\varphi}: E \rightarrow E$  es un automorfismo lineal. Las afinidades de un espacio afín  $\mathbb{A}$  forman claramente un grupo respecto de la composición de aplicaciones.

Si  $(p_0; e_1, \dots, e_n)$  es un sistema de referencia afín de un espacio afín  $\mathbb{A}$  y  $\varphi$  es una afinidad de  $\mathbb{A}$ , es obvio que  $(\varphi(p_0); \vec{\varphi}(e_1), \dots, \vec{\varphi}(e_n))$  también es un sistema de referencia afín. Además, si  $(\bar{p}_0; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  es otro sistema de referencia afín de  $\mathbb{A}$ , entonces existe una única afinidad  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  tal que  $\varphi(p_0) = \bar{p}_0$ ,  $\vec{\varphi}(e_1) = \bar{e}_1, \dots, \vec{\varphi}(e_n) = \bar{e}_n$ . En este sentido, todos los sistemas de referencia afines de un mismo espacio afín son equivalentes.

## Apéndice B

# Cálculo Diferencial Valorado en Fibrados Vectoriales

Vamos a estudiar el cálculo de formas diferenciales sobre una variedad diferenciable  $X$  valorado en un fibrado vectorial  $E \rightarrow X$ . De hecho no será necesario introducir formalmente el concepto de fibrado vectorial, pues la categoría de fibrados vectoriales sobre  $X$  es canónicamente equivalente a la de módulos localmente libres y de rango finito sobre el haz de funciones diferenciable  $\mathcal{C}_X^\infty$ . Es decir, cada fibrado vectorial  $E \rightarrow X$  puede ser reemplazado por el haz  $\mathcal{E}$  de sus secciones diferenciables, y así se obtienen todos los  $\mathcal{C}_X^\infty$ -módulos localmente libres de rango finito, pues cada uno de tales módulos  $\mathcal{E}$  es canónicamente isomorfo al haz de secciones diferenciables del fibrado vectorial  $E$  de fibra  $E_x := \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ , donde  $\mathfrak{m}_x$  denota el ideal de los gérmenes de funciones diferenciables que se anulan en  $x$ .

En este apéndice  $X$  denotará una variedad diferenciable separada de base numerable y  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}''$ , ... denotarán  $\mathcal{C}_X^\infty$ -módulos localmente libres de rango finito. El haz de campos tangentes a  $X$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  se denotará  $\mathcal{D}$

### B.1 Formas diferenciales valoradas

**Definición:** Llamaremos *p-forma diferencial valorada* en  $\mathcal{E}$  a todo morfismo de haces  $\omega_p: \mathcal{D} \times \dots \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  que sea  $\mathcal{C}_X^\infty$ -multilineal y hemisimétrico. Es decir, para cada abierto  $U \subseteq X$  tenemos una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(U)$ -multilineal alternada

$$\omega_p: \mathcal{D}(U) \times \dots \times \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$$

y estas aplicaciones son compatibles con los respectivos morfismos de restricción.

Convendremos en que las 0-formas valoradas en  $\mathcal{E}$  son las secciones globales de  $\mathcal{E}$ .

Cada  $p$ -forma diferencial  $\omega$  valorada en  $\mathcal{E}$  define en cada punto  $x \in X$  una aplicación  $\mathbb{R}$ -multilineal alternada

$$\begin{aligned} \omega_x: (T_x X) \times \dots \times (T_x X) &\longrightarrow E_x := \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \\ \omega_x(D_x^1, \dots, D_x^p) &:= \omega(D^1, \dots, D^p)(x) \end{aligned}$$

y es sencillo comprobar que no depende de los representantes  $D^1, \dots, D^p$  elegidos (basta considerar un entorno coordinado de  $x$ ). Diremos que  $\omega_x$  es el *valor* de  $\omega$  en el punto  $x$ .

**Ejemplos:**

(1) Las formas diferenciales valoradas en  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_X^\infty$  son las formas diferenciales ordinarias.

(2) La identidad  $I(D) := D$  es una 1-forma diferencial valorada en los campos tangentes; es decir,  $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ .

En general,  $I_p(D_1, \dots, D_p) := D_1 \wedge \dots \wedge D_p$  es una  $p$ -forma valorada en  $\mathcal{E} = \Lambda^p \mathcal{D}$ .

(3) Las 1-formas valorada en  $\mathcal{D}$  son los endomorfismos de  $\mathcal{D}$ , así que todo tensor de tipo (1,1) puede entenderse como una 1-forma valorada en  $\mathcal{D}$ .

(4) Sea  $\nabla$  una conexión lineal en los campos tangentes a  $X$ .

El tensor de torsión  $\text{Tor}(D_1, D_2) := D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2]$  de  $\nabla$  es una 2-forma valorada en los campos tangentes a  $X$ .

El tensor de curvatura  $R(D_1, D_2, D_3) := D_1^\nabla D_2^\nabla D_3 - D_2^\nabla D_1^\nabla D_3 - [D_1, D_2]^\nabla D_3$  de  $\nabla$  sólo es alternado en sus dos primeros índices, así que puede entenderse como una 2-forma  $R$  valorada en  $\text{End}(\mathcal{D})$ :

$$R(D_1, D_2) := D_1^\nabla D_2^\nabla - D_2^\nabla D_1^\nabla - [D_1, D_2]^\nabla .$$

(5) Cuando  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de una métrica no-singular, el tensor de curvatura  $R$  de  $\nabla$  puede entenderse como una 2-forma  $\hat{R}$  valorada en los 2-vectores, sin más que subir el último índice covariante mediante la métrica  $g$ .

(6) Cada sucesión  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  de  $p$ -formas ordinarias puede entenderse como una  $p$ -forma  $\omega := (\omega_1, \dots, \omega_n)$  valorada en  $(\mathcal{C}_X^\infty)^n$ :

$$\omega(D_1, \dots, D_p) = (\omega_1(D_1, \dots, D_p), \dots, \omega_n(D_1, \dots, D_p)) .$$

**Definición:** Si  $\omega_p$  es una  $p$ -forma valorada en  $\mathcal{E}$  y  $D$  es un campo tangente a  $X$ , definimos la *contracción interior* de  $\omega_p$  con  $D$  como la siguiente  $(p-1)$ -forma  $i_D \omega_p$  valorada en  $\mathcal{E}$ :

$$(i_D \omega_p)(D_2, \dots, D_p) := \omega_p(D, D_2, \dots, D_p) .$$

Es obvio que la contracción interior es  $\mathcal{C}_X^\infty$ -lineal tanto en la variable  $D$  como en la variable  $\omega_p$ . Además  $i_D i_D \omega_p = 0$  en virtud del carácter hemisimétrico de  $\omega_p$ .

**Definición:** Sea  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$  una aplicación  $\mathcal{C}_X^\infty$ -bilineal. Dada una  $p$ -forma  $\omega_p$  valorada en  $\mathcal{E}$  y una  $q$ -forma  $\omega'_q$  valorada en  $\mathcal{E}'$ , definimos su *producto exterior*  $\omega_p \wedge \omega'_q$  como la  $p+q$ -forma valorada en  $\mathcal{E}''$  que en cada sucesión  $(D_1, \dots, D_{p+q})$  toma el valor

$$\frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sg}(\sigma) \omega_p(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(p)}) \cdot \omega'_q(D_{\sigma(p+1)}, \dots, D_{\sigma(p+q)}) .$$

En el caso  $q = 0$ , cuando  $\omega'_q = e'$  es una sección del haz  $\mathcal{E}'$ , convenimos en que  $\omega_p \wedge e'$  es la  $p$ -forma

$$(\omega_p \wedge e')(D_1, \dots, D_p) := \omega_p(D_1, \dots, D_p) \cdot e'$$

y la denotaremos  $\omega_p \cdot e'$  cuando no sea causa de confusión.

Las demostraciones usuales prueban que  $i_D$  es una anti-derivación

$$i_D(\omega_p \wedge \omega'_q) = (i_D \omega_p) \wedge \omega'_q + (-1)^p \omega_p \wedge (i_D \omega'_q)$$

y que el producto exterior es anti-conmutativo:

$$\omega_p \wedge \omega'_q = (-1)^{pq} \omega'_q \wedge \omega_p$$

siempre que el producto exterior  $\omega'_q \wedge \omega_p$  se considere respecto del producto  $e' \cdot e := e \cdot e'$ . En particular, cuando  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ , la fórmula de conmutación anterior sólo es válida cuando el producto considerado en  $\mathcal{E}$  sea conmutativo.

### Ejemplos:

(1) La estructura de módulo  $\mathcal{C}_X^\infty \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  siempre es bilineal. Por tanto, si  $\omega_p$  es una  $p$ -forma ordinaria y  $\omega_q$  es una  $q$ -forma valorada en  $\mathcal{E}$ , entonces  $\omega_p \wedge \omega_q$  es una  $p + q$ -forma valorada en  $\mathcal{E}$ .

Cuando  $q = 0$ , si  $\omega$  es una forma diferencial ordinaria y  $e$  es una sección de  $\mathcal{E}$ , pondremos

$$\omega_p \otimes e := \omega_p \wedge e$$

de modo que, por definición,

$$(\omega_p \otimes e)(D_1, \dots, D_p) = \omega_p(D_1, \dots, D_p) e .$$

(2) Si  $\omega_p$  y  $\omega_q$  son formas diferenciales valoradas en los vectores tangentes a  $X$ , el producto exterior  $\omega_p \wedge \omega_q$  siempre se puede realizar respecto del corchete de Lie, y obtenemos una  $p + q$ -forma valorada en los vectores tangentes. En tal caso, al ser  $[D, D'] = -[D', D]$ , tendremos que  $\omega_p \wedge \omega_q = -(-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p$ .

