ESQUISSE D'UN PROGRAMME

par Alexandre Grothendieck

Sommaire:

N.B. Les astérisques (*) renvoient aux notes figurant au bas de la même page, les renvois numérotés de (^{1}) à (^{7}) aux notes (rajoutées ultérieurement) réunies à la fin du rapport.

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

par Alexandre Grothendieck

1. Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer des travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme "rédaction" ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l'écriture des "Réflexions Mathématiques" commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre,
$\frac{1}{2}$ en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l'harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu'il en soit, l'esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d'esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d'entre eux. Elle est destinée, d'une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d'autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l'éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l'un d'entre eux.

2. Les exigences d'un enseignement universitaire, s'adressant donc à des étudiants (y compris les étudiants dits "avancés") au bagage mathématique modeste (et souvent moins que modeste), m'ont amené à renouveler de façon draconienne les thèmes de réflexion à proposer à mes élèves, et de fil en aiguille et de plus en plus, à moi-même également. Il m'avait semblé important de partir d'un bagage intuitif commun, indépendant de tout langage technique censé l'exprimer, bien antérieur à tout tel langage – il s'est avéré que l'intuition géométrique et topologique des formes, et plus particulièrement des formes bidimensionnelles, était un tel terrain commun. Il s'agit donc de thèmes qu'on peut grouper sous l'appellation de "topologie des surfaces" ou "géométrie des surfaces", étant entendu dans cette dernière appellation que l'accent principal se trouve sur les propriétés topologiques des surfaces, ou sur les aspects combinatoires qui en constituent l'expression technique la plus terre-à-terre, et non sur les aspects différentiels, voire conformes, riemaniens, holomorphes et (de là) l'aspect "courbes algébriques complexes". Une fois ce dernier pas franchi cependant, voici soudain la géométrie algébrique (mes anciennes amours!) qui fait irruption à nouveau, et ce par les objets qu'on peut considérer comme les pierres de 2/3 construction ultimes de toutes les autres variétés algébriques. Alors que dans mes recherches d'avant 1970, mon attention systématiquement était dirigée vers les objets de généralité maximale, afin de dégager un langage d'ensemble adéquat pour le monde de la géométrie algébrique, et que je ne m'attardais sur les courbes algébriques que dans la stricte mesure où cela s'avérait indispensable (notamment en cohomologie étale) pour développer des techniques et énoncés "passe-partout" valables en toute dimension et en tous lieux (j'entends, sur tous schémas de base, voire tous topos annelés de base...), me voici donc ramené, par le truchement d'objets si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant, aux débuts et origines de la géométrie algébrique, familiers à Riemann et à ses émules!

Depuis environ 1975, c'est donc la géométrie des surfaces (réelles), et à partir de 1977 les liens entre les questions de géométrie des surfaces et la géométrie algébrique des courbes algébriques définies sur des corps tels que $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou des extensions de type fini de $\mathbb{Q}$, qui ont été ma principale source d'inspiration, ainsi que mon fil conducteur constant. C'est avec surprise et avec émerveillement qu'au fil des ans je découvrais (ou plutôt, sans doute, redécouvrais) la richesse prodigieuse, réellement inépuisable, la profondeur insoupçonnée de ce thème, d'apparence si anodine. Je crois y sentir un point névralgique entre tous, un point de convergence privilégié

des principaux courants d'idées mathématiques, comme aussi des principales structures et des visions des choses qu'elles expriment, depuis les plus spécifiques, (tels les anneaux $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou le groupe Sl(2) sur l'un de ces anneaux, ou les groupes algébriques réductifs généraux) aux plus "abstraits", telles les "multiplicités" algébriques, analytiques complexes ou analytiques réelles. (Celles-ci s'introduisent naturellement quand il s'agit d'étudier systématiquement des "variétés de modules" pour les objets géométriques envisagés, si on veut dépasser le point de vue notoirement insuffisant des "modules grossiers", qui revient à "tuer" bien malencontreusement les groupes d'automorphismes de ces objets.) Parmi ces multiplicités modulaires, ce sont celles de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques "stables" de
$\frac{3}{4}$ genre g, à ν points marqués, que je note $\widehat{M}_{g,\nu}$ (compactification de la multiplicité "ouverte" $M_{g,\nu}$ correspondant aux courbes lisses), qui depuis quelques deux ou trois années ont exercé sur moi une fascination particulière, plus forte peut-être qu'aucun autre objet mathématique à ce jour. A vrai dire, il s'agit plutôt du système de <u>toutes</u> les multiplicités $M_{g,\nu}$ pour g, ν variables, liées entre elles par un certain nombre d'opérations fondamentales (telles les opérations de "bouchage de trous" i.e. de "gommage" de points marqués, celle de "recollement", et les opérations inverses), qui sont le reflet en géométrie algébrique absolue de caractéristique zéro (pour le moment) d'opérations géométriques familières du point de vue de la "chirurgie" topologique ou conforme des surfaces. La principale raison sans doute de cette fascination, c'est que cette structure géométrique très riche sur le système des multiplicités modulaires "ouvertes" $M_{g,\nu}$ se reflète par une structure analogue sur les groupoïdes fondamentaux correspondants, les "groupoïdes de Teichmüller" $\widehat{T}_{g,\nu}$, et que ces opérations au niveau des $\widehat{T}_{g,\nu}$ ont un caractère suffisamment intrinsèque pour que le groupe de Galois $\mathbb{\Gamma}$ de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ opère sur toute cette "tour" de groupoïdes de Teichmüller, en respectant toutes ces structures. Chose plus extraordinaire encore, cette opération est <u>fidèle</u> – à vrai dire, elle est fidèle déjà sur le premier "étage" non trivial de cette tour, à savoir $\widehat{T}_{0,4}$ – ce qui signifie aussi, essentiellement, que l'action extérieure de $\mathbb{\Gamma}$ sur le groupe fondamental $\widehat{\pi}_{0,3}$ de la droite projective standard $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{Q}$, privée des trois points 0, 1, ∞, est déjà fidèle. Ainsi <u>le groupe de Galois</u> $\mathbb{\Gamma}$ <u>se réalise comme un groupe d'automorphismes d'un groupe profini des plus concrets</u>, respectant d'ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe. Il s'ensuit qu'un élément de $\mathbb{\Gamma}$ peut être "paramétré" (de diverses façons équivalentes d'ailleurs) par un élément convenable de ce groupe profini $\widehat{\pi}_{0,3}$ (un groupe profini libre à deux générateurs), ou par un système de tels éléments, ce ou ces éléments étant d'ailleurs soumis à certaines conditions simples, nécessaires (et sans doute non suffisantes) pour que ce ou ces éléments corresponde(nt) bien à un élément de $\mathbb{\Gamma}$. Une des tâches les

plus fascinantes ici, est justement d'appréhender des conditions nécessaires
4/5 <u>et</u> suffisantes sur un automorphisme extérieur de $\widehat{\pi}_{0,3}$ i.e. sur le ou les paramètres correspondants, pour qu'il provienne d'un élément de Γ – ce qui fournirait une description "purement algébrique", en termes de groupes profinis et sans référence à la théorie de Galois des corps de nombres, du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$!

Peut-être une caractérisation même conjecturale de Γ comme sous-groupe de $\mathrm{Autext}(\widehat{\pi}_{0,3})$ est-elle pour le moment hors de portée ([1]); je n'ai pas de conjecture à proposer encore. Une autre tâche par contre est abordable immédiatement, c'est celle de décrire l'action de Γ sur toute la tour de Teichmüller, en termes de son action sur le "premier étage" $\widehat{\pi}_{0,3}$, i.e. exprimer un automorphisme de cette tour, en termes du "paramètre" dans $\widehat{\pi}_{0,3}$, qui repère l'élément courant γ de Γ. Ceci est lié à une représentation de la tour de Teichmüller (en tant que groupoïde muni d'une opération de "recollement") par générateurs et relations, qui donnera en particulier une présentation par générateurs et relations, au sens ordinaire, de chacun des $\widehat{T}_{g,\nu}$ (en tant que groupoïde profini). Ici, même pour $g = 0$ (donc quand les groupes de Teichmüller correspondants sont des groupes de tresses "bien connus"), les générateurs et relations connus à ce jour dont j'ai eu connaissance, me semblent inutilisables tels quels, car ils ne présentent pas les caractères d'invariance et de symétrie indispensables pour que l'action de Γ soit directement lisible sur cette présentation. Ceci est lié notamment au fait que les gens s'obstinent encore, en calculant avec des groupes fondamentaux, à fixer un seul point base, plutôt que d'en choisir astucieusement tout un paquet qui soit invariant par les symétries de la situation, lesquelles sont donc perdues en route. Dans certaines situations (comme des théorèmes de descente à la Van Kampen pour groupes fondamentaux) il est bien plus élégant, voire indispensable pour y comprendre quelque chose, de travailler avec des groupoïdes fondamentaux par rapport à un paquet de points base convenable, et il en est certainement ainsi pour la tour de Teichmüller. Il semblerait (incroyable, mais vrai!) que la géométrie même du premier étage de la tour de Teichmüller (correspondant donc aux "modules" soit pour des
5/6 droites projectives avec quatre points marqués, soit pour des courbes elliptiques (!)) n'ait jamais été bien explicitée, par exemple la relation entre le cas de genre 0 avec la géométrie de l'octaèdre, et celle du tétraèdre. A fortiori les multiplicités modulaires $M_{0,5}$ (pour les droites projectives avec cinq points marqués) et $M_{1,2}$ (pour les courbes de genre 1 avec deux points marqués), d'ailleurs quasiment isomorphes entre elles, semblent-elles terre vierge – les groupes de tresses ne vont pas nous éclairer à leur sujet! J'ai commencé à regarder $M_{0,5}$ à des moments perdus, c'est un véritable joyau, d'une géométrie très riche étroitement liée à celle de l'icosaèdre.

L'intérêt a priori d'une connaissance complète des deux premiers étages de la tour (savoir, les cas où la dimension modulaire $N = 3g-3+\nu$ est ≤ 2) réside dans ce principe, que la tour entière se reconstitue à partir des deux premiers étages, en ce sens que via l'opération fondamentale de "recollement", l'étage 1 fournit un système complet de générateurs, et l'étage 2 un système complet de relations. Il y a une analogie frappante, et j'en suis persuadé, pas seulement formelle, entre ce principe, et le principe analogue de Demazure pour la structure des groupes algébriques réductifs, si on remplace le terme "étage" ou "dimension modulaire" par "rang semi-simple du groupe réductif". Le lien devient plus frappant encore, si on se rappelle que le groupe de Teichmüller $T_{1,1}$ (dans le contexte discret transcendant maintenant, et non dans le contexte algébrique profini, où on trouve les complétions profinies des premiers) n'est autre que $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$, i.e. le groupe des points entiers du schéma en groupes simple de rang 1 "absolu" $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbb{Z}}$. Ainsi, la pierre de construction fondamentale pour la tour de Teichmüller, est essentiellement la même que celle pour "la tour" des groupes réductifs de tous rangs – un groupe d'ailleurs dont on peut dire sans doute qu'il est présent dans toutes les disciplines essentielles des mathématiques.

Ce principe de construction de la tour de Teichmüller n'est pas démontré à l'heure actuelle – mais je n'ai aucun doute qu'il ne soit valable. Il résulterait (via une théorie de dévissage des structures stratifiées – en l'occurrence les $\widehat{M}_{g,\nu}$ – qui resterait à écrire, cf. par. 5) d'une propriété extrêmement
6/7 plausible des multiplicités modulaires ouvertes $M_{g,\nu}$ dans le contexte analytique complexe, à savoir que pour une dimension modulaire $N \geq 3$, le groupe fondamental de $M_{g,\nu}$ (i.e. le groupe de Teichmüller habituel $T_{g,\nu}$) est isomorphe au "groupe fondamental à l'infini" i.e. celui d'un "voisinage tubulaire de l'infini". C'est là une chose bien familière (due à Lefschetz essentiellement) pour une variété lisse affine de dimension $N \geq 3$. Il est vrai que les multiplicités modulaires ne sont pas affines (sauf pour des petites valeurs de g), mais il suffirait qu'une telle $M_{g,\nu}$ de dimension N (ou plutôt, un revêtement fini convenable) soit réunion de $N-2$ ouverts affines, donc que $M_{g,\nu}$ ne soit pas "trop proche d'une variété compacte".

N'ayant aucun doute sur ce principe de construction de la tour de Teichmüller, je préfère laisser aux experts de la théorie transcendante, mieux outillés que moi, le soin de prouver le nécessaire (s'il s'en trouve qui soit intéressé), pour expliciter plutôt, avec tout le soin qu'elle mérite, la structure qui en découle pour la tour de Teichmüller par générateurs et relations, dans le cadre discret cette fois et non profini – ce qui revient, essentiellement, à une compréhension complète des quatre multiplicités modulaires $M_{0,4}$, $M_{1,1}$, $M_{0,5}$, $M_{1,2}$, et de leurs groupoïdes fondamentaux par rapport à des "points base" convenablement choisis. Ceux-ci s'offrent tout

naturellement, comme les courbes algébriques complexes du type (g, ν) envisagé, qui ont un groupe d'automorphismes (nécessairement fini) plus grand que dans le cas générique (*). En y incluant la sphère holomorphe
7/8 à trois points marqués (provenant de $M_{0,3}$ i.e. de l'étage 0), on trouve douze "pièces de construction" fondamentales (6 de genre 0, 6 de genre 1) dans un "jeu de Légo-Teichmüller" (grande boîte), où les points marqués sur les surfaces envisagées sont remplacés par des "trous" à bord, de façon à avoir des surfaces à bord, donc des pièces de construction qui peuvent s'assembler par frottement doux comme dans le jeu de Légo ordinaire cher à nos enfants (ou petits-enfants...). Par assemblage on trouve un moyen tout ce qu'il y a de visuel pour construire tout type de surface (ce sont ces assemblages essentiellement qui seront les "points base" pour notre fameuse tour), et aussi de visualiser les "chemins" élémentaires par des opérations tout aussi concrètes telles des "twists", ou des automorphismes des pièces du jeu, et d'écrire les relations fondamentales entre chemins composés. Suivant la taille (et le prix!) de la boîte de construction utilisée, on trouve d'ailleurs de nombreuses descriptions différentes de la tour de Teichmüller par générateurs et relations. La boîte la plus petite est réduite à des pièces toutes identiques, de type $(0, 3)$ – ce sont les "pantalons" de Thurston, et le jeu de Légo-Teichmüller que j'essaie de décrire, issu de motivations et de réflexions de géométrie algébrique absolue sur le corps $\mathbb{Q}$, est très proche du jeu de "chirurgie géodésique hyperbolique" de Thurston, dont j'ai appris l'existence l'an dernier par Yves Ladegaillerie. Dans un microséminaire avec Carlos Contou-Carrère et Yves Ladegaillerie, nous avons amorcé une réflexion dont un des objets est de confronter les deux points de vue, qui se complètent mutuellement.

