C O S E C H A S   Y   S I E M B R A S

Reflexiones y testimonios
sobre un pasado de matemático

por

Alexandre GROTHENDIECK

Presentación de Temas

o

P R E L U D I O   E N   C U A T R O   M O V I M I E N T O S

Cuaderno O_1 :

A modo de prefacio
Paseo por una obra — o el niño y la Madre
Epílogo en Posdata — o contexto y prolegómenos de un debate

Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier
y Centre National de la Recherche Scientifique

A mis Padres

COSECHAS Y SIEMBRAS : Presentación de Temas

o

Preludio en cuatro Movimientos

(Sumario)

A modo de Prefacio...

Paseo por una obra — o el niño y la Madre

1. La magia de las cosas
2. La importancia de estar solo
3. La aventura interior — o mito y testimonio
4. El retrato costumbrista
5. Los herederos y el constructor
6. Puntos de vista y visión
7. La “gran idea” — o los árboles y el bosque
8. La visión — o doce temas para una composición
9. Forma y estructura — o la voz de las cosas
10. La nueva geometría — o los esponsales del número y la magnitud
11. El abanico mágico — o la inocencia
12. La topología — o cómo levantar un plano de las brumas
13. Los topos — o la cama de matrimonio
14. Cambio en la noción de espacio — o el ánimo y la fe
15. Todos los caballos del rey...
16. Los motivos — o el corazón del corazón
17. Descubriendo a la Madre — o las dos vertientes
18. El niño y la Madre

E p í l o g o : los Círculos invisibles

19. La muerte es mi cuna (o tres chavales para un moribundo)
20. Vistazo a los vecinos de enfrente
21. “El único” — o el don de la soledad

Una Carta

1. La Carta de mil páginas
2. Nacimiento de Cosechas y Siembras (una retrospectiva-aclaración)
3. El fallecimiento del patrón — obras abandonadas
4. Vientos de entierro ...
5. El viaje
6. La vertiente de la sombra — o creación y desprecio
7. El respeto y la fortaleza
8. “Mis íntimos” — o la connivencia
9. El despojo
10. Cuatro olas en un movimiento

11. Movimiento y estructura
12. Espontaneidad y rigor

Epílogo en Posdata — o Contexto y Prolegómenos de un Debate

13. El espectrógrafo de botellas
14. Metiendo la pata tres veces
15. La gangrena — o el espíritu de los tiempos (1)
16. Retractación pública — o el espíritu de los tiempos (2)

Índice de materias de Cosechas y Siembras (cuadernos 0 a 4)

Introducción (I) : El trébol de cinco hojas

1. Sueño y cumplimiento
2. El espíritu de un viaje
3. Brújula y equipajes
4. Un viaje persiguiendo cosas evidentes
5. Una deuda bienvenida

Introducción (II) Una muestra de respeto

1. El Entierro
2. El Protocolo de las Exequias
3. El final de un secreto
4. La escena y los Actores
5. Una muestra de respeto

N.B. El presente "cuaderno O_1" de la edición provisional de Cosechas y Siembras está destinado (como muestra el sumario) a ir delante del cuaderno (que figura como n^o O_2) que se había distribuido anteriormente, bajo el título "Carta — Introducción"; salvo el "Epílogo en posdata" (numerado[1] de L44 a L56), que es (como su nombre indica) una "posdata" a la "Carta" (páginas L 1 a L 43) que abre ese "cuaderno O_2". Ambos cuadernos forman la introducción de Cosechas y Siembras, titulada "Presentación de Temas" o "Preludio en Cuatro Movimientos".

[1](N. del T.) Numeración del original en francés. En esta traducción corresponde a las páginas 47 a 54.

A Modo de Prefacio...

30 de enero de 1986

Sólo faltaba escribir el prólogo para entregar Cosechas y Siembras a la imprenta. Y juro que tenía la mejor disposición del mundo para escribir cualquier cosa que hiciera el apaño. Cualquier cosa *razonable* esta vez. No más de tres o cuatro páginas, pero bien sentidas, para presentar este enorme "tocho" de más de mil páginas. Cualquier cosa que "enganche" al lector aburrido, que le haga entrever que en estas poco apetecibles "más de mil páginas" puede haber cosas que le interesen (incluso que le conciernan, ¿quién sabe?) Ése no es mi estilo, enganchar, eso no. Pero ¡esta vez haría una excepción! Hacía falta que "el editor tan loco para aventurarse" (a publicar este monstruo, evidentemente impublicable) corriera mal que bien con los gastos.

Y no, no ha podido ser. Aunque he dado lo mejor de mí. Y no en una tarde, como pensaba hacerlo. Mañana hará justo tres semanas que estoy en ello, que las hojas se amontonan. Desde luego lo que ha salido no es lo que podría llamarse decentemente un "prefacio". Sin duda he fallado. No se cambia a mi edad — y no estoy hecho para vender o hacer vender. Incluso si se trata de agradar (a uno mismo, y a los amigos...).

Lo que ha salido es una especie de largo "paseo" comentado a través de mi obra matemática. Un paseo pensado sobre todo para el "profano" — el que "nunca ha entendido nada de las matemáticas". Y también para mí, que nunca había tenido tiempo para dar tal paseo. Poco a poco me he visto llevado a sacar a la luz y a decir cosas que hasta entonces habían permanecido tácitas. Y casualmente, son las que me parecen más esenciales en mi trabajo y en mi obra. Cosas que no son nada técnicas. Tú verás si he tenido éxito en mi ingenuo intento de "entregarlas" — seguramente un intento un poco loco también. Mi satisfacción y mi placer serían haber sabido hacértelas sentir. Cosas que muchos de mis sabios colegas ya no saben sentir. Tal vez sean ya demasiado sabios y demasiado prestigiosos. A menudo eso hace perder el contacto con las cosas simples y esenciales.

A lo largo de este "Paseo por una obra", también hablo un poco de mi vida.Y un poco, aquí y allá, de qué trata Cosechas y Siembras. Retomo el tema de modo más detallado en la "Carta" (fechada en mayo del año pasado) que va después del "Paseo". Esta carta iba dirigida a mis ex-alumnos y mis "amigos de antaño" en el mundo matemático. Pero tampoco tiene nada técnico. Puede leerla sin problemas cualquier lector que quiera enterarse, con un relato "al natural", de las idas y venidas que finalmente me han llevado a escribir Cosechas y Siembras. Más aún que el paseo, ella te dará un aperitivo de cierto ambiente del "gran mundo" matemático. Y también (al igual que el Paseo) de mi estilo, al parecer algo especial. Y también del espíritu que se expresa con ese estilo — un espíritu que tampoco aprecia todo el mundo.

En el Paseo, y un poco por todas partes en Cosechas y Siembras, hablo del *trabajo matemático.* Es un trabajo que conozco bien y de primera mano. La mayor parte de lo que digo vale, seguramente, para cualquier trabajo creador, cualquier trabajo de descubrimiento. Al menos es válido para el trabajo llamado "intelectual", el que se hace sobre todo "con la cabeza" y escribiendo. Tal trabajo está marcado por la eclosión y el florecimiento de una *comprensión* de lo que estamos sondeando. Pero, tomando un ejemplo del extremo opuesto, también la pasión amorosa es un impulso de descubrimiento. Nos abre a un conocimiento llamado "carnal", que también se renueva, florece, se hace más profundo. Ambos impulsos, el que anima al matemático en su trabajo, digamos, y el de la amante o el amante — son mucho más cercanos de lo que normalmente se supone, o se está dispuesto a admitir. Quisiera que las páginas de Cosechas y Siembras te ayudasen a sentirlo en tu trabajo y en tu vida diaria.

En el Paseo hablaré sobre todo del trabajo matemático mismo. Por contra permanezco casi mudo sobre el *contexto* en que se desarrolla tal trabajo, y sobre las *motivaciones* que actúan fuera del tiempo de trabajo propiamente dicho. Esto podría dar de mi persona, o del matemático o del "científico" en general, una imagen halagadora, pero deforme. Del tipo "pasión noble y grande", sin correctivo de ninguna clase. En la línea, en suma, del gran "Mito de la Ciencia" (¡con C mayúscula por favor!) El mito heroico, "prometeico[2]", en el que han caído escritores y sabios (y siguen cayendo) a cuál mas. A penas los historiadores, tal vez, se resisten a veces a este mito tan seductor. La verdad es que en las motivaciones "del científico", que a veces le empujan a trabajar sin medida, la ambición y la vanidad juegan un papel tan importante y casi universal como en cualquier otra profesión. Esto toma formas más o menos groseras, más o menos sutiles, según el interesado. En modo alguno pretendo ser una excepción. La lectura de mi testimonio no dejará, espero, ninguna duda al respecto.

También es cierto que la ambición más desaforada es incapaz de descubrir el menor enunciado matemático, o de demostrarlo — igual que es incapaz (por ejemplo) de "excitar"[3] (en el sentido propio del término). Tanto si se es hombre o mujer, lo que "excita" no es la ambición, el deseo de brillar, de exhibir un poderío, sexual en este caso — ¡todo lo contrario!, sino que es la percepción aguda de algo grande, muy real y muy delicado a la vez. Podemos llamarlo "la belleza", y es una de las mil caras de lo que nos excita. Ser ambicioso no impide necesariamente apreciar a veces la belleza de un ser, o de una cosa, de acuerdo. Pero lo que es seguro es que n o es la ambición la que nos la hace apreciar...

El hombre que descubrió y dominó el fuego por primera vez era alguien como tú y yo. Nada de lo que nos imaginamos con el nombre de "héroe", de "semidiós" y paro de contar. Seguramente, como tú y como yo, conoció la picadura de la angustia y probó la pomada de la vanidad, que hace olvidar la picadura. Pero en el momento de "conocer" el fuego no tenía ni miedo ni vanidad. Tal es la verdad en el mito heroico. El mito se vuelve insípido, se vuelve pomada, cuando lo usamos para ocultarnos o t r o aspecto de las cosas, igual de real e igual de esencial.

En Cosechas y Siembras mi propósito ha sido hablar de ambos aspectos — del impulso de conocimiento, y del miedo y sus antídotos vanidosos. Creo "comprender", o al menos *conocer* el impulso y su naturaleza. (Tal vez un día descubra hasta qué punto me engañaba...) Pero en lo que se refiere al miedo y la vanidad, y los insidiosos bloqueos de la creatividad que se derivan, bien sé que no he llegado al fondo de este gran enigma. E ignoro si jamás veré el fondo de ese misterio, durante los años que me queden de vida...

Al escribir Cosechas y Siembras han surgido dos imágenes para representar cada uno de estos dos aspectos de la aventura humana. Son el *niño* (alias el *obrero*), y el *Patrón*. En el paseo que vamos a dar, hablaremos casi exclusivamente del "niño". También es él quien figura en el subtítulo *"El niño y la Madre"*. Este nombre se aclarará, espero, durante el paseo.

Por el contrario, en el resto de la reflexión el Patrón es el que ocupa la escena. ¡Por algo es el Patrón! Sería más preciso decir que no se trata de un Patrón, sino de *varios* Patrones de empresas competidoras. Aunque también es cierto que todos los Patrones se parecen en lo esencial. Y cuando empezamos a hablar de patrones, significa que habrá "villanos". En la parte I de la reflexión ("Fatuidad y Renovación", que sigue a esta introducción o "Preludio en cuatro Movimientos") sobre todo soy yo "el villano". En las tres partes siguientes, sobre todo son "los otros". ¡Cada uno en su turno!

Así pues, además de profundas reflexiones filosóficas y de "confesiones" (en modo alguno contritas),

[2](N. del T.) En la mitología griega Prometeo es un Titán que robó el fuego y lo devolvió a la Tierra cuando Zeus dejó a los hombres sin fuego.

[3](N. del T.) Traducción inexacta de la expresión familiar y coloquial "faire bander", que indica excitación sexual y es comúnmente usada en Francia desde los años 60, como en la canción de George Brassens: "Quand je pense à Fernande, Je bande, je bande".

habrá "retratos al vitriolo" (retomando la expresión de un colega y amigo, que se ha considerado algo maltratado...). Sin contar las "operaciones" de gran envergadura y nada poéticas. Robert Jaulin[4] me dijo (medio en broma) que en Cosechas y Siembras hacía la "etnología del ambiente matemático" (o tal vez la sociología, ya no sabría decir). Desde luego es halagador, ¡uno se entera de que (sin saberlo) hace cosas sabias! Es cierto que en la parte "investigación" de la reflexión (y muy a pesar mío...) he visto desfilar, en las páginas que escribía, buena parte del stablishment matemático, sin contar a numerosos colegas y amigos de status más modesto. Y en estos últimos meses, desde que envié la tirada provisional de Cosechas y Siembras el pasado mes de octubre, eso se ha "repetido". Desde luego, mi testimonio ha sido como una pedrada en una charca. Ha tenido ecos de todos los tonos (salvo el del aburrimiento). Casi siempre, en absoluto era el que me esperaba. Y también ha habido mucho silencio, que es muy elocuente. Claramente tenía (y me queda) mucho que aprender, y de todos los colores, sobre lo que hay en la cabeza de unos y otros, entre mis ex-alumnos y otros colegas más o menos bien situados — perdón, ¡quería decir sobre la "sociología del ambiente matemático"! A todos los que antes o después aporten su contribución a la gran obra sociológica de mi vejez, expreso aquí mismo mi gratitud.

Por supuesto, he sido particularmente sensible a los ecos de tonos cálidos. También ha habido unos pocos colegas que me han participado una emoción, o un sentimiento (hasta entonces inexpresado) de crisis o de degradación en ese ambiente matemático del que se sienten parte.

Fuera de tal ambiente, entre los primeros que dieron una acogida calurosa, incluso emocionada, a mi testimonio, quisiera nombrar aquí a Sylvie y Catherine Chevalley[5], Robert Jaulin, Stéphane Deligorge, Christian Bourgois. Si Cosechas y Siembras va a tener una difusión más amplia que la tirada provisional inicial (dirigida al círculo de los más cercanos), es gracias a ellos. Gracias sobre todo a su convicción contagiosa: que lo que me había esforzado en captar y decir, debía ser dicho. Y que podía entenderse en un círculo más amplio que el de mis colegas (a menudo huraños, incluso malhumorados, y nada dispuestos a ser cuestionados...). Así es como Christian Bourgois no ha dudado en correr el riesgo de publicar lo impublicable, y Stéphane Deligeorge de honrarme acogiendo mi indigesto testimonio en la colección "Epistémé", al lado (por el momento) de Newton, de Cuvier y de Arago. (¡No podría soñar mejor compañía!) Me alegro de expresar aquí mi agradecimiento a cada uno por sus repetidas muestras de simpatía y confianza, llegadas en un momento particularmente "sensible".

Henos aquí saliendo a dar un paseo por una obra, como el que parte para un viaje a través de una vida. Un largo viaje sí, de más de mil páginas y bien colmada cada una. Le he dedicado una vida a este viaje, sin haberlo terminado, y más de un año a redescubrirlo página tras página. A veces las palabras se han resistido a venir, para expresar todo el jugo de una experiencia que aún eludía una comprensión dubitativa — igual que el racimo lleno de uvas maduras metido en el lagar parece, por momentos, querer eludir la fuerza que le aplasta... Pero incluso cuando parece que las palabras se empujan y brotan a borbotones, no lo hacen a la buena ventura. Cada una ha sido sopesada al pasar, o si no después, para ser ajustada cuidadosamente caso de ser demasiado ligera, o demasiado pesada. Tampoco esta reflexión-

[4]Robert Jaulin es un antiguo amigo. Me parece que en el stablishment de los etnólogos tiene una situación (de "lobo blanco") algo parecida a la mía en el "bello mundo" matemático.

[5]Sylvie y Catherine Chevalley son la viuda y la hija de Claude Chevalley, colega y amigo al que va dedicada la parte central de Cosechas y Siembras (CyS III, "La Llave del Yin y del Yang"). En varias partes de la reflexión, hablo de él, y de su papel en mi itinerario.
(N. del T.) CyS, acrónimo de "Cosechas y Siembras", es traducción del acrónimo ReS de "Récoltes et Semailles".

testimonio-viaje ha sido hecha para ser leída deprisa, en un día o en un mes, por un lector que tuviera prisa en llegar a la última palabra. No hay "última palabra" ni "conclusiones" en Cosechas y Siembras, como no las hay en mi vida, ni en la tuya. Hay un vino envejecido toda una vida en los barriles de mi ser. El último vaso que beberás no será mejor que el primero o el centésimo. Todos son "el mismo", y todos diferentes. Y si el primer vaso está picado, lo está todo el tonel; entonces más vale beber buen agua (si se encuentra), que mal vino.

Pero un buen vino no se bebe deprisa, ni corriendo.

P a s e o p o r u n a o b r a
o
E l n i ñ o y l a M a d r e

1. Cuando era niño me gustaba ir a la escuela. El mismo maestro nos enseñaba a leer y a escribir, el cálculo, a cantar (nos acompañaba con un pequeño violín), o los hombres prehistóricos y el descubrimiento del fuego. En esa época no recuerdo habernos aburrido jamás en la escuela. Estaba la magia de los números, y la de las palabras, de los signos y los sonidos. También la de la *rima*, en las canciones y los pequeños poemas. Parecía que en la rima había un misterio más allá de las palabras. Así fue hasta el día en que me explicaron que había un "truco" muy simple; que la rima sólo es hacer terminar con la misma sílaba dos frases consecutivas que de golpe, como por magia, se convierten en *versos*. ¡Era una revelación! En casa, durante semanas y meses, donde hallara quien me escuchase me divertía haciendo versos. En cierto momento ya no hablaba más que rimando. Afortunadamente eso se me ha pasado. Pero ocasionalmente hago poemas, incluso ahora — pero ya sin buscar la rima si no viene ella misma.

Otra vez un compañero mayor, que ya iba al instituto, me enseñó los números negativos. Era otro juego muy divertido, pero se agotó más deprisa. Y estaban los crucigramas — pasaba días y semanas haciéndolos, cada vez más complicados. En este juego se combinaba la magia de la forma con la de los signos y las palabras. Pero esa pasión se marchó, aparentemente sin dejar rastro.

En el instituto, en Alemania el primer año, luego en Francia, era un buen alumno sin ser el "alumno brillante". Me dedicaba sin medida a lo que más me interesase y tendía a descuidar lo que me interesaba menos, sin preocuparme mucho de la estima del profesor en cuestión. Durante mi primer año en el instituto en Francia, en 1940, estuve internado con mi madre en un campo de concentración en Rieucros, cerca de Mende. Había guerra y éramos unos extranjeros — unos "indeseables", como se decía. Pero la administración del campo hacía la vista gorda con los niños del campo, por más indeseables que fuesen. Entrábamos y salíamos casi como queríamos. Yo era el mayor y el único que iba al instituto, a cuatro o cinco kilómetros de allí, incluso con nieve o viento, con unos zapatos cualesquiera que siempre se calaban.

Aún recuerdo mi primer "trabajo de matemáticas", en que el profesor me puso mala nota por la demostración de uno de los "tres casos de igualdad de triángulos". Mi demostración no era la del libro, que él seguía religiosamente. Sin embargo, yo estaba seguro de que mi demostración no era ni más ni menos convincente que la del libro, cuyo espíritu seguía, a golpe de los sempiternos y tradicionales "se desliza tal figura con tal movimiento sobre tal otra". Evidentemente quien me enseñaba no se sentía capaz de juzgar por sí mismo (aquí, la validez de un razonamiento). Necesitaba referirse a una autoridad, la del libro en este caso. Me debió chocar esa postura para que haya recordado ese pequeño incidente. Después y aún hoy mismo, he tenido muchas ocasiones de ver que tal postura no es en modo alguno la excepción, sino la regla casi universal. Habría mucho que decir sobre este tema — un tema que aflora más de una vez de una forma u otra en Cosechas y Siembras. Pero aún hoy, quieras o no, me desconcierto cada vez que me lo encuentro de nuevo...