Si disponemos de una métrica en  $X$ , podemos realizar el producto exterior  $\omega_p \wedge \omega_q$  respecto de la misma, y obtenemos una  $p + q$ -forma ordinaria en  $X$ . En este caso la fórmula  $\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p$  será válida siempre que tal métrica sea simétrica.

Por último, también podemos realizar  $\omega_p \wedge \omega_q$  respecto del producto exterior de vectores, y obtenemos una  $p + q$ -forma valorada en los 2-vectores. En este caso tendremos que  $\omega_p \wedge \omega_q = -(-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p$ .

(3) Siempre tenemos una aplicación bilineal canónica  $End(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $(T, e) \mapsto T(e)$ . Por tanto, si  $\omega'$  y  $\omega$  son formas diferenciales valoradas en  $End(\mathcal{E})$  y  $\mathcal{E}$  respectivamente,  $\omega' \wedge \omega$  es una forma diferencial valorada en  $\mathcal{E}$ .

**Teorema:** Si  $(U; u_1, \dots, u_n)$  es un abierto coordinado de  $X$  en el que  $\mathcal{E}$  es trivial, y  $\{e_1, \dots, e_r\}$  es una base de  $\mathcal{E}(U)$ , entonces las  $p$ -formas sobre  $U$  valoradas en  $\mathcal{E}$  forman un  $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo libre de base

$$(du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_p}) \otimes e_j ,$$

donde  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$  y  $1 \leq j \leq r$ .

*Demostración:* No hay más que observar que  $\mathcal{D}(U)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(U)$ -módulo libre de base las derivadas parciales respecto de  $u_1, \dots, u_n$ .

## B.2 Conexiones en fibrados vectoriales

Para establecer el cálculo diferencial de formas valoradas en un  $\mathcal{C}_X^\infty$ -módulo localmente libre de rango finito  $\mathcal{E}$  es necesario comparar las fibras  $E_x$  en puntos distintos, al menos cuando tenemos una curva que una tales puntos, un traslado paralelo de vectores de las fibras a lo largo de curvas de  $X$ . Es decir, es necesaria una conexión lineal en  $\mathcal{E}$ .

**Definición:** Dar una *conexión lineal* en  $\mathcal{E}$  es dar un morfismo de haces  $\nabla: \mathcal{D} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $(D, e) \mapsto D^\nabla e$ , tal que

$$\begin{aligned} D^\nabla(e_1 + e_2) &= D^\nabla e_1 + D^\nabla e_2 \\ (D_1 + D_2)^\nabla e &= D_1^\nabla e + D_2^\nabla e \\ (fD)^\nabla e &= f(D^\nabla e) \\ D^\nabla(fe) &= (Df)e + f(D^\nabla e) \end{aligned}$$

para toda función diferenciable  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ .

En tal caso diremos que una sección  $e$  del haz  $\mathcal{E}$  es *paralela* cuando  $D^\nabla e = 0$  para todo campo tangente  $D$ .

La *2-forma de curvatura*  $R$  de  $\nabla$  es la siguiente 2-forma valorada en  $\text{End}(\mathcal{E})$ :

$$R(D_1, D_2) := D_1^\nabla D_2^\nabla - D_2^\nabla D_1^\nabla - [D_1, D_2]^\nabla$$

de modo que, por definición,  $R(D_1, D_2)(e) := D_1^\nabla D_2^\nabla e - D_2^\nabla D_1^\nabla e - [D_1, D_2]^\nabla e$ .

Diremos que una conexión lineal  $\nabla$  en  $\mathcal{E}$  es *plana* cuando cada punto de  $X$  tenga un entorno  $U$  en el que  $\mathcal{E}$  sea trivial y admita una base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de secciones paralelas:  $D^\nabla e_i = 0$ . En tal entorno  $U$  el traslado paralelo de vectores es independiente del camino (dentro de tal entorno).

**Ejemplos:** (1) En  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_X^\infty$  tenemos la conexión lineal  $D^\nabla f := Df$ , que tiene curvatura nula y es la que siempre se usa en el cálculo diferencial de formas ordinarias.

(2) En el caso  $\mathcal{E} = \mathcal{D}$  de los campos tangentes a  $X$ , las conexiones lineales son las conexiones lineales sobre la variedad  $X$ .

(3) Dadas conexiones lineales en  $\mathcal{E}$  y en  $\mathcal{E}'$ , inducen de modo natural una conexión lineal en  $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ :

$$(D^\nabla T)(e) := D^\nabla(T(e)) - T(D^\nabla e) .$$

Esta conexión lineal en  $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  es compatible con la aplicación bilineal natural  $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ ,  $T \cdot e := T(e)$ , en el sentido de que

$$D^\nabla(T \cdot e) = D^\nabla(T(e)) = (D^\nabla T)(e) + T(D^\nabla e) = (D^\nabla T) \cdot e + T \cdot (D^\nabla e) .$$

En particular cada conexión lineal  $\nabla$  en  $\mathcal{E}$  induce de modo natural una conexión lineal en  $\text{End}(\mathcal{E})$ :

$$(D^\nabla T)(e) := D^\nabla(T(e)) - T(D^\nabla e)$$

compatible con el acoplamiento natural  $\text{End}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , y una conexión lineal en el dual  $\mathcal{E}^*$ ,

$$(D^\nabla \theta)(e) := D(\theta(e)) - \theta(D^\nabla e) ,$$

compatible con el acoplamiento natural  $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}_X^\infty$ .

(4) Si  $E$  es un espacio vectorial real de dimensión finita, en  $\mathcal{C}_X^\infty \otimes_{\mathbb{R}} E$  tenemos una conexión plana natural

$$D^\nabla \left( \sum_i f_i \otimes e_i \right) := \sum_i (Df_i) \otimes e_i$$

respecto de la cual los vectores de  $E$  definen secciones paralelas.

## B.3 Derivada de Lie y diferencial exterior

Fijemos una conexión lineal  $\nabla$  en un  $\mathcal{C}_X^\infty$ -módulo localmente libre de rango finito  $\mathcal{E}$ .

**Definición:** Si  $\omega$  es una  $p$ -forma diferencial valorada en  $\mathcal{E}$  y  $D$  es un campo tangente a  $X$ , definimos la *derivada de Lie* por ser la siguiente  $p$ -forma  $D^L \omega$  valorada en  $\mathcal{E}$ :

$$(D^L \omega)(D_1, \dots, D_p) := D^\nabla(\omega(D_1, \dots, D_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(D_1, \dots, [D, D_i], \dots, D_p) .$$

**Ejercicio:** Sea  $\{\tau_t\}$  el grupo uniparamétrico local del campo  $D$ . Demostrar que

$$D^L \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* \omega - \omega}{t} ,$$

donde  $\tau_t^* \omega$  ha de entenderse del siguiente modo:

$$(\tau_t^* \omega)_x(D_x^1, \dots, D_x^p) := \omega_{\tau_t(x)}(\tau_{t,*} D_x^1, \dots, \tau_{t,*} D_x^p) \in E_x$$

identificando  $E_x$  con  $E_{\tau_t(x)}$  mediante el traslado paralelo (asociado a  $\nabla$ ) a lo largo de la curva integral del campo  $D$ .

**Teorema:** Dado un producto bilineal  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ , si tenemos en  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$  y  $\mathcal{E}''$  sendas conexiones lineales compatibles, en el sentido de que  $D^\nabla(e \cdot e') = (D^\nabla e) \cdot e' + e \cdot (D^\nabla e')$ , entonces:

$$D^L(\omega \wedge \omega') = (D^L \omega) \wedge \omega' + \omega \wedge (D^L \omega') .$$

*Demostración:* La usual sigue siendo válida.

**Teorema:** Sea  $\Omega_p$  el haz de las  $p$ -formas diferenciales valoradas en  $\mathcal{E}$  y sea  $\Omega_\bullet := \bigoplus_p \Omega_p$ . Existe un único morfismo de haces  $\mathbb{R}$ -lineal  $d: \Omega_\bullet \rightarrow \Omega_\bullet$ , homogéneo y de grado 1 (es decir,  $d(\Omega_p) \subseteq \Omega_{p+1}$ ) tal que para todo campo tangente  $D$  tenemos

$$D^L = d \circ i_D + i_D \circ d.$$

*Demostración:* Demostremos primero la unicidad por inducción sobre  $p$ . Cuando  $p = 0$ , por hipótesis  $D^L e = d(i_D e) + i_D(de)$ . Como  $i_D e = 0$ , porque es una  $(-1)$ -forma, concluimos que  $(de)(D) = D^L e = D^\nabla e$ .

Cuando  $p \geq 1$  y  $\omega$  es una  $p$ -forma valorada en  $\mathcal{E}$ , observamos que  $d\omega$  está totalmente determinada si conocemos  $i_D(d\omega)$  para todo campo tangente  $D$ . Ahora bien, por hipótesis  $i_D(d\omega) = D^L \omega - d(i_D \omega)$  y, por hipótesis de inducción,  $d(i_D \omega)$  está determinada de modo único.

En cuanto a la existencia, definimos la diferencial exterior  $d$  por recurrencia sobre  $p$ . Cuando  $p = 0$ , definimos

$$(de)(D) := D^\nabla e$$

y, supuesto definida  $d$  para las  $(p-1)$ -formas, ponemos

$$(d\omega)(D, D_1, \dots, D_p) := (D^L \omega)(D_1, \dots, D_p) - (di_D \omega)(D_1, \dots, D_p).$$

Sólo hemos de probar que  $d\omega$  es una  $(p+1)$ -forma diferencial, porque obviamente verifica que  $D^L = i_D d + di_D$ . Claramente es  $\mathbb{R}$ -multilineal, porque  $di_D \omega$  lo es por hipótesis de inducción.