J'ajoute que chacune des douze pièces de construction de la "grande boîte" se trouve munie d'une décomposition cellulaire canonique, stable par toutes les symétries, ayant comme seuls sommets les "points marqués" (ou centres des trous), et comme arêtes certains chemins géodésiques (pour la structure riemanienne canonique sur la sphère ou le tore envisagé) entre certaines paires de sommets (savoir ceux qui se trouvent sur un même "lieu réel", pour une structure réelle convenable de la courbe algébrique

(*) Il faut y ajouter de plus les "points-base" provenant par opérations de recollement de "pièces" du même type en dimension modulaire inférieure. D'autre part, en dimension modulaire 2 (cas de $M_{0,5}$ et $M_{1,2}$), il convient d'exclure les points de certaines familles à un paramètre de courbes admettant un automorphisme exceptionnel d'ordre 2. Ces familles constituent d'ailleurs sur les multiplicités envisagées des courbes rationnelles remarquables, qui me paraissent un ingrédient important de la structure de ces multiplicités.

complexe envisagée). Par suite, toutes les surfaces obtenues dans ce jeu par assemblage sont munies de structures cellulaires canoniques, qui à leur
8/9 tour (cf. §3 plus bas) permettent de considérer ces surfaces comme associée à des courbes algébriques complexes (et même sur $\overline{\mathbb{Q}}$) canoniquement déterminées. Il y a là un jeu de chassé-croisé typique entre le combinatoire, et l'algébrique complexe (ou mieux, l'algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$).

La “petite boîte” aux pièces toutes identiques, qui a le charme de l'économie, donnera sans doute une description relativement compliquée pour les relations (compliquée, mais nullement inextricable!). La grande boîte donnera lieu à des relations plus nombreuses (du fait qu'il y a beaucoup plus de points-bases et de chemins remarquables entre eux), mais à structure plus transparente. Je prévois qu'en dimension modulaire 2, tout comme dans le cas plus ou moins familier de la dimension modulaire 1 (avec notamment la description de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$ par $(\rho,\sigma \,|\, \rho^3 = \sigma^2 \ , \ \rho^4 = \sigma^6 = 1)$), on trouvera un engendrement par les groupes d'automorphismes des trois types de pièces pertinentes, avec des relations simples que je n'ai pas dégagées à l'heure d'écrire ces lignes. Peut-être même trouvera-t-on un principe de ce genre pour tous les $T_{g,\nu}$, ainsi qu'une décomposition cellulaire de $\widehat{M}_{g,\nu}$ généralisant celles qui se présentent spontanément pour $\widehat{M}_{0,4}$ et $\widehat{M}_{1,1}$, et que j'entrevois dès à présent pour la dimension modulaire 2, en utilisant les hypersurfaces correspondant aux diverses <u>structures réelles</u> sur les structures complexes envisagées, pour effectuer le découpage cellulaire voulu.

3. Plutôt que de suivre (comme prévu) un ordre thématique rigoureux, je me suis laissé emporter par ma prédilection pour un thème particulièrement riche et brûlant, auquel je compte me consacrer d'ailleurs prioritairement pendant quelques temps, à partir de la rentrée 84/85. Je reprends donc l'exposé thématique là où je l'ai laissé, tout au début du paragraphe précédent.

Mon intérêt pour les surfaces topologiques commence à poindre en 1974, où je propose à Yves Ladegaillerie le thème de l'étude isotopique des plongements d'un 1-complexe topologique dans une surface compacte. Dans les deux années qui suivent, cette étude le conduit à un remarquable théorème
9/10 d'isotopie, donnant une description algébrique complète des classes d'isotopie de plongements de tels 1-complexes, ou de surfaces compactes à bord, dans une surface compacte orientée, en termes de certains invariants combinatoires très simples, et des groupes fondamentaux des protagonistes. Ce théorème, qui doit pouvoir s'étendre sans mal aux plongements d'un espace compact quelconque (triangulable pour simplifier) dans une surface compacte orientée, redonne comme corollaires faciles plusieurs résultats classiques profonds de la théorie des surfaces, et notamment le théorème d'isotopie de Baer. Il va finalement être publié, séparément du reste (et

dix ans après, vu la dureté des temps...), dans Topology. Dans le travail de Ladegaillerie figure également une description purement algébrique, en termes de groupoïdes fondamentaux, de la catégorie “isotopique” des surfaces compactes X, munies d’un 1-complexe topologique K plongé dans X. Cette description, qui a eu le malheur d’aller à l’encontre du “goût du jour” et de ce fait semble impubliable, a néanmoins servi (et sert encore) comme un guide précieux dans mes réflexions ultérieures, notamment dans le contexte de la géométrie algébrique absolue de caractéristique nulle.

Le cas où (X, K) est une “carte” 2-dimensionnelle, i.e. où les composantes connexes de $X \backslash K$ sont des 2-cellules ouvertes (et où de plus K est muni d’un ensemble fini S de “sommets”, tel que les composantes connexes de $K \backslash S$ soient des 1-cellules ouvertes) attire progressivement mon attention dans les années suivantes. La catégorie isotopique de ces cartes admet une description algébrique particulièrement simple, via l’ensemble des “repères” (ou “drapeaux” ou “biarcs”) associés à la carte, qui se trouve naturellement muni d’une structure d’ensemble à groupe d’opérateurs, sous le groupe

$$\underline{C}_2 = \left\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \,|\, \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1 \right\rangle,$$

que j’appelle le <u>groupe cartographique</u> (non orienté) de dimension 2. Il admet comme sous-groupe d’indice 2 le <u>groupe cartographique orienté</u> engendré par les produits en nombre pair des générateurs, qui peut aussi se
10/11 décrire comme

$$\underline{C}_2^+ = \left\langle \rho_s, \rho_f, \sigma \,|\, \rho_s\rho_f = \sigma,\ \sigma^2 = 1 \right\rangle,$$

(avec

$$\rho_s = \sigma_2\sigma_1\ ,\ \rho_f = \sigma_1\sigma_0\ ,\ \sigma = \sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0\ ,$$

opérations de <u>rotation élémentaire</u> d’un repère autour d’un sommet, d’une face et d’une arête respectivement). Il y a un dictionnaire parfait entre la situation topologique des cartes compactes, resp. cartes compactes orientées, d’une part, et les ensembles finis à groupe d’opérateurs $\underline{C}_2$ resp. $\underline{C}_2^+$ de l’autre, dictionnaire dont l’existence était d’ailleurs plus ou moins connue, mais jamais énoncée avec la précision nécessaire, ni développée tant soit peu. Ce travail de fondements est fait avec le soin qu’il mérite dans un excellent travail de DEA, fait en commun par Jean Malgoire et Christine Voisin en 1976.

Cette réflexion prend soudain une dimension nouvelle, avec cette remarque simple que le groupe $\underline{C}_2^+$ peut s’interpréter comme un quotient du groupe fondamental d’une sphère orientée privée de trois points, numérotés 0, 1, 2, les opérations ρ_s, σ, ρ_f s’interprétant comme les lacets autour de ces points, satisfaisant la relation familière

$$l_0 l_1 l_2 = 1,$$

alors que la relation supplémentaire $\sigma^2 = 1$ i.e. $l_1^2 = 1$ signifie qu'on s'intéresse au quotient du groupe fondamental correspondant à un indice de ramification imposé 2 au point 1, qui classifie donc les revêtements de la sphère, ramifiés au plus en les points 0, 1, 2, avec une ramification égale à 1 ou 2 en les points au dessus de 1. Ainsi, les cartes orientées compactes forment une catégorie isotopique équivalente à celle de ces revêtements, soumis de plus à la condition supplémentaire d'être des revêtements finis. Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points 0, 1 et ∞ (ce dernier remplaçant donc 2), et se rappelant que tout revêtement ramifié fini d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure de courbe algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : toute carte orientée "finie"
11/12 se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe! Mieux encore, comme la droite projective complexe est définie sur le corps de base absolue $\mathbb{Q}$, ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques obtenues sont définies non seulement sur $\mathbb{C}$, mais sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Quant à la carte de départ, elle se retrouve sur la courbe algébrique, comme image inverse du segment réel $[0,1]$ (où 0 est considéré comme un sommet, et 1 comme milieu d'une "arête pliée" ayant 1 comme centre), lequel constitue dans la sphère de Riemann la "2-carte orientée universelle" (*). Les points de la courbe algébrique X au dessus de 0, de 1 et de ∞ ne sont autres que les sommets, et les "centres" des arêtes et des faces respectivement de la carte (X, K), et les ordres des sommets et des faces ne sont autres que les multiplicités des zéros et des pôles de la fonction rationnelle (définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$) sur X, exprimant sa projection structurale vers $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable ([2]). Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin

(*) Il y a une description analogue des cartes finies non orientées, éventuellement avec bord, en termes de courbes algébriques réelles, plus précisément de revêtement de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ramifié seulement en 0, 1, ∞, la surface à bord associée à un tel revêtement étant $X(\mathbb{C})/\tau$, où τ est la conjugaison complexe. La carte non orientée "universelle" est ici le disque, ou hémisphère supérieur de la sphère de Riemann, muni comme précédemment du 1-complexe plongé $K = [0,1]$.

d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus. S'agissant ici de cartes
12/13 sphériques, donnant nécessairement naissance à des courbes de genre 0 (qui ne fournissent donc pas des “modules”), on peut dire que la courbe en question est “épinglée” dès qu'on fixe trois de ses points, par exemple trois sommets de la carte, ou plus généralement trois centres de facettes (sommets, arêtes ou faces) – dès lors l'application structurale $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ peut s'interpréter comme une fonction rationnelle

$$f(z) = P(z)/Q(z) \quad \in \mathbb{C}(z)$$

bien déterminée, quotient de deux polynômes bien déterminés premiers entre eux avec Q unitaire, satisfaisant à des conditions algébriques qui traduisent notamment le fait que f soit non ramifié en dehors des valeurs 0, 1, ∞, et qui impliquent que les coefficients de ces polynômes sont des nombres algébriques; donc leurs zéros sont des nombres algébriques, qui représentent respectivement les sommets et les centres des faces de la carte envisagée.

Revenant au cas général, les cartes finies s'interprétant comme des revêtements sur $\overline{\mathbb{Q}}$ d'une courbe algébrique définie sur le corps premier $\mathbb{Q}$ lui-même, il en résulte que le groupe de Galois $\mathbb{\Gamma}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ opère sur la catégorie de ces cartes de façon naturelle. Par exemple, l'opération d'un automorphisme $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ sur une carte sphérique donnée par la fonction rationnelle ci-dessus, est obtenue en appliquant γ aux coefficients des polynômes P, Q. Voici donc ce mystérieux groupe $\mathbb{\Gamma}$ intervenir comme agent transformateur sur des formes topologico-combinatoires de la nature la plus élémentaire qui soit, amenant à se poser des questions comme: telles cartes orientées données sont-elles “conjuguées”, ou : quelles exactement sont les conjuguées de telle carte orientée donnée ? (il y en a, visiblement, un nombre fini seulement).

J'ai traité quelques cas concrets (pour des revêtements de bas degrés) par des expédients divers, J. Malgoire en a traité quelques autres – je doute qu'il y ait une méthode uniforme permettant d'y répondre à coups d'ordinateurs.
13/14 Ma réflexion très vite s'est engagée dans une direction plus conceptuelle, pour arriver à appréhender la nature de cette action de $\mathbb{\Gamma}$. On s'aperçoit d'emblée que grosso modo cette action est exprimée par une certaine action “extérieure” de $\mathbb{\Gamma}$ sur le compactifié profini du groupe cartographique orienté $\underline{C}_2^+$, et cette action à son tour est déduite par passage au quotient de l'action extérieure canonique de $\mathbb{\Gamma}$ sur le groupe fondamental profini $\widehat{\pi}_{0,3}$ de $(U_{0,3})_{\overline{\mathbb{Q}}}$, où $U_{0,3}$ désigne la courbe-type de genre 0 sur le corps premier $\mathbb{Q}$, privée de trois points. C'est ainsi que mon attention s'est portée

vers ce que j'ai appelé depuis la "géométrie algébrique anabélienne", dont le point de départ est justement une étude (pour le moment limitée à la caractéristique zéro) de l'action de groupes de Galois "absolus" (notamment les groupes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, où K est une extension de type fini du corps premier) sur des groupes fondamentaux géométriques (profinis) de variétés algébriques (définies sur K), et plus particulièrement (rompant avec une tradition bien enracinée) des groupes fondamentaux qui sont très éloignés des groupes abéliens (et que pour cette raison je nomme "anabéliens"). Parmi ces groupes, et très proche du groupe $\widehat{\pi}_{0,3}$, il y a le compactifié profini du groupe modulaire $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$, dont le quotient par le centre ± 1 contient le précédent comme sous-groupe de congruence mod 2, et peut s'interpréter d'ailleurs également comme groupe "cartographique" orienté, savoir celui qui classifie les cartes orientées triangulées (i.e. celles dont les faces sont des triangles ou des monogones).