En los últimos años de la guerra, mientras mi madre permanecía internada en el campo, estuve en un hogar infantil del "Socorro Suizo" para niños refugiados, en Chambon sur Lignon, la mayoría judíos, y cuando se avisaba (por la policía local) de una redada de la Gestapo, nos escondíamos en los bosques una noche o dos, en pequeños grupos de dos o tres, sin darnos cuenta de que en ello nos jugábamos la piel. La región estaba llena de judíos escondidos en la Cevenas, y muchos sobrevivieron gracias a la solidaridad de la población local.

Lo que más me chocaba en el "Collège Cévénol" (donde estudiaba) era hasta qué punto mis compañeros no estaban interesados en lo que aprendían allí. En cuanto a mí, devoraba los libros de texto al principio del curso, pensando que esa vez, por fin íbamos a aprender cosas *verdaderamente* interesantes; y el resto del curso empleaba mi tiempo lo mejor que podía, mientras soltaban inexorablemente el programa previsto, a lo largo de los trimestres. Con todo había profesores simpáticos. El profesor de Historia Natural, Monsieur Friedel, tenía una categoría humana e intelectual notable. Pero, incapaz de "castigar severamente", le armaban jaleo a tope, hasta el punto de que al final del curso ya era imposible seguirle, su impotente voz cubierta por el alboroto general. ¡Tal vez por eso no he sido biólogo!

No era poco el tiempo que pasaba, incluso en clase (chitón...), haciendo problemas de matemáticas. Los que traía el libro pronto dejaban de bastarme. Tal vez porque tendían, por fuerza, a parecerse demasiado unos a otros; pero sobre todo, me parece, porque era como si cayesen del cielo en fila india, sin decir de dónde venían ni a dónde iban. Eran los problemas del libro y no *mis* problemas. Y no faltaban los problemas verdaderamente naturales. Así, cuando se conocen las longitudes a, b, c de los tres lados de un triángulo, se conoce el triángulo (abstracción hecha de su posición), luego debe haber alguna "fórmula" explícita para expresar, por ejemplo, el área del triángulo en función de a, b, c. Igualmente para un tetraedro del que conocemos la longitud de sus seis aristas ¿cuál es su volumen? Me parece que esa vez tuve muchas dificultades, pero al final debí conseguirlo. Cuando algo me "agarraba", no contaba las horas ni los días que le dedicaba ¡con peligro de olvidar todo lo demás! (Y todavía es así...)

En nuestros libros de matemáticas, lo que menos me satisfacía era la ausencia de toda definición seria de la noción de longitud (de una curva), de área (de una superficie), de volumen (de un sólido). Me prometí llenar esa laguna cuando tuviera tiempo. Le dediqué la mayor parte de mi energía entre 1945 y 1948, mientras estudiaba en la Universidad de Montpellier. Los cursos de la facultad no me satisfacían. Sin ser claramente consciente, debía tener la impresión de que los profesores se limitaban a repetir sus libros, igual que mi primer profesor de matemáticas en el instituto de Mende. Así que no ponía el pie en la facultad más que de tarde en tarde, para estar al corriente del sempiterno "programa". Los libros bastaban para tal programa, pero también estaba claro que no respondían a las preguntas que me planteaba. A decir verdad, ni siquiera las *veían*, no más que mis libros del instituto. En cuanto daban recetas para calcular todo, longitudes, áreas y volúmenes, a golpes de integrales simples, dobles y triples (eludiendo prudentemente las dimensiones superiores a tres...), parecía que el problema de darles una definición intrínseca no se les planteaba, no más a mis profesores que a los autores de los manuales.

Según la limitada experiencia que entonces tenía, pudiera parecer que era el único ser dotado de curiosidad para las cuestiones matemáticas. Al menos esa era mi convicción tácita durante esos años que pasé en una soledad intelectual completa, y que no me pesaba[6]. En realidad, me parece que en ese tiempo nunca se me ocurrió profundizar en la cuestión de si yo era la única persona en el mundo capaz de interesarse en lo que hacía. Bastante tenía con mantener la apuesta que me había hecho: desarrollar una teoría que me satisficiera plenamente.

No tenía ninguna duda de que lo conseguiría, de hallar la última palabra de las cosas, a poco que me tomara la molestia de escrutarlas, poniendo negro sobre blanco lo que me dijeran, poco a poco. La

[6] Entre 1945 y 1948, vivía con mi madre en una pequeña aldea a una decena de kilómetros de Montpellier, Mairargues (por Vendargues), perdida en medio de los viñedos. (Mi padre desapareció en Auschwitz, en 1942). Vivíamos miserablemente con mi beca de estudiante. Para salir adelante hacía la vendimia cada año y, después de la vendimia, vino de rebusca que conseguía colocar como podía (contraviniendo, según parece, la legislación vigente...). Además había un jardín que, sin tener que cuidarlo, nos proporcionaba abundantes higos, espinacas e incluso (al final) tomates, plantados por un atento vecino en medio de un mar de amapolas. Era una buena vida — aunque a veces algo justa en las sisas cuando había que sustituir la montura de unas gafas o un par de zapatos raídos. Afortunadamente mi madre, debilitada y enferma después de su largo internamiento en los campos, tenía derecho a la asistencia médica gratuita. Jamás hubiéramos podido pagar un médico...

intuición del *volumen*, digamos, era inapelable. Sólo podía ser el reflejo de una *realidad*, por el momento escurridiza, pero perfectamente fiable. Esta realidad es lo que había que captar, así de simple — un poco, tal vez, como la realidad mágica de "la rima" había sido captada, "comprendida" un día.

Cuando me puse en ello, a la edad de diecisiete años y recién salido del instituto, pensaba que sería cuestión de unas semanas. Estuve tres años. Incluso encontré el modo, naturalmente, de suspender un examen al terminar el segundo año — el de trigonometría esférica (en la especialidad "profundización en astronomía", sic), por culpa de un error idiota de cálculo numérico. (Nunca se me dio bien el cálculo, hay que reconocerlo, desde que salí del instituto...). Por eso tuve que quedarme un tercer año en Montpellier para terminar mi licenciatura, en vez de ir inmediatamente a París — el único sitio, me aseguraban, donde tendría ocasión de encontrar gente enterada de lo que se consideraba importante en matemáticas. Mi confidente, Monsieur Soula, también me aseguraba que los últimos problemas que todavía quedaban en matemáticas habían sido resueltos, hacía veinte o treinta años, por alguien llamado Lebesgue. Habría desarrollado precisamente (¡curiosa coincidencia, verdaderamente!) una teoría de la medida y de la integración que ponía punto final a las matemáticas.

Monsieur Soula, mi profesor de cálculo diferencial, era un hombre benevolente y amable conmigo. Sin embargo no creo que me convenciera. Ya debía presentir que la matemática es algo ilimitado en extensión y profundidad. ¿Tiene el mar un "punto final"? Lo cierto es que nunca se me ocurrió buscar el libro de ese Lebesgue del que Monsieur Soula me había hablado, y que tampoco él debió tener jamás entre sus manos. A mi entender no podía haber nada en común entre lo que pudiera contener un libro y el trabajo que realizaba, a mi manera, para satisfacer mi curiosidad sobre las cosas que me habían intrigado.

2. Cuando por fin entré en contacto con el mundo matemático de París, uno o dos años más tarde, terminé por aprender, entre otras muchas cosas, que el trabajo que había hecho en mi rincón con los medios de abordo era (a falta de poco) lo que era bien conocido por "todo el mundo" bajo el nombre de "teoría de la medida y la integral de Lebesgue". A los ojos de los dos o tres mayores a los que hablé de mi trabajo (e incluso enseñé un manuscrito) era sencillamente como si hubiera perdido mi tiempo, haciendo lo "ya conocido". Por lo demás, no recuerdo estar decepcionado. En esa época la idea de coger "prestigio", o aunque sólo fuera una aprobación o sencillamente el interés de otro, por el trabajo que realizaba todavía debía ser ajena a mi espíritu. Sin contar con que dedicaba toda mi energía a familiarizarme con un ambiente totalmente diferente, y sobre todo, a aprender lo que en París se consideraba el ABC del matemático[7].

Sin embargo, repensando ahora esos tres años, me doy cuenta de que en modo alguno fueron desperdiciados. Sin saberlo, entonces aprendí en la soledad lo esencial del oficio de matemático — lo que ningún maestro puede enseñar verdaderamente. Sin habérmelo dicho jamás, sin haber encontrado alguien con quien compartir mi sed de comprender, sabía no obstante, diría que "por mis tripas", que era un matemático: alguien que "hace" matemáticas, en el sentido estricto del término — como se "hace" el amor. Para mí la matemática había llegado a ser una amante siempre acogedora y complaciente. Esos años de soledad fundamentaron una confianza que nunca ha vacilado — ni al descubrir (desembarcando en París a los veinte años) toda la extensión de mi ignorancia y de la inmensidad de lo que necesitaba aprender; ni (más de veinte años después) por los tormentosos episodios de mi salida sin retorno del mundo matemático; ni, en estos últimos años, por los episodios a menudo bastante absurdos de cierto "Entierro" (anticipado e impecable) de mi persona y de mi obra, orquestado por mis más cercanos compañeros de

[7] Hago un relato corto de esa época de transición algo ruda en la primera parte de Cosechas y Siembras (CyS I), en la sección "El extranjero bienvenido" (nº 9).

antaño...

Para decirlo de otra forma: en esos años cruciales aprendí a *estar solo* [8]. Entiendo por esto: abordar con mis propias luces las cosas que quiero conocer, más que fiarme de las ideas y consensos, expresos o tácitos, que me llegasen de un grupo más o menos numeroso del que me sintiera miembro o que por cualquier otra razón estuviera investido de autoridad para mí. Consensos mudos me habían dicho, tanto en el instituto como en la universidad, que no había que plantearse cuestiones sobre la noción de "volumen", presentada como "bien conocida", "evidente", "sin problema". Hice caso omiso como algo que cae por su peso — al igual que Lebesgue, algunos decenios antes, debió hacer caso omiso. En ese acto de *"hacer caso omiso"*, de ser uno mismo en suma, y no simplemente la expresión de los consensos que imperan, de no permanecer encerrado dentro del círculo imperativo que nos fijan — en ese acto solitario es ante todo donde se encuentra *"la creación"*. Todo lo demás viene por añadidura.

Posteriormente tuve ocasión, en ese mundo de matemáticos que me acogía, de encontrar a muchos, tanto mayores como jóvenes más o menos de mi edad, que claramente eran mucho más brillantes, mucho más "dotados" que yo. Les admiraba por la facilidad con la que aprendían, como jugando, conceptos nuevos y hacían malabarismos con ellos como si los conocieran desde la cuna — mientras que yo me sentía pesado y paleto, abriéndome camino penosamente, como un topo, entre una montaña informe de cosas que era importante (me aseguraban) aprender, y de las que me sentía incapaz de captar los pormenores. De hecho, no tuve nada del estudiante brillante que pasa fácilmente los concursos prestigiosos, asimilando programas prohibitivos en un santiamén.

La mayoría de mis compañeros más brillantes han llegado a ser matemáticos competentes y afamados. Sin embargo, con la perspectiva de treinta o treinta y cinco años, veo que no han dejado en la matemática de nuestro tiempo una huella verdaderamente profunda. Han hecho cosas, cosas bonitas a veces, en un contexto ya construido, que no hubieran soñado ni tocar. Sin saberlo han permanecido prisioneros de esos círculos invisibles y férreos que delimitan un Universo en un ambiente y en una época dada. Para cruzarlos, hubiera hecho falta que encontrasen en ellos esa capacidad que era suya al nacer, al igual que era mía: la capacidad de estar solo.

El niño pequeño no tiene ningún problema en estar solo. Es solitario por naturaleza, aunque la compañía ocasional no le disgusta y sabe pedir la teta de mamá cuando es hora de mamar. Y sabe bien, sin tener que decírselo a sí mismo, que la teta es para él y que él *sabe* mamar. Pero a menudo hemos perdido el contacto con ese niño que está en nosotros. Y constantemente pasamos al lado del mejor, sin dignarnos a verlo...

Si en Cosechas y Siembras me dirijo a alguien más que a mí mismo, no es a un "público". Me dirijo a ti que me lees como a una *persona*, y una persona *sola*. Es al que en ti sabe estar solo, al niño, al que quisiera hablar, y a nadie más. A menudo el niño está lejos, bien lo sé. Le han puesto verde y desde hace mucho tiempo. Se ha escondido Dios sabe dónde, y a menudo no es fácil llegar hasta él. Juraríamos que siempre ha estado muerto, más bien que nunca ha existido — y sin embargo estoy seguro de que está ahí en alguna parte, y bien vivo.

También sé cuál es la *señal* de que se me entiende. Es cuando, más allá de todas las diferencias de cultura y de destino, lo que digo de mi persona y de mi vida encuentra eco y resonancia en ti; cuando reencuentras también *tu propia vida*, tu propia experiencia de ti mismo, tal vez la de un día al que hasta

[8] Esta expresión es algo impropia. Jamás tuve que "aprender a estar solo", por la sencilla razón de que durante mi infancia nunca *desaprendí* esa capacidad innata que estaba en mí al nacer, como está en cada uno. Pero esos tres años de trabajo solitario, en que pude darme la medida de mí mismo según los criterios espontáneos de exigencia que eran los míos propios, confirmaron y dejaron en mí, esta vez en relación con el trabajo matemático, un cimiento de confianza y de serena seguridad que no debía nada a los consensos y las modas que imperan. Tengo ocasión de hablar de ello otra vez en la nota "Raíces y soledad" (CyS IV, nº 171_3, especialmente p. 1080).

entonces no habías prestado atención. No se trata de una "identificación", con algo o alguien alejado de ti. Pudiera ocurrir, un poco, que redescubrieras tu propia vida, lo que está más *cerca* de ti, mediante el redescubrimiento que hago de la mía, a lo largo de las páginas de Cosechas y Siembras hasta las que hoy mismo estoy escribiendo.

3. Ante todo, Cosechas y Siembras es una *reflexión* sobre mí mismo y mi vida. Por eso mismo también es un *testimonio*, y de dos formas. Es un testimonio de mi *pasado*, que ocupa la mayor parte de la reflexión. Pero a la vez también es un testimonio del *presente* más inmediato — del momento en que escribo, en el que nacen las páginas de Cosechas y Siembras a lo largo de las horas, de las noches y los días. Estas páginas son el testigo fiel de una larga meditación sobre mi vida, tal cual se ha desarrollado realmente (y prosigue todavía en este mismo momento...).

Estas páginas no tienen pretensiones literarias. Constituyen un *documento* sobre mí mismo. No me permito tocarlas (sobre todo para unos retoques estilísticos ocasionales) más que dentro de unos límites muy estrechos[9]. Si hay alguna pretensión, es la de ser verdadero. Y ya es bastante.

Por otra parte, este documento no tiene nada de "autobiografía". No aprenderás ni mi fecha de nacimiento (que sólo tendría interés para hacer el horóscopo), ni los nombres de mi madre y de mi padre o a lo que se dedicaban, ni los nombres de la que fue mi esposa y de otras mujeres que han sido importantes en mi vida, o de los hijos que nacieron de esos amores, y lo que unos y otros han hecho con su vida. No es que esas cosas no hayan sido importantes en mi vida, o no continúen siéndolo. Pero tal y como esta reflexión sobre mí mismo ha comenzado y se ha desarrollado, en ningún momento he sentido la incitación de involucrarme por poco que fuera en una descripción de esas cosas que rozo acá y allá, y todavía menos, a alinear conscientemente nombres y cifras. En ningún momento me pareció que eso pudiera añadir algo al propósito que tenía en ese momento. (Mientras que en las pocas páginas precedentes he sido llevado, como a mi pesar, a incluir tal vez más detalles materiales sobre mi vida que en las mil páginas siguientes...)

Y si me preguntas cuál es el "propósito" que persigo a lo largo de mil páginas, te respondería: es el de hacer el relato, y por eso mismo el *descubrimiento*, de la *aventura interior* que ha sido y es mi vida. Este relato-testimonio de una aventura se desarrolla simultáneamente en los dos niveles de los que acabo de hablar. Está la exploración de una aventura pasada, de sus raíces y de su origen hasta mi infancia. Y está la continuación y renovación de esa "misma" aventura, al hilo de los instantes y los días mientras escribo Cosechas y Siembras, en respuesta espontánea a una interpelación violenta que me llega del mundo exterior[10].

Los hechos exteriores alimentan la reflexión solamente en la medida en que suscitan y provocan un rebrote de la aventura interior, o ayudan a esclarecerla. Y el entierro y el pillaje de mi obra matemática, del que hablaremos largo y tendido, ha sido una de esas provocaciones. Ha provocado en mí la sublevación en masa de poderosas reacciones egocéntricas, y a la vez me ha revelado los vínculos profundos e ignorados que siguen ligándome con la obra que salió de mí.

Es cierto que el hecho de que yo forme parte de los "fuertes en matemáticas" no es necesariamente una razón (y menos todavía una buena razón) para que mi "aventura" particular te interese — ni el hecho

[9] Así, las eventuales correcciones de errores (materiales, o de perspectiva, etc.) no se aprovechan para retocar la primera redacción, sino que se hacen en notas a pie de página, o en una "vuelta" posterior sobre la situación examinada.

[10] Para precisiones sobre esta "interpelación violenta", ver la "Carta", principalmente las secciones 3 a 8.

de que haya tenido roces con mis colegas después de haber cambiado de ambiente y de estilo de vida. Además no faltan colegas, ni incluso amigos, que les parece muy ridículo poner en un escaparate (como ellos dicen) los "estados del alma". Lo que cuenta son los "resultados". El "alma", es decir la que en nosotros *vive* la "producción" de esos resultados y también todas sus consecuencias (tanto en la vida del "productor", como en la de sus semejantes), es objeto de desprecio, incluso de una burla abiertamente mostrada. Esa actitud pasa por ser una expresión de "modestia". En ella veo el indicio de una huida y de un extraño desajuste, promovido por el aire mismo que respiramos. Es seguro que no escribo para el que esté contagiado por esa clase de larvado desprecio de sí mismo, que le lleva a desdeñar lo mejor que puedo ofrecerle. Un desprecio por lo que verdaderamente constituye *su propia vida*, y por lo que constituye la mía: los movimientos superficiales y profundos, burdos o sutiles, que animan la psique, precisamente ese "alma" que vive la experiencia y reacciona, que se esconde o se ensancha, que se repliega o que aprende...

El relato de una aventura interior sólo puede hacerlo el que la vive, y nadie más. Pero incluso si el relato no estuviera destinado más que a sí mismo, sería raro que no se deslizara por el transitado camino de la construcción de un *mito*, y el narrador sería el héroe. Tal mito no nace de la imaginación creadora de un pueblo y una cultura, sino de la vanidad del que no osa asumir una humilde realidad y se complace en sustituirla por una construcción de su espíritu. Pero un relato *verdadero* (si lo hubiera) de una aventura tal y como fue verdaderamente vivida, es algo valioso. Y esto, no por un prestigio que (con razón o sin ella) rodease al narrador sino por el mero hecho de *existir*, en su calidad de verdad. Tal testimonio es valioso, venga de un hombre de notoriedad digamos ilustre, o de un pequeño empleado sin futuro y cargado de familia, o de un preso común.

Si tal relato tiene una virtud para algún otro, ante todo es la de confrontarle consigo mismo mediante el testimonio sin maquillaje de la experiencia de otro. O también (para decirlo de otro modo) de borrar quizás en él (aunque sólo fuera en el tiempo que dura una lectura) ese desprecio que tiene a su *propia aventura*, y a ese "alma" que es el pasajero y el capitán...

4. Hablando de mi pasado matemático y descubriendo seguidamente (como de mala gana) las peripecias y los arcanos del gigantesco Entierro de mi obra, he sido conducido, sin saberlo, a realizar el retrato de cierto ambiente y de cierta época — de una época marcada por la descomposición de ciertos valores que daban sentido al trabajo de los hombres. Es el aspecto "retrato costumbrista", bosquejado alrededor de un "suceso" sin duda único en los anales de "la Ciencia". Lo que acabo de decir deja bien claro, pienso, que no encontrarás en Cosechas y Siembras un "dossier" sobre cierto "caso" extraño, para ponerte rápidamente al corriente. Quien busque el dossier pasará con los ojos cerrados y sin ver nada al lado de casi toda la substancia y la carne de Cosechas y Siembras.