Veamos que es alternada. Es claro que  $(d\omega)(D, \dots, D_i, \dots, D_i, \dots) = 0$ . El problema se presenta cuando el primer campo  $D$  coincide con otro, que podemos suponer que es el siguiente, pues ya hemos demostrado que es alternada en las restantes variables. En tal caso

$$\begin{aligned} (d\omega)(D, D, D_2, \dots, D_p) &= (D^L \omega)(D, D_2, \dots, D_p) - (di_D \omega)(D, D_2, \dots, D_p) = \\ &= D^\nabla(\omega(D, D_2, \dots, D_p) - \sum_{i=2}^p \omega(D, \dots, [D, D_i], \dots)) \\ &\quad - (i_D di_D \omega)(D_2, \dots, D_p) \end{aligned}$$

se anula porque

$$\begin{aligned} (i_D di_D \omega)(D_2, \dots, D_p) &= D^L(i_D \omega)(D_2, \dots, D_p) - (di_D i_D \omega)(D_2, \dots, D_p) = \\ &= D^\nabla(\omega(D, D_2, \dots, D_p)) - \sum_{i=2}^p \omega(D, \dots, [D, D_i], \dots) \end{aligned}$$

Para concluir hay que probar que  $d\omega$  es  $\mathcal{C}_X^\infty$ -multilineal. La linealidad es clara en las variables  $D_2, \dots, D_p$ , porque ambos sumandos lo son. Concluimos que también lo

es en la primera variable, porque es alternada:

$$\begin{aligned} (d\omega)(fD, D_1, \dots, D_p) &= -(d\omega)(D_1, fD, \dots, D_p) = \\ &= -f(d\omega)(D_1, D, \dots, D_p) = f(d\omega)(D, D_1, \dots, D_p) \end{aligned}$$

**Teorema:** Dado un producto bilineal  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ , si tenemos en  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$  y  $\mathcal{E}''$  sendas conexiones lineales compatibles, en el sentido de que  $D^\nabla(e \cdot e') = (D^\nabla e) \cdot e' + e \cdot (D^\nabla e')$ , entonces

$$d(\omega_p \wedge \omega'_q) = (d\omega_p) \wedge \omega'_q + (-1)^p \omega_p \wedge (d\omega'_q) .$$

*Demostración:* Es consecuencia directa de las igualdades

$$\begin{aligned} i_D d &= D^L - di_D \\ i_D(\omega_p \wedge \omega'_q) &= (i_D \omega_p) \wedge \omega'_q + (-1)^p \omega_p \wedge (i_D \omega'_q) \\ D^L(\omega_p \wedge \omega'_q) &= (D^L \omega_p) \wedge \omega'_q + \omega_p \wedge (D^L \omega'_q) \end{aligned}$$

**Fórmula de Cartan:**  $(d\omega)(D_1, D_2) = D_1^\nabla(\omega(D_2)) - D_2^\nabla(\omega(D_1)) - \omega([D_1, D_2]) .$

*Demostración:* Para toda 1-forma diferencial  $\omega$  tenemos

$$\begin{aligned} (d\omega)(D_1, D_2) &= (i_{D_1} d\omega)(D_2) = [(D_1^L - di_{D_1})\omega](D_2) = \\ &= D_1^\nabla(\omega(D_2)) - \omega([D_1, D_2]) - [d(\omega(D_1))](D_2) \end{aligned}$$

y se concluye al observar que  $[d(\omega(D_1))](D_2) := D_2^\nabla(\omega(D_1))$ .

**Corolario:** Sea  $\nabla$  una conexión lineal en los campos tangentes a  $X$ . El tensor de torsión de  $\nabla$  es la diferencial exterior de la identidad:

$$\text{Tor}_\nabla = dI .$$

*Demostración:* Es consecuencia directa de la fórmula de Cartan:

$$(dI)(D_1, D_2) = D_1^\nabla(\text{Id}(D_2)) - D_2^\nabla(\text{Id}(D_1)) - \text{Id}([D_1, D_2]) = \text{Tor}_\nabla(D_1, D_2) .$$

**Ejemplo:** Toda conexión lineal  $\nabla$  sobre una variedad diferenciable induce una conexión lineal en los tensores de tipo  $(p, q)$  sobre  $X$ . Así para cada tensor  $T_p^q$  tenemos un tensor  $\nabla T_p^q$  de tipo  $(p+1, q)$ :

$$(\nabla T_p^q)(D, D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) := (D^\nabla T_p^q)(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) ,$$

y la anulción de  $\nabla T_p^q$  equivale a la condición de que  $T_p^q$  sea constante (auto-paralelo). Ahora bien,  $T_p^q$  puede considerarse como una 0-forma valorada en los tensores de tipo  $(p, q)$ , y su diferencial exterior es precisamente  $\nabla T_p^q$ , entendido como 1-forma valorada en los tensores de tipo  $(p, q)$ .

## B.4 Curvatura

En general no es cierto que  $d^2 = 0$ . Por ejemplo, para cualquier sección  $e$  de  $\mathcal{E}$  tenemos que

$$\begin{aligned} (d^2e)(D_1, D_2) &= [d(de)](D_1, D_2) \\ &= D_1^\nabla((de)(D_2)) - D_2^\nabla((de)(D_1)) - (de)([D_1, D_2]) = \\ &= D_1^\nabla(D_2^\nabla e) - D_2^\nabla(D_1^\nabla e) - [D_1, D_2]^\nabla e = R(D_1, D_2)(e) \\ d^2e &= R \wedge e \end{aligned}$$

donde la 2-forma de curvatura  $R$  valora en  $End(\mathcal{E})$  y el producto exterior se realiza con el acoplamiento natural  $End(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $T \cdot e := T(e)$ ; ya que en tal caso

$$(R \wedge e)(D_1, D_2) = (R \cdot e)(D_1, D_2) = R(D_1, D_2) \cdot e = R(D_1, D_2)(e) .$$

**Teorema:**  $d^2\omega = R \wedge \omega$

*Demostración:* Consideramos un abierto  $U \subset X$  en que  $\mathcal{E}$  sea trivial y una base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $\mathcal{E}(U)$ . Ahora

$$\omega = \omega_1 \otimes e_1 + \dots + \omega_r \otimes e_r ,$$

donde  $\omega_1, \dots, \omega_r$  son  $p$ -formas ordinarias y  $\omega_i \otimes := \omega_i \wedge e_i$ . Calculemos:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge e_i \\ d\omega &= \sum_{i=1}^r [(d\omega_i) \wedge e_i + (-1)^p \omega_i \wedge (de_i)] \\ d^2\omega &= \sum_{i=1}^r [(d^2\omega_i) \wedge e_i + (-1)^{p+1}(d\omega_i) \wedge (de_i) + (-1)^p(d\omega_i) \wedge (de_i) + \omega_i \wedge (d^2e_i)] \\ &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge (d^2e_i) = \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge (R \wedge e_i) = \sum_{i=1}^r (-1)^{2p} R \wedge \omega_i \wedge e_i = R \wedge \omega \end{aligned}$$

**Ejercicio:** En general no es cierto que la diferencial exterior conmute con la derivada de Lie. De hecho  $(d \circ D^L - D^L \circ d)\omega = -(i_D R) \wedge \omega$ .

**Identidad diferencial de Bianchi:**  $dR = 0$ .

*Demostración:* Para cada sección  $e$  del haz  $\mathcal{E}$  tenemos que

$$\begin{aligned} d^3e &= d(d^2e) = d(R \wedge e) = (dR) \wedge e + R \wedge (de) \\ d^3e &= d^2(de) = R \wedge (de) \end{aligned}$$

y concluimos que  $(dR) \wedge e = 0$ . Es decir,  $(dR)(D_1, D_2, D_3)(e) = 0$  y concluimos que  $(dR)(D_1, D_2, D_3)$  es siempre el endomorfismo nulo:  $dR = 0$ .