Toute carte finie orientée donne lieu à une courbe algébrique projective et lisse définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et il se pose alors immédiatement la question : quelles sont les courbes algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ obtenues ainsi – les obtiendrait-on toutes, qui sait? En termes plus savants, serait-il vrai que toute courbe algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres interviendrait comme une "courbe modulaire" possible pour paramétriser les courbes elliptiques munies d'une rigidification convenable? Une telle supposition avait l'air à tel
14/15 point dingue que j'étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d'un an après, au Congrès International de Helsinki, le mathématicien soviétique Bielyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d'une simplicité déconcertante tenant en deux petites pages d'une lettre de Deligne – jamais sans doute un résultat profond et déroutant ne fut démontré en si peu de lignes!

Sous la forme où l'énonce Bielyi, son résultat dit essentiellement que toute courbe algébrique définie sur un corps de nombres peut s'obtenir comme revêtement de la droite projective ramifié seulement en les points 0, 1, ∞. Ce résultat semble être passé plus ou moins inaperçu. Pourtant, il m'apparaît d'une portée considérable. Pour moi, son message essentiel a été qu'il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre. Ce résultat profond, joint à l'interprétation algébrico-géométrique des cartes finies, ouvre la porte sur un monde nouveau, inexploré – et à portée de main de tous, qui passent sans le voir.

C'est près de trois ans plus tard seulement, voyant que décidément les vastes horizons qui s'ouvrent là ne faisaient rien tressaillir en aucun de mes élèves, ni même chez aucun des trois ou quatre collègues de haut vol auxquels

j'ai eu l'occasion d'en parler de façon circonstanciée, que je fais un premier voyage de prospection de ce "monde nouveau", de janvier à juin 1981. Ce premier jet se matérialise en un paquet de quelques 1300 pages manuscrites, baptisées "La Longue Marche à travers la théorie de Galois". Il s'agit avant tout d'un effort de compréhension des relations entre groupes de Galois "arithmétiques" et groupes fondamentaux profinis "géométriques". Assez vite, il s'oriente vers un travail de formulation calculatoire de l'opération de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{\pi}_{0,3}$, et dans un stade ultérieur, sur le groupe légèrement plus gros $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})}$, qui donne lieu à un formalisme plus élégant et plus efficace. C'est au cours de ce travail aussi (mais développé dans des notes
$\frac{15}{16}$ distinctes) qu'apparaît le thème central de la géométrie algébrique anabélienne, qui est de reconstituer certaines variétés X dites "anabéliennes" sur un corps absolu K à partir de leur groupe fondamental mixte, extension de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi_1(X_{\overline{K}})$; c'est alors que se dégage la "conjecture fondamentale de la géométrie algébrique anabélienne", proche des conjectures de Mordell et de Tate que vient de démontrer Faltings ([3]). C'est là aussi que s'amorcent une première réflexion sur les groupes de Teichmüller, et les premières intuitions sur la structure multiple de la "tour de Teichmüller" – les multiplicités modulaires ouvertes $M_{g,\nu}$ apparaissant par ailleurs comme les premiers exemples importants, en dimension > 1, de variétés (ou plutôt, de multiplicités) qui semblent bien mériter l'appellation "anabélienne". Vers la fin de cette période de réflexion, celle-ci m'apparaît comme une réflexion fondamentale sur une théorie alors encore dans les limbes, pour laquelle l'appellation "<u>Théorie de Galois-Teichmüller</u>" me semble plus appropriée que "théorie de Galois" que j'avais d'abord donnée à mes notes.

Ce n'est pas le lieu ici de donner un aperçu plus circonstancié de cet ensemble de questions, intuitions, idées – y compris des résultats palpables, certes. Le plus important me semble celui signalé en passant au par. 2, savoir la fidélité de l'action extérieure de $\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (et de ses sous-groupes ouverts) sur $\widehat{\pi}_{0,3}$, et plus généralement (si je me rappelle bien) sur le groupe fondamental de toute courbe algébrique "anabélienne" (i.e. dont le genre g et le "nombre de trous" ν satisfont l'inégalité $2g+\nu \geq 3$, i.e. telle que $\chi(X) < 0$) définie sur une extension finie de $\mathbb{Q}$. Ce résultat peut être considéré comme essentiellement équivalent au théorème de Bielyi – c'est la première manifestation concrète, par un énoncé mathématique précis, du "message" dont il a été question plus haut.

Je voudrais terminer cet aperçu rapide par quelques mots de commentaire sur la richesse vraiment inimaginable d'un groupe anabélien typique comme le groupe $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$ – sans doute le groupe discret infini le plus remarquable
$\frac{16}{17}$ qu'on ait rencontré, qui apparaît sous une multiplicité d'avatars (dont certains ont été effleurés dans le présent rapport), et qui du point de vue de la

théorie de Galois-Teichmüller peut être considéré comme la "pierre de construction" fondamentale de la "tour de Teichmüller". L'élément de structure de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$ qui me fascine avant tout, est bien sûr l'action extérieure du groupe de Galois $\mathbb{\Gamma}$ sur le compactifié profini. Par le théorème de Bielyi, prenant les compactifiés profinis de sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$, et l'action extérieure induite (quitte à passer également à un sous-groupe ouvert de $\mathbb{\Gamma}$), on trouve essentiellement les groupes fondamentaux de toutes les courbes algébriques (pas nécessairement compactes) définis sur des corps de nombres K, et l'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dessus – du moins est-il vrai que tout tel groupe fondamental apparaît comme quotient d'un des premiers groupes (*). Tenant compte du "yoga anabélien" (qui reste conjectural), disant qu'une courbe algébrique anabélienne sur un corps de nombres K (extension finie de $\mathbb{Q}$) est connue à isomorphisme près quand on connaît son groupe fondamental mixte (ou ce qui revient au même, l'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur son groupe fondamental profini géométrique), on peut donc dire que toutes les courbes algébriques définies sur des corps de nombres sont "contenues" dans le compactifié profini $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})}$, et dans la connaissance d'un certain sous-groupe $\mathbb{\Gamma}$ du groupe des automorphismes extérieurs de ce dernier! Passant aux abélianisés des groupes fondamentaux précédents, on voit notamment que toutes les représentations abéliennes l-adiques chères à Tate et consorts, définies par des jacobiennes et jacobiennes généralisées de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, sont contenues dans cette seule action de $\mathbb{\Gamma}$ sur le groupe profini anabélien
17/18 $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})}$! ([4])

Il en est qui, face à cela, se contentent de hausser les épaules d'un air désabusé et de parier qu'il n'y a rien à tirer de tout cela, sauf des rêves. Ils oublient, ou ignorent, que notre science, et toute science, serait bien peu de chose, si depuis ses origines elle n'avait été nourrie des rêves et des visions de ceux qui s'y adonnent avec passion.

(*) En fait, il s'agit de quotients de nature particulièrement triviale, par des sous-groupes abéliens produits de "modules de Tate" $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$, correspondant à des "groupes-lacets" autour de points à l'infini.

4. Dès le début de ma réflexion sur les cartes bidimensionnelles, je me suis intéressé plus particulièrement aux cartes dites “régulières”, c'est-à-dire celles dont le groupe des automorphismes opère transitivement (et de ce fait, de façon simplement transitive) sur l'ensemble des repères. Dans le cas orienté et en termes de l'interprétation algébrico-géométrique du paragraphe précédent, ce sont les cartes qui correspondent à un revêtement galoisien de la droite projective. Très vite aussi, et dès avant même qu'apparaisse le lien avec la géométrie algébrique, il apparaît nécessaire aussi de ne pas exclure les cartes infinies, qui interviennent notamment de façon naturelle comme revêtements universels des cartes finies. Il apparaît (comme conséquence immédiate du “dictionnaire” des cartes, étendu au cas des cartes pas nécessairement finies) que pour tout couple d'entiers naturels $p, q \geq 1$, il existe à isomorphisme (non unique) près une carte 1-connexe et une seule qui soit de type (p, q) i.e. dont tous les sommets soient d'ordre p et toutes les faces d'ordre q, et cette carte est une carte régulière. Elle se trouve épinglée par le choix d'un repère, et son groupe des automorphismes est alors canoniquement isomorphe au quotient du groupe cartographique (resp. du groupe cartographique orienté, dans le cas orienté) par les relations supplémentaires

$$\rho_s^p = \rho_f^q = 1.$$

Le cas où ce groupe est fini est le cas “pythagoricien” des cartes régulières
18/19 sphériques, le cas où il est infini donne les pavages réguliers du plan euclidien ou du plan hyperbolique (*). Le lien de la théorie combinatoire avec la théorie “conforme” des pavages réguliers du plan hyperbolique était pressenti, avant qu'apparaisse celui des cartes finies avec les revêtements finis de la droite projective. Une fois ce lien compris, il devient évident qu'il doit s'étendre également aux cartes infinies (régulières ou non): toute carte finie ou non, se réalise canoniquement sur une surface conforme (compacte si et seulement si la carte est finie), en tant que revêtement ramifié de la droite projective complexe, ramifié seulement en les points $0, 1, \infty$. La seule difficulté ici était de mettre au point le dictionnaire entre cartes topologiques et ensembles à opérateurs, qui posait quelques problèmes conceptuels dans le cas infini, à commencer par la notion même de “carte topologique”. Il apparaît nécessaire notamment, tant par raison de cohérence interne du dictionnaire, que pour ne pas laisser échapper certains cas intéressants de cartes infinies, de ne pas exclure des sommets et des faces d'ordre infini. Ce travail de fondements a été fait également par J. Malgoire et C. Voisin,

(*) Dans ces énoncés, il y a lieu de ne pas exclure le cas où p, q peuvent prendre la valeur $+\infty$, qu'on rencontre notamment de façon très naturelle comme pavages associés à certains polyèdres réguliers infinis, cf. plus bas.

sur la lancée de leur premier travail sur les cartes finies, et leur théorie fournit en effet tout ce qu'on était en droit d'attendre (et même plus...).

C'est en 1977 et 1978, parallèlement à deux cours de C4 sur la géométrie du cube et sur celle de l'icosaèdre, que j'ai commencé à m'intéresser aux polyèdres réguliers, qui m'apparaissent alors comme des "réalisations géométriques" particulièrement concrètes de cartes combinatoires, les sommets, arêtes et faces étant réalisés respectivement comme des points, des droites et des plans dans un espace affine tridimensionnel convenable, avec respect des
19/20 relations d'incidence. Cette notion de réalisation géométrique d'une carte combinatoire garde un sens sur un corps de base, et même sur un anneau de base arbitraire. Elle garde également un sens pour les polyèdres réguliers de dimension quelconque, en remplaçant le groupe cartographique $\underline{C}_2$ par une variante n-dimensionnelle $\underline{C}_n$ convenable. Le cas $n = 1$, i.e. la théorie des polygones réguliers en caractéristique quelconque, fait l'objet d'un cours de DEA en 1977/78, et fait apparaître déjà quelques phénomènes nouveaux, comme aussi l'utilité de travailler non pas dans un espace ambiant affine (ici le plan affine), mais dans un espace projectif. Ceci est dû notamment au fait que dans certaines caractéristiques (et notamment en caractéristique 2) le centre d'un polyèdre régulier est rejeté à l'infini. D'autre part, le contexte projectif, contrairement au contexte affine, permet de développer avec aisance un formalisme de dualité pour les polyèdres réguliers, correspondant au formalisme de dualité des cartes combinatoires ou topologiques (où le rôle des sommets et des faces, dans le cas $n = 2$ disons, se trouve interchangé). Il se trouve que pour tout polyèdre régulier projectif, on peut définir un hyperplan canonique associé, qui joue le rôle d'un hyperplan à l'infini canonique, et permet de considérer le polyèdre donné comme un polyèdre régulier affine.