Según explico de forma más detallada en la Carta, "la investigación" (o el "retrato costumbrista") se lleva a cabo sobre todo en las partes II y IV, "El Entierro (1) — o el vestido del Emperador de China" y "El Entierro (3) — o las Cuatro Operaciones". A lo largo de las páginas saco a la luz obstinadamente, uno tras otro, multitud de hechos jugosos (como mínimo) que intento "encajar" a medida como puedo. Poco a poco esos hechos se ensamblan en un retrato de familia que paulatinamente sale de las brumas, con colores cada vez más vivos, con contornos cada vez más nítidos. En esas notas diarias los "hechos en bruto" que acaban de aparecer se mezclan inextricablemente con recuerdos personales, y con con comentarios y reflexiones de naturaleza psicológica, filosófica, o incluso (ocasionalmente) matemática. ¡Así es y no puedo evitarlo!

Partiendo del trabajo que he hecho, que me ha tenido en vilo más de un año, realizar un dossier, estilo "conclusiones de la investigación", representaría un trabajo adicional del orden de unas horas o unos días, según la curiosidad y exigencia del lector interesado. En cierto momento intenté realizarlo, el famoso dossier. Fue cuando empecé a escribir una nota que se llamaría "Las Cuatro Operaciones"[11]. Y no, no hubo nada que hacer. ¡No lo logré! No es mi estilo de expresión, desde luego, y en mi vejez menos que nunca. Y ahora estimo que con Cosechas y Siembras he hecho suficiente beneficio a la "comunidad matemática" como para dejar sin remordimientos a otros (llegado el caso entre los colegas que se sientan aludidos) la tarea de realizar el "dossier" que se impone.

5. Es hora de que diga algunas palabras sobre mi obra matemática, que tuvo en mi vida y aún conserva (para mi sorpresa) un lugar importante. Más de una vez vuelvo en Cosechas y Siembras sobre esta obra — a veces de modo fácilmente inteligible por todos y en otros momentos en términos algo técnicos[12]. Estos últimos pasajes van a pasar en su mayoría "por encima" no sólo del "profano", sino incluso del colega matemático que no esté más o menos "en el ajo" de las matemáticas en cuestión. Por supuesto que puedes saltar sin más los pasajes que te parezcan de naturaleza demasiado "ardua". Al igual que puedes recorrerlos, y quizás captar de paso un reflejo de la "misteriosa belleza" (como me decía un amigo no matemático) del mundo de los objetos matemáticos, surgiendo como "extraños islotes inaccesibles" en las vastas aguas revueltas de la reflexión...

Según dije antes, la mayoría de los matemáticos se encierran en un marco conceptual, en un *"Universo"* fijado de una vez por todas — esencialmente el que encontraron "ya terminado" cuando estudiaron. Son como los herederos de una hermosa y gran casa bien amueblada, con sus salas de estar y sus cocinas y sus talleres, y su batería de cocina y herramientas para todo, con las que vaya si se puede cocinar y hacer bricolaje. Cómo se construyó esa casa progresivamente, a lo largo de generaciones, y cómo y por qué se idearon y construyeron tales herramientas (y no otras ...), por qué las habitaciones están dispuestas y arregladas de tal modo aquí, y de tal otro allí — he ahí preguntas que esos herederos jamás soñarían en plantearse. El "Universo" es eso, el "dato" en el que hay que vivir ¡y punto final! Algo que parece grande (a menudo no se han recorrido todas las habitaciones), pero *familiar* a la vez, y sobre todo: *inmutable.* Cuando se afanan, es para mantener y embellecer el patrimonio: reparar un mueble cojo, enlucir una fachada, afilar una herramienta, a veces incluso, los más atrevidos, hacer en el taller un mueble nuevo con todas sus partes. Y cuando se dedican en cuerpo y alma, el mueble es muy bello y toda la casa parece más hermosa.

En unas pocas ocasiones, alguno sueña en modificar una herramienta o incluso, bajo la presión reiterada e insistente de la necesidad, en imaginar y fabricar una nueva. Cuando lo hace, poco falta para que se deshaga en excusas por lo que siente como una especie de afrenta al respeto que merece la tradición familiar, que cree trastornar con una innovación insólita.

En la mayoría de las habitaciones las ventanas están cuidadosamente cerradas — no sea que entre un vendaval. Y cuando los hermosos muebles nuevos, por aquí y allá, sin contar los críos, comienzan a atestar las habitaciones y a invadir hasta los pasillos, ninguno de esos herederos querrá darse cuenta de que su Universo familiar y confortable empieza a quedarse un poco estrecho. Antes que decidirse a reconocerlo, unos y otros preferirán hacinarse y arrinconarse como sea, uno entre un aparador Luis XV y una mecedora de mimbre, otro entre un chaval mocoso y un sarcófago egipcio, y alguno, desesperado, trepará como pueda a un montón heteróclito y tambaleante de sillas y bancos...

[11] La nota prevista terminó por ser la parte IV (del mismo nombre "Las cuatro operaciones") de Cosechas y Siembras, incluyendo unas 70 notas que ocupan más de cuatrocientas páginas.

[12] Además de ojeadas matemáticas sobre mi antigua obra, también hay diseminados pasajes con desarrollos matemáticos nuevos. El más largo es "Las cinco fotos (cristales y $\mathcal{D}$-módulos)" en CyS IV, nota nº 171 (ix).

El pequeño cuadro que acabo de esbozar no es particular del mundo de los matemáticos. Ilustra condicionamientos inveterados e inmemoriales que se hallan en todos los medios y en todas las esferas de la actividad humana, y (según sé) en todas las sociedades y todas la épocas. Ya he tenido ocasión de aludir a ello, y de ningún modo pretendo estar exento. Como mostrará mi testimonio, lo cierto es lo contrario. Lo que ocurre es que, al nivel relativamente limitado de una actividad creadora intelectual, me ha afectado poco[13] ese condicionamiento, que podría llamarse la "ceguera cultural" — la incapacidad de ver (y de moverse) fuera del "Universo" fijado por el ambiente cultural.

En cuanto a mí, siento que formo parte de la línea de los matemáticos cuya alegría y vocación espontánea es construir sin parar mansiones nuevas[14]. De paso, no les queda más remedio que inventar y construir poco a poco las herramientas, utensilios, muebles e instrumentos necesarios, tanto para construir la casa desde los cimientos hasta el remate, como para proveer en abundancia las futuras cocinas y talleres, y equipar la casa para vivir en ella y estar a gusto. Con todo, una vez colocado el último canalón y el último taburete, es raro que el obrero se entretenga mucho en ese sitio, donde cada piedra y cada tablón lleva la traza de la mano que lo ha trabajado y colocado. Su lugar no está en la quietud de los universos terminados, por muy acogedores y armoniosos que sean — hayan sido dispuestos por sus propias manos o por las de sus predecesores. Otros tareas le llaman ya en nuevas obras, bajo el empuje imperioso de necesidades que quizás sea el único en sentir claramente, o (con más frecuencia) adelantándose a necesidades que es el único en presentir. Su lugar está al aire libre. Es amigo del viento y no teme estar solo en el trabajo durante meses y años y, si hiciera falta, durante toda la vida si no viniera en su ayuda un relevo bienvenido. No tiene más que dos manos como todo el mundo, eso está claro — pero dos manos que en cada momento adivinan lo que tienen que hacer, a las que no repugnan las faenas más groseras, ni las más delicadas, y que jamás dejan de conocer y reconocer esas innumerables cosas que sin cesar piden ser conocidas. Quizás dos manos sea poco, ya que el Mundo es infinito. ¡Jamás lo agotarán! Y sin embargo, dos manos es mucho ...

Aunque no sé mucha historia, si tuviera que dar nombres de matemáticos de esa clase, me vienen espontáneamente los de Galois y Riemann (en el siglo pasado[15]) y el de Hilbert (a principios del presente siglo). Si busco un representante entre los mayores que me acogieron al entrar en el mundo matemático[16], el nombre de Jean Leray es el que primero me viene, aunque mis contactos con él hayan sido de lo más superficiales[17].

Acabo de dibujar a grandes trazos dos retratos: el del matemático "hogareño" que se contenta con mantener y mejorar una herencia, y el del constructor-pionero[18] que no puede evitar traspasar

[13] Creo que debido a cierto clima propicio que rodeó mi infancia hasta los cinco años. Véase a este respecto la nota "la inocencia" (CyS III, nº 107).

[14] Este arquetipo de la "casa" por construir surge y se formula por primera vez en la nota "Yin el siervo, y los nuevos amos" (CyS III, nº 135).

[15] (N. del T.) El siglo XIX.

[16] Hablo de esa entrada en la sección "El extranjero bienvenido" (CyS I, nº 9).

[17] Eso no impide que yo haya sido (siguiendo a H. Cartan y J.P. Serre) uno de los mayores usuarios de uno de los grandes conceptos innovadores introducidos por Leray, el de haz, que ha sido una herramienta esencial en toda mi obra geométrica y me ha proporcionado la clave para ampliar la noción de espacio (topológico) con la de topos, que trataremos más adelante. No obstante Leray difiere del retrato del constructor que he bosquejado, me parece, en que no se ha dedicado a "construir mansiones desde los cimientos hasta el remate". Más bien no ha podido evitar iniciar vastos cimientos en lugares que nadie hubiera soñado, dejando a otros la tarea de terminarlos y de construir encima y, una vez terminada la casa, de instalarse en ella (aunque sólo fuera por un tiempo)...

[18] Acabo, subrepticiamente y "de rondón", de juntar dos etiquetas de resonancias masculinas (la de "constructor" y la de "pionero") que expresan dos aspectos bien diferentes del impulso de descubrimiento, y de naturaleza más delicada que la que evocan esos nombres. Eso es lo que surgirá más adelante en este paseo-reflexión, en la etapa "Descubriendo a la Madre — o las dos vertientes" (nº 17).

continuamente esos "círculos invisibles y férreos" que delimitan un Universo[19]. Se les puede llamar también, con unos nombres algo tajantes pero sugestivos, los "conservadores" y los "innovadores". Uno y otro tienen su razón de ser, y un papel que jugar en una misma aventura colectiva que prosigue durante generaciones, siglos y milenios. En una periodo de florecimiento de una ciencia o de un arte, entre esos dos temperamentos no hay oposición ni antagonismo[20]. Son distintos y se complementan mutuamente, como se complementan la masa y la levadura.

Entre estos dos caracteres extremos (pero nada opuestos por naturaleza), por supuesto que encontramos todo un abanico de temperamentos intermedios. Tal "hogareño" que ni soñaría en abandonar un hogar familiar, y menos aún encargarse del trabajo de ir a construir otro Dios sabe dónde, no dudará, cuando comienza a quedarse pequeño, en poner manos a la obra para arreglar un sótano o un granero, levantar una planta más, o incluso, si hiciera falta, añadir una nueva dependencia de modestas proporciones[21]. Sin tener alma de constructor, a menudo mira con simpatía, o al menos sin inquietud ni reprobación secretas, al que habiendo compartido con él la vivienda, se mata a reunir vigas y piedras en un terreno imposible, como quien ya viera allí un palacio...

6. Pero volvamos a mi propia persona y a mi obra.

Si he destacado en el arte del matemático, ha sido menos por la habilidad y la perseverancia en la resolución de problemas legados por mis predecesores que por esa tendencia natural que me empuja a ver *cuestiones* claramente cruciales que nadie había visto, o a desentrañar los *"buenos conceptos"* que faltaban (a menudo sin que nadie se diera cuenta antes de que el nuevo concepto apareciera) y los *"buenos enunciados"* que nadie había considerado. A menudo, conceptos y enunciados se armonizan de forma tan perfecta que en mi espíritu no cabe duda de que sean correctos (salvo retoques, a lo más) — y entonces, cuando no se trata de un "trabajo meticuloso" destinado a publicarse, me dispenso de ir más lejos y de tomarme la molestia de poner a punto una demostración que a menudo, una vez bien visto el enunciado y su contexto, no puede ser más que cuestión de "oficio", por no decir de rutina. Las cosas que llaman la atención son innumerables y ¡es imposible seguir hasta el final la llamada de cada una! Eso no impide que las proposiciones y teoremas demostrados con el debido rigor se cuenten por miles en mi obra escrita y publicada, y creo poder decir que salvo raras excepciones todos forman parte del patrimonio común de las cosas comúnmente admitidas como "conocidas" y corrientemente utilizadas en matemáticas un poco por todas partes.

Mi genio particular me conduce al descubrimiento, más que de cuestiones, conceptos y enunciados nuevos, al de *"puntos de vista"* fecundos, que constantemente me llevan a introducir y desarrollar mal que bien *temas* totalmente nuevos. Así ha sido, me parece, mi contribución esencial a la matemática de mi tiempo. A decir verdad, esas numerosas cuestiones, conceptos y enunciados de los que acabo de hablar, para mí no tienen sentido más que a la luz de alguno de tales "puntos de vista" — o mejor dicho, *nacen* de él espontáneamente, con la fuerza de la evidencia; al igual que una luz (incluso difusa) que

[19] A la vez, y sin quererlo, asigna a este Universo (si no para sí mismo, al menos para sus congéneres más sedentarios que él) límites nuevos, con nuevos círculos ciertamente más amplios, pero tan invisibles y férreos como fueron los que reemplazaron.

[20] Especialmente tal fue el caso en el mundo matemático durante el periodo (1948–1969), del que fui testigo directo mientras yo mismo formaba parte de ese mundo. Después de mi salida en 1970, parece que ha habido una especie de reacción de amplia envergadura, una especie de "consenso de desprecio" por las "ideas" en general, y más particularmente por las grandes ideas innovadoras que introduje.

[21] Casi todos mis "mayores" (que aparecen v. gr. en "Una deuda bienvenida", Introducción, 5) corresponden a este temperamento intermedio. Pienso sobre todo en Henri Cartan, Claude Chevalley, André Weil, Jean-Pierre Serre, Laurent Schwartz. Salvo quizás Weil, todos "miraron con simpatía", sin "inquietud ni reprobación secretas", las aventuras solitarias en las que me vieron embarcar.

surge en una noche negra parece hacer salir de la nada esos contornos más o menos borrosos o nítidos que nos muestra de repente. Sin esa luz que los une en un haz común, los diez o cien o mil cuestiones, conceptos y enunciados parecerían como un montón heteróclito y amorfo de "trucos mentales", aislados unos de otros — y no como partes de un *Todo* que, permaneciendo tal vez invisible, ocultándose aún en los recovecos de la noche, se presiente claramente.

El punto de vista fecundo es el que nos revela, como partes vivas de un mismo Todo que las engloba y les da sentido, esas cuestiones acuciantes que nadie sentía, y (tal vez como respuesta a esas cuestiones) esas nociones tan naturales que nadie había pensado en desentrañar y esos enunciados que parecen brotar naturalmente, y que ciertamente nadie se atrevía a plantear hasta que no surgieron las cuestiones que los suscitaron, y los conceptos que permitían formularlos. Más aún que los llamados "teoremas-clave" en matemáticas, en nuestro arte[22] los puntos de vista fecundos son las herramientas más poderosas para descubrir — o mejor aún, no son herramientas, sino que son los *ojos* del investigador que apasionadamente quiere conocer la naturaleza de los objetos matemáticos.

Así, el punto de vista fecundo es ese "ojo" que nos hace *descubrir*, y a la vez nos hace *reconocer* la *unidad* en la multiplicidad de lo que descubrimos. Y esta unidad verdaderamente es la vida misma y el aliento que liga y anima esas cosas múltiples.

Pero como su propio nombre sugiere, un "punto de vista" es parcial en sí mismo. Nos revela *uno de los aspectos* de un paisaje o un panorama, entre muchos otros igualmente válidos, igualmente "reales". En la medida en que se conjugan los puntos de vista complementarios, en que se multiplican nuestros "ojos", la mirada penetra más en el conocimiento de las cosas. Cuanto más rica y compleja es la realidad que deseamos conocer, tanto más necesitamos disponer de varios "ojos"[23] para comprenderla en toda su amplitud y con toda finura.

Y a veces sucede que un haz de puntos de vista convergentes sobre un mismo y vasto paisaje, en virtud de lo que en nosotros es capaz de captar el *Uno* en lo múltiple, origina algo nuevo, algo que sobrepasa cada una de las perspectivas parciales, del mismo modo que un ser vivo sobrepasa cada uno de sus miembros y de sus órganos. Este algo nuevo podemos llamarlo una *visión.* La visión une los puntos de vista ya conocidos que la originan y nos revela otros hasta entonces desconocidos, así como el punto de vista fecundo hace descubrir y comprender como parte de un mismo Todo, una multitud de cuestiones, conceptos y enunciados nuevos.

Dicho de otra forma: La visión es a los puntos de vista que une y de los que parece nacer, como la clara y cálida luz del día es a las diferentes componentes del espectro solar. Una visión amplia y profunda es como una *fuente* inagotable, capaz de inspirar e iluminar el trabajo no sólo de aquél en que un día nació y se ha convertido en su servidor, sino el de generaciones, fascinadas tal vez (como él mismo) por los lejanos límites que nos hace entrever...

7. El periodo de mi actividad matemática considerado "productivo", es decir el atestiguado por publicaciones como debe ser, se extiende entre 1950 y 1969, unos veinte años. Y durante veinticinco años, entre 1945 (cuando tenía diecisiete años) y 1969 (cuando ya iba por los cuarenta y dos), me dediqué con todas mis fuerzas a la investigación matemática. Dedicación desmesurada ciertamente. Lo pagué con

[22]Seguramente no sólo en "nuestro arte", sino (me parece) en todo trabajo de descubrimiento, al menos cuando se trata del conocimiento intelectual.

[23]Todo punto de vista conduce a desarrollar un *lenguaje* que lo expresa y le es propio. Tener varios "ojos" o varios "puntos de vista" para comprender una situación, viene a ser lo mismo (al menos en matemáticas) que disponer de *varios lenguajes diferentes* para delimitarla.

un largo estancamiento espiritual, con un "embastecimiento" progresivo, que tendré ocasión de evocar más de una vez en las páginas de Cosechas y Siembras. No obstante, dentro del limitado campo de una actividad puramente intelectual, fueron años de una creatividad intensa, por la eclosión y maduración de una visión restringida al mundo de los objetos matemáticos.

Durante ese largo periodo de mi vida, consagré la casi-totalidad de mi tiempo a lo que se llama un *"trabajo meticuloso"*: al trabajo minucioso de elaboración, de ensamblaje y de rodaje, necesario para la construcción de todas las habitaciones de las casas que una voz (o un demonio...) interior me ordenaba edificar, según un plano maestro que me susurraba a medida que el trabajo avanzaba. Ocupado en las tareas del "oficio": a veces las de cantero, albañil y peón, otras las de fontanero, carpintero y ebanista — muy pocas veces tuve el placer de anotar negro sobre blanco, aunque sólo fuera a grandes trazos, el plano-maestro invisible para todos (según se vio más tarde) menos para mí, que durante días, meses y años guiaba mi mano con la seguridad de un sonámbulo[24]. Hay que decir que el trabajo meticuloso, en el que me complacía poner un cuidado amoroso, no me disgustaba en absoluto. Además, la forma de expresión matemática estimada y practicada por mis mayores concedía preferencia (por decir poco) al aspecto técnico del trabajo, y casi no permitía las "digresiones" sobre las "motivaciones"; es decir, las que hicieran surgir de las brumas alguna imagen o visión inspiradora que, a falta aún de encarnarse en construcciones de madera, piedra o cemento puro y duro, se pareciera más a los jirones de un sueño que al trabajo del artesano, aplicado y concienzudo.