## B.5 Ecuaciones de estructura de Cartan

Sea  $\nabla$  una conexión lineal en los campos tangentes a  $X$ . Sea  $\{D_1, \dots, D_n\}$  una base local de campos tangentes y sea  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  su base dual. Tendremos:

$$(1) \quad dD_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ij} \otimes D_i$$

$$(2) \quad d^2 D_j = R \wedge D_j = \sum_{i=1}^n \Omega_{ij} \otimes D_i$$

$$(3) \quad \text{Tor} = dI = \sum_{i=1}^n \Theta_i \otimes D_i$$

para ciertas formas diferenciales ordinarias  $\omega_{ij}$ ,  $\Omega_{ij}$ ,  $\Theta_i$  que reciben el nombre de *1-formas de conexión*, *2-formas de curvatura* y *2-formas de torsión* respectivamente. Por definición

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(D) &= \theta_i(D^\nabla D_j) \\ \Omega_{ij}(D, D') &= \theta_i(R(D, D')D_j) \\ \Theta_i(D, D') &= \theta_i(\text{Tor}(D, D')) \end{aligned}$$

Estas formas diferenciales están relacionadas. Calculamos la diferencial de la identidad  $I = \sum_i \theta_j \otimes D_j = \sum_j \theta_j \wedge D_j$ :

$$\begin{aligned} dI &= \sum_j d\theta_j \wedge D_j - \sum_j \theta_j \wedge dD_j = \sum_i d\theta_i \otimes D_i - \sum_{i,j} \theta_j \wedge \omega_{ij} \otimes D_i = \\ &= \sum_i \left( d\theta_i + \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j \right) \otimes D_i \end{aligned}$$

y comparando con (3) obtenemos la **primera ecuación de estructura**:

$$d\theta_i + \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j = \Theta_i$$

Diferenciando (1) y comparando con (2) obtenemos la **segunda ecuación de estructura**:

$$d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \Omega_{ij}$$

En notación matricial, si consideramos que  $\theta := (\theta_i)$ ,  $\Theta := (\Theta_i)$  son formas diferenciales valoradas en las columnas de  $n$  términos y que  $\omega := (\omega_{ij})$ ,  $\Omega := (\Omega_{ij})$  son formas diferenciales valoradas en las matrices  $n \times n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d\theta + \omega \wedge \theta &= \Theta \\ d\omega + \omega \wedge \omega &= \Omega \end{aligned}$$

donde los productos exteriores se realizan con el producto de matrices. Si diferenciamos las ecuaciones de estructura, obtenemos las ecuaciones de Bianchi. En efecto, diferenciando la primera

$$0 + (d\omega) \wedge \theta - \omega \wedge (d\theta) = d\Theta$$

y sustituyendo  $d\theta$  y  $d\omega$  por los valores que dan las ecuaciones de estructura, obtenemos

$$(\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \theta - \omega \wedge (\Theta - \omega \wedge \theta) = d\Theta ,$$

que es la **primera ecuación de Bianchi**:

$$\Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta = d\Theta$$

Diferenciando la segunda ecuación de estructura

$$0 + (d\omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega) = d\Omega$$

y sustituyendo  $d\omega$  por el valor que da la segunda ecuación de estructura, obtenemos

$$(\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) = d\Omega ,$$

que es la **segunda ecuación de Bianchi**:

$$\Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega = d\Omega$$

En el caso de las conexiones simétricas, por definición su torsión  $\Theta$  es nula, y las ecuaciones de estructura y de Bianchi quedan algo simplificadas:

$$\begin{aligned} d\theta + \omega \wedge \theta &= 0 \\ d\omega + \omega \wedge \omega &= \Omega \\ \Omega \wedge \theta &= 0 \\ \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega &= d\Omega \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Comprobar que, elegida una base local de campos, la ecuación  $dR = 0$  equivale a la segunda ecuación de Bianchi, mientras que la primera equivale a la ecuación  $d(\text{Tor}) = d(dI) = R \wedge I$ .

## Apéndice C

# Electromagnetismo

Recordemos brevemente las hipótesis esenciales de la Teoría de la Relatividad:

1. Las partículas siguen trayectorias geodésicas de una métrica de tipo  $(+, -, -, -)$  que mide los intervalos de tiempo.
2. Cada partícula tiene un vector de impulso tangente a su trayectoria (que recoge su masa-energía y cantidad de movimiento), y la 3-forma  $\Pi_3$  que mide el impulso que traspasa cada región tridimensional es proporcional a la forma de Cartan de la métrica del tiempo:

$$C_3 = 8\pi\Pi_3 .$$

Para estudiar la interdependencia de la métrica del tiempo y las cargas eléctricas, la 3-forma de impulso debe medir también la carga que traspasa cada región tridimensional del espacio-tiempo  $\bar{X}$ , por lo que el vector de impulso  $I$  de cada partícula ha de tener una quinta componente que recoja su carga,

$$I = \bar{I} + Q ,$$

donde  $\bar{I}$  es el impulso espacio-temporal. Necesitamos que los vectores tangentes a la trayectoria de una partícula tengan 5 coordenadas mientras que la trayectoria es una curva de una variedad diferenciable de dimensión 4. Imaginaremos pues que las partículas no son puntuales, sino que ocupan una circunferencia de radio inapreciable cuyos vectores tangentes son las posibles cargas de una partícula, de modo que éstas se mueven en una variedad  $X$  de dimensión 5 dotada de una proyección regular  $X \rightarrow \bar{X}$  y de un campo<sup>1</sup> no nulo  $D$  tangente a las fibras, que supondremos son circunferencias. Recogeremos la suposición de que su radio es despreciable imponiendo la restricción de que sólo los objetos en  $X$  invariantes por el grupo uniparamétrico del campo  $D$  son observables, de modo que los diferentes puntos de una misma fibra carecen de significado; sólo la fibra y sus campos tangentes invariantes lo tienen, como un suceso en el espacio tiempo y las posibles cargas eléctricas en el mismo.

---

<sup>1</sup>Que ha de entenderse como la unidad de carga, digamos negativa.

La hipótesis fundamental de la teoría de Kaluza-Klein es que la métrica del tiempo  $\bar{g}$  en el espacio-tiempo  $\bar{X}$  viene dada por la distancia entre las fibras respecto de una métrica invariante  $g$  de tipo  $(+, -, -, -, -)$  tal que  $g(D, D) = -1$ :

$$D^L g = 0 \quad , \quad D \cdot D = -1 .$$

Llamaremos *horizontales* a los vectores ortogonales a  $D$ , de modo que cada campo tangente al espacio-tiempo  $\bar{X}$  puede levantarse de modo canónico y define un campo tangente horizontal en  $X$  que es invariante por serlo  $g$ . Nunca distinguiremos entre un campo y su levantamiento horizontal, aunque tal operación no respete el corchete de Lie. Así, cada tensor invariante  $T_p^q$  en  $X$  define un tensor  $\bar{T}_p^q$  en  $\bar{X}$ , pues siempre podemos levantar las 1-formas por imagen inversa. En particular  $g$  define una métrica  $\bar{g}$  en  $\bar{X}$  de tipo  $(+, -, -, -)$ , que es la *métrica del tiempo* y permite definir en  $\bar{X}$  los conceptos propios de la Teoría de la Relatividad.

Diremos que una curva en  $X$  es una *trayectoria* cuando sea transversal a las fibras y su proyección en  $\bar{X}$  sea una trayectoria. Una *partícula* es una trayectoria en  $X$  con un campo tangente  $I$ , llamado *impulso* (pentadimensional) de la partícula<sup>2</sup>. En  $X$  cada campo tangente descompone de modo único en suma de un campo horizontal y un campo *vertical* (tangente a las fibras), así que el impulso  $I$  descompone en la forma<sup>3</sup>

$$I = \bar{I} - eD ,$$

donde  $e = I \cdot D$  es<sup>4</sup> la *carga eléctrica* de la partícula, el *impulso espacio-temporal*  $\bar{I}$  es horizontal y su módulo es la *masa* (en reposo)  $m$  de la partícula. En particular  $I \cdot I = m^2 - e^2$ . Además la 1-forma invariante  $\omega_e := i_D g$  mide la carga de las partículas.

Aunque  $\bar{\omega}_e = 0$ , puede no anularse  $\overline{d\omega}_e$ . De hecho la 2-forma  $d\omega_e$  es la imagen inversa de una 2-forma  $\bar{\omega}_2$  en  $\bar{X}$ , llamada *2-forma del campo electromagnético*, porque  $d\omega_e$  es invariante y  $i_D(d\omega_e) = 0$ , pues se anula en  $D$  y en todo campo  $D_i$  tangente a  $\bar{X}$ :

$$\begin{aligned} i_D(d\omega_e)(D_i) &= D\omega_e(D_i) - D_i\omega_e(D) - \omega_e([D, D_i]) = \\ &= D(0) - D_i(-1) - \omega_e(0) = 0 \end{aligned}$$

Como  $d(d\omega_e) = 0$ , obtenemos el **Primer sistema de ecuaciones de Maxwell**:

$$\boxed{d\bar{\omega}_2 = 0}$$

Dada una orientación  $[\Omega_X]$  de  $X$  (que define en  $\bar{X}$  la orientación  $[\overline{i_D\Omega_X}]$ ), la distribución de partículas en  $X$  vendrá dada por una *4-forma de impulso*  $\bar{\Pi}_4$  valorada en los vectores tangentes a  $X$  (invariante, simétrica y con diferencial nula). Luego la 3-forma

$$\bar{\Pi}_3 := \overline{\bar{\Pi}_4(\dots, D)}$$

<sup>2</sup>Deberíamos imaginar que cada partícula ocupa toda la fibra de su trayectoria, que es un tubo bidimensional con un campo tangente invariante; pero lo hemos sustituido por una de las curvas integrales para simplificar la exposición, por lo que deberemos entender que dos partículas son la misma cuando difieren en la acción del grupo asociado al campo  $D$ .

<sup>3</sup>El signo  $-$  se debe a que hemos convenido que  $D$  es la unidad de carga negativa.

<sup>4</sup>la medida de

valorada en los vectores tangentes a  $\bar{X}$  mide el impulso espacio-temporal que traspasa las regiones tridimensionales de  $\bar{X}$  (es la forma de impulso  $\Pi_3$  considerada en el capítulo IV) y la 3-forma de carga

$$\bar{\omega}_C := \overline{\Pi_4(\dots, D)} \cdot D$$

mide la carga eléctrica que traspasa cada región tridimensional de  $\bar{X}$ .

Por otra parte, la métrica  $g$  define canónicamente una 4-forma valorada en los vectores tangentes, llamada 4-forma de Cartan,

$$\mathcal{C}_4 := - * (\hat{R} \wedge I_2) ,$$

donde  $\hat{R}$  denota el tensor de curvatura de la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  de  $g$ , entendido como 2-forma valorada en los 2-vectores e  $I_2$  es la 2-forma  $I_2(D_1, D_2) = D_1 \wedge D_2$ .