L'extension de la théorie des polyèdres réguliers (et plus généralement, de toutes sortes de configurations géométrico-combinatoires, y compris les systèmes de racines...) du corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vers un anneau de base général, me semble d'une portée comparable, dans cette partie de la géométrie, à l'extension analogue qui a eu lieu depuis le début du siècle en géométrie algébrique, ou depuis une vingtaine d'années en topologie (*), avec l'intro-
20/21 duction du langage des schémas et celui des topos. Ma réflexion sporadique sur cette question, pendant quelques années, s'est bornée à dégager quelques principes de base simples, en attachant d'abord mon attention au cas des polyèdres réguliers épinglés, ce qui réduit à un minimum le bagage conceptuel nécessaire, et élimine pratiquement les questions de rationalité tant

(*) En écrivant cela, je suis conscient que rares sont les topologues, encore aujourd'hui, qui se rendent compte de cet élargissement conceptuel et technique de la topologie, et des ressources qu'elle offre.

soit peu délicates. Pour un tel polyèdre, on trouve une base (ou repère) canonique de l'espace affine ou projectif ambiant, de telle façon que les opérations du groupe cartographique $\underline{C}_n$, engendré par les réflexions fondamentales σ_i $(0 \leq i \leq n)$, s'y écrivent par des formules universelles, en termes de n paramètres $\alpha_1, ..., \alpha_n$, qui géométriquement s'interprètent comme les doubles des cosinus des "angles fondamentaux" du polyèdre. Le polyèdre se reconstitue à partir de cette action, et du drapeau affine ou projectif associé à la base choisie, en transformant ce drapeau par tous les éléments du groupe engendré par les réflexions fondamentales. Ainsi le n-polyèdre épinglé "universel" est-il défini canoniquement sur l'anneau de polynômes à n indéterminées

$$\mathbb{Z}[\underline{\alpha}_1, ..., \underline{\alpha}_n],$$

ses spécialisations sur des corps de base arbitraires k (via des valeurs $\alpha_i \in k$ données aux indéterminées $\underline{\alpha}_i$) donnant des polyèdres réguliers correspondant à des types combinatoires divers. Dans ce jeu, il n'est pas question de se borner à des polyèdres réguliers finis, ni même à des polyèdres réguliers dont les facettes soient d'ordre fini, i.e. pour lesquels les paramètres α_i soient des racines d'équations "semicyclotomiques" convenables, exprimant que les "angles fondamentaux" (dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$) sont commensurables à 2π. Déjà quand $n = 1$, le polygone régulier peut-être le plus intéressant de tous (moralement celui du polygone régulier à un seul côté!) est celui qui correspond à $\alpha = 2$, donnant lieu à une conique circonscrite parabolique, i.e. tangente à la droite à l'infini. Le cas fini est celui où le groupe engendré par les réflexions fondamentales, qui est aussi
$\frac{21}{22}$ le groupe des automorphismes du polyèdre régulier envisagé, est fini. Dans le cas du corps de base $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, ce qui revient au même), et pour $n = 2$, les cas finis sont bien connus depuis l'antiquité – ce qui n'exclut pas que le point de vue schématique y fasse apparaître des charmes nouveaux; on peut dire cependant qu'en spécialisant l'icosaèdre (par exemple) sur des corps de base finis de caractéristique arbitraire, c'est toujours un icosaèdre, avec sa combinatoire propre et le même groupe d'automorphismes simple d'ordre 60 qu'on obtient. La même remarque s'applique aux polyèdres réguliers finis de dimension supérieure, étudiés de façon systématique dans deux beaux livres de Coxeter. La situation est toute autre si on part d'un polyèdre régulier *infini*, sur un corps tel que $\mathbb{Q}$ disons, et qu'on le "spécialise" sur le corps premier $\mathbb{F}_p$ (opération bien définie pour tout p sauf un nombre fini de nombres premiers). Il est clair que tout polyèdre régulier sur un corps fini est fini – *on trouve donc une infinité de polyèdres réguliers finis pour p variable, dont le type combinatoire*, ou ce qui revient au même, le groupe des automorphismes, *varie de façon "arithmétique"* avec p. Cette situation est particulièrement intrigante dans le cas où $n = 2$, où on dispose de la

relation explicitée au paragraphe précédent entre 2-cartes combinatoires, et courbes algébriques définies sur des corps de nombres. Dans ce cas, un polyèdre régulier infini défini sur un corps infini quelconque (et de ce fait sur une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre à deux générateurs de celui-ci) donne donc naissance à une infinité de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, qui sont des revêtements galoisiens ramifiés seulement en 0, 1, ∞ de la droite projective standard. Le cas optimum est bien sûr celui où on part du 2-polyèdre régulier universel, ou plutôt de celui qui s'en déduit par passage au corps des fractions $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ de son anneau de base. Ceci soulève une foule de questions nouvelles, aussi bien des vagues que des précises, dont je n'ai eu le loisir encore d'examiner de plus près aucune – je ne citerai que celle-ci: quelles sont exactement les 2-cartes régulières finies, ou ce qui revient
$\frac{22}{23}$ au même, les groupes quotients finis du groupe 2-cartographique qui proviennent de 2-polyèdres réguliers sur des corps finis (*)? Les obtiendrait-on toutes, et si oui : comment ?

Ces réflexions font apparaître en pleine lumière ce fait, qui pour moi était entièrement inattendu, que la théorie des polyèdres réguliers finis, déjà dans le cas de la dimension $n = 2$, est infiniment plus riche, et notamment donne infiniment plus de formes combinatoires différentes, dans le cas où on admet des corps de base de caractéristique non nulle, que dans le cas considéré jusqu'à présent où les corps de base étaient restreints à $\mathbb{R}$, ou à la rigueur $\mathbb{C}$ (dans le cas de ce que Coxeter appelle des "polyèdres réguliers complexes", et que je préfère appeler "pseudo-polyèdres réguliers définis sur $\mathbb{C}$") (**). De plus, il semble que cet élargissement du point de vue doive aussi jeter un jour nouveau sur les cas déjà connus. Ainsi, examinant l'un après l'autre les polyèdres pythagoriciens, j'ai vu se répéter à chaque fois un même petit miracle, que j'ai appelé le <u>paradigme combinatoire</u> du polyèdre envisagé. Vaguement parlant, il peut se décrire en disant que lorsqu'on regarde la spécialisation du polyèdre dans la caractéristique, ou l'une des

(*) Ce sont les mêmes d'ailleurs que ceux provenant de polyèdres réguliers sur des corps quelconques, ou algébriquement clos, comme on voit par des arguments de spécialisation standard.

(**) Les pseudo-polyèdres épinglés se décrivent de la même façon que les polyèdres épinglés, avec cette seule différence que les réflexions fondamentales σ_i $(0 \leq i \leq n)$ sont remplacées ici par des <u>pseudo-réflexions</u> (que Coxeter suppose de plus d'ordre fini, comme il se borne aux structures combinatoires finies). Cela conduit simplement à introduire pour chacun des σ_i un invariant numérique supplémentaire β_i, de sorte que le n-pseudo-polyèdre universel peut se définir encore sur un anneau de polynômes à coefficients entiers, en les $n + (n + 1)$ variables $\underline{\alpha}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\underline{\beta}_j$ $(0 \leq j \leq n)$.

caractéristiques, la (ou les) plus singulière(s) (ce sont les caractéristiques
23/24 2 et 5 pour l'icosaèdre, la caractéristique 2 pour l'octaèdre), on lit, sur le polyèdre régulier géométrique sur le corps fini concerné ($\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_5$ pour l'icosaèdre, $\mathbb{F}_2$ pour l'octaèdre) une description particulièrement élégante (et inattendue) de la combinatoire du polyèdre. Il m'a semblé même entrevoir là un principe d'une grande généralité, que j'ai cru retrouver notamment dans une réflexion ultérieure sur la combinatoire du système des 27 droites d'une surface cubique, et ses relations avec le système de racines E_7. Qu'un tel principe existe bel et bien et qu'on réussisse même à le dégager de son manteau de brumes, ou qu'il recule au fur et à mesure où on le poursuit et qu'il finisse par s'évanouir comme une Fata Morgana, j'y trouve pour ma part une force de motivation, une fascination peu communes, comme celle du rêve peut-être. Nul doute que de suivre un tel appel de l'informulé, de l'informe qui cherche forme, d'un entrevu élusif qui semble prendre plaisir à la fois à se dérober et à se manifester – ne peut que mener loin, alors que nul ne pourrait prédire, où ...

Pourtant, pris par d'autres intérêts et tâches, je n'ai pas jusqu'à présent suivi cet appel, ni rencontré personne d'autre qui ait voulu l'entendre, et encore moins le suivre. Mis à part quelques digressions vers d'autres types de structures géométrico-combinatoires, mon travail ici encore s'est borné à un premier travail de dégrossissage et d'intendance, sur lequel il est inutile de m'étendre plus ici ([5]). Le seul point qui peut-être mérite encore mention, est l'existence et l'unicité de l'hyperquadrique circonscrite à un n-polyèdre régulier donné, dont l'équation peut s'expliciter par des formules simples en termes des paramètres fondamentaux α_i (*). Le cas qui
24/25 m'intéresse le plus est celui où $n = 2$, et le temps me semble mûr pour réécrire une version nouvelle, en style moderne, du classique livre de Klein sur l'icosaèdre et les autres polyèdres pythagoriciens. Ecrire un tel exposé sur les 2-polyèdres réguliers serait une magnifique occasion pour un jeune chercheur de se familiariser aussi bien avec la géométrie des polyèdres et leurs liens avec les géométries sphérique, euclidienne, hyperbolique, et avec les courbes algébriques, qu'avec le langage et les techniques de base de la géométrie algébrique moderne. S'en trouvera-t-il un un jour pour saisir cette occasion?

5. Je voudrais maintenant dire quelques mots sur certaines réflexions qui

(*) Un résultat analogue vaut pour les pseudo-polyèdres. Il semblerait que les "caractéristiques exceptionnelles" dont il a été question plus haut, pour les spécialisations d'un polyèdre donné, sont celles pour lesquelles l'hyperquadrique circonscrite est, soit dégénérée, soit tangente à l'hyperplan à l'infini.

m'ont fait comprendre le besoin de fondements nouveaux pour la topologie "géométrique", dans une direction toute différente de la notion de topos, et indépendante même des besoins de la géométrie algébrique dite "abstraite" (sur des corps et anneaux de base généraux). Le problème de départ, qui a commencé à m'intriguer il doit y avoir une quinzaine d'années déjà, était celui de définir une théorie de "dévissage" des structures stratifiées, pour les reconstituer, par un procédé canonique, à partir de "pièces de construction" canoniquement déduites de la structure donnée. Probablement l'exemple principal qui m'avait alors amené à cette question était celui de la stratification canonique d'une variété algébrique singulière (ou d'un espace analytique complexe ou réel singulier) par la suite décroissante de ses "lieux singuliers" successifs. Mais je devais sans doute pressentir déjà l'ubiquité des structures stratifiées dans pratiquement tous les domaines de la géométrie (que d'autres sûrement ont vu clairement bien avant moi). Depuis, j'ai vu apparaître de telles structures, notamment, dans toute situation de "modules" pour des objets géométriques susceptibles non seulement de variation continue, mais en même temps de phénomènes de "dégénérescence" (ou de "spécialisation") – les strates correspondant alors aux divers "niveaux de singularité" (ou aux types combinatoires associés) pour les objets considérés. 25/26 Les multiplicités modulaires compactifiées $\widehat{M_{g,\nu}}$ de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques stables de type (g, ν) en fournissent un exemple typique et particulièrement inspirant, qui a joué un rôle de motivation important dans la reprise de ma réflexion sur les structures stratifiées, de décembre 1981 à janvier 1982. La géométrie bidimensionnelle fournit de nombreux autres exemples de telles structures stratifiées modulaires, qui toutes d'ailleurs (sauf expédients de rigidification), apparaissent comme des "multiplicités" plutôt que comme des espaces ou variétés au sens ordinaire (les points de ces multiplicités pouvant avoir des groupes d'automorphismes non triviaux). Parmi les objets de géométrie bidimensionnelle donnant lieu à de telles structures modulaires stratifiées de dimension arbitraire, voire de dimension infinie, je citerai les polygones (euclidiens, ou sphériques, ou hyperboliques), les systèmes de droites dans un plan (projectif disons), les systèmes de "pseudodroites" dans un plan projectif topologique, ou les courbes immergées à croisements normaux plus générales, dans une surface (compacte disons) donnée.

L'exemple non trivial le plus simple d'une structure stratifiée s'obtient en considérant une paire (X, Y) d'un espace X et d'un sous-espace fermé Y, en faisant une hypothèse d'équisingularité convenable de X le long de Y, et en supposant de plus (pour fixer les idées) que les deux strates Y et $X \backslash Y$ sont des <u>variétés</u> topologiques. L'idée naïve, dans une telle situation, est de prendre "le" voisinage tubulaire T de Y dans X, dont le bord ∂T devrait être une variété lisse également, fibrée à fibres lisses et compactes sur Y, T lui-même s'identifiant au fibré en cônes sur ∂T associé au fibré précédent. Posant

$$U = X \setminus \mathrm{Int}(T),$$

on trouve une variété à bord dont le bord est canoniquement isomorphe à celui de T. Ceci dit, les "pièces de construction" prévues sont la variété à bord U (compacte si X était compact, et qui remplace en la précisant la
$\frac{26}{27}$ strate "ouverte" $X \backslash Y$) et la variété (sans bord) Y, avec comme structure supplémentaire les reliant l'application dite de "recollement"

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

qui est une fibration propre et lisse. La situation de départ (X, Y) se reconstitue à partir de $(U, Y, f : \partial U \to Y)$ par la formule

$$X \cong U \coprod_{\partial U} Y$$

(somme amalgamée sous ∂U, s'envoyant dans U et Y via l'inclusion resp. l'application de recollement).

Cette vision naïve se heurte immédiatement à des difficultés diverses. La première est la nature un peu vague de la notion même de voisinage tubulaire, qui ne prend un sens tant soit peu précis qu'en présence de structures plus rigides que la seule structure topologique, telles la structure "linéaire par morceaux", ou riemanienne (plus généralement, d'espace avec fonction distance); l'ennui ici est que dans aucun des exemples auxquels on pense spontanément, on ne dispose naturellement d'une structure de ce type – tout au mieux d'une classe d'équivalence de telles structures, permettant de rigidifier un tantinet la situation. Si par ailleurs on admet qu'on a pu trouver un expédient pour trouver un voisinage tubulaire ayant les propriétés voulues, qui de plus soit unique modulo un automorphisme (topologique, disons) de la situation, automorphisme qui de plus respecte la structure fibrée fournie par la fonction de recollement, il reste la difficulté de la non-canonicité des choix faits, l'automorphisme en question n'étant visiblement pas unique, quoi qu'on fasse pour le "normaliser". L'idée ici, pour rendre canonique ce qui ne l'est pas, est de travailler systématiquement dans des "<u>catégories isotopiques</u>" associées aux catégories de nature topologique s'introduisant dans ces questions (telle la catégorie des paires admissibles (X, Y) et des homéomorphismes de telles paires, etc.), en gardant les mêmes
$\frac{27}{28}$ objets, mais en prenant comme "morphismes" les classes d'isotopie (dans un sens dicté sans ambiguité par le contexte) d'isomorphismes (voire même, de morphismes plus généraux que des isomorphismes). Cette idée, qui est

reprise avec succès dans la thèse de Yves Ladegaillerie notamment (cf. début du par. 3), m'a servi de façon systématique dans toutes mes réflexions ultérieures de topologie combinatoire, quand il s'est agi de formuler avec précision des théorèmes de traduction de situations topologiques, en termes de situations combinatoires. Dans la situation actuelle, mon espoir était d'arriver à formuler (et à prouver!) un théorème d'équivalence entre deux catégories isotopiques convenables, l'une étant la catégorie des "paires admissibles" (X, Y), l'autre celle des "triples admissibles" (U, Y, f) où Y est une variété, U une variété à bord, et $f : \partial U \to Y$ une fibration propre et lisse. De plus, bien sûr, j'espérais qu'un tel énoncé, modulo un travail de nature essentiellement algébrique, s'étendrait de lui-même en un énoncé plus sophistiqué, s'appliquant aux structures stratifiées générales.