A nivel cuantitativo, durante esos años de productividad intensa mi trabajo cristalizó en unas doce mil páginas de publicaciones bajo la forma de artículos, monografías o seminarios[25], y en centenares, si no millares, de conceptos nuevos que han entrado a formar parte del patrimonio común con los mismos nombres que les puse cuando los saqué a la luz[26]. En la historia de las matemáticas, creo que soy el que ha introducido mayor número de conceptos nuevos, y al mismo tiempo el que ha tenido, por eso mismo, que inventar mayor número de nombres nuevos para expresar esos conceptos con delicadeza, y del modo

[24] La imagen del "sonámbulo" me fue inspirada por el título del notable libro de Koestler "Los sonámbulos" (Calman Lévy), que presenta un "Ensayo sobre la historia de las concepciones del Universo" desde los orígenes del pensamiento científico hasta Newton. Uno de los aspectos de esta historia que más sorprendió a Koestler y que él pone de manifiesto, es hasta qué punto, a menudo, el camino seguido desde cierto punto de nuestro conocimiento del mundo hasta otro punto que (lógicamente y con perspectiva) parece muy cercano, pasa a veces por los rodeos más abracadabrantes, que parecen desafiar el sano juicio; y cómo no obstante, a través de miles de rodeos que deberían extraviarles para siempre, y con una "seguridad de sonámbulo", los hombres que partieron en busca de las "claves" del Universo encuentran, como a pesar de ellos e incluso frecuentemente sin darse cuenta, *otras* "claves" que estaban lejos de prever y que resultan ser "las buenas". En el caso del descubrimiento matemático, por lo que he podido observar a mi alrededor, esos asombrosos rodeos en el camino del descubrimiento se dan en ciertos investigadores de renombre, pero no en todos. Eso podría deberse a que, desde hace dos o tres siglos, la investigación en las ciencias de la naturaleza, y más aún en las matemáticas, se ha liberado de los presupuestos religiosos o metafísicos que imperan en una cultura y en una época dada, que han sido frenos particularmente potentes del despliegue (para lo mejor y lo peor) de una comprensión "científica" del Universo. Con todo es cierto que algunas de las ideas y nociones más fundamentales y evidentes en matemáticas (como las de desplazamiento, de grupo, el número cero, el cálculo literal, las coordenadas de un punto en el espacio, el concepto de conjunto, o la de "forma" topológica, sin hablar de los números negativos o los números complejos) han tardado milenios antes de hacer su aparición. Esos son otros tantos signo elocuentes de ese "bloqueo" inveterado, profundamente implantado en la psique, contrario a la concepción de ideas totalmente nuevas, incluso cuando son de una simplicidad infantil y parecen imponerse por sí mismas con la fuerza de la evidencia, durante generaciones, incluso durante milenios...
Volviendo a mi propio trabajo, tengo la impresión de que mis "meteduras de pata" (quizás más numerosas que las de la mayoría de mis colegas) se limitan exclusivamente a ciertos detalles, generalmente corregidos rápidamente por mí mismo. Son simples "incidencias de viaje" de naturaleza puramente "local" y sin consecuencias serias en la validez de las intuiciones esenciales sobre la situación estudiada. Al contrario, al nivel de las ideas y las grandes intuiciones directrices, me parece que mi obra está libre de todo "fallo", por increíble que pueda parecer. Es esa seguridad que nunca falla al aprehender en cada momento, si no los *resultados* finales (que a menudo no podemos ver), al menos las *direcciones* más fértiles que nos llevan hacia las cosas *esenciales* — es esa seguridad la que hizo surgir en mí la imagen de Koestler del "sonámbulo".

[25] A partir de 1960, parte de esas publicaciones fue redactada con la colaboración de colegas (sobre todo J. Dieudonné) y alumnos.

[26] Se pasa revista a los más importantes de tales conceptos en el Esbozo Temático y en el Comentario Histórico que lo acompaña, que se incluirán en el volumen 4 de las Reflexiones. Ciertos nombres me fueron sugeridos por amigos o alumnos, como el de "morfismo liso" (J. Dieudonné) o la panoplia "site, champ, gerbe, lien" desarrollada en la tesis de Jean Giraud.

más sugestivo que pudiera.

Estas indicaciones meramente "cuantitativas" no proporcionan, ciertamente, más que una apreciación grosera de mi obra, dejando de lado lo que verdaderamente constituye el alma, la vida y el vigor. Como dije antes, lo mejor que he aportado a las matemáticas son los *"puntos de vista"* nuevos que he sabido *entrever* primero, y luego *desentrañar* con paciencia y desarrollar poco o mucho. Al igual que los conceptos de los que acabo de hablar, esos nuevos puntos de vista, que se introducen en una amplia multiplicidad de situaciones muy diferentes, también son casi innumerables.

Sin embargo hay puntos de vista que son más amplios que otros, y que ellos solos suscitan y engloban una multitud de puntos de vista parciales en una multitud de situaciones particulares diferentes. Tal punto de vista puede llamarse también, con razón, una *"gran idea"*. Por la fecundidad que tiene, tal idea alumbra una bulliciosa descendencia, ideas que heredan todas su fecundidad, pero que la mayor parte (si no todas) tienen un alcance menos amplio que la idea-madre.

En cuanto a *expresar* una gran idea, "decirla", casi siempre eso es algo tan delicado como la concepción misma y la lenta gestación en el que la ha concebido — o mejor dicho, ese laborioso trabajo de gestación y de formación *no es distinto* del que "expresa" la idea: el trabajo que consiste en desentrañarla con paciencia, día tras día, de entre los velos vaporosos que la rodean al nacer, para conseguir poco a poco darle forma tangible en un cuadro que se enriquece, se consolida y se afina a lo largo de las semanas, los meses y los años. Simplemente *nombrar* la idea, con alguna fórmula llamativa, o con palabras-clave más o menos técnicas, puede ser cuestión de unas líneas, incluso de algunas páginas — pero pocos serán los que, sin conocerla bien de antemano, sepan entender ese "nombre" y reconocer en él un rostro. Y cuando la idea llega a su madurez plena, puede que cien páginas basten para expresarla a plena satisfacción del obrero en que nació — como puede que diez mil páginas, muy trabajadas y sopesadas, no basten[27].

En ambos casos, entre los que, para hacerla suya, estudian el trabajo que por fin presenta la idea en pleno desarrollo, como un espacioso oquedal que hubiera crecido en una landa desierta — podemos apostar que serán muchos los que vean esos árboles vigorosos y esbeltos y los aprovechen (quien para trepar, quien para sacar vigas y tablas, y algún otro para alimentar el fuego en su chimenea...). Pero pocos serán los que vean el bosque...

8. Quizás pueda decirse que una "gran idea" es un punto de vista que no sólo es nuevo y fecundo, sino que introduce en la ciencia un *tema* nuevo y vasto que lo encarna. Y toda ciencia, cuando la entendemos no como un instrumento de poder y dominio, sino como aventura de conocimiento del hombre a través de los tiempos, no es más que esa armonía, más o menos amplia y más o menos rica según la época, que se despliega a lo largo de las generaciones y los siglos, el delicado contrapunto de todos los temas que aparecieron unos tras otro, como sacados de la nada, para unirse en ella y entrelazarse.

Al mirar con perspectiva los numerosos puntos de vista nuevos que he traído a las matemáticas, hay *doce* que llamaría "grandes ideas"[28]. Mirar mi obra matemática, "sentirla", es ver y "sentir" por

[27] Al dejar la escena matemática en 1970, mis publicaciones (buen número de ellas en colaboración) sobre el tema central de los *esquemas* alcanzaban unas diez mil páginas. Y no representaban más que una modesta parte del programa de gran envergadura relativo a los esquemas que veía ante mí. Ese programa fue abandonado sine die desde que me fui, y eso a pesar de que casi *todo* lo que ya había desarrollado, y publicado para poner a disposición de todos, entró de golpe en el patrimonio común de los conceptos y resultados generalmente utilizados como "bien conocidos".
La parte de mi programa, sobre el tema de los esquemas y sus prolongaciones y ramificaciones, que ya había realizado en el momento de mi salida, él sólo representa el trabajo de fundamentos más amplio jamás realizado en la historia de la matemática, y seguramente también uno de los más amplios en la historia de las Ciencias.

[28] He aquí, para el lector matemático curioso, la lista de esas doce ideas maestras o "temas capitales" de mi obra (por orden cronológico de aparición):

poco que sea alguna de estas ideas, y de los grandes temas que introducen y que forman la trama y el alma de mi obra.

Por fuerza, ciertas ideas son "más grandes" que otras (que, por eso mismo, ¡son "más pequeñas"!) En otros términos, entre esos temas nuevos, algunos son más amplios que otros y algunos llegan más al corazón del misterio de las matemáticas[29]. Hay tres (y no los menores a mi entender) que, habiendo aparecido después de mi salida de la escena matemática, permanecen todavía en estado embrionario: "oficialmente" incluso no existen, porque ninguna publicación seria certifica su nacimiento[30]. Entre los nueve temas que aparecieron antes de mi salida, los tres últimos, que dejé en plena expansión, hoy en día permanecen aún en su infancia por falta (después de mi salida) de manos amorosas que cuiden de esos "huérfanos", dejados de la mano de Dios en un mundo hostil[31]. En cuanto a los otros seis temas, que alcanzaron su plena madurez en los dos decenios anteriores a mi salida, puede decirse (con alguna reserva en uno o dos casos[32]) que en ese momento ya formaban parte del patrimonio común: entre los geómetras sobre todo. Actualmente "todo el mundo" los entona incluso sin saberlo (como Monsieur Jordan con la prosa) todo el santo día y a cualquier hora. Forman parte del aire que se respira, cuando se "hace geometría" o cuando se hace aritmética, álgebra o análisis por poco "geométricos" que sean.

---

1. Productos tensoriales topológicos y espacios nucleares.
2. Dualidad "continua" y "discreta" (categorías derivadas, "seis operaciones").
3. Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (teoría K, relación con la teoría de intersecciones).
4. Esquemas.
5. Topos.
6. Cohomología étal y l-ádica.
7. Motivos y grupo de Galois motívico ($\otimes$-categorías de Grothendieck).
8. Cristales y cohomología cristalina, yoga "coeficientes de De Rham", "coeficientes de Hodge"...
9. "Álgebra topológica": ∞-campos, derivadores; formalismo cohomológico en los topos, como inspiración para una nueva álgebra homotópica.
10. Topología moderada.
11. Yoga de geometría algebraica anabeliana, teoría de Galois-Teichmüller.
12. Punto de vista "esquemático" o "aritmético" en los poliedros regulares y las configuraciones regulares de todo tipo.

Dejando aparte el primero de estos temas, del que mi tesis (1953) constituye una parte importante y fue desarrollado en mi periodo de análisis funcional, entre 1950 y 1955, los otros once fueron surgiendo a lo largo de mi periodo de geómetra, a partir de 1955.

[29] Entre esos temas, me parece que el más *amplio* por su *alcance* es el de los *topos*, que proporciona la idea de una síntesis de la geometría algebraica, la topología y la aritmética. El más vasto por la *amplitud de los desarrollos* que ha originado hasta el presente, es el tema de los *esquemas.* (Ver al respecto la nota 26 a pie de página). Es el que proporciona el marco "por excelencia" de otros ocho de los temas considerados (a saber, todos salvo los temas 1, 5 y 10) al tiempo que proporciona el concepto central para una renovación de arriba a abajo de la geometría algebraica, y del lenguaje álgebro-geométrico.
En el extremo opuesto, me parece que el primero y el último de los doce temas tienen dimensiones más modestas que los otros. Sin embargo, en cuanto al último, que introduce una óptica nueva en el tema tan antiguo de los poliedros regulares y las configuraciones regulares, dudo que la vida de un matemático que se consagrara en cuerpo y alma bastase para agotarlo. Respecto al primero de todos esos temas, el de los productos tensoriales topológicos, ha jugado más el papel de una herramienta dispuesta al uso que el de una fuente de inspiración para desarrollos posteriores. Eso no impide que, aún en estos últimos años, reciba ecos esporádicos de trabajos más o menos recientes que resuelven (veinte o treinta años después) ciertas cuestiones que había dejado planteadas.
Los más profundos (a mi parecer) entre esos doce temas son el de los *motivos*, y el estrechamente relacionado de *geometría algebraica anabeliana* y el *yoga de Galois-Teichmüller.*
Desde el punto de vista de la *potencia de las herramientas* perfectamente puestas a punto por mis cuidados, y de uso corriente en diversos "sectores punta" de la investigación durante los dos últimos decenios, los apartados *"esquemas"* y *"cohomología étal y l-ádica"* son los que me parecen más notables. Para un matemático bien informado, pienso que ya no puede haber duda de que la herramienta esquemática, al igual que la cohomología l-ádica, forman parte de los grandes logros del siglo, llegados para alimentar y renovar nuestra ciencia en estas últimas generaciones.

[30] El único texto "semi-oficial" en que estos tres temas se esbozan por poco que sea, es el Esbozo de un Programa, redactado en enero de 1984 con ocasión de solicitar una plaza en el CNRS. Ese texto (del que también se habla en la Introducción 3, "Brújula y Equipajes") en principio formará parte del volumen 4 de las Reflexiones.

[31] Después del entierro sin tambores ni trompetas de esos tres huérfanos, al día siguiente mismo de mi salida, dos fueron exhumados con gran fanfarria y sin mencionar al obrero, uno en 1981 y el otro (visto el colosal éxito de la operación) el año siguiente.

[32] La reserva se refiere sobre todo al yoga grothendieckiano de la dualidad (categorías derivadas y seis operaciones) y al de los topos. Esto lo trataremos detalladamente (entre muchas otras cosas) en las partes II y IV de Cosechas y Siembras (El Entierro (1) y (3)).

Estos doce grandes temas de mi obra en modo alguno están aislados unos de otros. Para mí son parte de una *unidad* de espíritu y de propósito presente, como nota de fondo común y persistente, a través de toda mi obra "escrita" y "no escrita". Y al escribir estas líneas me ha parecido encontrar también la misma nota — ¡como una llamada! — en esos tres años de trabajo "gratuito", intenso y solitario, en la época en que aún no me había preocupado de saber si en el mundo existía algún matemático aparte de mí, de tan absorbido que estaba por la fascinación de lo que me llamaba...

Esa unidad no es sólo que la marca del mismo obrero esté en las obras que salen de sus manos. Esos temas están ligados entre ellos por innumerables vínculos, delicados y evidentes a la vez, al igual que los diferentes temas, cada uno claramente reconocible, se relacionan, se despliegan y se enlazan en un mismo y vasto contrapunto — en una armonía que los encaja, les hace avanzar y da a cada uno un sentido, un movimiento y una plenitud en la que participan los demás. Cada tema parcial parece nacer de esa armonía más amplia y renacer de nuevo en cada momento, y esa armonía no parece ser la "suma" o un "resultado" de unos temas que la constituyen y existen previamente. A decir verdad, no puedo evitar el sentimiento (sin duda ridículo...) de que en cierto modo es esa armonía, que todavía no había aparecido pero que "existía" aunque parezca imposible, en alguna parte del regazo oscuro de las cosas aún por nacer — que es ella quien ha suscitado poco a poco esos temas que no iban a tener todo su sentido más que por ella, y que también es ella quien ya me llamaba con voz queda y acuciante en esos años de soledad ardiente, al salir de la adolescencia...

Lo cierto es que los doce temas capitales de mi obra, como por una predestinación secreta, concurren en una misma sinfonía — o, retomando una imagen diferente, encarnan otros tantos "puntos de vista" diferentes, que concurren en una misma y amplia *visión*.

Esta visión no comenzó a surgir de las brumas, a tener perfiles reconocibles, más que hacia los años 1957,58 — años de gestación intensa[33]. Aunque parezca extraño, esa visión me era tan cercana, tan "evidente", que hasta el año pasado[34] no había pensado en darle un nombre. (Yo, una de cuyas pasiones ha sido siempre la de *nombrar* las cosas que se me desvelan, como una primera forma de comprenderlas...). Es cierto que no podría señalar un momento concreto que hubiera vivido como el momento de aparición de esa visión, o que con el paso del tiempo pudiera reconocerlo como tal. Una visión nueva es algo tan amplio que sin duda su aparición no puede situarse en un momento concreto, sino que durante largos años, cuando no de generaciones, debe penetrar y progresivamente tomar posesión del que o de los que escudriñan y contemplan; como si trabajosamente debieran formarse unos ojos nuevos detrás de los ojos de siempre, a los que están llamados a reemplazar poco a poco. Y la visión también es demasiado amplia para que la cuestión sea "comprenderla", como se comprendería el primer concepto que apareciera a la

[33] En el año 1957 saqué a la luz el tema *"Riemann-Roch"* (versión Grothendieck) — que, de un día para otro, me consagró como "gran vedette". También es el año de la muerte de mi madre, y por ello, el de una cesura importante en mi vida. Es uno de los años más intensamente creadores de mi vida, y no sólo a nivel matemático. Hacía doce años que dedicaba toda mi energía al trabajo matemático. Ese año afloró el sentimiento de que más o menos "ya había visto" lo que era el trabajo matemático, de que quizás sería el momento de dedicarme a otra cosa. Claramente era una necesidad de renovación interior que salía a la luz en mi vida por primera vez. Pensé hacerme escritor, y durante varios meses dejé mi actividad matemática. Finalmente decidí que al menos pondría negro sobre blanco los trabajos matemáticos que tenía entre manos, cuestión de algunos meses sin duda, o a lo más de un año...
Aún no estaba maduro el tiempo, sin duda, para el gran salto. Lo cierto es que, una vez que retomé el trabajo matemático, es él quien me tomó a mí. No me dejó, ¡durante otros doce años más!
El año siguiente a este intermedio (1958) tal vez sea el más fecundo de todos en mi vida de matemático. En ese año eclosionaron los dos temas centrales de la nueva geometría, con el vigoroso arranque de la *teoría de esquemas* (el tema de mi exposición en el congreso internacional de matemáticas en Edimburgo, en el verano de ese mismo año) y la aparición del concepto de *"site"*, versión provisional del concepto crucial de *topos*. Con la perspectiva de casi treinta años, ahora puedo decir que es el año en que realmente nació la visión de la nueva geometría, siguiendo la estela de las dos herramientas-clave de esa geometría: los esquemas (que representan una metamorfosis de la antigua noción de "variedad algebraica") y los topos (que representan una metamorfosis, aún más profunda, de la noción de espacio).

[34] Pienso por primera vez en dar un nombre a tal visión en la reflexión del 4 de diciembre de 1984, en la subnota (nº 136_1) de la nota "Yin el Servidor (2) – o la generosidad" (CyS III, página 637).

vuelta del camino. Por eso no hay que extrañarse, finalmente, de que el pensamiento de nombrar algo tan vasto, y tan cercano y tan difuso, no haya aparecido más que con el paso del tiempo, solamente cuando ha llegado a su plena madurez.

A decir verdad, hasta hace dos años mi relación con la matemática se limitaba (dejando aparte el trabajo de enseñarla) a *hacerla* — a seguir un impulso que sin cesar me empujaba *adelante*, hacia algo "desconocido" que me llamaba sin cesar. Ni se me hubiera ocurrido pararme en ese avance, aunque sólo fuera un instante, para volverme y ver el camino recorrido o para situar la obra realizada. (Bien para situarla *en mi vida*, como algo a lo que siguen ligándome vínculos profundos y largo tiempo ignorados; o también, situarla en esa aventura colectiva que es "la *matemática*".)

Es extraño, para "pararme" al fin y volver a conocer esa obra medio olvidada, o para pensar sólo en dar un *nombre* a la visión que ha sido su alma, ha hecho falta que me encuentre de golpe frente a la realidad de un Entierro de proporciones gigantescas: el entierro, por el silencio y la burla, de la visión y del obrero en que había nacido...

9. Sin haberlo previsto, este "prólogo" se ha convertido , poco a poco, en una especie de presentación en toda regla de mi obra, dirigida (sobre todo) al lector no matemático. Demasiado comprometido ya para poder dar marcha atrás ¡tengo que terminar "las presentaciones"! Quisiera intentar decir mal que bien algunas palabras sobre la *substancia* de esas miríficas "grandes ideas" (o de esos "temas capitales") que han brillado en las páginas precedentes, y sobre la naturaleza de esa famosa "visión" en que se supone que esas ideas capitales confluyen. A falta de poder usar un lenguaje por poco técnico que sea, sin duda sólo podré transmitir una imagen extremadamente borrosa (si es que algo se "transmite" en efecto...)[35].