En la teoría del electromagnetismo de Kaluza-Klein, la **ecuación de campo** afirma que la forma de Cartan de  $g$  es proporcional a la forma de impulso:

$$\mathcal{C}_4 = 8\pi\Pi_4$$

y la **ley del movimiento** afirma que el impulso  $I$  de cualquier partícula es auto-paralelo respecto de  $\nabla$ :

$$I^\nabla I = 0$$

## C.1 Interpretación en el Espacio-Tiempo

Sea  $X \rightarrow \bar{X}$  una proyección regular, de fibras circunferencias, sobre una variedad de dimensión 4, sea  $D$  un campo tangente a sus fibras y sea  $g$  una métrica de tipo  $(+, -, -, -, -)$  en  $X$  tal que  $D^L g = 0$  y  $D \cdot D = -1$ . Supondremos además que  $X$  está orientada y denotaremos  $\Omega_X$  la correspondiente forma de volumen, y consideraremos en  $\bar{X}$  la orientación  $\Omega_{\bar{X}} := \overline{i_D \Omega_X}$ .

Sea  $\omega_e := i_D g$  y sea  $\bar{\omega}_2 := d\omega_e$ . Llamaremos *campo electromagnético* al endomorfismo  $\tilde{\omega}_2$  que se obtiene al subir el segundo índice covariante de  $\bar{\omega}_2$  con la métrica  $\bar{g}$ :

$$\bar{\omega}_2(D_1, D_2) = \tilde{\omega}_2(D_1) \cdot D_2 .$$

Usando las notaciones del apartado anterior, veamos cómo se interpretan las sencillas leyes de la teoría de Kaluza-Klein en el espacio-tiempo  $\bar{X}$ .

**Ley del movimiento:** Sea  $I = \bar{I} - eD$  un campo tangente a  $X$ . La ley del movimiento  $I^\nabla I = 0$  es equivalente a las siguientes condiciones:

- 1) La carga eléctrica es constante:  $Ie = 0$  .
- 2)  $\bar{I}^\nabla \bar{I} = e \tilde{\omega}_2(\bar{I})$  , donde  $\bar{\nabla}$  denota la conexión de Levi-Civita de  $\bar{g}$ .

**Ecuación de campo:** Sea  $\Pi_4$  una 4-forma simétrica en  $X$ . Si  $\mathcal{C}_4 = 8\pi\Pi_4$  entonces:

- 1)  $d(*\bar{\omega}_2) = -16\pi\bar{\omega}_C$  (Segundo sistema de ecuaciones de Maxwell).

2) Se verifica la **Ecuación de Einstein**

$$\mathcal{C}_3(\bar{g}) = 8\pi \left( \bar{\Pi}_3 - \frac{(*\bar{\omega}_2) \wedge \tilde{\omega}_2}{16\pi} - \frac{|\bar{\omega}_2|^2 (*I_3)}{64\pi} \right),$$

donde  $\mathcal{C}_3(\bar{g})$  es la 3-forma de Cartan de  $\bar{g}$  y  $I_3(D_1, D_2, D_3) = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ .

Es decir, la masa  $m$  de cada partícula es constante, pues lo es la carga  $e$  y también  $I \cdot I = m^2 - e^2$  es constante, ya que  $I(I \cdot I) = 2(\nabla_I I) \cdot I = 0$ . Además, si  $m \neq 0$  y ponemos  $\bar{I} = m\bar{T}$ , entonces en lugar de la trayectoria geodésica  $\bar{T}^{\nabla}\bar{T} = 0$  que seguiría la partícula de acuerdo con la Teoría de la Relatividad, ésta se desvía como si actuase una *fuerza electromagnética*  $e\tilde{\omega}_2(\bar{T})$ , que es proporcional a la carga  $e$  y depende de la velocidad espacio-temporal  $\bar{T}$  de la partícula:

$$m(\bar{T}^{\nabla}\bar{T}) = e\tilde{\omega}_2(\bar{T}).$$

Por otra parte, la ecuación de Einstein se verifica como si el campo electromagnético tuviera una 3-forma de impulso

$$T_3^1 := -\frac{(*\bar{\omega}_2) \wedge \tilde{\omega}_2}{16\pi} - \frac{|\bar{\omega}_2|^2 (*I_3)}{64\pi}$$

que se ha de añadir a la de la materia  $\bar{\Pi}_3$ .

*Demostración:* Pasemos ya a demostrar las afirmaciones anteriores, para lo que consideramos una base local orientada  $\{D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 = D\}$  de campos tangentes tal que  $D_0, D_1, D_2, D_3$  son (levantamientos horizontales de) campos tangentes a  $\bar{X}$  y la matriz de  $g$  en tal base es diagonal  $(1, -1, -1, -1, -1)$ . La base dual se denotará  $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 = \theta\}$ , donde  $\theta = -\omega = -i_D g$ . La 2-forma de campo electromagnético  $\bar{\omega}_2$  será

$$\bar{\omega}_2 = \sum_{i < j} 2F_{ij}\theta_i \wedge \theta_j = \sum_{i,j} 2F_{ij}\theta_i \otimes \theta_j = \sum_{i,j} F_{ij}\theta_i \wedge \theta_j,$$

donde  $F_{ji} := -F_{ij}$  y los subíndices varían entre 0 y 3. Por tanto, el campo electromagnético, que es el endomorfismo asociado a  $\bar{\omega}_2$ , es

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2(D_i) &= \sum_j 2F_i^j D_j \\ \tilde{\omega}_2 &= \sum_{i,j} 2F_i^j \theta_i \otimes D_j \end{aligned}$$

donde  $F_i^j := g_{jj}F_{ij}$ . En esta base de campos, las 1-formas de conexión son

$$\begin{aligned} \omega_{44} &= 0 \\ \omega_{4j} &= \sum_i F_{ij}\theta_i \\ \omega_{i4} &= \sum_j F_j^i\theta_j \\ \omega_{ij} &= \bar{\omega}_{ij} + F_j^i\theta \end{aligned}$$

donde  $\bar{\omega}_{ij}$  son las 1-formas de la conexión  $\bar{\nabla}$  asociada a  $\bar{g}$  en la base local de campos  $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$ . En efecto, estas 1-formas definen una conexión lineal que conserva la métrica  $g$  porque

$$\omega_{44} = \omega_{ii} = 0 \quad , \quad \omega_{i4} = g_i \omega_{4i} \quad , \quad \omega_{ij} = -g_i g_j \omega_{ji} \quad ,$$

y que tiene torsión nula en virtud de la primera ecuación de estructura de Cartan (recuérdese que  $d\theta = -d\omega_e = -\sum_{i,j} F_{ij} \theta_i \wedge \theta_j$ ):

$$\begin{aligned} d\theta + \sum_j \omega_{4j} \wedge \theta_j &= -\sum_{i,j} F_{ij} \theta_i \wedge \theta_j + \sum_{i,j} F_{ij} \theta_i \wedge \theta_j = 0 \\ d\theta_i + \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j + \omega_{i4} \wedge \theta &= \left( d\theta_i + \sum_j \bar{\omega}_{ij} \wedge \theta_j \right) + \sum_j F_j^i \theta \wedge \theta_j + \sum_j F_j^i \theta_j \wedge \theta = 0 \end{aligned}$$

En términos de la derivada covariante de campos, esta determinación de las formas de conexión puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} D^\nabla D &= 0 \\ D_i^\nabla D_j &= D_i^{\bar{\nabla}} D_j + F_{ij} D \\ D^\nabla D_i &= D_i^\nabla D = \sum_j F_i^j D_j = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_2(D_i) \end{aligned}$$

En términos de la diferencial tenemos que

$$dD = \sum_{i,j} F_i^j \theta_i \otimes D_j$$

y por tanto  $2d\bar{D} = \tilde{\omega}_2$ . Además, si  $\bar{D} = \sum_i f_i D_i$  es un campo tangente a  $\bar{X}$ , entonces

$$\bar{D}^\nabla \bar{D} = \bar{D}^{\bar{\nabla}} \bar{D} - \sum_{i,j} f_i f_j F_{ij} D = \bar{D}^{\bar{\nabla}} \bar{D} \quad .$$

y  $D^\nabla \bar{D} = \bar{D}^\nabla D$  porque  $[D, \bar{D}] = 0$ . Ahora ya podemos interpretar en  $\bar{X}$  la ley del movimiento. Copmo

$$\begin{aligned} I^\nabla I &= I^\nabla \bar{I} - (Ie)D - eI^\nabla D \\ &= \bar{I}^\nabla \bar{I} - eD^\nabla \bar{I} - (Ie)D - e\bar{I}^\nabla D + e^2 D^\nabla D \\ &= \left( \bar{I}^\nabla \bar{I} - 2e(dD)(\bar{I}) \right) - (Ie)D = \left( \bar{I}^\nabla \bar{I} - e\tilde{\omega}_2(\bar{I}) \right) - (Ie)D \end{aligned}$$

concluimos que la anulación de  $I^\nabla I$  equivale a la de su componente vertical  $(Ie)D$  (es decir,  $Ie = 0$ ) y su componente horizontal  $\bar{I}^\nabla \bar{I} - e\tilde{\omega}_2(\bar{I})$ .