Très vite, il apparaissait qu'il ne pouvait être question d'obtenir un énoncé aussi ambitieux dans le contexte des espaces topologiques, à cause des sempiternels phénomènes de "sauvagerie". Déjà quand X lui-même est une variété et Y réduit à un point, on se bute à la difficulté que le cône sur un espace compact Z peut être une variété en son sommet, sans que Z soit homéomorphe à une sphère, ni même soit une variété. Il était clair également que les contextes de structures plus rigides qui existaient à l'époque, tel le contexte "linéaire par morceaux", étaient également inadéquats – une des raisons rédhibitoires communes étant qu'ils ne permettaient pas, pour une paire (U, S) d'un "espace" U et d'un sous-espace fermé S, et une application de recollement $f : S \to T$, de construire la somme amalgamée correspondante. C'est quelques années plus tard que j'étais informé de la théorie de Hironaka des ensembles qu'il appelle, je crois, "semi-analytiques" (réels), qui satisfont à certaines des conditions de stabilité essentielles (sans doute
28/29 même à toutes) nécessaires au développement d'un contexte utilisable de "topologie modérée". Du coup cela relance une réflexion sur les fondements d'une telle topologie, dont le besoin m'apparaît de plus en plus clairement.

Avec un recul d'une dizaine d'années, je dirais aujourd'hui, à ce sujet, que la <u>"topologie générale" a été développée</u> (dans les années trente et quarante) <u>par des analystes et pour les besoins de l'analyse</u>, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c'est-à-dire l'étude des <u>propriétés topologiques de formes géométriques</u> diverses. Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des "faux problèmes" (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) comme celle de "l'invariance du domaine", alors même que la solution de ce dernier par Brouwer l'amène à introduire des idées géométriques nouvelles importantes. Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la

géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages. Ainsi, en dehors de cas de (très) basse dimension, il ne peut guère être possible, pour un espace donné X (une variété compacte disons), d'étudier le type d'homotopie (disons) du groupe des automorphismes de X, ou de l'espace des plongements, ou immersions etc. de X dans quelque autre espace Y – alors qu'on sent que ces invariants devraient faire partie de l'arsenal des invariants essentiels associés à X, ou au couple (X, Y), etc., au même titre que l'espace fonctionnel $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ familier en topologie homotopique. Les topologues éludent la difficulté, sans l'affronter, en se rabattant sur des contextes voisins du contexte topologique et moins marqués de sauvagerie que lui, comme les variétés différentiables, les espaces PL (linéaires par morceaux), etc., dont visiblement aucun n'est "bon", i.e.
29/30 n'est stable par les opérations topologiques les plus évidentes, telles les opérations de contraction-recollement (sans même passer à des opérations du type $X \to \mathrm{Aut}(X)$ qui font quitter le paradis des "espaces" de dimension finie). C'est là une façon de tourner autour du pot! Cette situation, comme tant de fois déjà dans l'histoire de notre science, met simplement en évidence cette inertie quasi-insurmontable de l'esprit, alourdi par des conditionnements d'un poids considérable, pour porter un regard sur une question de fondements, donc sur le contexte même dans lequel on vit, respire, travaille – plutôt que de l'accepter comme un donné immuable. C'est à cause de cette inertie sûrement qu'il a fallu des millénaires pour qu'une idée ou une réalité aussi enfantine que le zéro, un groupe, ou une forme topologique, trouve droit de cité en mathématiques. C'est par elle aussi, sûrement, que le carcan de la topologie générale continue à être traîné patiemment par des générations de topologues, la "sauvagerie" étant portée comme une fatalité inéluctable qui serait enracinée dans la nature même des choses.

Mon approche vers des fondements possibles d'une topologie modérée a été une approche axiomatique. Plutôt que de déclarer (chose qui serait parfaitement raisonnable certes) que les "espaces modérés" cherchés ne sont autres (disons) que les espaces semianalytiques de Hironaka, et de développer dès lors dans ce contexte l'arsenal des constructions et notions familières en topologie, plus celles certes qui jusqu'à présent n'avaient pu être développées et pour cause, j'ai préféré m'attacher à dégager ce qui, parmi les propriétés géométriques de la notion d'ensemble semianalytique dans un espace $\mathbb{R}^n$, permet d'utiliser ceux-ci comme "modèles" locaux d'une notion "d'espace modéré" (en l'occurrence, semianalytique), et ce qui (on l'espère!) rend cette notion d'espace modéré suffisamment souple pour pouvoir bel et bien servir de notion de base pour une "topologie modérée" propre à exprimer avec aisance l'intuition topologique des formes. Ainsi,

une fois le travail de fondements qui s'impose accompli, il apparaîtra non une "théorie modérée", mais une vaste infinité, allant de la plus stricte de
30/31 toutes, celle des "espaces $\overline{\mathbb{Q}}_r$-algébriques par morceaux" (où $\overline{\mathbb{Q}}_r = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$), vers celle qui (à tort ou à raison) m'apparaît comme probablement la plus vaste, savoir celle des "espaces analytiques réels par morceaux" (ou semianalytiques dans la terminologie de Hironaka). Parmi les théorèmes de fondements envisagés dans mon programme, il y a un théorème de comparaison qui, vaguement parlant, dira qu'on trouvera essentiellement les mêmes catégories isotopiques (ou même ∞-isotopiques), quelle que soit la théorie modérée avec laquelle on travaille ([6]). De façon plus précise, il s'agit de mettre le doigt sur un système d'axiomes suffisamment riche, pour impliquer (entre bien autres choses!) que si on a deux théories modérées $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ avec $\mathcal{T}$ plus fine que $\mathcal{T}'$ (dans un sens évident), et si X, Y sont deux espaces $\mathcal{T}$-modérés, qui définissent aussi des espaces $\mathcal{T}'$-modérés correspondants, l'application canonique

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{T}}(X,Y) \to \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{T}'}(X,Y)$$

induit une bijection sur l'ensemble des composantes connexes (ce qui impliquera que la catégorie isotopique des $\mathcal{T}$-espaces est équivalente à celle des $\mathcal{T}'$-espaces), et même, est une équivalence d'homotopie (ce qui signifie qu'on a même une équivalence pour les catégories "∞-isotopiques", plus fines que les catégories isotopiques où on ne retient que le π_0 des espaces d'isomorphismes). Ici les Isom peuvent être définis de façon évidente comme ensembles semisimpliciaux par exemple, pour pouvoir donner un sens précis à l'énoncé précédent. Des énoncés analogues devraient être vrais, en remplaçant les "espaces" Isom par d'autres espaces d'applications, soumises à des conditions géométriques standard, comme celle d'être des plongements, des immersions, lisses, étales, des fibrations etc. Egalement, on s'attend à avoir des énoncés analogues, où X, Y sont remplacés par des systèmes d'espaces modérés, tels ceux qui interviennent dans une théorie de dévissage des structures stratifiées – de telle sorte que dans un sens technique précis,
31/32 cette théorie de dévissage sera, elle aussi, essentiellement indépendante de la théorie modérée choisie pour l'exprimer.

Le premier test décisif pour un bon système d'axiomes sur une notion de "partie modérée de $\mathbb{R}^n$" me semble la possibilité de prouver de tels théorèmes de comparaison. Je me suis contenté jusqu'à présent de dégager un système d'axiomes plausible provisoire, sans avoir aucune assurance qu'il ne faudra y rajouter d'autres axiomes, que seul un "travail sur pièces" sans doute permettra de faire apparaître. Le plus fort des axiomes que j'ai introduits, et celui sans doute dont la vérification dans les cas d'espèce est (ou sera) la plus délicate, est un axiome de triangulabilité (modérée, il va sans dire) d'une partie modérée de $\mathbb{R}^n$. Je ne me suis pas essayé à prouver en termes de ces seuls axiomes le théorème de comparaison, j'ai eu l'impression néanmoins (à tort ou à raison encore!) que cette démonstration, qu'elle nécessite ou non l'introduction de quelque axiome supplémentaire, ne présentera pas de grosse difficulté technique. Il est bien possible que les difficultés au niveau technique, pour le développement de fondements satisfaisants de la topologie modérée, y inclus une théorie de dévissage des structures modérées stratifiées, soient déjà pour l'essentiel concentrées dans les axiomes, et par suite essentiellement surmontées dès à présent par des théorèmes de triangulabilité à la Lojasiewicz et Hironaka. Ce qui fait défaut, encore une fois, n'est nullement la virtuosité technique des mathématiciens, parfois impressionnante, mais l'audace (ou simplement l'innocence...) pour s'affranchir d'un contexte familier accepté par un consensus sans failles...

Les avantages d'une approche axiomatique vers des fondements de la topologie modérée me semblent assez évidents. Ainsi, pour considérer une variété algébrique complexe, ou l'ensemble des points réels d'une variété algébrique définie sur $\mathbb{R}$, comme un espace modéré, il semble préférable de travailler dans la théorie "$\mathbb{R}$-algébrique par morceaux", voire même la théorie $\overline{\mathbb{Q}}_r$-algébrique par morceaux (où $\overline{\mathbb{Q}}_r = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) quand il s'agit de
32/33 variétés définies sur des corps de nombres, etc. L'introduction d'un sous-corps $K \subset \mathbb{R}$ associé à la théorie $\mathcal{T}$ (formé des points de $\mathbb{R}$ qui sont $\mathcal{T}$-modérés, i.e. tels que l'ensemble uniponctuel correspondant le soit) permet d'introduire pour tout point x d'un espace modéré X un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbb{R}/K$ algébriquement fermée dans $\mathbb{R}$, et de degré de transcendance fini sur K (majoré par la dimension topologique de X). Quand le degré de transcendance de $\mathbb{R}$ sur K est infini, on trouve une notion de degré de transcendance (ou "dimension") d'un point d'un espace modéré, voisin de la notion familière en géométrie algébrique. De telles notions sont absentes dans la topologie modérée "semianalytique", qui par contre apparaît comme le contexte topologique tout indiqué pour inclure les espaces analytiques réels et complexes.

Parmi les premiers théorèmes auxquels on s'attend dans une topologie modérée comme je l'entrevois, mis à part les théorèmes de comparaison, sont les énoncés qui établissent, dans un sens convenable, l'existence et l'unicité "du" voisinage tubulaire d'un sous-espace modéré fermé dans un espace modéré (compact pour simplifier), les façons concrètes de l'obtenir (par exemple à partir de toute application modérée $X \to \mathbb{R}^+$ admettant Y comme ensemble de ses zéros), la description de son "bord" (alors qu'en général ce n'est nullement une variété à bord!) ∂T, qui admet dans T un voisinage isomorphe au produit de T par un segment, etc. Moyennant des hypothèses d'equisingularité convenables, on s'attend à ce que T soit

muni, de façon essentiellement unique, d'une structure de fibré localement trivial sur Y, admettant ∂T comme sous-fibré. C'est là un des points les moins clairs dans l'intuition provisoire que j'ai de la situation, alors que la classe d'homotopie de l'application structurale prévue $T \to Y$ a un sens évident, indépendamment de toute hypothèse d'équisingularité, comme inverse homotopique de l'application d'inclusion $Y \to T$, qui doit être un homotopisme. Une façon d'obtenir a posteriori une telle structure serait via l'hypothétique équivalence de catégories isotopiques envisagée au début, en
33/34 tenant compte du fait que le foncteur $(U, Y, f) \longmapsto (X, Y)$ est défini de façon évidente, indépendamment de toute théorie de voisinages tubulaires.