Tradicionalmente se distinguen tres tipos de "cualidades" o de "aspectos" de las cosas del Universo, que son objeto de la reflexión matemática: el n ú m e r o[36], *la magnitud*, y la *forma*. También se pueden llamar el aspecto *"aritmético"*, el aspecto *"métrico"* (o analítico), y el aspecto *"geométrico"* de las cosas. En la mayoría de las situaciones estudiadas en matemáticas, los tres aspectos están presentes simultáneamente y en estrecha interacción. No obstante, lo más frecuente es que uno de los tres predomine claramente. Me parece que en la mayoría de los matemáticos está bastante claro (para los que los conocen o están al corriente de su obra) cuál es su temperamento básico, si son "aritméticos", "analistas", o "geómetras" — y eso aunque tengan muchas cuerdas en su violín y hayan trabajado en todos los registros y claves imaginables.

Mis primeras y solitarias reflexiones, sobre la teoría de la medida y la integración, se ubican sin ambigüedad posible en la sección "magnitud" o "análisis", al igual que el primero de los temas nuevos que he introducido en matemáticas (el que me parece de dimensiones menos amplias que los otros once). Que yo haya entrado en la matemática por el "cauce" del análisis me parece que no se debe a mi temperamento particular, sino a lo que podríamos llamar una "circunstancia fortuita": que la laguna más grande, para mi espíritu prendado de la generalidad y el rigor, en la enseñanza que se me daba en el instituto y en la universidad, se refería al aspecto "métrico" o "analítico" de las cosas.

[35] Que esta imagen deba quedar "borrosa" de ningún modo impide que sea fiel y que restituya, aunque parezca imposible, algo de la esencia de lo que se contempla (mi obra en este caso). Al revés, una imagen muy nítida puede estar distorsionada y, además, pude que no incluya más que lo accesorio y le falte todo lo esencial. Si te "aplicas" con tesón en lo que voy a decir sobre mi obra (y entonces seguramente algo de la imagen que tengo "pasará" a pesar de todo), te podrás preciar de haber captado lo esencial de mi obra ¡mejor quizás que ninguno de mis sabios colegas!

[36] Se entiende aquí que son los "números" llamados "números naturales" 0, 1, 2, 3 etc., o (con rigor) los números (como los números fraccionarios) que se expresan con ellos mediante operaciones de naturaleza elemental. Estos números no se prestan, como los "números reales", a medir una magnitud susceptible de variar continuamente, como la distancia entre dos puntos variables en una recta, en un plano o en el espacio.

El año 1955 marca un viraje decisivo en mi trabajo matemático: el paso del "análisis" a la "geometría". Todavía recuerdo estar embargado por una impresión (ciertamente subjetiva), como si saliera de unas estepas áridas y ásperas para encontrarme de repente en una especie de "tierra prometida" de riquezas exuberantes, multiplicándose hasta el infinito allí donde se quisiera poner la mano, para recoger o para rebuscar... Y esa impresión de riqueza abrumadora, más allá de toda medida[37], no ha hecho más que confirmarse y hacerse más profunda a lo largo de los años, hasta hoy mismo.

Esto viene a decir que si hay algo en matemáticas que (sin duda desde siempre) me fascina más que cualquier otra cosa, no es ni "el número", ni "la magnitud", sino siempre *la forma.* Y entre las mil y una caras que elige la forma para revelársenos, la que me ha fascinado más que cualquier otra, y sigue fascinándome, es *la estructura* escondida en los objetos matemáticos.

La estructura de una cosa no es algo que podamos "inventar". Sólo podemos sacarla a la luz con paciencia y humildad — conocerla, *"descubrirla".* Si hay algo de inventiva en ese trabajo, y si tenemos que hacer de herrero o de constructor infatigable, de ningún modo es para "tallar" o para "construir" unas "estructuras". Éstas no nos han esperado para ser ¡y para ser exactamente lo que son! Cuando intentamos precisar a tientas y con un lenguaje aún balbuceante, lo hacemos para *expresar* del modo más fiel que podamos lo que estamos descubriendo y sondeando, y esa estructura reticente a entregarse. Eso nos lleva constantemente a *"inventar" el lenguaje* adecuado para expresar más y más finamente la estructura íntima de los objetos matemáticos, y a "construir" con ayuda de tal lenguaje, a medida y por completo, las teorías que deben dar cuenta de lo que ha sido visto y comprendido. Ahí hay un movimiento de vaivén continuo, ininterrumpido, entre la *comprensión* de las cosas y la *expresión* de lo que se ha comprendido, con un lenguaje que se afina y se re-crea a lo largo del trabajo, bajo la presión constante de la necesidad inmediata.

Como el lector habrá adivinado sin duda, esas "teorías", "construidas completamente" no son más que esas *"bellas mansiones"* que consideramos antes: las que heredamos de nuestros predecesores, y las que la llamada y la escucha de las cosas nos llevan a construir con nuestras manos. Y si acabo de hablar de la "inventiva" (o de la imaginación) del constructor o del herrero, debería añadir que lo que constituye el alma y el nervio secreto, de ningún modo es la soberbia del que dice: "¡quiero esto, y no aquello!" y se complace en decidir a su antojo; como un mal arquitecto que ya tuviera los planos en la cabeza antes de haber visto y sentido el terreno, de haber sondeado sus posibilidades y exigencias. Lo que da calidad a la inventiva y la imaginación del investigador es la *disposición de su atención*, a la escucha de la voz de las cosas. Pues las cosas del Universo no cesan de hablar de ellas mismas y de revelarse al que se preocupa de oír. Y la casa más hermosa, en la que resplandece el amor del obrero, no es la más grande ni la más alta. La casa más hermosa es la que refleja fielmente la estructura y la belleza oculta de las cosas.

10. Pero ya estoy divagando otra vez — me proponía hablar de los temas-capitales que se unen en una misma visión-madre, como otros tantos ríos que vuelven a la Mar de la que son hijos...

Esa vasta visión unificadora puede ser descrita como una *geometría nueva.* Es la que, al parecer, Kronecker había soñado en el siglo pasado[38]. Pero la realidad (que a veces un atrevido sueño hace

[37] He utilizado la expresión "abrumadora, más allá de toda medida", para expresar mal que bien el término alemán "überwältigend" y su equivalente inglés "overhelming". En la frase precedente, la expresión (inadecuada) "embargado por esa impresión" debe entenderse también con ese matiz: que las impresiones y sentimientos que surgen en nosotros al mirar de frente un esplendor, una grandeza o una belleza fuera de lo común, nos inundan súbitamente, hasta el punto de que toda veleidad de expresar lo que sentimos parece anulada de antemano.

[38] No conocía ese "sueño de Kronecker" más que de oídas, cuando alguien (quizás fuera John Tate) me dijo que estaba realizando ese sueño. En la enseñanza que recibí de mis mayores, las referencias históricas eran rarísimas y me nutrí, no por la lectura de autores antiguos ni contemporáneos, sino sobre todo por la comunicación oral o por medio de cartas

presentir o entrever, y nos anima a descubrir...) sobrepasa siempre en riqueza y en resonancia al sueño más temerario o más profundo. Seguramente nadie, incluso la víspera del día en que apareció, hubiera soñado muchas de las partes de esa nueva geometría (si no todas) — el obrero mismo no más que los otros.

Puede decirse que "el número" es adecuado para captar la estructura de los agregados "discontinuos", o *"discretos"*: los sistemas, a menudo finitos, formados por "elementos" u "objetos" digamos *aislados* unos de otros, sin ningún principio de "paso continuo" de uno a otro. "La magnitud" por el contrario es la cualidad susceptible de *"variación continua"* por excelencia; por eso, es adecuada para captar las estructuras y fenómenos continuos: los movimientos, espacios, "variedades" de todo tipo, campos de fuerza, etc. Así, la aritmética aparece (grosso modo) como la *ciencia de las estructuras discretas*, y el análisis, como la *ciencia de las estructuras continuas*.

En cuanto a la geometría, puede decirse que después de más de dos mil años de existencia como ciencia en el sentido moderno del término, está "a caballo" entre ambas clases de estructuras, las "discretas" y las "continuas"[39]. Por otra parte, durante mucho tiempo realmente no había "divorcio" entre *dos* geometrías que hubieran sido de diferente especie, una discreta, la otra continua. Más bien había dos puntos de vista diferentes en la investigación de las *mismas* figuras geométricas: poniendo uno el acento en las propiedades "discretas" (y especialmente las propiedades numéricas y combinatorias) y el otro en las propiedades "continuas" (como la posición en el espacio ambiente, o el "tamaño" medido en términos de distancias entre sus puntos, etc.).

Fue al final del siglo pasado cuando apareció un divorcio, con la aparición y el desarrollo de lo que a veces se llama la *"geometría* (algebraica) *abstracta"*. Grosso-modo, ésta consiste en introducir, para cada número primo p, una geometría (algebraica) "de característica p", calcada del modelo (continuo) de la geometría (algebraica) heredada de los siglos precedentes, pero a pesar de ello en un contexto, que aparecía como irreducriblemente "discontinuo", "discreto". Esos nuevos objetos geométricos adquirieron una importancia creciente desde principios de siglo, en particular por sus estrechas relaciones con la aritmética, la ciencia de la estructura discreta por excelencia. Parece ser que ésta es una de las ideas directrices en la obra de *André Weil*[40], quizás incluso la principal idea-fuerza (que permaneció más o menos tácita en su obra escrita, como de costumbre): que "la" geometría (algebraica), y muy particularmente las geometrías "discretas" asociadas a los diferentes números primos, deberían proporcionar la clave para una renovación de gran envergadura de la aritmética. Dentro de ese espíritu sacó a la luz, en 1949, las célebres *"conjeturas de Weil"*. Conjeturas absolutamente pasmosas, a decir verdad, que dejaban entrever, en esas nuevas "variedades" (o "espacios") de naturaleza discreta, la posibilidad de ciertas

---

con otros matemáticos, empezando por mis mayores. La principal, y quizás la única, inspiración exterior del repentino y vigoroso arranque de la teoría de esquemas en 1958 fue el artículo de Serre bien conocido bajo las siglas FAC ("Haces algebraicos coherentes") publicado algunos años antes. Dejando éste aparte, en el desarrollo posterior de la teoría mi principal inspiración de hecho provenía de ella misma, y se renovaba a lo largo de los años únicamente por las exigencias de simplicidad y coherencia interna, en un esfuerzo por dar cuenta en ese nuevo contexto de lo que era "bien conocido" en geometría algebraica (y que yo asimilaba a medida que se transformaba entre mis manos), y de lo que hacía presentir lo ya "conocido".

[39] A decir verdad, tradicionalmente el aspecto "continuo" es el que estaba en el centro de atención del geómetra, mientras que las propiedades de naturaleza "discreta", especialmente las propiedades numéricas y combinatorias, se silenciaban o se pasaban por la entrepierna. Me quedé maravillado al descubrir, hace una decena de años, la riqueza de la teoría combinatoria del icosaedro, mientras que ese tema ni siquiera afloró (y probablemente ni siquiera fue visto) en el clásico libro de Klein sobre el icosaedro. Veo otra señal chocante de esa negligencia (dos veces milenaria) de los geómetras frente a las estructuras discretas que aparecen espontáneamente en geometría: que el concepto de grupo (de simetrías, principalmente) no haya aparecido hasta el siglo pasado, y que además fuera introducido (por Evariste Galois) en un contexto que en esa época no se consideraba jurisdicción de la "geometría". Cierto es que aún hoy en día, son numerosos los algebristas que todavía no han comprendido que la teoría de Galois es esencialmente una *visión "geométrica"*, que renueva nuestra comprensión de los fenómenos llamados "aritméticos"...

[40] André Weil, matemático francés emigrado a Estados Unidos, es uno de los "miembros fundadores" del "grupo Bourbaki", del que hablaremos no poco en la primera parte de Cosechas y Siembras (y de Weil mismo, en ocasiones).

construcciones y argumentos[41] que hasta entonces sólo parecían posibles en el cuadro de los "espacios" considerados dignos de tal nombre por los analistas — a saber, los espacios llamados "topológicos" (donde tiene sentido la noción de variación continua).

Puede considerarse que la nueva geometría es ante todo una *síntesis* de ambos mundos, hasta entonces contiguos y estrechamente solidarios, aunque separados: el *mundo "aritmético"*, en el que viven los (así llamados) "espacios" sin principio de continuidad, y el *mundo de la magnitud continua*, en que viven los "espacios" en el sentido propio del término, accesibles a los métodos del analista y (por eso mismo) considerados por él como dignos de alojarse en la ciudad matemática. *En la visión nueva, esos dos mundos antes separados forman uno sólo.*

El primer embrión de esa visión de una *"geometría aritmética"* (como propongo llamar a esta nueva geometría) se encuentra en las conjeturas de Weil. En el desarrollo de algunos de mis temas principales[42] esas conjeturas fueron siempre mi principal fuente de inspiración, a lo largo de los años entre 1958 y 1969. Antes que yo, *Oscar Zariski* por un lado, y después *Jean-Pierre Serre* por otro, habían desarrollado para los espacios-sin-dios-ni-ley de la geometría algebraica "abstracta" ciertos métodos "topológicos", inspirados en los que eran usuales en los "espacios buenos" de toda la vida[43]. Sus ideas, por supuesto, jugaron un papel importante desde mis primeros pasos en la edificación de la geometría aritmética; más, ciertamente, como puntos de partida y como *herramientas* (que he tenido que remodelar más o menos totalmente, según requería un contexto mucho más amplio) que como fuente de inspiración que hubiera alimentado mis sueños y mis proyectos, durante meses y años. De todas formas, de entrada estaba bien claro que, incluso remodeladas, esas herramientas estaban muy lejos de lo que se requería para dar los primeros pasos hacia las conjeturas fantásticas.

11. Las dos ideas-motrices cruciales en el arranque y en el desarrollo de la nueva geometría fueron la de *esquema* y la de *topos*. Aparecidas casi simultáneamente y en estrecha simbiosis una con otra[44], han sido como un mismo *nervio motriz* en el despegue espectacular de la nueva geometría, y esto desde el mismo año de su aparición. Para terminar este recorrido por mi obra, debo decir al menos algunas palabras sobre esas dos ideas.

El concepto de esquema es el más natural, el más "evidente" que pueda imaginarse, para englo-

---

[41](Para el lector matemático.) Se trata de "construcciones y argumentos" ligados a la teoría cohomológica de las variedades diferenciables o complejas, especialmente los que implican la fórmula de Lefschetz de los puntos fijos y la teoría de Hodge.

[42]Se trata de los cuatro temas "del medio" (n^{o}s 5 a 8), los *topos*, la *cohomología étal* y "l"-ádica, los *motivos*, y (en menor medida) los *cristales*. Saqué a la luz esos temas poco a poco entre 1958 y 1966.

[43](Para el lector matemático.) Me parece que las principales contribuciones de Zariski en ese sentido son la introducción de la "topología de Zariski" (que más tarde fue una herramienta esencial en el FAC de Serre), su "principio de conexión", y lo que él llamó su "teoría de funciones holomorfas" — que entre mis manos pasó a ser la teoría de esquemas formales y los "teoremas de comparación" entre lo formal y lo algebraico (con el artículo fundamental GAGA de Serre como segunda fuente de inspiración). En cuanto a la contribución de Serre a la que aludo en el texto, por supuesto que se trata, ante todo, de la introducción en geometría algebraica abstracta del punto de vista de los *haces* (introducidos por *Jean Leray* una docena de años antes en un contexto totalmente diferente) en el ya citado artículo fundamental FAC ("Haces algebraicos coherentes").
A la luz de estas "evocaciones", si tuviera que nombrar los "predecesores" inmediatos de la nueva visión geométrica, los nombres de *Oscar Zariski, André Weil, Jean Leray* y *Jean-Pierre Serre* son los que me vienen enseguida. Entre ellos Serre jugó un papel aparte, porque fue a través de él cómo tuve conocimiento no sólo de sus propias ideas, sino también de las ideas de Zariski, de Weil y de Leray que jugaron un papel en la eclosión y en el desarrollo de la nueva geometría.

[44]Este arranque, que tuvo lugar en 1958, se comenta en la nota 32 a pie de página. El concepto de situs o de *"topología de Grothendieck"* (versión provisional del concepto de topos) apareció en la estela inmediata de la noción de esquema. Proporciona a su vez el nuevo lenguaje de la "localización" o del "descenso", utilizado a cada paso en el desarrollo del tema y de la herramienta esquemáticos. El concepto más intrínseco y más geométrico de *topos*, que permaneció implícito en los años siguientes, sale a la luz sobre todo a partir de 1963, con el desarrollo de la cohomología étal, y poco a poco se me impone como el concepto más fundamental.

bar en un único concepto la serie infinita de conceptos de "variedad" (algebraica) que se manejaban anteriormente (u n o para cada número primo[45]...). Además, un sólo "esquema" ("variedad" al nuevo estilo) da lugar, por *cada* número primo p, a una "variedad (algebraica) de característica p" bien determinada. La colección de esas variedades de diferentes características puede visualizarse como una especie de "abanico (infinito) de variedades" (una por cada característica). El "esquema" es ese abanico mágico que entrelaza, como otras tantas "varillas" diferentes, sus "transformaciones" o "encarnaciones" en todas las características posibles. Por eso mismo, proporciona un eficaz "principio de paso" que entrelaza "variedades" pertenecientes a geometrías que hasta entonces parecían casi aisladas, separadas unas de otras. Ahora, están englobadas en una "geometría" común y entrelazadas por ella. Podría llamarse la *geometría esquemática*, primer esbozo de esa "geometría aritmética" en la que se transformaría durante los años siguientes.

La idea misma de esquema es de una simplicidad infantil — tan simple, tan humilde, que antes de mí nadie había pensado agacharse tanto. Incluso tan "tonta", digámoslo todo, que durante años y a pesar de la evidencia, para muchos de mis sabios colegas ¡eso realmente "no era serio"! Por otra parte, necesité meses de trabajo arduo y solitario para convencerme en mi rincón de que "eso funcionaba" perfectamente — de que el nuevo lenguaje tan tonto, que me empeñaba en querer probar con ingenuidad incorregible, era perfectamente adecuado para captar, en una luz y con finura nuevas, y además en un ámbito común, algunas de las primeras intuiciones geométricas asociadas a las anteriores "geometrías de característica p". Era el tipo de ejercicio, juzgado de antemano idiota y sin futuro por toda persona "bien informada", que sin duda sólo yo, entre todos mis colegas y amigos, podía tener jamás la idea de plantear, e incluso (movido por un demonio secreto...) ¡llevarlo a buen puerto contra viento y marea!

En vez de dejarme arrastrar por los consensos que imperaban a mi alrededor, sobre lo que es "serio" y lo que no lo es, *confié* simplemente, como en el pasado, en la humilde voz de las cosas y en lo que en mí sabe escuchar. La recompensa fue inmediata y más allá de toda previsión. En el espacio de unos meses, incluso "sin querer", había puesto el dedo sobre unas herramientas poderosas e insospechadas. Ellas me permitieron no sólo reencontrar (como jugando) antiguos resultados, con fama de arduos, en una luz más penetrante y sobrepasarlos, sino abordar por fin y resolver problemas de "geometría de característica p" que hasta entonces parecían fuera del alcance de todos los medios conocidos[46].

En nuestro conocimiento de las cosas del Universo (sean matemáticas o no), el poder renovador que está en nosotros no es más que la *inocencia*. La inocencia original que todos hemos recibido en herencia al nacer y que reposa en cada uno de nosotros, y que a menudo es objeto de nuestro desprecio y de nuestros miedos más secretos. Sólo ella une la humildad y la audacia que nos hacen penetrar en el corazón de las cosas, y que nos permiten dejar que las cosas penetren en nosotros y nos impregnen.

Ese poder no es el privilegio de unos "dones" extraordinarios — de una capacidad mental (digamos) fuera de lo común para asimilar y manejar, con destreza y con soltura, una masa impresionante de datos, ideas y técnicas conocidos. Tales dones ciertamente son valiosos, seguramente dignos de envidia para el que (como yo) no ha sido colmado así al nacer, "más allá de toda medida".

No son esos dones, ni la ambición más ardiente, servida por una voluntad de hierro, los que nos permiten cruzar esos "círculos invisibles y imperiosos" que encierran nuestro Universo. Sólo la inocencia los cruza, sin saberlo y sin preocuparse, en los momentos en que estamos solos escuchando a las cosas,

[45] Conviene incluir en esta serie también el caso $p = \infty$, correspondiente a las variedades algebraicas "de característica nula".