Para interpretar en  $\bar{X}$  la ecuación de campo, calculamos las 2-formas de curvatura

mediante la segunda ecuación de estructura de Cartan:

$$\begin{aligned}
\Omega_{44} &= 0 + \sum_i \omega_{4i} \wedge \omega_{i4} = \sum_i g_{ii} \omega_{4i} \wedge \omega_{4i} = 0 \\
\Omega_{4j} &= \sum_i (dF_{ij} \wedge \theta_i + F_{ij} d\theta_i) + \sum_i \omega_{4i} \wedge \omega_{ij} \\
\Omega_{i4} &= \sum_j (dF_j^i \wedge \theta_j + F_j^i d\theta_j) + \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j4} \\
\Omega_{ij} &= \bar{\Omega}_{ij} + dF_j^i \wedge \theta + F_j^i d\theta + \sum_k (F_k^i \theta \wedge \bar{\omega}_{kj} + \bar{\omega}_{ik} \wedge F_j^k \theta) + \omega_{i4} \wedge \omega_{4j}
\end{aligned}$$

donde  $\bar{\Omega}_{ij}$  son las 2-formas de curvatura de  $\bar{\nabla}$ . Calculemos ahora el tensor de Ricci en un punto de  $X$  (suponiendo que la base local  $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$  se elige de modo que las 1-formas  $\bar{\omega}_{ij}$ , y por tanto las 2-formas  $d\theta_i$ , se anulan en tal punto)

$$\begin{aligned}
R_{44} &= \sum_i R_{i44}^i = \sum_i \Omega_{i4}(D_i, D) = - \sum_{i,j} F_j^i F_i^j = \sum_{i,j} g_{ii} g_{jj} F_{ij}^2 = \frac{1}{4} |\bar{\omega}_2|^2 \\
R_{j4} = R_{4j} &= \sum_i R_{i4j}^i = \sum_i \Omega_{ij}(D_i, D) = \sum_i D_i(F_j^i) \\
R_{ij} &= \sum_k R_{kij}^k + R_{4ij}^4 = \sum_k \Omega_{kj}(D_k, D_i) + \Omega_{4j}(D, D_i) = \\
&= \bar{R}_{ij} + \sum_k (F_j^k (-2F_{ki}) - F_i^k F_{kj} - F_{ik} F_j^k) = \\
&= \bar{R}_{ij} + \sum_k (F_j^k F_{ik} - F_i^k F_{kj}) = \\
&= \bar{R}_{ij} + \sum_k (F_{jk} F_i^k - F_i^k F_{kj}) = \bar{R}_{ij} - 2 \sum_k F_i^k F_{kj}
\end{aligned}$$

la curvatura escalar

$$\kappa = \sum_j g_{jj} R_{jj} - R_{44} = \bar{\kappa} - 2 \sum_{j,k} F_j^k F_k^j + \sum_{i,j} F_j^i F_i^j = \bar{\kappa} + \frac{1}{4} |\bar{\omega}_2|^2,$$

y el tensor de Einstein contravariante  $G^2$

$$\begin{aligned}
G^{j4} &= G^{4j} = \sum_i D_i F^{ij} \\
G^{ij} &= \bar{G}^{ij} - 2 \sum_k F^{ik} F_k^j - \frac{1}{8} |\bar{\omega}_2|^2 g^{ij}
\end{aligned}$$

Por otra parte, recordando que  $(*\alpha \cdot \beta)\Omega_X = \alpha \wedge \beta$ , tenemos que

$$*(D_0 \wedge \dots \hat{D}_s \dots \wedge D) = (-1)^s g_{ss} D_s,$$

y un cálculo directo permite concluir que  $-*(\widehat{R} \wedge I_2) = C_1^1(\Omega_X \otimes G^2)$ . Por ejemplo, cuando  $r \neq s$ , el coeficiente de  $\widehat{\theta}_r \otimes D_s := (\theta_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta}_r \wedge \dots \wedge \theta_3) \otimes D_s$  es

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} \otimes D_0 & : & -R_{01}^{14} - R_{02}^{24} - R_{03}^{34} &= G^{40} \\ \widehat{\theta}_0 \otimes D & : & R_{14}^{01} + R_{24}^{02} + R_{34}^{03} &= G^{04} \\ \widehat{\theta}_1 \otimes D_2 & : & R_{02}^{01} + R_{23}^{13} + R_{24}^{14} &= -G^{12} \\ \widehat{\theta}_0 \otimes D_3 & : & R_{13}^{01} + R_{23}^{02} - R_{34}^{04} &= G^{03} \end{aligned}$$

y el coeficiente de  $\widehat{\theta}_h \otimes D_h$  es

$$\begin{aligned} -\sum_{r,s \neq h} (-1)^h g_{hh} R_{rs}^{rs} &= \sum_r (-1)^h g_{hh} R_r^{rh} - (-1)^h g_{hh} \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ij}^{ij} = \\ &= (-1)^h \left[ \sum_r R_r^{rh} - \frac{1}{2} \kappa g^{hh} \right] = (-1)^h G^{hh} \end{aligned}$$

Esta igualdad  $\mathcal{C}_4 := -*(R \wedge Id_2) = C_1^1(\Omega_X \otimes G^2)$  permite obtener que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}_4(\dots, D)} &= \sum_{i,j} (-1)^i G^{ij} \widehat{\theta}_i \otimes D_j = \\ &= C_3^1(\bar{g}) - \sum_{i,j} (-1)^i \left( 2 \sum_k F^{ik} F_k^j + \frac{1}{8} |\bar{\omega}_2|^2 g^{ij} \right) \widehat{\theta}_i \otimes D_j \end{aligned}$$

donde ahora  $\widehat{\theta}_i := \theta_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta}_i \wedge \dots \wedge \theta_3$ . Poniendo  $\theta_{ij} := \theta_i \wedge \theta_j$ , etc., tenemos que

$$*\theta_{ij} = (-1)^{i+j} g_{ii} g_{jj} \widehat{\theta}_{ij}.$$

Si ponemos  $F := \frac{1}{2} \bar{\omega}_2 = \sum_{i < j} F_{ij} \theta_{ij}$ , y  $\widetilde{F} := \frac{1}{2} \widetilde{\omega}_2 = \sum_{i,j} F_i^j \theta_i \otimes D_j$ , entonces

$$\begin{aligned} *F &= F^{10} \theta_{23} - F^{20} \theta_{13} + F^{30} \theta_{12} + F^{21} \theta_{03} - F^{31} \theta_{02} + F^{32} \theta_{01} \\ (*F) \wedge \widetilde{F} &= \sum_j ( \quad \quad \quad F^{10} F_0^j \theta_{023} - F^{20} F_0^j \theta_{013} + F^{30} F_0^j \theta_{012} \\ &\quad - F^{01} F_1^j \theta_{123} \quad \quad \quad - F^{21} F_1^j \theta_{013} + F^{31} F_1^j \theta_{012} \\ &\quad - F^{02} F_2^j \theta_{123} + F^{12} F_2^j \theta_{023} \quad \quad \quad + F^{32} F_2^j \theta_{012} \\ &\quad - F^{03} F_3^j \theta_{123} + F^{13} F_3^j \theta_{023} - F^{23} F_3^j \theta_{013} \quad \quad \quad ) \otimes D_j \\ (*F) \wedge \widetilde{F} &= -\sum_{i,j} (-1)^i \left( \sum_k F^{ik} F_k^j \right) \widehat{\theta}_i \otimes D_j \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} *(I_3) &= *(\theta_{123} \otimes D_{123} + \theta_{023} \otimes D_{023} + \theta_{013} \otimes D_{013} + \theta_{012} \otimes D_{012}) = \\ &= -\theta_{123} \otimes D_0 - \theta_{023} \otimes D_1 + \theta_{013} \otimes D_2 - \theta_{012} \otimes D_3 = -\sum_{i,j} (-1)^i g^{ij} \widehat{\theta}_i \otimes D_j \end{aligned}$$

Como la ecuación  $\mathcal{C}_4 = 8\pi \Pi_4$  implica  $\overline{\mathcal{C}_4(\dots, D)} = 8\pi \overline{\Pi_4(\dots, D)} = 8\pi \overline{\Pi_3}$ , se sigue que

$$C_3(\bar{g}) = 8\pi \overline{\Pi_3} + (-2(*F) \wedge \widetilde{F} - \frac{1}{8} |\bar{\omega}_2|^2 (*I_3))$$

y, al recordar que  $F := \frac{1}{2}\bar{\omega}_2$ , obtenemos la ecuación de Einstein.

Por otra parte, la igualdad  $\mathcal{C}_4 := - * (R \wedge I_2) = C_1^1(\Omega_X \otimes G^2)$  también permite obtener que

$$\overline{\mathcal{C}_4(\dots, D) \cdot D} = - \sum_j (-1)^j G^{j4} \hat{\theta}_j = - \sum_j (-1)^j \left( \sum_i D_i F^{ij} \right) \hat{\theta}_j = -d(*F)$$

e introduciendo tal igualdad en la ecuación  $8\pi\bar{\omega}_C := 8\pi\overline{\Pi_4(\dots, D) \cdot D} = \overline{\mathcal{C}_4(\dots, D) \cdot D}$  obtenemos el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell

$$d(*\bar{\omega}_2) = -16\pi\bar{\omega}_C .$$

## C.2 Ley de Lorentz

Supongamos que las fuerzas gravitatorias son despreciables, que el espacio-tiempo  $(\bar{X}, \bar{g})$  es el espacio-tiempo de Minkowski. Elegido un sistema de referencia inercial, el campo electromagnético será:

$$\tilde{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $E_i := 2F_{i0}$ ,  $B_1 := 2F_{23}$ ,  $B_2 := 2F_{31}$  y  $B_3 := 2F_{12}$ . De acuerdo con la ley del movimiento, el campo  $\vec{E} := \tilde{\omega}_2(\partial_t)$  es la fuerza que se ejerce sobre la unidad de carga positiva en reposo, y suele decirse que es el *campo eléctrico* y que  $\vec{B} := *\tilde{\omega}_2(\partial_t)$  es el *campo magnético*.