On dira sans doute, non sans quelque raison, que tout cela n'est peut-être que rêves, qui s'évanouiront en fumée dès qu'on s'essayera à un travail circonstancié, voire même dès avant en face de certains faits connus ou bien évidents qui m'auraient échappé. Certes, seul un travail sur pièces permettra de décanter le juste du faux et de connaître la substance véritable. La seule chose dans tout cela qui ne fait pour moi l'objet d'aucun doute, c'est la nécessité d'un tel travail de fondements, en d'autres termes, la nature artificielle des fondements actuels de la topologie, et des difficultés que ceux-ci soulèvent à chaque pas. Il est bien possible par contre que la formulation que je donne à une théorie de dévissage des structures stratifiées, comme un théorème d'équivalence de catégories isotopiques (voire même ∞-isotopiques) convenables, soit trop optimiste. Je devrais ajouter pourtant que je n'ai guère de doutes non plus que la théorie de ces dévissages que j'ai développée il y a deux ans, alors qu'elle reste partiellement heuristique, exprime bel et bien une réalité tout ce qu'il y a de palpable. Dans une partie de mon travail, faute de pouvoir disposer d'un contexte "modéré" tout fait, et pour avoir néanmoins des énoncés précis et démontrables, j'ai été amené à postuler sur la structure stratifiée de départ des structures supplémentaires tout ce qu'il y a de plausibles, dans la nature de la donnée de rétractions locales notamment, qui dès lors permettent bel et bien la construction d'un système canonique d'espaces, paramétré par l'ensemble ordonné des "drapeaux" $\mathrm{Drap}(I)$ de l'ensemble ordonné I indexant les strates, ces espaces jouant le rôle des espaces (U, Y) de tantôt, reliés entre eux par des applications de plongements et de fibrations propres, qui permettent de reconstituer de façon tout aussi canonique la structure stratifiée de départ, y compris ces "structures supplémentaires" ([7]). Le seul ennui, c'est que ces dernières semblent un élément de structure superfétatoire, qui n'est nulle-
34/35 ment une donnée dans les situations géométriques courantes, par exemple pour l'espace modulaire compact $\widehat{M_{g,\nu}}$ avec sa "stratification à l'infini" canonique, donnée par le diviseur à croisements normaux de Mumford-Deligne. Une autre difficulté, moins sérieuse sans doute, c'est que le soi-

disant “espace” modulaire est en fait une multiplicité – techniquement, cela s’exprime surtout par la nécessité de remplacer l’ensemble d’indices I pour les strates par une catégorie (essentiellement finie) d’indices, en l’occurrence celle des “graphes MD”, qui “paramètrent” les “structures combinatoires” possibles d’une courbe stable de type (g, ν). Ceci dit, je puis affirmer que la théorie de dévissage générale, spécialement développée sous la pression du besoin de cette cause, s’est révélée en effet un guide précieux, conduisant à une compréhension progressive, d’une cohérence sans failles, de certains aspects essentiels de la tour de Teichmüller (c’est à dire, essentiellement de la “structure à l’infini” des groupes de Teichmüller ordinaires). C’est cette approche qui m’a conduit finalement, dans les mois suivants, vers le principe d’une construction purement combinatoire de la tour des groupoïdes de Teichmüller, dans l’esprit esquissé plus haut (cf. par. 2).

Un autre test de cohérence satisfaisant provient du point de vue “topossique”. En effet, mon intérêt pour les multiplicités modulaires provenant avant tout de leur sens algébrico-géométrique et arithmétique, c’est aux multiplicités modulaires algébriques, sur le corps de base absolu $\mathbb{Q}$, que je me suis intéressé prioritairement, et à un “dévissage” à l’infini de leurs groupes fondamentaux géométriques (i.e. des groupes de Teichmüller profinis) qui soit compatible avec les opérations naturelles de $\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Cela semblait exclure d’emblée la possibilité de me référer à une hypothétique théorie de dévissage de structures stratifiées dans un contexte de “topologie modérée” (ou même de topologie ordinaire, cahin-caha), si ce n’est comme fil conducteur entièrement heuristique. Dès lors se posait la question de
35/36 traduire, dans le contexte des topos (en l’occurrence les topos étales) intervenant dans la situation, la théorie de dévissage à laquelle j’étais parvenu dans un contexte tout différent – avec la tâche supplémentaire, par la suite, de dégager un théorème de comparaison général, sur le modèle des théorèmes bien connus, pour comparer les invariants obtenus (notamment les types d’homotopie de voisinages tubulaires divers) dans le cadre transcendant, et dans le cadre schématique. J’ai pu me convaincre qu’un tel formalisme de dévissage avait bel et bien un sens dans le contexte (dit “abstrait”!) des topos généraux, ou tout au moins des topos noethériens (comme ceux qui s’introduisent ici), via une notion convenable de voisinage tubulaire canonique d’un sous-topos dans un topos ambiant. Une fois cette notion acquise, avec certaines propriétés formelles simples, la description du “dévissage” d’un topos stratifié est considérablement plus simple même dans ce cadre, que dans le cadre topologique (modéré). Il est vrai que là aussi il y a un travail de fondements à faire, notamment pour la notion même de voisinage tubulaire d’un sous-topos – et il est étonnant d’ailleurs que ce travail (pour autant que je sache) n’ait toujours pas été fait, c’est-à-dire

que personne (depuis plus de vingt ans qu'il existe un contexte de topologie étale) ne semble en avoir eu besoin; un signe sûrement que la compréhension de la structure topologique des schémas n'a pas tellement progressé depuis le travail d'Artin-Mazur...

Une fois accompli le double travail de dégrossissage (plus ou moins heuristique) autour de la notion de dévissage d'un espace ou d'un topos stratifié, qui a été une étape cruciale dans ma compréhension des multiplicités modulaires, il est d'ailleurs apparu que pour les besoins de ces dernières, on peut sans doute court-circuiter au moins une bonne partie de cette théorie par des arguments géométriques directs. Il n'en reste pas moins que pour moi, le formalisme de dévissage auquel je suis parvenu a fait ses preuves d'utilité et de cohérence, indépendamment de toute question sur les fondements les plus adéquats qui permettent de lui donner tout son sens.

36/37 6. Un des théorèmes de fondements de topologie (modérée) les plus intéressants qu'il faudrait développer, serait un théorème de "dévissage" (encore!) d'une application modérée propre d'espaces modérés,

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via une filtration décroissante de Y par des sous-espaces modérés fermés Y^i, tels que au-dessus des "strates ouvertes" $Y^i \setminus Y^{i-1}$ de cette filtration, f induise une fibration localement triviale (du point de vue modéré, il va sans dire). Un tel énoncé devrait encore se généraliser et se préciser de diverses façons, notamment en demandant l'existence d'un dévissage analogue *simultané*, pour X et une famille finie donnée de sous-espaces (modérés) fermés de X. Egalement la notion même de fibration localement triviale au sens modéré peut se renforcer considérablement, en tenant compte du fait que les strates ouvertes U_i sont *mieux* que des espaces à structure modérée purement locale, du fait qu'elles sont obtenues comme différence de deux espaces modérés, compacts si Y était compact. Entre la notion d'espace modéré compact (qui se réalise comme un des "modèles" de départ dans un $\mathbb{R}^n$) et celle d'espace "localement modéré" (localement compact) qui s'en déduit de façon assez évidente, il y a une notion un peu plus délicate d'*espace "globalement modéré"* X, obtenu comme différence $\widehat{X} \setminus Y$ de deux espaces modérés compacts, étant entendu qu'on ne distingue pas entre l'espace défini par une paire $(\widehat{X}, Y)$, et celui défini par une paire $(\widehat{X}', Y')$ qui s'en déduit par une application modérée (nécessairement propre)

$$g : \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{X}$$

induisant une bijection $g^{-1}(X) \xrightarrow{\sim} X$, en prenant $Y' = g^{-1}(Y)$. L'exemple naturel le plus intéressant peut-être est celui où on part d'un schéma séparé

37/38 de type fini sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, en prenant pour X l'ensemble de ses points complexes ou réels, qui hérite d'une structure modérée globale à l'aide des compactifications schématiques (qui existent d'après Nagata) du schéma de départ. Cette notion d'espace globalement modéré est associée à une notion d'application globalement modérée, qui permet à son tour de renforcer en conséquence la notion de fibration localement triviale, dans l'énoncé d'un théorème de dévissage pour une application $f : X \to Y$ (pas nécessairement propre maintenant) dans le contexte des espaces globalement modérés.

J'ai été informé l'été dernier par Zoghman Mebkhout qu'un théorème de dévissage dans cet esprit avait été obtenu récemment dans le contexte des espaces analytiques réels et/ou complexes, avec des Y^i qui, cette fois, sont des sous-espaces analytiques de Y. Ce résultat rend plausible qu'on dispose dès à présent de moyens techniques suffisamment puissants pour démontrer également un théorème de dévissage dans le contexte modéré, plus général en apparence, mais probablement moins ardu.

C'est le contexte d'une topologie modérée également qui devrait permettre, il me semble, de formuler avec précision un principe général très sûr que j'utilise depuis longtemps dans un grand nombre de situations géométriques, que j'appelle le "principe des choix anodins" – aussi utile que vague d'apparence! Il dit, lorsque pour les besoins d'une construction quelconque d'un objet géométrique en termes d'autres, on est amené à faire un certain nombre de choix arbitraires en cours de route, de façon donc que l'objet obtenu dépend en apparence de ces choix et est donc entâché d'un défaut de canonicité, que ce défaut est sérieux en effet (et pour être levé demande une analyse plus soigneuse de la situation, des notions utilisées, des données introduites etc.) chaque fois que l'un au moins de ces choix s'effectue dans un "espace" qui n'est pas "contractile" i.e. dont le π_0 ou un des invariants supérieurs π_i est non trivial; que ce défaut est par contre apparent seulement, que la construction est "essentiellement canonique"
38/39 et n'entraînera pas vraiment d'ennuis, chaque fois que les choix faits sont tous "anodins", i.e. s'effectuent dans des espaces contractiles. Quand on essaye dans les cas d'espèce de cerner de plus près ce principe, il semble qu'on tombe à chaque fois sur la notion de "catégories ∞-isotopiques" exprimant une situation donnée, plus fines que les catégories isotopiques (= 0-isotopiques) plus naïves, obtenues en ne retenant que les π_0 des espaces d'isomorphismes qui s'introduisent dans la situation, alors que le point de vue ∞-isotopique retient tout leur type d'homotopie. Par exemple, le point de vue isotopique naïf pour les surfaces compactes à bord orientées de type (g, ν) est "bon" (sans boomerang caché!) exactement dans les cas que j'appelle "anabéliens" (et que Thurston appelle "hyperboliques") i.e. distincts de $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$ – qui sont aussi les cas justement

ou le groupe des automorphismes de la surface a une composante neutre contractile. Dans les autres cas, sauf le cas $(0, 0)$ de la sphère sans trou, il suffit de travailler avec les catégories 1-isotopiques pour exprimer de façon satisfaisante par voie algébrique les faits géométrico-topologiques essentiels, vu que ladite composante connexe est alors un $K(\pi, 1)$. Travailler dans une catégorie 1-isotopique revient d'ailleurs à travailler dans une bicatégorie, i.e. avec des $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ qui sont (non plus des ensembles discrets comme dans le point de vue 0-isotopique, mais) des groupoïdes (dont les π_0 ne sont autres que les Hom 0-isotopiques). C'est la description en termes purement algébriques de cette bicatégorie qui est faite dans la dernière partie de la thèse de Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

Si je me suis étendu ici plus longuement sur le thème des fondements de la topologie modérée, qui n'est nullement un de ceux auxquels je compte me consacrer prioritairement dans les années qui viennent, c'est sans doute justement que je sens qu'il y a là d'autant plus une cause qui a besoin d'être plaidée, ou plutôt: un travail d'une grande actualité qui a besoin de bras! Comme naguère pour de nouveaux fondements de la géométrie algébrique,
39/40 ce ne sont pas des plaidoyers qui surmontent l'inertie des habitudes acquises, mais un travail tenace, méticuleux, sans doute de longue haleine, et porteur au jour le jour de moissons éloquentes.

Je voudrais encore dire quelques mots sur une réflexion plus ancienne (fin des années 60?), très proche de celle dont il vient d'être question, inspirée par les idées de Nash, qui m'avaient beaucoup frappé. Au lieu ici de définir axiomatiquement une notion de “théorie modérée” via la donnée de “partie modérée de $\mathbb{R}^n$” satisfaisant à certaines conditions (de stabilité surtout), c'est à une axiomatisation de la notion de “variété lisse” et du formalisme différentiable sur de telles variétés que j'en avais, via la donnée, pour chaque entier naturel n, d'un sous-anneau $\mathcal{A}_n$ de l'anneau des germes de fonctions réelles à l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Ce sont les fonctions qui seront admises pour exprimer les “changements de carte” pour la notion de $\mathcal{A}$-variété correspondante, et il s'est agi de dégager tout d'abord un système d'axiomes sur le système $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui assure à cette notion de variété une souplesse comparable à celle de variété C^∞, ou analytique réelle (ou de Nash). Suivant le type de constructions familières qu'on tient à pouvoir effectuer dans le contexte des $\mathcal{A}$-variétés, le système d'axiomes pertinent est plus ou moins réduit, ou riche. Très peu suffit s'il s'agit seulement de développer le formalisme différentiel, avec la construction de fibrés de jets, les complexes de De Rham etc. Si on veut un énoncé du type “quasi-fini implique fini” (pour une application au voisinage d'un point), qui est apparu comme un énoncé-clef dans la théorie locale des espaces analytiques, il faut un axiome de stabilité de nature plus délicate, dans le

40/41 "Vorbereitungssatz" de Weierstrass (*) Dans d'autres questions, un axiome de stabilité par prolongement analytique (dans $\mathbb{C}^n$) apparaît nécessaire. L'axiome le plus draconien que j'ai été amené à introduire, lui aussi un axiome de stabilité, concerne l'intégration des systèmes de Pfaff, assurant que certains groupes de Lie, voire tous, sont des $\mathcal{A}$-variétés. Dans tout ceci, j'ai pris soin de ne pas supposer que les $\mathcal{A}_n$ soient des $\mathbb{R}$-algèbres, donc une fonction constante sur une $\mathcal{A}$-variété n'est "admissible" que si sa valeur appartient à un certain sous-corps K de $\mathbb{R}$ (c'est, si on veut, $\mathcal{A}_0$). Ce sous-corps peut fort bien être $\mathbb{Q}$, ou sa fermeture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_r$ dans $\mathbb{R}$, ou toute autre sous-extension de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, de préférence même de degré de transcendance fini, ou du moins dénombrable, sur $\mathbb{Q}$. Cela permet par exemple, comme tantôt pour les espaces modérés, de faire correspondre à tout point x d'une variété (de type $\mathcal{A}$) un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbb{R}/K$. Un fait qui me semble important ici, c'est que même sous sa forme la plus forte, le système d'axiomes n'implique pas qu'on doive avoir $K = \mathbb{R}$. Plus précisément, du fait que tous les axiomes sont des axiomes de stabilité, il résulte que pour un ensemble S donné de germes de fonctions analytiques réelles à l'origine (dans divers espaces $\mathbb{R}^n$), il existe une plus petite théorie $\mathcal{A}$ pour laquelle ces germes sont admissibles, et que celle-ci est "dénombrable" i.e. les $\mathcal{A}_n$ sont dénombrables, dès que S l'est. A fortiori, K est alors dénombrable, i.e. de degré de transcendance dénombrable sur $\mathbb{Q}$.