[46] La reseña de ese "arranque vigoroso" de la teoría de esquemas es el tema de mi exposición en el Congreso Internacional de Matemáticos en Edimburgo, en 1958. El texto de esa exposición me parece una de las mejores introducciones al punto de vista de los esquemas, capaz (tal vez) de motivar a un lector geómetra para familiarizarse mal que bien con el imponente tratado (posterior) "Elementos de Geometría Algebraica", que expone de manera detallada (y sin hacer concesiones en los detalles técnicos) los nuevos fundamentos y las nuevas técnicas de la geometría algebraica.

intensamente absorbidos en un juego de niños...

12. La innovadora idea de "esquema", según acabamos de ver, es la que permite entrelazar las diferentes "geometrías" asociadas a los números primos (o diferentes "características"). Esas geometrías, sin embargo, seguían siendo de naturaleza esencialmente "discreta" o "discontinua", en contraste con la geometría tradicional legada por los siglos anteriores (remontándose a Euclides). Las nuevas ideas introducidas por Zariski y por Serre devolvían hasta cierto punto, a estas geometrías, una "dimensión" de continuidad heredada al punto por la "geometría esquemática" que acababa de aparecer con el fin de unirlas. Pero en lo relativo a las "conjeturas fantásticas" (de Weil), estaban lejos de dar cuenta. Desde ese punto de vista, esas "topologías de Zariski" eran hasta tal punto groseras, que era como si todavía estuviéramos en la fase de los "agregados discretos". Lo que faltaba, claramente, era algún principio nuevo que permitiera entrelazar esos objetos geométricos (o "variedades", o "esquemas") con los "espacios" (topológicos) habituales, o "buenos"; en los que, digamos, los "puntos" aparecen claramente *separados* unos de otros, mientras que en los espacios-sin-dios-ni-ley introducidos por Zariski, los puntos tienen una molesta tendencia a aglutinarse unos con otros...

Decididamente la aparición de tal "principio nuevo", como mínimo, era la que podría lograr la consumación de los "esponsales del número y la magnitud" o de la "geometría de lo discontinuo" con la de lo "continuo", cuyo presentimiento se desprendía de esas conjeturas de Weil.

La noción de *"espacio"* es sin duda una de las más antiguas en matemáticas. Es tan fundamental en nuestra comprensión "geométrica" del mundo que ha permanecido más o menos tácita durante más de dos milenios. Únicamente en el pasado siglo[47] esta noción logró, progresivamente, librarse del dominio tiránico de la percepción inmediata (de un único "espacio" que nos rodea) y de su teoría tradicional ("euclidiana"), y conquistar así su autonomía y su dinámica propia. En nuestros días forma parte de algunas de las nociones utilizadas en matemáticas con más universalidad y frecuencia, familiar sin duda a todo matemático sin excepción. Noción proteica[48] donde la haya, con cien y mil caras, según el tipo de estructuras que se incorpore a esos espacios, desde las más ricas (como las venerables estructuras "euclídeas", o las estructuras "afines" o "proyectivas", o también las estructuras "algebraicas" de las variedades de igual nombre, que las generalizan y flexibilizan) hasta las más pobres: aquellas en que toda información "cuantitativa" de cualquier clase parece haber desaparecido sin posibilidad de retorno, y donde sólo subsiste la quintaesencia cualitativa de la noción de *"proximidad"* o de *"límite"*[49], y la versión más elusiva de la intuición de *forma* (llamada "topológica"). La más pobre entre todas estas nociones, la que hasta el presente, y durante el último medio siglo, ha ocupado el lugar de una especie de amplio regazo conceptual común para englobar a todas las demás, es la de *espacio topológico*. El estudio de esos espacios constituye una de las ramas más fascinantes, más vivaces de la geometría: la *topología*.

Por elusiva que pueda parecer a primera vista esa estructura "puramente de cualidad" encarnada en un "espacio" (llamado "topológico"), en ausencia de cualquier dato de naturaleza cuantitativa (como la distancia entre dos puntos, principalmente) que nos permita agarrarnos a alguna intuición familiar de "tamaño", durante el último medio siglo se ha conseguido delimitar finamente esos espacios con las ceñidas y flexibles mallas de un lenguaje cuidadosamente "cortado a medida". Mejor aún, se han

[47](N. del T:) El s. XIX.

[48](N. del T.) En la mitología griega Proteo era un dios con el don profético que, para escapar de los que le preguntaban, podía adoptar cualquier forma que deseara.

[49]Hablando de la noción de "límite", aquí me refiero sobre todo a la de "paso al límite", más que a la (más familiar al no matemático) de "frontera".

inventado y fabricado una especie de "metros" o de "tallas" para poder, a pesar de todo, atribuir una clase de "mediciones" (llamadas "invariantes topológicos") a esos "espacios" tentaculares que parecían sustraerse, como brumas inasequibles, a toda tentativa de medirlos. Es cierto que la mayoría de esos invariantes, y los más esenciales, son de naturaleza más sutil que un simple "número" o una "magnitud" — más bien ellos mismos son estructuras matemáticas más o menos delicadas, asociadas (con ayuda de construcciones más o menos sofisticadas) al espacio considerado. Uno de los más antiguos y cruciales de esos invariantes, introducido ya en el siglo pasado (por el matemático italiano *Betti*), está formado por diferentes "grupos" (o "espacios") llamados de "cohomología", asociados al espacio[50]. Esos son los que intervienen (aunque "entre líneas" ciertamente) en las conjeturas de Weil, los que son "su razón de ser" profunda y los que (al menos para mí, "metido en el asunto" por las explicaciones de Serre) les dan todo su sentido. Pero la posibilidad de asociar tales invariantes a las variedades algebraicas "abstractas" que intervienen en esas conjeturas, y así responder a los precisos desiderata exigidos por las conjeturas — eso era sólo un deseo. Además de Serre y yo mismo, dudo que nadie más (ni siquiera, y sobre todo, ¡ni el mismo André Weil![51]) creyera realmente en ello...

Poco tiempo antes, nuestra concepción de esos invariantes cohomológicos se había enriquecido y renovado profundamente con los trabajos de *Jean Leray* (que prosiguió en cautividad en Alemania, durante la guerra, en la primera mitad de los años cuarenta). La idea innovadora esencial era la de *haz* (abeliano) sobre un espacio, a los que Leray asocia unos "grupos de cohomología" (y se dice que tienen "coeficientes en ese haz"). Era como si el viejo y buen "metro cohomológico" standard del que se disponía hasta ese momento para "levantar el plano" de un espacio se hubiera multiplicado repentinamente en una multitud inimaginablemente grande de nuevos "metros" de todas las tallas, formas y sustancias

[50] A decir verdad, los invariantes introducidos por Betti fueron los invariantes de *homología*. La *cohomología* constituye una versión más o menos equivalente, "dual", introducida mucho más tarde. Este aspecto adquirió preeminencia sobre el aspecto inicial, "homológico", sobre todo (sin duda) como consecuencia de la introducción, por Jean Leray, del punto de vista de los haces, del que hablaremos más adelante. Desde el punto de vista técnico, puede decirse que una gran parte de mi obra geométrica consistió en desentrañar, y desarrollar más o menos, las teorías cohomológicas que faltaban en toda clase de espacios y variedades, y sobre todo en las "variedades algebraicas" y los esquemas. De paso, eso me llevó a reinterpretar los invariantes homológicos tradicionales en términos cohomológicos, y por eso mismo, a verlos en una luz enteramente nueva.
Los topólogos introdujeron muchos otros "invariantes topológicos" para discernir diversos tipos de propiedades de los espacios topológicos. A parte de la "dimensión" de un espacio y los invariantes (co)homológicos, los primeros invariantes diferentes son los "grupos de homotopía". En 1957 introduje otro, el grupo (llamado "de Grothendieck") $K(X)$, que tuvo enseguida gran fortuna, y cuya importancia (tanto en topología como en aritmética) no cesa de confirmarse.
Multitud de invariantes nuevos, de naturaleza más sutil que los invariantes actualmente conocidos y utilizados, pero que me parecen fundamentales, están previstos en mi programa de "topología moderada" (del que un esbozo muy breve se encuentra en el "Esbozo de un Programa", que aparecerá en el volumen 4 de las Reflexiones). Este programa se basa en el concepto de "teoría moderada" o de "espacio moderado", que constituye, un poco como el de topos, una (segunda) "metamorfosis de la noción de espacio". Es mucho más evidente (me parece) y menos profundo que éste último. Sin embargo preveo que sus consecuencias inmediatas sobre la topología "propiamente dicha" van a ser mucho más contundentes, y que va a transformar de cabo a rabo el "oficio" del topólogo, mediante una transformación profunda del contexto conceptual en el que trabaja. (Como también fue el caso de la geometría algebraica con la introducción del punto de vista de los esquemas.) Por otra parte, he enviado mi "Esbozo" a varios de mis antiguos amigos e ilustres topólogos, pero no parece que haya tenido la virtud de interesar a ninguno...

[51] Es paradójico, Weil tenía un "bloqueo" tenaz, aparentemente visceral, contra el formalismo cohomológico — mientras que sus célebres conjeturas inspiraron en gran parte el desarrollo de las grandes teorías cohomológicas en geometría algebraica, a partir del año 1955 (con Serre dando el disparo de salida con su artículo fundamental FAC, ya mencionado en una nota a pie de página). (N. del T.: La nota 37).
Me parece que ese "bloqueo" forma parte, en Weil, de una aversión general contra todas las "grandes maquinarias", contra todo lo que se relacione con un formalismo (cuando no se pueda resumir en algunas páginas), o con una "construcción" por poco complicada que sea. No tenía nada de "constructor", ciertamente, y es claro que fue de mala gana como se vio obligado, en los años treinta, a desarrollar los primeros fundamentos de la geometría algebraica "abstracta" que (vista la disposición) fueron un verdadero "lecho de Procusto" para los usuarios. (N. del T.: Procusto es un legendario ladrón griego que tenía un lecho en que obligaba a tenderse a sus víctimas, alargando o cortando sus piernas para que se adaptaran a su longitud.)
No sé si le pareció bien que fuera más allá y me dedicara a construir las amplias moradas que han permitido a los sueños de un Kronecker y al suyo encarnarse en un lenguaje y unas herramientas delicadas y eficaces. Lo cierto es que nunca me dijo una palabra sobre el trabajo en que me veía involucrado, o sobre el ya realizado. Tampoco ha tenido eco Cosechas y Siembras, que le envié hace más de tres meses, con una calurosa dedicatoria a mano.

imaginables, cada uno íntimamente adaptado al espacio en cuestión, del que cada uno nos proporciona informaciones de precisión perfecta, y que sólo él nos puede dar. Esa era la idea capital de una transformación profunda de nuestro enfoque de todo tipo de espacios, y seguramente una de las ideas más cruciales aparecidas durante este siglo. Gracias sobre todo a los trabajos posteriores de Jean-Pierre Serre, las ideas de Leray dieron como fruto, durante el decenio siguiente a su aparición, un despegue impresionante en la teoría de espacios topológicos (y principalmente de sus invariantes "homotópicos", estrechamente ligados a la cohomología) y otro despegue, no menos importante, de la geometría algebraica "abstracta" (con el artículo fundamental "FAC" de Serre, publicado en 1955). Mis propios trabajos de geometría, a partir de 1955, son continuación de esos trabajos de Serre, y por eso mismo, de las innovadoras ideas de Leray.

13. El punto de vista y el lenguaje de los haces introducidos por Leray nos llevan a mirar los "espacios" y "variedades" de todo tipo con una luz nueva. Sin embargo, no afectaban a la noción misma de espacio, contentándose con hacernos comprender mejor, con unos ojos nuevos, los tradicionales "espacios" que ya eran familiares a todos. Ahora bien, se comprobó que esa noción de espacio era incapaz de dar cuenta de los "invariantes topológicos" más esenciales que expresan la "forma" de las variedades algebraicas "abstractas" (como aquellas a las que se aplican las conjeturas de Weil) y de los "esquemas" generales (que generalizan a las antiguas variedades). Para los ansiados "esponsales del número y la magnitud" era una cama decididamente estrecha, donde sólo uno de los futuros cónyuges (a saber, la esposa) tenía cabida mal que bien, ¡pero nunca ambos a la vez! El "nuevo principio" que había que hallar para consumar los esponsales augurados por hadas propicias, no era otro que esa "cama" espaciosa que le faltaba a los futuros esposos, sin que hasta entonces nadie se hubiera dado cuenta siquiera...

Esa "cama de matrimonio" apareció (como por arte de magia...) con la idea de *topos*. Idea que engloba, en una intuición topológica común, tanto los espacios (topológicos) tradicionales, que encarnan el mundo de la magnitud continua, como los (así llamados) "espacios" (o "variedades") de los geómetras algebraicos abstractos impenitentes, al igual que muchos otros tipos de estructuras que hasta entonces parecían irremediablemente situadas en el "mundo aritmético" de los agregados "discontinuos" o "discretos".

El punto de vista de los haces fue el guía silencioso y seguro, la llave eficaz (y nada secreta) que me condujo sin retrasos ni rodeos hacia la cámara nupcial con un amplio lecho conyugal. Un lecho tan amplio (como un río ancho, apacible y muy profundo...) que

" todos los caballos del rey
ahí podrían beber juntos..."

- como nos dice una antigua tonada[52] que seguramente tú también has cantado, o al menos has oído cantar. Y el primero que la cantó sintió la secreta belleza y la apacible fuerza de los topos mejor que cualquiera de mis sabios alumnos y amigos de antaño...

La clave fue la misma, tanto en el enfoque inicial y provisional (vía el concepto cómodo, pero no

[52] (N. del T.) Grothendieck se refiere a una antigua canción anónima (véase el libro de Georges Pompidou *Anthologie de la poésie française*, Le livre de Poche 2495, Hachette, Paris 1961):

La bell' si tu voulais, nous dormirions ensemble	Amor si tú quisieras, dormiríamos juntos
Dans un grand lit carré, couvert de toile blanche	En una cama grande, con una colcha blanca
Aux quatre coins du lit, quat'bouquets de pervenche	Y, en sus cuatro esquinas, cuatro ramos de malvas
Dans le mitan du lit, la rivière est profonde	En el centro del lecho, el río es muy profundo
Tous les chevaux du Roi, pourraient y boire ensemble	Los caballos del Rey, podrían beber juntos
Nous y serions hereux, jusqu'à la fin du monde...	Seríamos felices, hasta el final del mundo

A principios de los años 70 fue popular la versión del cantante Guy Béart.

intrínseco, de “situs”) como en el de los topos. Quisiera describir ahora la idea de topos.

Consideremos el conjunto formado por *todos* los haces sobre un espacio (topológico) dado, o, si se prefiere, ese arsenal prodigioso formado formado por *todos* los “metros” que sirven para levantar su plano[53]. Consideremos la estructura más evidente de ese “conjunto” o “arsenal”, la que aparece, pudiéramos decir, “a ojo de buen cubero”; a saber, la estructura llamada de “categoría”. (Que el lector no matemático no se turbe por no conocer el sentido técnico del término. No lo necesitará en lo que sigue.) Esta especie de “superestructura para levantar planos”, llamada “categoría de haces” (sobre el espacio dado), es la que de ahora en adelante consideraremos que “encarna” lo más esencial del espacio. Esto es lícito (según el “buen sentido matemático”) porque de hecho se puede “reconstruir” totalmente el espacio topológico[54] a partir de esa “categoría de haces” (o de ese arsenal para levantar planos) asociada. (Comprobarlo es un simple ejercicio — una vez planteado el problema ciertamente...) No se necesita nada más para estar seguro de que (si nos conviene por alguna razón u otra) en lo sucesivo podemos “olvidar” el espacio inicial, quedándonos y sirviéndonos sólo de la “categoría” (o del “arsenal”) asociado, que será considerada como la encarnación más adecuada de la “estructura topológica” (o “espacial”) que ha de expresarse.

Como ocurre a menudo en matemáticas, hemos logrado (gracias a la idea crucial de “haz”, o de “metro cohomológico”) expresar cierta noción (la de “espacio” en este caso) en términos de otra (la de “categoría”). El descubrimiento de tal *traducción* de una noción (que expresa cierto tipo de situaciones) en términos de otra (que corresponde a otro tipo de situaciones) siempre enriquece nuestra comprensión de ambas, por la inesperada confluencia de intuiciones específicas que se refieren a una o a la otra. Así, una situación de naturaleza “topológica” (encarnada por un espacio dado) queda aquí traducida en una situación de naturaleza “algebraica” (encarnada por una “categoría”); o, si se prefiere, el “continuo” expresado por el espacio queda “traducido” o “expresado” por la estructura de categoría, de naturaleza “algebraica” (y hasta entonces percibida como de naturaleza esencialmente “discontinua” o “discreta”).

Pero hay más. La primera de estas nociones, la de espacio, se nos presentaba como una noción “maximal” en cierta forma — una noción tan general que mal puede imaginarse cómo encontrar una extensión que sea “razonable”. Por el contrario, resulta que al otro lado del espejo[55] esas “categorías” (o “arsenales”) a las que llegamos, partiendo de los espacios topológicos, son de naturaleza muy particular. Gozan en efecto de propiedades muy especiales[56] que las emparentan con ciertos “remedos” de la más simple de todas ellas que imaginarse pueda — la que se obtiene partiendo de un espacio con un único punto. Dicho esto, un “espacio al nuevo estilo” (o *topos*), que generaliza los espacios topológicos tradicionales, se describe simplemente como una “categoría” que, aunque no provenga necesariamente de un espacio ordinario, posea no obstante todas esas buenas propiedades (explícitamente enunciadas de una vez por todas, claro) de tales “categorías de haces”.

* *
*

[53](Para el matemático) A decir verdad, se trata de los haces de *conjuntos*, y no de los haces *abelianos*, introducidos por Leray como coeficientes más generales para formar “grupos de cohomología”. Creo que fui el primero en trabajar sistemáticamente con haces de conjuntos (a partir de 1955, en mi artículo “Una teoría general de espacios fibrados con haz estructural” publicado por la Universidad de Kansas).

[54](Para el matemático) En sentido estricto, eso sólo es cierto en los espacios llamados “sobrios”. No obstante, éstos incluyen la casi-totalidad de los espacios usuales, y especialmente todos los espacios “separados” tan del gusto de los analistas.

[55]El “espejo” del que se trata, como en Alicia en el país de las maravillas, es el que da como “imagen” de un espacio, colocado ante él, la “categoría” asociada, considerada como una especie de “doble” del espacio, “al otro lado del espejo”...

[56](Para el matemático) Sobre todo de propiedades que introduje en la teoría de categorías bajo el nombre de “propiedades de exactitud” (a la vez que el concepto categorial moderno de “límites” inductivos y proyectivos generales). Ver “Sobre algunos puntos del álgebra homológica”, Tohoku math. journal, 1957 (p. 119-221).

Ésta es pues la idea nueva. Su aparición puede verse como una consecuencia de la observación, casi infantil a decir verdad, de que lo que verdaderamente cuenta en un espacio topológico no son de ninguna manera sus "puntos" o los subconjuntos de puntos[57] y las relaciones de proximidad entre ellos, sino los *haces* sobre ese espacio y la *categoría* que forman. No he hecho, en suma, más que llevar hasta sus últimas consecuencias la idea inicial de Leray — y hecho esto, *franquear el paso*.

Al igual que la idea de los haces (debida a Leray), o la de los esquemas, o toda idea que venga a derribar una visión inveterada de las cosas, la de los topos desconcierta por su carácter natural, "evidente", por su simplicidad (al borde, se diría, de lo ingenuo y lo simplista, casi "tonta") — por esa cualidad particular que nos hace exclamar tan a menudo: "¡Oh, no es más que eso!", con un tono medio decepcionado, medio envidioso; y además, quizás, con el sobreentendido de "extravagante", "poco serio", que se reserva a menudo para todo lo que desconcierta por un exceso de simplicidad imprevista. Para lo que viene a recordarnos, tal vez, los días de nuestra infancia enterrados y repudiados desde hace mucho tiempo...