El impulso (espacio-temporal) de una partícula de velocidad aparente  $\vec{v}$  y masa aparente  $m \neq 0$  es

$$\vec{I} = m\partial_t + \vec{p} = m(\partial_t + \vec{v}) = mT ,$$

así que  $\tilde{\omega}_2(T) = (\vec{E} \cdot \vec{v})\partial_t + (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , y la componente espacial de la Ley del movimiento  $T^{\nabla} \vec{I} = e\tilde{\omega}_2(T)$  es la **Ley de Lorentz**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) .$$

En cuanto a la componente temporal, que da la variación de la masa aparente

$$\frac{dm}{dt} = e(\vec{E} \cdot \vec{v}) ,$$

es consecuencia de la Ley de Lorentz y de la ortogonalidad de  $T$  y  $dT/dt$ :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = e(\vec{E} \cdot \vec{v}) .$$

### C.3 Ecuaciones de Maxwell Clásicas

Seguimos suponiendo que  $(\bar{X}, \bar{g})$  es el espacio-tiempo de Minkowski. Con las notaciones anteriores, la 2-forma del campo electromagnético  $\bar{\omega}_2$  es

$$E_1 dx_1 \wedge dt + E_2 dx_2 \wedge dt + E_3 dx_3 \wedge dt + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 ,$$

así que el primer sistema de ecuaciones de Maxwell  $d\bar{\omega}_2 = 0$  afirma que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 \\ \partial_t B_1 &= \partial_3 E_2 - \partial_2 E_3 \\ \partial_t B_2 &= \partial_1 E_3 - \partial_3 E_1 \\ \partial_t B_3 &= \partial_2 E_1 - \partial_1 E_2 \end{aligned}$$

lo que puede expresarse de forma más compacta como:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \end{aligned}$$

En cuanto al segundo sistema de ecuaciones de Maxwell, la 3-forma de carga  $\bar{\omega}_C$  será

$$\sigma dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - j_1 dt \wedge dx_2 \wedge dx_3 + j_2 dt \wedge dx_1 \wedge dx_3 - j_3 dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 ,$$

donde  $\sigma$  es la carga por unidad de volumen y  $j_i$  es la carga que en la unidad de tiempo traspasa la unidad de área ortogonal a la dirección  $\partial_i$ . Como  $*\bar{\omega}_2$  es

$$-E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_1 \wedge dx_3 - E_3 dx_1 \wedge dx_2 - B_1 dt \wedge dx_1 - B_2 dt \wedge dx_2 - B_3 dt \wedge dx_3$$

la ecuación  $d(*\bar{\omega}_2) = -16\pi\bar{\omega}_C$  afirma que

$$\begin{aligned} \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 &= 16\pi\sigma \\ -\partial_t E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 &= 16\pi j_1 \\ -\partial_t E_2 + \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 &= 16\pi j_2 \\ -\partial_t E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 &= 16\pi j_3 \end{aligned}$$

Si introducimos el *vector de corriente*  $\vec{j} := j_1\partial_1 + j_2\partial_2 + j_3\partial_3$  (la parte espacial del vector que define  $*\bar{\omega}_C$ ), estas ecuaciones se escriben de forma más compacta como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 16\pi\sigma \\ -\partial_t \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{B} &= 16\pi\vec{j} \end{aligned}$$

### C.4 Notas

1) Hemos considerado una proyección regular  $p: X \rightarrow \bar{X}$  de fibras circunferencias con un campo vertical  $D$  que no se anula en ningún punto. El grupo uniparamétrico

$G = \{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  del campo  $D$  tiene un periodo en cada circunferencia, que es constante (suponiendo que  $\bar{X}$  es conexa). En efecto, si  $F = p^{-1}(\bar{x})$  es la fibra de un punto  $\bar{x} \in \bar{X}$  y  $N$  denota el fibrado normal de  $F$  en  $X$ , entonces la aplicación exponencial define una isometría  $G$ -equivariante de un entorno de la sección nula de  $N$  con un entorno de  $C$  en  $X$ ; luego, sustituyendo  $\bar{X}$  por un entorno de  $\bar{x}$ , podemos suponer que  $X = N$ . En tal caso, si  $x \in C$ , entonces la isotropía de  $x$  coincide con la de cualquier vector de  $N_x$ , ya que  $\tau_t$  opera por la identidad en  $N_x$  cuando  $\tau_t(x) = x$  al ser  $p_*: N_x \rightarrow T_{\bar{x}}\bar{X}$  un isomorfismo.

Es decir, la estructura en la que se desarrolla la teoría de Kaluza-Klein es la de un fibrado principal  $p: X \rightarrow \bar{X}$  de grupo estructural un grupo de Lie compacto y conexo  $G$  de dimensión 1. Cada vector no nulo  $e$  del álgebra de Lie de  $G$  define un campo vertical  $D_e$  en  $X$  que no se anula en ningún punto. Obtenemos así una familia de campos que difieren en un factor constante no nulo y son las *unidades de carga* (con signo). La métrica  $g$ , que en principio está definida salvo un factor constante positivo, queda determinada por la unidad de carga  $D$  al imponer la condición  $g(D, D) = -1$ . Como  $g$  permite definir la métrica del tiempo  $\bar{g}$ , vemos que fijar la unidad de carga (sin signo) equivale a fijar la unidad de tiempo (y por tanto de longitud y masa). *El segundo es una unidad de carga.*

2) Fijada la unidad de tiempo, el impulso  $\bar{I}$  de cada partícula está determinado por la regla elegida para fijar la unidad de masa a partir de la de tiempo, ya que su módulo es la masa. La descomposición del impulso pentadimensional  $I = \bar{I} + Q$  en su componente horizontal y vertical muestra que la determinación de la unidad de masa equivale a la de la unidad de carga (sin signo).

Hemos fijado la unidad de masa para que la ecuación de Poisson sea  $\Delta u = -4\pi\rho$ , de modo que la constante de la gravitación universal es 1. Veamos cuál es la unidad de carga correspondiente. En ausencia de campo magnético,  $\vec{B} = 0$ , la primera ecuación de Maxwell  $\text{rot } \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = 0$  muestra que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es conservativo, y la segunda ecuación

$$\text{div } \vec{E} = 16\pi\sigma$$

muestra (ver el capítulo II) que las cargas negativas atraen a las cargas positivas como si actuara una fuerza proporcional a las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, siendo 4 la constante de proporcionalidad: La unidad de carga natural  $D$  es el doble de la unidad  $D'$  que daría la constante 1 en la Ley de Coulomb. Si tomamos  $D' := D/2$  como unidad de carga negativa, en el nuevo sistema de unidades el campo electromagnético será la mitad y la 3-forma de carga será el doble

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \frac{1}{2}\vec{E} \\ \vec{B}' &= \frac{1}{2}\vec{B} \\ \sigma' &= 2\sigma \\ \vec{j}' &= 2\vec{j}\end{aligned}$$

de modo que el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell toma el aspecto usual

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E}' &= 4\pi\sigma' \\ -\partial_t \vec{E}' + \operatorname{rot} \vec{B}' &= 4\pi\vec{j}'\end{aligned}$$

y la constante de proporcionalidad en la Ley de Coulomb pasa a ser 1. Además, la ecuación de Einstein es

$$\bar{G}^{ij} = 8\pi \left( \bar{T}^{ij} + \frac{1}{4\pi} \left( \sum_k F^{ik} F_k^j + \frac{1}{4} \sum_{kl} F^{kl} F_{kl} g^{ij} \right) \right)$$

donde  $E'_i = F_{i0}$ ,  $B'_1 = F_{23}$ ,  $B'_2 = F_{31}$ ,  $B'_3 = F_{12}$ , y  $\bar{T}^2$  el tensor de materia correspondiente a  $\bar{\Pi}_3$ , que es la forma usual de enunciarla.

**3)** Si se hubiera convenido en tomar  $g(D, D) = 1$ , de modo que  $g$  fuera de tipo  $(1, 1, -1, -1, -1)$ , entonces la 3-forma de impulso del campo electromagnético cambiaría de signo y su densidad de masa-energía sería negativa. En efecto, el coeficiente de  $\hat{\theta}_0 \otimes D_0$  en  $T_3^1$  es

$$\frac{1}{8\pi} \left( 2 \sum_k F^{0k} F_k^0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_i g_j F_{ij}^2 \right) = \frac{|\vec{E}'|^2 + \frac{1}{2}(-|\vec{E}'|^2 + |\vec{B}'|^2)}{16\pi} = \frac{|\vec{E}'|^2 + |\vec{B}'|^2}{32\pi}$$

y siempre es positivo, salvo en el caso  $\bar{\omega}_2 = 0$ .