L'idée est ici d'introduire, par le biais de cette axiomatique, une notion de fonction (analytique réelle) "élémentaire", ou plutôt, toute une hiérarchie de telles notions. Pour une fonction de 0 variables, i.e. une constante, cette notion donne celle de "constante élémentaire", incluant notamment (dans le cas de l'axiomatique la plus forte) des constantes telles que π, e et une multitude d'autres, en prenant des valeurs de fonctions admissibles (telles l'exponentielle, le logarithme etc.) pour des systèmes de valeurs "admissibles" de l'argument. On sent que la relation entre le système $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
41/42 et le corps de rationalité K correspondant doit être très étroite, du moins pour des $\mathcal{A}$ qui peuvent être engendrés par un "système de générateurs" S fini – mais il est à craindre que la moindre question intéressante qu'on pourrait se poser sur cette situation soit actuellement hors de portée ([1]).

Ces réflexions anciennes ont repris quelque actualité pour moi avec ma réflexion ultérieure sur les théories modérées. Il me semble en effet qu'il est possible d'associer de façon naturelle à une "théorie différentiable" $\mathcal{A}$

(*) Il peut paraître plus simple de dire que les anneaux (locaux) $\mathcal{A}_n$ sont henséliens, ce qui est équivalent. Mais il n'est nullement clair a priori sous cette dernière forme que la condition en question est dans la nature d'une condition de stabilité, circonstance importante comme il apparaîtra dans les réflexions qui suivent.

une théorie modérée $\mathcal{T}$ (ayant sans doute même corps de constantes), de telle façon que toute $\mathcal{A}$-variété soit automatiquement munie d'une structure $\mathcal{T}$-modérée, et inversement que pour tout espace $\mathcal{T}$-modéré compact X, on puisse trouver une partie fermée modérée rare Y dans X, telle que $X \setminus Y$ provienne d'une $\mathcal{A}$-variété, et que de plus cette structure de $\mathcal{A}$-variété soit unique tout au moins dans le sens suivant: deux telles structures coïncident dans le complémentaire d'une partie modérée rare $Y' \supset Y$ de X. La théorie de dévissage des structures modérées stratifiées (dont il a été question au par. précédent), dans le cas des strates lisses, devrait d'ailleurs soulever des questions beaucoup plus précises encore de comparaison des structures modérées avec des structures de type différentiable (ou plutôt, $\mathbb{R}$-analytique). Je soupçonne que le type d'axiomatisation proposé ici pour la notion de "théorie différentiable" fournirait un cadre naturel pour formuler de telles questions avec toute la précision et la généralité souhaitables.

7. Depuis le mois de mars de l'an dernier, donc depuis près d'un an, la plus grande partie de mon énergie a été consacrée à un travail de réflexion sur les fondements de l'algèbre (co)homologique non commutative, ou ce qui revient au même, finalement, de l'algèbre homotopique. Ces réflexions se sont concrétisées par un volumineux paquet de notes dactylographiées, destinées à former le premier volume (actuellement en cours d'achèvement) d'un ou-
$\frac{42}{43}$ vrage en deux volumes à paraître chez Hermann, sous le titre commun "A la Poursuite des Champs". Je prévois actuellement (après des élargissements successifs du propos initial) que le manuscrit de l'ensemble des deux volumes, que j'espère achever en cours d'année pour ne plus avoir à y revenir, fera dans les 1500 pages dactylographiées. Ces deux volumes d'ailleurs sont pour moi les premiers d'une série plus vaste, sous le titre commun "Réflexions Mathématiques", où je compte développer tant soit peu certains des thèmes esquissés dans le présent rapport.

Vu qu'il s'agit d'un travail en cours de rédaction, et même d'achèvement, dont le premier volume sans doute paraîtra cette année et contiendra une introduction circonstanciée, il est sans doute moins intéressant que je m'étende ici sur ce thème de réflexion, et je me contenterai donc d'en parler très brièvement. Ce travail me semble quelque peu marginal par rapport aux thèmes que je viens d'esquisser, et ne représente pas (il me semble) un véritable renouvellement d'optique ou d'approche par rapport à mes intérêts et ma vision mathématiques d'avant 1970. Si je m'y suis résolu soudain, c'est presque en désespoir de cause, alors que près de vingt ans se sont écoulés depuis que se sont posées en termes bien clairs un certain nombre de questions visiblement fondamentales, et mûres pour être menées à leur terme, sans que personne ne les voie, ou prenne la peine de les sonder. Aujourd'hui

encore, les structures de base qui interviennent dans le point de vue homotopique en topologie, y compris même en algèbre homologique commutative, ne sont pas comprises, et à ma connaissance, après les travaux de Verdier, de Giraud et d'Illusie, sur ce thème (qui constituent autant de "coups d'envoi" attendant toujours une suite...) il n'y a pas eu d'effort dans ce sens. Je devrais faire exception sans doute pour le travail d'axiomatisation fait par Quillen sur la notion de catégorie de modèles, à la fin des années 60, et repris sous des variantes diverses par divers auteurs. Ce travail à l'époque, et maintenant encore, m'a beaucoup séduit et appris, tout en allant dans une
43/44 direction assez différente de celle qui me tenait et tient à coeur. Il introduit certes des catégories dérivées dans divers contextes non commutatifs, mais sans entrer dans la question des structures internes essentielles d'une telle catégorie, laissée ouverte également dans le cas commutatif par Verdier, et après lui par Illusie. De même, la question de mettre le doigt sur les "coefficients" naturels pour un formalisme cohomologique non commutatif, au-delà des champs (qu'on devrait appeler 1-champs) étudiés dans le livre de Giraud, restait ouverte – ou plutôt, les intuitions riches et précises qui y répondent, puisées dans des exemples nombreux provenant de la géométrie algébrique notamment, attendent toujours un langage précis et souple pour leur donner forme.

Je reviens sur certains aspects de ces questions de fondements en 1975, à l'occasion (je crois me souvenir) d'une correspondance avec Larry Breen (deux lettres de cette correspondance seront reproduites en appendice au Chap. I du volume 1, "Histoires de Modèles", de la Poursuite des Champs). A ce moment apparaît l'intuition que les ∞-groupoïdes doivent constituer des modèles, particulièrement adéquats, pour les types d'homotopie, les n-groupoïdes correspondant aux types d'homotopie tronqués (avec $\pi_i = 0$ pour $i > n$). Cette même intuition, par des voies très différentes, a été retrouvée par Ronnie Brown à Bangor et certains de ses élèves, mais en utilisant une notion de ∞-groupoïde assez restrictive (qui, parmi les types d'homotopie 1-connexes, ne modélise que les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane). C'est stimulé par une correspondance à bâtons rompus avec Ronnie Brown, que j'ai finalement repris une réflexion, commençant par un essai de définition d'une notion de ∞-groupoïde plus large (rebaptisé par la suite "champ en ∞-groupoïdes" ou simplement "champ", sous-entendu: sur le topos ponctuel), et qui de fil en aiguille m'a amené à la Poursuite des Champs. Le volume "Histoire de Modèles" y constitue d'ailleurs une digression entièrement imprévue par rapport au propos initial (les fameux champs étant provisoirement oubliés, et n'étant prévus réapparaître que
44/45 vers les pages 1000 environ...).

Ce travail n'est pas entièrement isolé par rapport à mes intérêts plus récents. Par exemple, ma réflexion sur les multiplicités modulaires $\widehat{M}_{g,\nu}$ et leur structure stratifiée a relancé une réflexion sur un théorème de Van Kampen de dimension > 1 (un des thèmes de prédilection également du groupe de Bangor), et a peut-être contribué à préparer le terrain pour le travail de plus grande envergure l'année d'après. Celui-ci rejoint également par moments une réflexion datant de la même année 1975 (ou l'année d'après) sur un "complexe de De Rham à puissances divisées", qui a fait l'objet de ma dernière conférence publique, à l'IHES en 1976, et dont le manuscrit, confié je ne me rappelle plus à qui après l'exposé, est d'ailleurs perdu. C'est au moment de cette réflexion que germe aussi l'intuition d'une "schématisation" des types d'homotopie, que sept ans après j'essaye de préciser dans un chapitre (particulièrement hypothétique) de l'Histoire de Modèles.

Le travail de réflexion entrepris dans la Poursuite des Champs est un peu comme une dette dont je m'acquitterais, vis-à-vis d'un passé scientifique où, pendant une quinzaine d'années (entre 1955 et 1970), le développement d'outils cohomologiques a été le Leitmotiv constant, dans mon travail de fondements de la géométrie algébrique. Si la reprise actuelle de ce thème-là a pris des dimensions inattendues, ce n'est pas cependant par pitié pour un passé, mais à cause des nombreux imprévus faisant irruption sans cesse, en bousculant sans ménagement les plans et propos prévus – un peu comme dans un conte des mille et une nuits, où l'attention se trouve maintenue en haleine à travers vingt autres contes avant de connaître le fin mot du premier.

8. J'ai très peu parlé encore des réflexions plus terre-à-terre de géométrie topologique bidimensionelle, associées notamment à mes activités d'enseignant et celles dites de "direction de recherches". A plusieurs reprises, j'ai
45/46 vu s'ouvrir devant moi de vastes et riches champs mûrs pour la moisson, sans que jamais je réussisse à communiquer cette vision, et l'étincelle qui l'accompagne, à un (ou une) de mes élèves, et à la faire déboucher sur une exploration commune, de plus ou moins longue haleine. A chaque fois jusqu'à aujourd'hui même, après une prospection de quelques jours ou quelques semaines, où je découvrais en éclaireur des richesses insoupçonnées au départ, le voyage tournait court, quand il devenait clair que je serais seul à le poursuivre. Des intérêts plus forts prenaient le pas alors sur un voyage qui, dès lors, apparaissait comme une digression, voire une dispersion, plutôt qu'une aventure poursuivie en commun.

Un de ces thèmes a été celui des polygones plans, centré autour des variétés modulaires qu'on peut leur associer. Une des surprises ici a été l'irruption de la géométrie algébrique dans un contexte qui m'en avait semblé bien éloigné. Ce genre de surprise, lié à l'ubiquité de la géométrie algébrique dans la géométrie tout court, s'est d'ailleurs repéré à plusieurs reprises.

Un autre thème a été celui des courbes (notamment des cercles) immergés dans une surface, avec une attention particulière pour le cas "stable" où les points singuliers sont des points doubles ordinaires (et aussi celui, plus général, où les différentes branches en un point se croisent mutuellement), avec souvent l'hypothèse supplémentaire que l'immersion soit "cellulaire", i.e. donne naissance à une carte. Une variante de situations de ce type est celle des immersions d'une surface à bord non vide, et en tout premier lieu d'un disque (qui m'avait été signalé par A'Campo il y a une dizaine d'années). Au delà de la question de diverses formulations combinatoires de telles situations, qui ne représente plus guère qu'un exercice de syntaxe, je me suis intéressé surtout à une vision dynamique des configurations possibles, avec le passage de l'une à l'autre par déformations continues, qui peuvent se décomposer en composées de deux types d'opérations élémentaires et leurs inverses, à savoir le "balayage" d'une branche de courbe par dessus un
46/47 point double, et l'effacement ou la création d'un bigône. (La première de ces opérations joue également un rôle-clef dans une théorie "dynamique" des systèmes de pseudo-droites dans un plan projectif réel.) Une des premières questions qui se posent ici est celle de déterminer les différentes classes d'immersions d'un cercle ou d'un disque (disons) modulo ces opérations élémentaires; une autre, celle de voir quelles sont les immersions du bord du disque qui proviennent d'une immersion du disque, et dans quelle mesure les premières déterminent les secondes. Ici encore, il m'a semblé que c'est une étude systématique des variétés modulaires pertinentes (de dimension infinie en l'occurrence, à moins d'arriver à en donner une version purement combinatoire) qui devrait fournir le "focus" le plus efficace, nous forçant en quelque sorte à nous poser les questions les plus pertinentes. Malheureusement, la réflexion sur les questions même les plus évidentes et les plus terre-à-terre est restée à l'état embryonnaire. Comme seul résultat tangible, je peux signaler une théorie de "dévissage" canonique d'une immersion cellulaire stable du cercle dans une surface, en immersions "indécomposables", par "télescopage" de telles immersions. Je n'ai pas réussi malheureusement à voir se transformer mes lumières sur la question en un travail de stage de DEA, ni d'autres lumières (sur une description théorique complète, en termes de groupes fondamentaux de 1-complexes topologiques, des immersions d'une surface à bord qui prolongent une immersion donnée de son bord) en le démarrage d'une thèse de doctorat d'état...

Un troisième thème, poursuivi simultanément depuis trois ans à divers niveaux d'enseignement (depuis l'option pour étudiants de première année, jusqu'à trois thèses de troisième cycle actuellement poursuivies sur ce thème) porte sur la classification topologique-combinatoire des systèmes de droites

ou pseudo-droites. Dans l'ensemble, la participation de mes élèves ici a été moins décevante qu'ailleurs, et j'ai eu le plaisir parfois d'apprendre par eux des choses intéressantes auxquelles je n'aurais pas songé. La réflexion
47/48 commune, par la force des choses, s'est limitée cependant à un niveau très élémentaire. Dernièrement, j'ai finalement consacré un mois de réflexion intensive au développement d'une construction purement combinatoire d'une sorte de "surface modulaire" associée à un système de n pseudo-droites, qui classifie les différentes "positions relatives" possibles (stables ou non) d'une $(n+1)$-ième pseudo-droite par rapport au système donné, ou encore: les différentes "affinisations" possibles de ce système, par les différents choix possibles d'une "pseudo-droite à l'infini". J'ai l'impression d'avoir mis le doigt sur un objet remarquable, faisant apparaître un ordre imprévu dans des questions de classification qui jusqu'à présent apparaissaient assez chaotiques! Mais ce n'est pas le lieu dans le présent rapport de m'étendre plus à ce sujet.