14. La noción de esquema constituye una amplia generalización de la noción de "variedad algebraica", y por eso ha renovado de cabo a rabo la geometría algebraica legada por mis predecesores. La de topos constituye una extensión insospechada, o mejor dicho, *una metamorfosis de la noción de espacio*. Por eso lleva la promesa de una renovación semejante de la topología, y más allá de ésta, de la geometría. Por otra parte, hasta el presente ha jugado un papel crucial en el despegue de la nueva geometría (sobre todo a través de los temas cohomología l-ádica y cristalina que han nacido de ella, y a través de ellos, en la demostración de las conjeturas de Weil). Al igual que su hermana mayor (y casi gemela) posee las dos características complementarias esenciales a toda generalización fértil:

Primo, la nueva noción no es *demasiado amplia*, en el sentido de que en los nuevos "espacios" (mejor es llamarles "topos", para no indisponer a los oídos delicados[58]) las intuiciones y las construcciones "geométricas" más esenciales[59], usuales en los buenos y viejos espacios de antaño, pueden trasponerse de manera más o menos evidente. Dicho de otro modo, en los nuevos objetos se dispone de toda la rica gama de imágenes y asociaciones mentales, de las nociones y al menos de ciertas técnicas, que anteriormente estaban restringidas a los objetos al antiguo estilo.

Y secundo, la nueva noción es al mismo tiempo lo *bastante amplia* para englobar situaciones que hasta entonces no se consideraba que dieran lugar a intuiciones de naturaleza "topológico-geométrica" — justamente a las intuiciones que en el pasado quedaban reservadas únicamente para los espacios topológicos ordinarios (y con razón...).

El punto crucial aquí, desde la óptica de las conjeturas de Weil, es que la nueva noción es lo bastante amplia para permitirnos asociar a todo "esquema" uno de tales "espacios generalizados" o "topos" (llamado el "topos étal" del esquema considerado). Ciertos "invariantes cohomológicos" de ese topos (¡con lo que eso tiene de "tonto"!) parecían tener una buena oportunidad de proporcionar "lo que hacía falta" para dar todo su sentido a esas conjeturas y (¡quién sabe!) quizás de proporcionar los medios

[57] Así, pueden construirse topos muy "grandes" que no tienen más que un único "punto", ¡o incluso ningún "punto"!

[58] El nombre "topos" fue elegido(por asociación con el de "topología", o "topológico") para sugerir que se trata del "objeto por excelencia" al que se aplica la intuición topológica. Por la rica nube de imágenes mentales que ese nombre suscita, debe considerarse que más o menos es el equivalente del término "espacio" (topológico), sencillamente con una insistencia más grande sobre el carácter "topológico" de la noción. (Así, hay "espacios vectoriales" y no "topos vectoriales" ¡hasta nueva orden!) Es necesario conservar ambas expresiones, cada una con su carácter propio.

[59] Entre esas "construcciones" está principalmente la de todos los "invariantes topológicos" usuales, incluyendo los invariantes cohomológicos. En cuanto a éstos últimos, ya había hecho en el citado artículo ("Tohoku" 1955) todo lo que hacía falta para darles un sentido en todos los "topos".

para demostrarlas.

Por primera vez en mi vida, en estas páginas que estoy escribiendo me tomo mi tiempo para evocar (aunque sólo sea para mí mismo) los temas-capitales y las grandes ideas directrices de mi obra matemática. Eso me lleva a apreciar mejor el lugar y el alcance de cada tema, y de los “puntos de vista” que encarnan, en la gran visión geométrica que los une y de la que han salido. Este trabajo es el que ha sacado a plena luz las dos innovadoras ideas neurálgicas en el primer y potente despegue de la geometría nueva: la idea de *esquema* y la de *topos*.

La segunda de estas ideas, la de topos, es la que ahora me parece la más profunda de las dos. Si por casualidad, a finales de los años cincuenta *no* me hubiera remangado para desarrollar obstinadamente día tras día, durante doce largos años, una “herramienta esquemática” de una delicadeza y una potencia perfectas — me parece casi impensable que en los diez o veinte años que han pasado algún otro no hubiera introducido al fin y al cabo (aunque fuera a su pesar...) la noción que claramente se imponía, y hubiera montado mejor o peor algunas vetustas barracas “prefabricadas”, a falta de las espaciosas y confortables moradas que tuve el empeño de reunir piedra a piedra y de levantar con mis manos. Por el contrario, durante los tres decenios que han pasado, no he visto a nadie en la escena matemática que hubiera podido tener esa ingenuidad, o esa inocencia, para dar (en mi lugar) ese *otro* paso crucial, introduciendo la idea tan infantil de topos (o aunque sólo fuera la de “situs”). Incluso suponiendo esa idea graciosamente concedida, y con ella la tímida promesa que parecía encerrar — no veo a nadie, ni entre mis amigos de antaño ni entre mis alumnos, que pueda tener el ánimo, y sobre todo la *fe*, para llevar a cabo esa humilde idea[60] (tan ridícula en apariencia, mientras que la meta parecía infinitamente lejana...) desde sus inicios balbuceantes hasta la plena madurez de la “cohomología étal” en que ella se encarnó entre mis manos, durante los años siguientes.

15. Sí, el río es profundo, y vastas y apacibles son las aguas de mi infancia, en un reino que creí dejar hace ya mucho tiempo. Todos los caballos del rey podrían beber juntos en él, a gusto y hasta saciarse ¡sin agotarlo! Aguas que vienen de los glaciares, encendidas como esas nieves lejanas, y tienen la dulzura de la arcilla de las llanuras. Acabo de hablar de uno de esos caballos, que un niño llevó a beber y que bebió a gusto mucho tiempo. Y he visto otro que vino a beber un momento, quizás siguiendo el rastro del mismo chiquillo – pero poco tiempo. Alguien debió espantarlo. Y ya no digo más. Sin embargo veo innumerables manadas de caballos sedientos que vagan por la llanura – y esta misma mañana sus relinchos me han sacado de la cama a una hora indebida, a mí que voy para los sesenta y me gusta la tranquilidad. No hubo remedio, tuve que levantarme. Me da pena verlos, como rosas mustias, cuando no falta el agua buena ni los verdes pastos. Se diría que un sortilegio maléfico ha sido lanzado sobre esa comarca que conocí acogedora, y ha prohibido el acceso a esas aguas generosas. O puede ser un montaje de los tratantes de caballos para que bajen los precios ¿quién sabe? O quizás sea un país donde ya no hay niños que lleven los caballos a beber y donde los caballos están sedientos, a falta de un chiquillo que reencuentre el camino que lleva al río...

[60](Para el lector matemático) Cuando hablo de “llevar a cabo esa humilde idea”, se trata de la idea de la cohomología étal como aproximación a las conjeturas de Weil. Inspirado por ese propósito descubrí la noción de situs en 1958, y entre 1962 y 1966 se desarrolló esa noción (o la noción vecina de topos) junto con el formalismo cohomológico étal bajo mi impulso (con la ayuda de algunos colaboradores que consideraremos en su lugar).
Cuando hablo de “ánimo” y de “fe”, me refiero a cualidades de naturaleza “no-técnica” que aquí me parecen ser las cualidades esenciales. En otro nivel, podría añadir también lo que llamaría el “olfato cohomológico”, es decir, el tipo de olfato que desarrollé para la construcción de teorías cohomológicas. Creí comunicárselo a mis alumnos cohomólogos. Con la perspectiva de diecisiete años desde mi salida del mundo matemático, constato que ninguno de ellos lo conservó.

16. El tema de los topos salió del de los esquemas el mismo año en que aparecieron los esquemas — pero sobrepasa mucho en extensión al tema-madre. El tema de los topos, y no el de los esquemas, es ese "lecho", ese "río profundo", donde se desposan la geometría y el álgebra, la topología y la aritmética, la lógica matemática y la teoría de categorías, el mundo del continuo y el de las estructuras "discontinuas" o "discretas". Si el tema de los esquemas es el *corazón* de la nueva geometría, el tema de los topos es su envoltura, o su *morada*. Es lo más vasto que he concebido para captar finamente, con un lenguaje común rico en resonancias geométricas, una "esencia" común a situaciones de lo más lejanas, que provienen de tal región o de tal otra del amplio universo de los objetos matemáticos.

El tema de los topos está muy lejos de haber conocido la fortuna del de los esquemas. Me expreso al respecto en varias ocasiones en Cosechas y Siembras, y éste no es lugar para entretenerme con las extrañas vicisitudes que han afectado a esta noción. No obstante dos temas capitales de la nueva geometría provienen del de los topos, dos "teorías cohomológicas" complementarias, concebidas ambas para aproximarse a las conjeturas de Weil: el *tema étal* (o *"l-ádico"*), y el *tema cristalino*. El primero se concretó entre mis manos en la cohomología l-ádica, que hasta el presente parece ser una de las más potentes herramientas matemáticas del siglo[61]. En cuanto al tema cristalino, reducido después de mi salida a una existencia semi-oculta, finalmente fue exhumado (acuciados por la necesidad) en junio de 1981, con candilejas y un nombre prestado, en circunstancias aún más extrañas que las que rodearon a los topos.

La herramienta cohomológica l-ádica fue, según estaba previsto, la herramienta esencial para demostrar las conjeturas de Weil. Yo mismo demostré un buen paquete, y el último paso lo dio con maestría, tres años después de mi salida, Pierre Deligne, el más brillante de mis alumnos "cohomólogos".

Además, hacia el año 1968, había extraído una versión más fuerte, y sobre todo más "geométrica", de las conjeturas de Weil. Éstas aún estaban "manchadas" (¡si puede decirse!) por un aspecto "aritmético" aparentemente irreducible, mientras que su espíritu es expresar y captar la "aritmética" (o lo "discreto") por medio de lo "geométrico" (o de lo "continuo")[62]. En ese sentido, la versión de las conjeturas que desentrañé me parece más "fiel" que la de Weil a la "filosofía de Weil" — a esa filosofía no escrita y pocas veces dicha, que tal vez fue *la* principal motivación tácita en el extraordinario despegue de la geometría en los cuatro decenios que han pasado[63]. Mi reformulación consistió, esencialmente, en desentrañar una especie de "quintaesencia" de lo que debía seguir siendo válido, en el cuadro de las variedades algebraicas llamadas "abstractas", de la clásica "teoría de Hodge", válida en las variedades algebraicas "ordinarias"[64]. Llamé *"conjeturas standard"* (sobre los ciclos algebraicos) a esa nueva versión, totalmente geométrica, de las famosas conjeturas.

En mi espíritu, ése era un paso más, después del desarrollo de la herramienta cohomológica l-ádica, en dirección a esas conjeturas. Pero a la vez y sobre todo era también uno de los enfoques posibles de lo que todavía me parece ser el tema más profundo que he introducido en matemáticas[65]: el de los

[61] (N. del T.) Por el s. XX.

[62] (Para el matemático) En las conjeturas de Weil intervienen hipótesis de naturaleza "aritmética", principalmente porque las variedades consideradas han de estar definidas sobre un cuerpo *finito*. Desde el punto de vista del formalismo cohomológico eso conduce a reservar un lugar aparte al *endomorfismo de Frobënius* asociado a tal situación. En mi enfoque, las propiedades cruciales (tipo "teorema del índice generalizado") se refieren a las correspondencias algebraicas *arbitrarias*, y no imponen ninguna hipótesis de naturaleza aritmética sobre un cuerpo base previamente dado.

[63] Aunque, después de mi salida en 1970, hubo una reacción muy clara, concretizada en un estancamiento relativo, que tendré ocasión de evocar más de una vez en las páginas de Cosechas y Siembras.

[64] Aquí "ordinaria" significa: "definida sobre el cuerpo complejo". La teoría de Hodge (llamada "de las integrales armónicas") era la más potente de las teorías cohomológicas conocidas en el contexto de las variedades algebraicas complejas.

[65] Es el tema más profundo, al menos en el periodo "público" de mi actividad matemática, entre 1950 y 1969, es decir hasta el momento de mi salida de la escena matemática. Considero que el tema de la geometría algebraica anabeliana y de la teoría de Galois-Teichmüller, desarrollado a partir de 1977, es de una profundidad comparable.

motivos (nacido del "tema cohomológico l-ádico"). Ese tema es como el *corazón* o el alma, la parte más oculta, la más escondida a la mirada, del tema esquemático, que él mismo es el corazón de la nueva visión. Y los fenómenos-clave desentrañados en las conjeturas standard[66] pueden verse como una especie de quintaesencia última del tema motívico, como el *"aliento"* vital de ese tema sutil entre todos, de ese *"corazón del corazón"* de la nueva geometría.

Veamos en líneas generales de qué se trata. Dado un número primo p, hemos visto la importancia (principalmente en vista a las conjeturas de Weil) de saber construir "teorías cohomológicas" para las "variedades (algebraicas) de característica p". Ahora bien, la famosa "herramienta cohomológica l-ádica" proporciona justamente tal teoría, e incluso una *infinidad de teorías cohomológicas diferentes*, a saber, una para cada número primo l diferente de la característica p. Claramente ahí hay aún una "teoría que falta", que correspondería al caso de un l que fuera igual a p. Para obtenerla, imaginé expresamente otra teoría cohomológica más (a la que ya se ha hecho alusión anteriormente), llamada "cohomología cristalina". Por otra parte, en el importantísimo caso en que p es infinito, se dispone de otras tres teorías cohomológicas[67] — y nada permite afirmar que no nos veremos obligados, antes o después, a introducir nuevas teorías cohomológicas con propiedades formales totalmente análogas. Al revés de lo que ocurría en la topología ordinaria, nos encontramos frente a una abundancia desconcertante de teorías cohomológicas diferentes. Se tenía la impresión muy clara de que en un sentido aún muy impreciso, todas esas teorías "vendrían a ser lo mismo", que "darían los mismos resultados"[68]. Desentrañé la noción de *"motivo"* asociado a una variedad algebraica para conseguir expresar esa intuición de "parentesco" entre teorías cohomológicas diferentes. Con ese término quiero sugerir que se trata de un "motivo común" (o de la *"razón* común") subyacente a esa multitud de invariantes cohomológicos diferentes asociados a la variedad con ayuda de la multitud de todas las teorías cohomológicas posibles a priori. Esas diferentes teorías cohomológicas serían como otros tantos desarrollos temáticos diferentes, cada uno en el "tempo", en la "clave" y en el "modo" ("mayor" o "menor") que le son propios, de un mismo "motivo de base" (llamado "teoría cohomológica *motívica"*), que a la vez sería la más fundamental, o la más "fina", de todas esas "encarnaciones" temáticas diferentes (es decir, de todas las teorías cohomológicas posibles). Así, el motivo asociado a una variedad algebraica constituiría el invariante cohomológico "último", "por excelencia", del que todos los demás (asociados a las diferentes teorías cohomológicas posibles) se deducirían como otras tantas "encarnaciones" musicales, o "realizaciones" diferentes. Todas las propiedades esenciales de "*la* cohomología" de la variedad se "leerían" (o se "comprenderían") ya en el motivo correspondiente, de forma que las propiedades estructurales usuales de los invariantes cohomológicos particulares (l-ádicos o cristalinos, por ejemplo) serían simplemente el reflejo fiel de las propiedades y estructuras *internas del motivo*[69].

---

[66](Para el lector geómetra algebrista) Eventualmente habrá que reformular esas conjeturas. Para comentarios más detallados, véase "La vuelta a las obras" (CyS IV nota nº 178, p. 1215–1216) y la nota al pie de la página 769 en "Convicción y conocimiento" (CyS III, nota nº 162).

[67](Para el lector matemático) Esas teorías corresponden respectivamente a la *cohomología de Betti* (definida por vía trascendente, con ayuda de una inmersión del cuerpo base en el cuerpo de los complejos), a la *cohomología de Hodge* (definida por Serre) y a la *cohomología de De Rham* (definida por mí), remontándose estas dos últimas a los años cincuenta (y la de Betti, al siglo pasado).

[68](Para el lector matemático) Por ejemplo, si f es un endomorfismo de una variedad algebraica X, induce un endomorfismo del espacio de cohomología $H^i(X)$, y el polinomio característico de éste último debería tener coeficientes *enteros*, independientes de la teoría cohomológica particular elegida (por ejemplo l-ádica, con l variable). Igual para correspondencias algebraicas generales; cuando X se supone propio y liso. La triste realidad (que da una idea del lamentable estado de abandono de la teoría cohomológica de las variedades algebraicas en característica $p > 0$ después de mi salida) es que hoy en día eso aún no está demostrado, incluso en el caso particular en que X es una *superficie* proyectiva y lisa e $i = 2$. De hecho, por lo que sé, después de mi salida todavía nadie se ha dignado interesarse por esta cuestión crucial, típica de las que aparecen subordinadas a las conjeturas standard. El dictado de la moda es que el único endomorfismo digno de atención es el endomorfismo de Frobënius (que pudo ser tratado aparte por Deligne, con los medios de abordo...).

[69](Para el lector matemático) Otro modo de ver la categoría de motivos sobre un cuerpo k es visualizarla como una especie de "categoría abeliana envolvente" de la categoría de esquemas separados de tipo finito sobre k. El motivo asociado a uno de tales esquemas X (o la "cohomología motívica de X", que denoto $H^*_{\mathrm{mot}}(X)$) aparece así como una especie de "avatar"

Ésa es, expresada con el lenguaje nada técnico de una metáfora musical, la quintaesencia de una idea de simplicidad infantil, delicada y audaz a la vez. Desarrollé esa idea, al margen de unos trabajos de fundamentación que consideraba más urgentes, bajo el nombre de "teoría de motivos" o de "filosofía (o "yoga") de los motivos", durante los años 1963–1969. Es una teoría de una riqueza estructural fascinante, de la que gran parte aún permanece conjetural[70].

En Cosechas y Siembras hablo en diversas ocasiones sobre ese "yoga de los motivos", que me llega al corazón de modo muy particular. Éste no es el lugar para volver sobre lo que dije antes. Baste decir que las "conjeturas standard" se siguen del modo más natural del mundo de ese yoga de los motivos. Y a la vez proporcionan un principio para abordar una de las posibles construcciones rigurosas de la noción de motivo.

Esas conjeturas me parecían, y me parecen aún hoy, una de las dos cuestiones más fundamentales de la geometría algebraica. Ni esta cuestión, ni la otra cuestión igualmente crucial (la llamada "resolución de singularidades") están todavía resueltas en la hora presente. Pero mientras que la segunda de esas cuestiones aparece, hoy igual que hace cien años, como una cuestión prestigiosa y temible, la que tuve el honor de desentrañar ha sido clasificada por los perentorios decretos de la moda (desde los años que siguieron a mi salida de la escena matemática, al igual que el tema motívico mismo[71]) como un amable camelo grothendieckiano. Pero una vez más anticipo...

17. A decir verdad, mis reflexiones sobre las conjeturas de Weil mismas, en vista a demostrarlas, fueron esporádicas. El panorama que comenzaba a abrirse ante mí, y que me esforzaba en escrutar y captar, sobrepasaba en mucho la amplitud y la profundidad de las hipotéticas necesidades de una demostración, e incluso de todo lo que esas famosas conjeturas habían dejado entrever. Con la aparición del tema esquemático y el de los topos, un mundo nuevo e insospechado se abrió de repente. En él "las conjeturas" ocupaban un lugar central, ciertamente, un poco como la capital de un vasto imperio o continente de innumerables provincias, donde la mayoría no tiene más que relaciones lejanas con ese lugar

abelianizado de X. Aquí lo crucial es que, al igual que una variedad algebraica X es susceptible de "variación continua" (su clase de isomorfismo depende por tanto de "parámetros" continuos, o "moduli"), el motivo asociado a X, o en general un "motivo" "variable", también es susceptible de variación continua. Ése es un aspecto de la cohomología motívica que contrasta llamativamente con lo que ocurre en los invariantes cohomológicos clásicos, incluidos los invariantes l-ádicos, con la única excepción de la cohomología de Hodge de las variedades algebraicas complejas.
Esto da una idea de hasta qué punto la "cohomología motívica" es un invariante más fino, que capta de modo mucho más ceñido la "forma aritmética" (si me atrevo a aventurar esa expresión) de X, que los invariantes puramente topológicos tradicionales. En mi visión de los motivos, éstos constituyen una especie de "cordón" oculto y delicado que liga las propiedades algebro-geométricas de una variedad algebraica con propiedades de naturaleza "aritmética" encarnadas en su motivo. Éste último puede considerarse como un objeto de naturaleza "geométrica" en su espíritu propio, pero en el que las propiedades "aritméticas" subordinadas a la geometría se encuentran, por así decirlo, "puestas al desnudo".
Así, el motivo se me presenta como el más profundo "invariante de la forma" que hasta ahora se ha sabido asociar a una variedad algebraica, dejando aparte el "grupo fundamental motívico". Para mí ambos invariantes son como "sombras" de un "tipo de homotopía motívico" que habría que describir (y sobre el que digo algunas palabras en la nota "La vuelta a las obras — o herramientas y visión" (CyS IV, n^o 178, véase la cantera 5 (Motivos), y especialmente la página 1214)).Éste último objeto es el que me parece que debería ser la encarnación más perfecta de la elusiva intuición de "forma aritmética" (o "motívica") de una variedad algebraica arbitraria.
(N. del T.: En el hinduismo "avatar" es la encarnación de una deidad en forma humana o animal, y usualmente se refiere a las diez apariencias de Vishnú.