**4)** Nótese que los coeficientes de  $\hat{\theta} \otimes D_j$  no intervienen en los razonamientos anteriores, debido a que sólo  $\Pi_4(\dots, D)$  tiene significado físico. No obstante, la condición de que  $\Pi_4$  sea simétrica determina tales coeficientes cuando  $j = 0, 1, 2, 3$ , así que sólo la componente en  $\hat{\theta} \otimes D$  es irrelevante. Ni siquiera la condición  $d\Pi_4 = 0$  impone alguna restricción sobre este coeficiente, pues

$$d(\hat{\theta} \otimes D) = (d\hat{\theta}) \otimes D \pm \hat{\theta} \wedge (dD) = 0$$

porque  $d\hat{\theta} = 0$  al ser una 5-forma en  $\bar{X}$ , que tiene dimensión 4, y  $\hat{\theta} \wedge (dD)$  al estar  $dD$  en el sistema de Pfaff generado por  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

**5)** Para simplificar los cálculos, se han realizado en un sistema de referencia móvil. Si fijamos un sistema de coordenadas locales  $(t = x_0, x_1, x_2, x_3, s)$  en  $X$  tal que  $D = \partial/\partial s$ , tendremos que  $g = \bar{g} - \omega_e \otimes \omega_e$ , donde  $\omega_e := i_D g$ , de modo que

$$\begin{aligned}\omega_e &= \sum_i A_i(x_0, x_1, x_2, x_3) dx_i - ds \\ g &= \begin{pmatrix} \bar{g}_{ij} + A_i A_j & A_i \\ A_j & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**6)** La 1-forma  $\omega_e$  define una conexión en el fibrado principal  $X \rightarrow \bar{X}$  (no en  $X$ ) y la 2-forma del campo electromagnético  $\bar{\omega}_2$  es su curvatura, así que es la obstrucción a que tal conexión sea trivial. Es decir, en el espacio tangente la métrica  $g$  es el producto directo de una métrica de la base por otra de la fibra; pero de ahí no se sigue necesariamente que lo sea en un entorno de cada punto, siendo el campo electromagnético precisamente la obstrucción a que tengamos  $g = \bar{g} - ds^2$ .



# Bibliografía

- [1] E. Artin: *Algèbre géométrique*, Cahiers scientifiques XXVII, Ed. Gauthier-Villars, Paris (1962).
- [2] P. G. Bergmann: *Introduction to the Theory of Relativity*, Ed. Dover, Nueva York (1976).
- [3] A. L. Besse: *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [4] E. Cartan: Les variétés à conexion affine, *Ann. Ec. Norm. Sup.* **40** (1923), 1-25.
- [5] E. Cartan: Les variétés à conexion affine (suite), *Ann. Ec. Norm. Sup.* **41** (1924), 325-412.
- [6] J. Ehlers: The newtonian limit of General Relativity, en *Classical mechanics and Relativity: relationships and consistency*, Nápoles (1991).
- [7] A. Einstein: *El significado de la relatividad*, Planeta-Agostini, Barcelona (1985).
- [8] A. Einstein, L. Infeld: The gravitational equations and the problem of motion, *Ann. of Math.* **41** (1940), 455-464.
- [9] O. D. Kellog: *Foundations of Potential theory*, Springer-Verlag, Berlin (1967).
- [10] P. Kunzle: Covariant newtonian limit of Lorentz space-times, *Gen. Rel. and Grav.* **7** (1976), 445-457.
- [11] E. Mach: *La Mécanique*, Ed Hermann, Paris (1925).
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*, Freeman & Co., Nueva York (1973).
- [13] B. O'Neill: *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, Nueva York (1983).
- [14] S. Parrot: *Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry*, Springer-Verlag, Nueva York (1987).
- [15] A. Rendall: On the definition of post-newtonian approximations, *Proc. Roy. Soc. London* **438** (1992), 341-360.

- [16] R. K. Sachs, H. Wu: *General Relativity for Mathematicians*, Grad. Texts in Math. **48**, Springer-Verlag, Nueva York (1977).
- [17] L. A. Santaló: *Vectores y Tensores*, Eudeba, Buenos Aires (1977).
- [18] B. Schmidt: Mathematics of General Relativity, en G. S. Hall, J. R. Pulham (editores) *General Relativity*, Aberdeen (1996).
- [19] M. A. Trautman: Sur la théorie newtonienne de la gravitation, *Comp. Rend. Acad. Sci.* **257** (1963), 617-620.

# Índice de Materias

- 2-forma
  - de curvatura, 96
  - del campo electromagnético, 104
- 3-forma de carga, 105
- 4-forma
  - de Cartan, 105
  - de impulso, 104
- aceleración, 17
  - aparente, 9, 17
- afinidad, 92
- agujero negro de Schwarzschild, 84
- aplicación afín, 91
- campo
  - eléctrico, 110
  - electromagnético, 105
  - magnético, 110
- cantidad de movimiento, 32, 59
- carácter conservativo de las fuerzas gravitatorias, 50
- carga de una partícula, 104
- conexión
  - de Levi-Civita, 72
  - lineal en un fibrado vectorial, 96
  - lineal plana, 96
  - newtoniana, 28
- cono de luz, 57
- conservativas, fuerzas gravitatorias, 27
- constante
  - cosmológica, 78
  - de Hubble, 22, 85
- contracción interior, 94
- coordenadas, 8, 90
- densidad
  - crítica, 85
- de energía, 80
- de impulso, 42
- de masa, 20
- derivada de Lie, 97
- dimensión de un espacio afín, 89
- ecuación
  - de campo, 105
  - de Einstein, 80, 106
  - de evolución, 22
  - de Gauss, 21
  - de Poisson, 27
- ecuaciones
  - de evolución, 85
  - de la Mecánica de fluidos, 44
  - del movimiento, 18
- Einstein-DeSitter, modelo de, 86
- ejes de referencia, 8, 56
- energía, 59
- espacial, hipersuperficie, 49
- espacialmente compacto, 28
- espacio, 3
  - afín real, 89
  - euclídeo, 90
  - vectorial euclídeo, 89
- espacio-tiempo, 1, 5
  - de Galileo, 12
  - de Minkowski, 54, 83
  - newtoniano, 49
  - normal de Schwarzschild, 84
  - plano, 19, 83
  - relativista, 73
  - vacío, 80
- fórmula de Cartan, 99
- fluido
  - perfecto, 37, 45, 80

- viscoso, 45
- forma
  - de Cartan, 82
  - de hipervolumen, 32
  - de impulso, 35, 82
  - diferencial valorada, 93
- formas simétricas, 40
- fotón, 58, 74
- Friedman, modelos de, 86
- fuerza electromagnética, 106
- futuro, 3, 54, 73
- gravitación newtoniana, 51
- grupo
  - de Galileo, 13
  - de Poincaré, 58
- identidad diferencial de Bianchi, 100
- impulso, 32, 58, 104
  - pentadimensional, 104
- inmersión abierta, 52
- instante de tiempo, 3
- intensidad de fuerza gravitatoria, 18
- isomorfismo
  - de espacio-tiempos relativistas, 73
  - de gravitaciones newtonianas, 51
  - local de gravitaciones newtonianas, 52
- ley
  - de conservación de la masa, 22
  - de conservación del impulso, 51
  - de conservación infinitesimal del impulso, 35
  - de la Gravitación universal, 30, 47
  - de Lorentz, 110
  - del movimiento, 21, 105
- métrica
  - de Lorentz, 53
  - del espacio, 5, 11, 12, 49
  - del tiempo, 3, 10, 12, 49, 54, 73, 104
- métricas de Robertson-Walker, 84
- móvil en caída libre, 74
- masa, 32
  - aparente, 59
  - en reposo, 58, 73, 104
- medida
  - de distancias, 90
  - de longitud, 10
  - del tiempo, 10
- momento, 32, 59
- nube de polvo, 36, 44, 68, 80
- observador, 3, 54, 73
  - inercial, 55
  - infinitesimal, 74
- operador
  - de curvatura, 81
- orientable en el tiempo, variedad, 72
- orientación
  - de un espacio afín, 89
  - del espacio, 10, 12
  - del tiempo, 10, 12, 54, 72
  - espacio-temporal, 54
  - negativa, 89
  - positiva, 89
- origen del tiempo, 56
- partícula, 58, 73, 104
- pasado, 3, 54, 73
- posición
  - aparente, 9
  - relativa, 6
- potencial gravitatorio, 27, 51
- presión, 37, 45
  - de un fluido, 80
- primer sistema de ecuaciones de Maxwell, 104
- primera
  - ecuación de Bianchi, 102
  - ecuación de estructura, 101
- principio
  - de Equivalencia, 16
  - de existencia de rotaciones absolutas, 5, 50
  - de Inercia, 12
- producto
  - escalar, 90
  - exterior, 94

- radio del Universo, 85
- reposo, 6
- segunda
  - ecuación de Bianchi, 102
  - ecuación de estructura, 101
- segundo sistema de ecuaciones de Maxwell, 105
- simetría de una gravitación newtoniana, 52
- sistema
  - de referencia, 8, 51
  - de referencia afín, 90
  - de referencia inercial, 12, 24, 56
  - de referencia inercial infinitesimal, 26, 74
- suceso, 1
- tensor
  - de curvatura, 16
  - de Einstein, 79
  - de energía-momento, 41, 51, 80
  - de Ricci, 20
  - de Riemann-Christoffel, 26
  - de tensiones, 43
- tiempo, 3, 55
  - cosmológico, 85
  - propio, 54, 73
- transformación de Galileo, 13
- trasladado de un punto por un vector, 89
- trayectoria, 3, 31, 73, 104
  - de la luz, 55
  - de un móvil, 54
  - de un observador, 51
  - de una partícula, 58
  - en caída libre, 18
  - inercial, 12
- unidad de carga, 112
- variedad de Lorentz, 72
- vector
  - de corriente, 111
  - de tipo espacio, 54, 72
  - de tipo luz, 54, 72
- de tipo tiempo, 54, 72
  - espacial, 3, 55
  - horizontal, 104
  - libre, 89
  - spacial, 49
  - vertical, 104
- velocidad, 4, 54, 73
  - aparente, 9
  - de expansión, 21, 85
  - media, 37, 43
  - media aparente, 44
  - media de un fluido, 80