Depuis 1977, dans toutes les questions (comme dans ces deux derniers thèmes que je viens d'évoquer) où interviennent des cartes bidimensionelles, la possibilité de les réaliser canoniquement sur une surface conforme, donc sur une courbe algébrique complexe dans le cas orienté compact, reste en filigrane constant dans ma réflexion. Dans pratiquement tous les cas (en fait, tous les cas sauf celui de certaines cartes sphériques avec "peu d'automorphismes") une telle réalisation conforme implique en fait une métrique riemanienne canonique, ou du moins, canonique à une constante multiplicative près. Ces nouveaux éléments de structure (sans même prendre en compte l'élément arithmétique, dont il a été question au par. 3) sont de nature à transformer profondément l'aspect initial des questions abordées, et les méthodes d'approche. Un début de familiarisation avec les belles idées de Thurston sur la construction de l'espace de Teichmüller, en termes d'un jeu très simple de chirurgie riemanienne hyperbolique, me confirme dans ce pressentiment. Malheureusement, le niveau de culture très modeste de presque tous les élèves qui ont travaillé avec moi pendant ces dix dernières années ne me permet pas d'aborder avec eux, ne serait-ce que par allusion, de telles possibilités, alors que l'assimilation d'un langage
48/49 combinatoire minimum se heurte déjà, bien souvent, à des obstacles psychiques considérables. C'est pourquoi, à certains égards et de plus en plus ces dernières années, mes activités d'enseignant ont souvent agi comme un poids, plutôt que comme un stimulant pour le déploiement d'une réflexion géométrique tant soit peu avancée, ou seulement délicate.

9. L'occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c'est-à-dire depuis que celle-ci s'effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d'une portée d'un tout autre ordre d'ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur ce sujet. J'ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu'a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d'intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j'aboutis à un constat d'échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d'une même institution universitaire, je n'ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où “il se passe quelque chose” – où quelque chose “passe”, parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j'ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d'envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d'isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n'avait pas attendu la rencontre avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien
49/50 à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

10. Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait

sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayé d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de
$\frac{50}{51}$ travail ne seraient pas de trop pour aller jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux!

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des "motifs", qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé (*). Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des tâches pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

(*) Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).

51/52 ([1]) L'expression "hors de portée" ici (et encore plus loin pour une question toute différente), que j'ai laissée passer en allant à l'encontre d'une réticence, me paraît décidément hâtive et sans fondement. J'ai pu constater déjà en d'autres occasions que lorsque des augures (ici moi-même!) déclarent d'un air entendu (ou dubitatif) que tel problème est "hors de portée", c'est là au fond une affirmation entièrement subjective. Elle signifie simplement, à part le fait que le problème est censé ne pas être résolu encore, que celui qui parle est à court d'idées sur la question, ou de façon plus précise sans doute, qu'il est devant elle sans sentiment ni entrain, qu'elle "ne lui fait rien" et qu'il n'a aucune envie de faire quelque chose avec elle – ce qui souvent est une raison suffisante pour vouloir en décourager autrui. Cela n'a pas empêché qu'à l'instar de M. de la Palisse, et au moment même de succomber, les belles et regrettées conjectures de Mordell, de Tate, de Chafarévitch étaient toujours réputées "hors de portée", les pauvres! – D'ailleurs, dans les jours déjà qui ont suivi la rédaction du présent rapport, qui m'a remis en contact avec des questions dont je m'étais quelque peu éloigné au cours de l'année écoulée, je me suis aperçu d'une nouvelle propriété remarquable de l'action extérieure d'un groupe de Galois absolu sur le groupe fondamental d'une courbe algébrique, qui m'avait échappé jusqu'à présent et qui sans doute constitue pour le moins un nouveau pas en avant vers la formulation d'une caractérisation algébrique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Celle-ci, avec la "conjecture fondamentale" (mentionnée au par. 3 ci-dessous) apparaît à présent comme la principale question ouverte pour les fondements d'une "géométrie algébrique anabélienne", laquelle depuis quelques années, représente (et de loin) mon plus fort centre d'intérêt en mathématiques.

([2]) Je puis faire exception pourtant d'un autre "fait", du temps où, vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait
52/53 des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de "rotondité parfaite" du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une "bonne" définition mathématique, d'une formulation qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force.

([3]) Plus généralement, au-delà des variétés dites "anabéliennes" sur des corps de type fini, la géométrie algébrique anabélienne (telle qu'elle s'est dégagée il y a quelques années) amène à une description, en termes de groupes profinis uniquement, de la catégorie des schémas de type fini sur la

base absolue $\mathbb{Q}$ (voire même $\mathbb{Z}$), et par là même, en principe, de la catégorie des schémas quelconques (par des passages à la limite convenables). Il s'agit donc d'une construction "qui fait semblant" d'ignorer les anneaux (tels que $\mathbb{Q}$, les algèbres de type fini sur $\mathbb{Q}$ etc.) et les équations algébriques qui servent traditionnellement à décrire les schémas, en travaillant directement avec leurs topos étales, exprimables en termes de systèmes de groupes profinis. Un grain de sel cependant: pour pouvoir espérer reconstituer un schéma (de type fini sur $\mathbb{Q}$ disons) à partir de son topos étale, qui est un invariant purement topologique, il convient de se placer, non dans la catégorie des schémas (de type fini sur $\mathbb{Q}$ en l'occurrence), mais dans celle qui s'en déduit par "localisation", en rendant inversibles les morphismes qui sont des "homéomorphismes universels", i.e. qui sont finis, radiciels et surjectifs. Le développement d'une telle traduction d'un "monde géométrique" (savoir celui des schémas, multiplicités schématiques etc.) en termes de "monde algébrique" (celui des groupes profinis, et systèmes de groupes profinis décrivant des topos (dits "étales") convenables) peut être considéré comme
53/54 un aboutissement ultime de la théorie de Galois, sans doute dans l'esprit même de Galois. La sempiternelle question "et pourquoi tout ça?" me paraît avoir ni plus, ni moins de sens dans le cas de la géométrie algébrique anabélienne en train de naître, que pour la théorie de Galois au temps de Galois (ou même aujourd'hui, quand la question est posée par un étudiant accablé...) et de même pour le commentaire qui va généralement avec: "c'est bien général tout ça!".

(4) On conçoit donc aisément qu'un groupe comme Sl(2,$\mathbb{Z}$), avec sa structure "arithmétique", soit une véritable machine à construire des représentations "motiviques" de Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) et de ses sous-groupes ouverts, et qu'on obtient ainsi, au moins en principe, toutes les représentations motiviques qui sont de poids 1, ou contenues dans un produit tensoriel de telles représentations (ce qui en fait déjà un bon paquet!). J'avais commencé en 1981 à expérimenter avec cette machine dans quelques cas d'espèce, obtenant diverses représentations remarquables de $\mathbb{\Gamma}$ dans des groupes $G(\hat{\mathbb{Z}})$, où G est un schéma en groupes (pas nécessairement réductif) sur $\mathbb{Z}$, en partant d'homomorphismes convenables

$$\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow G_0(\mathbb{Z}),$$

où G_0 est un schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$, et G étant construit à partir de là comme extension de G_0 par un schéma en groupes convenable. Dans le cas "tautologique" $G_0 = \mathrm{Sl}(2)_{\mathbb{Z}}$, on trouve pour G une extension remarquable de $\mathrm{Gl}(2)_{\mathbb{Z}}$ par un tore de dimension 2, avec une représentation motivique qui "coiffe" celles associées aux corps de classes des extensions $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$ (comme par hasard, les "corps de multiplication complexe" des deux courbes

elliptiques "anharmonique"). Il y a là un principe de construction qui m'a semblé très général et très efficace, mais je n'ai pas eu (ou pris) le loisir de le dévisser et le suivre jusqu'au bout – c'est là un des nombreux "points chauds" dans le programme de fondements de géométrie algébrique anabélienne (ou de "théorie de Galois", version élargie) que je me propose
54/55 de développer. A l'heure actuelle, et dans un ordre de priorité sans doute très provisoire, ces points sont:

a) Construction combinatoire de la Tour de Teichmüller.

b) Description du groupe des automorphismes de la compactification profinie de cette tour, et réflexion sur une caractérisation de $\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ comme sous-groupe de ce dernier.

c) La "machine à motifs" $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$ et ses variantes.

d) Le dictionnaire anabélien, et la conjecture fondamentale (qui n'est peut-être pas si "hors de portée" que ça!). Parmi les points cruciaux de ce dictionnaire, je prévois le "paradigme profini" pour les corps $\mathbb{Q}$ (cf. b)), $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, dont une formulation plausible reste à dégager, ainsi qu'une description des sous-groupes d'inertie de $\mathbb{\Gamma}$, par où s'amorce le passage de la caractéristique zéro à la caractéristique $p > 0$, et à l'anneau absolu $\mathbb{Z}$.

e) Problème de Fermat.

([5]) Je signalerai cependant un travail plus délicat (mis à part le travail signalé en passant sur les complexes cubiques), sur l'interprétation combinatoire des cartes régulières associées aux sous-groupes de congruence de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$. Ce travail a été développé surtout en vue d'exprimer l'opération "arithmétique" de $\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur ces "cartes de congruences", laquelle se fait, essentiellement, par l'intermédiaire du caractère cyclotomique de $\mathbb{\Gamma}$. Un point de départ a été la théorie combinatoire du "bi-icosaèdre" développée dans un cours C4 à partir de motivations purement géométriques, et qui (il s'est avéré par la suite) permet d'exprimer commodément l'opération de $\mathbb{\Gamma}$ sur la catégorie des cartes icosaédrales (i.e. des cartes de congruence d'indice 5).

([6]) Signalons à ce propos que les classes d'isomorphie d'espaces modérés compacts sont les mêmes que dans la théorie "linéaire par morceaux" (qui n'est pas, je le rappelle, une théorie modérée). C'est là, en un sens, une réhabilitation de la "Hauptvermutung", qui n'est "fausse" que parce que, pour des raisons historiques qu'il serait sans doute intéressant de cerner de
55/56 plus près, les fondements de topologie utilisés pour la formuler n'excluaient pas les phénomènes de sauvagerie. Il va (je l'espère) sans dire que la nécessité de développer de nouveaux fondements pour la topologie "géométrique" n'exclut nullement que les phénomènes en question, comme toute chose sous le ciel, ont leur raison d'être et leur propre beauté. Des fondements

plus adéquats ne supprimeront pas ces phénomènes, mais nous permettront de les situer à leur juste place, comme des "cas limites" de phénomènes de "vraie" topologie.

([7]) En fait, pour reconstituer ce sytème d'espaces

$$(i_0, \ldots, i_n) \longmapsto X_{i_0 \ldots i_n}$$

contravariant sur $\mathrm{Drap}(I)$ (pour l'inclusion des drapeaux), il suffit de connaître les X_i (ou "<u>strates déployées</u>") et les X_{ij} (ou "<u>tubes de raccord</u>") pour $i, j \in I$, $i < j$, et les morphismes $X_{ij} \to X_i$ (qui sont des inclusions "bordantes") et $X_{ij} \to X_j$ (qui sont des fibrations propres, dont les fibres F_{ij} sont appelées "<u>fibres de raccord</u>" pour les strates d'indices i et j). Dans le cas d'une multiplicité modérée cependant, il faut connaître de plus les "<u>espaces de jonction</u>" X_{ijk} $(i < j < k)$ et ses morphismes dans X_{ij}, X_{jk}, et surtout X_{ik}, s'insérant dans le diagramme commutatif hexagonal suivant, où les deux carrés de droites sont cartésiens, les flèches $\hookrightarrow$ sont des immersions (pas nécessairement des plongements ici), et les autres flèches sont des fibrations propres:

$$\begin{tikzcd}
& X_{ik} \arrow[r, hook] \arrow[dl] & X_k & \\
X_i & & X_{ijk} \arrow[ul] \arrow[r, hook] \arrow[dl] & X_{jk} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& X_{ij} \arrow[ul] \arrow[r, hook] & X_j &
\end{tikzcd}$$

(NB. Ce diagramme définit X_{ijk} en termes de X_{ij} et X_{jk} sur X_j, mais non la flèche $X_{ijk} \to X_{ik}$, car $X_{ik} \to X_k$ n'est <u>pas</u> nécessairement un plongement.)

Dans le cas des espaces modérés stratifiés proprement dits (qui ne sont pas des multiplicités à proprement parler) on peut exprimer de façon commode le "déployement" de cette structure, i.e. le système des espaces $X_{i_0 \ldots i_n}$, en termes de l'espace modéré X_* somme des X_i, qui est muni d'une <u>structure d'objet ordonné</u> (dans la catégorie des espaces modérés) ayant comme graphe X_{**} de la relation d'ordre la somme des X_{ij} et des X_i (ces derniers constituant la diagonale). Parmi les propriétés essentielles de cette structure ordonnée, relevons seulement ici que $\mathrm{pr}_1 : X_{**} \to X_*$ est une fibration (localement triviale) propre, et $\mathrm{pr}_2 : X_{**} \to X_*$ est un plongement “bordant”. On a une interprétation analogue du déploiement d’une multiplicité modérée stratifiée, en termes d’une structure de catégorie (remplaçant une simple structure ordonnée) “au sens multiplicités modérées”, dont l’application de composition est donnée par les morphismes $X_{ijk} \to X_{ik}$ ci-dessus.