[70] Expliqué mi visión de los motivos a todo el que quiso escucharla, durante esos años, sin tomarme la molestia de publicar nada negro sobre blanco (ya que no faltaban otras tareas al servicio de todos). Eso ha permitido a algunos de mis alumnos plagiarla a gusto más tarde, bajo la mirada enternecedora de todos mis antiguos amigos, que estaban al corriente de la situación. (Ver la siguiente nota a pie de página).

[71] De hecho, ese tema fue exhumado en 1982 (un año después que el tema cristalino), esta vez con su nombre original (y de forma limitada, únicamente en el caso de una cuerpo base de característica nula) y sin pronunciar el nombre del obrero. Ése es un ejemplo entre muchos otros de conceptos o temas enterrados el día siguiente de mi salida como fantasmagorías grothendieckianas, para ser exhumados uno tras otro por algunos de mis alumnos durante los siguientes diez o quince años, con modesto orgullo y (es necesario precisarlo otra vez) sin mencionar al obrero...

brillante y prestigioso. Sin habérmelo dicho jamás, sabía que en adelante sería el servidor de una gran tarea: explorar ese mundo inmenso y desconocido, descubrir sus límites hasta las fronteras más lejanas; y también recorrer en todos los sentidos e inventariar con un cuidado tenaz y metódico las provincias más cercanas y accesibles, y trazar planos con fidelidad y precisión escrupulosa, donde el menor caserío y la menor choza tuvieran su sitio...

Este último trabajo es el que absorbía la mayor parte de mi energía — un paciente y vasto trabajo de fundamentación que sólo yo veía claramente y, sobre todo, "sentía en las tripas". Él me ocupó, y con mucho, la mayor parte de mi tiempo entre 1958 (año en que aparecieron, uno tras otro, el tema esquemático y el de los topos) y 1970 (año de mi salida de la escena matemática).

A menudo mordía el freno por estar retenido así, como con un peso tenaz y pegajoso, con esas interminables tareas que (una vez visto lo esencial) se me parecían más a "la intendencia" que a lanzarse hacia lo desconocido. Constantemente tenía que retener ese impulso de lanzarme hacia delante — el del pionero o el explorador que marcha a descubrir y explorar mundos desconocidos y sin nombre, que me llamaban sin cesar para que los conociera y les diera nombre. Ese impulso y la energía que le dedicaba (¡casi como a hurtadillas!) siempre estaban a dieta.

Sin embargo, en el fondo bien sabía que esa energía, hurtada (por así decir) a la que debía a mis "tareas", era de la esencia más rara y más sutil — que en mi trabajo matemático la "creación" estaba *allí* ante todo: en esa atención intensa para aprehender, en los repliegues oscuros, informes y húmedos de una cálida e inagotable matriz nutritiva, las primeras trazas de forma y los contornos de lo que aún no había nacido y parecía llamarme, para tomar forma y encarnarse y nacer... Esa atención intensa, esa solicitud ardiente son una fuerza esencial en el trabajo de descubrir, igual que el calor del sol en la oscura germinación de las semillas ocultas en la tierra nutritiva, y en su humilde y milagrosa eclosión a la luz del día.

En mi trabajo matemático, veo que actúan sobre todo esas dos fuerzas o impulsos, igualmente profundos, de naturalezas (me parece) diferentes. Para evocarlos he utilizado la imagen del *constructor* y la del *pionero* o el explorador. Puestas codo con codo, ambas me resultan chocantes por ser muy "yang", muy "masculinas", ¡incluso "machistas"! Tienen la resonancia altanera de los mitos, o de los "grandes momentos". Seguramente me han sido inspiradas por los vestigios de mi antigua visión "heroica" del trabajo creador, la visión super-yang. Tal cual están, dan una visión fuertemente coloreada, por no decir estereotipada, "a lo ¡todos firmes!", de una realidad mucho más fluida, más humilde, más "simple" — de una realidad *viva*.

En ese impulso masculino del "constructor", que parece empujarme sin cesar hacia nuevas obras, percibo también el impulso del *hogareño*: el que está profundamente ligado a *"la"* casa. Antes que nada es *"su"* casa, la de sus *"parientes"* — el lugar de una íntima entidad viva de la que se siente parte. Solamente después, y a medida que se ensancha el círculo de lo que se percibe como "pariente", también es una "casa para todos". Y en ese impulso de "hacer casas" (como se "haría" el amor...) ante todo hay también *cariño*. Hay el impulso del *contacto* con esos materiales que se trabajan uno a uno, con un cuidado amoroso, y que no se pueden conocer más que por ese contacto amante. Y, una vez levantados los muros y puestas la vigas y el tejado, hay la satisfacción profunda de acondicionar una parte tras otra, y ver poco a poco cómo se instaura, en esas salas, esas habitaciones y esos cuartos, el orden armonioso de la casa llena de vida — hermosa, acogedora, habitable. Porque *la casa*, ante todo y secretamente en cada uno de nosotros, también es *la madre* — lo que nos rodea y abriga, a la vez refugio y consuelo; y quizás (más hondo todavía, y aunque estuviéramos construyéndola totalmente) también sea eso de lo que procedemos, lo que nos abrigó y nutrió, en esos tiempos jamás olvidados de antes de nacer... También es *el Regazo*.

Y la imagen que antes apareció espontáneamente, para ir más allá del prestigioso apelativo de "pionero" y captar la realidad más oculta que escondía, también estaba desprovista de todo acento "heroico". Allí también apareció la imagen arquetípica de lo maternal — la de la "matriz" nutritiva y sus informes y oscuros procesos...

Esos dos impulsos que me parecían "de naturaleza diferente" finalmente están más cerca de lo que hubiera pensado. Ambos tienen la naturaleza de un *"impulso de contacto"*, que nos lleva al encuentro de *"la Madre"*: de La que encarna lo que es cercano, "conocido", y lo que es "desconocido". Abandonarme tanto a uno como a otro impulso es *"reencontrar a la Madre"*. Es renovar el contacto a la vez con lo *cercano*, con lo "más o menos conocido", y con lo *"lejano"*, con lo "desconocido" y al mismo tiempo presentido, a punto de darse a conocer.

Aquí la diferencia es de tonalidad, de dosificación, no de naturaleza. Cuando "construyo mansiones", domina lo "conocido", y cuando "exploro", lo desconocido. Esos dos "modos" de descubrir, o mejor dicho, esos dos aspectos de un mismo proceso o de un mismo trabajo, están indisolublemente ligados. Ambos son esenciales y complementarios. En mi trabajo matemático percibo un movimiento constante de vaivén entre esos dos modos de trabajar, o mejor, entre los momentos (o los periodos) en que predomina uno y aquellos en que predomina el otro[72]. Pero también está claro que en cada momento ambos modos están presentes. Cuando construyo, instalo o despejo, limpio y ordeno, es el "modo" o "vertiente" "yang" o "masculino" del trabajo el que da el tono. Cuando exploro a tientas lo incomprensible, lo informe, lo que no tiene nombre, soy la vertiente "yin" o "femenina" de mi ser.

Para mí no se trata de querer minimizar o renegar de una u otra vertiente de mi naturaleza, ambas esenciales — la "masculina" que construye y engendra, y la "femenina" que concibe y alberga las lentas y oscuras gestaciones. Soy una y la otra — "yang" y "yin", "hombre" y "mujer". Pero también sé que la esencia más delicada, la más sutil en los procesos creadores está del lado de la vertiente "yin", "femenina" — la vertiente humilde, oscura y a menudo aparentemente pobre.

Es esa vertiente del trabajo la que, creo que desde siempre, ha ejercido sobre mí la fascinación más poderosa. Aunque los consensos en vigor me animaban a dedicar lo mejor de mi energía en la otra vertiente, en la que se encarna y se confirma con "producciones" tangibles, por no decir terminadas y acabadas — productos de contornos marcados que atestiguan su realidad con la evidencia de la piedra tallada...

Con la perspectiva del tiempo, bien veo cómo pesaron sobre mí esos consensos, y también cómo "acusé el peso" — ¡sin rechistar! La parte "concepción" o "exploración" de mi trabajo estuvo a dieta hasta el momento mismo de mi salida. Sin embargo, en esta mirada retrospectiva sobre mi obra matemática nos embarga la evidencia de que lo que constituye la esencia y la potencia de esa obra es la vertiente despreciada hoy en día, cuando no es objeto de burla o de un desdén condescendiente: la de las *"ideas"*, incluso la de los *"sueños"*, nunca la de los "resultados". Al intentar captar en estas páginas lo más esencial de mi aportación a la matemática de mi tiempo, con una mirada que abarque el bosque en vez de fijarse en los árboles — he visto, no un palmarés de "grandes teoremas", sino un vivo abanico de ideas fecundas[73], ideas que concurren en una misma y amplia visión.

[72] Lo que digo aquí sobre el trabajo matemático vale igualmente para el trabajo de "meditación" (del que hablaremos en Cosechas y Siembras un poco por todas partes). Para mí no hay duda de que es algo que aparece en todo trabajo de descubrimiento, incluido el del artista (escritor o poeta, digamos). Puede considerarse que las dos "vertientes" que describo son, una la de la *expresión* y sus exigencias "técnicas", la otra la de la *recepción* (de percepciones y de impresiones de todo tipo) que deviene *inspiración* por efecto de una intensa atención. Ambas vertientes están presentes en cualquier momento del trabajo, y hay ese constante movimiento de "vaivén" entre los "tiempos" en que predomina una y aquellos en que predomina la otra.

[73] Aunque lo que podemos llamar "grandes teoremas" no falten en mi obra, incluyendo teoremas que resolvieron cuestiones

18. Cuando este “prólogo” comenzó a convertirse en un paseo a través de mi obra matemática, con una pequeña descripción de los “herederos” (auténticos) y los “constructores” (incorregibles), también comenzó a surgir un *nombre* para ese prólogo frustrado: sería “El niño y el constructor”. Durante los siguientes días, cada vez estaba más claro que “el niño” y “el constructor” eran el mismo personaje. Ese nombre se convirtió, sencillamente, en “El niño constructor”. Un nombre, a fe mía, al que no le faltaba garbo ¡y que me complacía!

Pero he aquí que la reflexión muestra que ese altivo “constructor”, o (más modestamente) el niño-que-juega-a-hacer-casas, no era más que uno de los *dos* rostros del famoso niño-que-juega. También está el niño-que-quiere-explorar-las-cosas, ir a curiosear y enterrarse en la arena o en los fangos cenagosos y sin nombre, los lugares más imposibles y descabellados... Para hacer ese cambio (aunque sólo fuera para mí), comencé a introducirlo bajo el brillante nombre de “pionero”, seguido del de “explorador”, más prosaico pero aún con una aureola de prestigio. Entre el “constructor” y el “pionero-explorador”, habría que preguntarse cuál es el más masculino ¡el más seductor de los dos! ¿Cara o cruz?

Después, mirando más de cerca, he aquí que nuestro intrépido “pionero” resulta ser finalmente una *niña* (a la que vestí de niño) — una hermana de los mares, de la lluvia, de las brumas y de la noche, silenciosa y casi invisible a fuerza de apartarse en la sombra — la que siempre olvidamos (cuando no nos burlamos de ella). Y, durante días y días, yo también encontré el modo de olvidarla — de olvidarla doblemente podría decirse: primero no quise ver más que al chico (el que juega a construir casas) y cuando no tuve más remedio que ver a la *otra*, todavía la vi como un chico, también ella...

De repente el nombre adecuado para mi paseo ya no se sostiene. Es un nombre todo-yang, totalmente “machista”, un nombre-que-cojea. Para no ser tendenciosos, también deberíamos incluir a la *otra* en él. Pero es extraño, *“la otra” verdaderamente no tiene nombre.* El único que pega, por poco que sea, es el “explorador”, pero es un nombre de chico, y no podemos remediarlo. La lengua aquí es una zorra, nos tiende una trampa sin que nos demos cuenta, en connivencia clara con prejuicios ancestrales.

Quizás pudiéramos arreglarnos con “El niño-que-construye y el niño-que-explora”. Dejando en lo no dicho que uno es “chico” y el otro es “chica”[74], y que es un único y mismo niño chico-chica que al construir explora, y al explorar construye... Pero ayer, además de la doble vertiente yin-yang de lo que contempla y explora, y de lo que nombra y construye, apareció otro aspecto más de las cosas.

El Universo, el Mundo, hasta el Cosmos, nos son ajenos en el fondo y muy lejanos. No nos conciernen verdaderamente. En lo más profundo de nosotros mismos el impulso de conocimiento no nos lleva hacia *ellos*. Lo que nos llama es su *Encarnación* tangible e inmediata, la más cercana, la más “carnal”, cargada de profundas resonancias y rica en misterios — La que se confunde con los orígenes de nuestro ser de carne, y con los de nuestra especie — y también La que desde siempre nos espera, silenciosa y dispuesta a acogernos, “al final del camino”. De *Ella*, la Madre, de La que nos ha parido igual que dio a luz al Mundo, surge el impulso y brotan los caminos del deseo — y nos llevan a *Su* encuentro, hacia *Ella* se dirigen, para retornar sin cesar y abismarse en Ella.

Así, al regreso de un “paseo” imprevisto, encuentro de improviso una parábola que me fue muy

planteadas por otros, que nadie supo resolver antes que yo. (Paso revista a algunos en la nota (***) al pie de la página 554 de la nota “La marea que sube...” (CyS III, nº 122).) Pero, como ya subrayé al comenzar este “paseo” (en la sección “Puntos de vista y visión”, nº 6), para mí esos teoremas no adquieren todo su sentido más que en el nutricio contexto de un gran tema, iniciado por una de esas “ideas fecundas”. Entonces su demostración fluye, como de una fuente y sin esfuerzo, de la naturaleza misma, de la “profundidad” del tema que la conduce — igual que las olas de un río parecen nacer dulcemente de la profundidad misma de sus aguas, sin esfuerzo ni ruptura. Expreso la misma idea, pero con imágenes diferentes, en la citada nota “La marea que sube...”.

[74](N. del T.) En francés el nombre *enfant* es masculino y femenino, por lo que tanto “niña-que-explora” como “niño-que-explora” se dicen *“enfant-qui-explore”*, que es la expresión que figura en el texto original.

familiar y casi había olvidado — la parábola del *niño y la Madre*. Podemos verla como una parábola de *"La Vida, en busca de sí misma"*. O, al nivel más humilde de la existencia individual, una parábola de *"el ser, en busca de las cosas"*.

Es una parábola, y también es la expresión de una experiencia ancestral profundamente implantada en la psique — el más poderoso entre todos los símbolos originales que nutren las profundas capas creadoras. Creo reconocer en él, expresado en el lenguaje inmemorial de las imágenes arquetípicas, el aliento del poder creador en el hombre que anima su carne y su espíritu, tanto en sus manifestaciones más humildes y efímeras como en las más brillantes y perdurables.

Ese "aliento", al igual que la imagen carnal que lo encarna, es lo más humilde del mundo. También es lo más frágil, y lo más ignorado por todos y lo más despreciado...

Y la historia de las vicisitudes de ese aliento a lo largo de tu existencia no es más que *tu* aventura, la "aventura del conocimiento" en *tu* vida. La parábola sin palabras que la expresa es la del niño y la Madre.

Tú eres el niño, nacido de la Madre, amparado por Ella, alimentado por su vigor. Y el niño se abalanza fuera de la Madre, la Muy-cercana, la Bien-conocida — al encuentro de la Madre, la Ilimitada, siempre Desconocida y llena de misterio...

Fin del "paseo por una obra"

Epílogo: l o s C í r c u l o s i n v i s i b l e s

19. Hasta la aparición del punto de vista de los topos, hacia el final de los años cincuenta, la evolución de la noción de espacio me parece una evolución esencialmente *"continua"*. Parece proseguir sin cortes ni saltos, a partir de la teoría euclidiana del espacio que nos rodea y de la geometría legada por los griegos, que se dedicaba al estudio de ciertas "figuras" (rectas, planos, círculos, triángulos, etc.) que vivían en ese espacio. Ciertamente, ha habido cambios profundos en la forma en que el matemático o el "filósofo de la naturaleza" concebía el "espacio"[75]. Pero me parece que todos esos cambios tienen una "continuidad" esencial — jamás han puesto al matemático, ligado (como cada cual) a las imágenes mentales familiares, delante de un *exilio* repentino. Eran como los cambios, quizás profundos pero progresivos, que se dan a lo largo de los años en alguien que hubiéramos conocido de niño, y del que hubiéramos seguido la evolución desde sus primeros pasos hasta su edad adulta y su plena madurez. Cambios imperceptibles en algunos largos periodos de calma chicha, y tumultuosos en otros. Pero incluso en los periodos de crecimiento y maduración más intensos, y aunque lo hayamos perdido de vista durante meses o años, en ningún

[75] Al escribir el Epílogo, mi primera intención era incluir un esbozo muy sumario de algunos de esos "cambios profundos" y mostrar esa "continuidad esencial" que percibo en ellos. He renunciado para no alargar sin medida este Paseo ¡mucho más largo ya de lo previsto! Pienso volver sobre ello en los Comentarios Históricos previstos para el volumen 4 de las "Reflexiones", esta vez para lectores matemáticos (lo que cambia totalmente la forma de exposición).

momento podría haber la menor duda ni la menor vacilación: claro que es él, alguien bien conocido y familiar que reencontramos, puede que con algunos rasgos cambiados.

Creo poder decir, por otra parte, que hacia la mitad de este siglo ese ser familiar ya había envejecido mucho — cual un hombre que finalmente se hubiera agotado y gastado, sobrepasado por la llegada de tareas nuevas para las que no estaba preparado. Incluso pudiera ser que ya estuviera muerto por consumición, sin que nadie se preocupara de enterarse y levantar acta. Todavía "todo el mundo" actuaba como si estuvieran en la casa de un vivo, y casi era como si en efecto él estuviera bien vivo.

Así que juzgad el enfado de los habituales de la casa cuando en el lugar del venerable viejo petrificado, tieso y rígido en su sillón, de repente ven retozar un chiquillo vigoroso, que no levanta tres palmos del suelo, y que pretende de paso, sin reírse y como algo evidente, que el Señor Espacio (y podéis dejar caer el "Señor" si así os gusta...) ¡es *él*! Si por lo menos tuviera rasgos familiares, quizás un hijo natural ¿quién sabe?... ¡pero no! Bien mirado, nada que recuerde al viejo Padre Espacio que habían conocido bien (o creído conocer...) y en todo caso (y eso era lo menos importante...) del que estaban seguros que era eterno...

Ésa es la famosa "mutación de la noción de espacio". *Eso* es lo que debí "ver" como algo evidente, al menos desde principios de los años sesenta, sin haber tenido jamás la ocasión de decírmelo antes del momento en que escribo estas líneas. Y de repente veo con una claridad nueva, por la única virtud de esa evocación llena de imágenes y de la nube de asociaciones que suscita al punto: la noción tradicional de "espacio", igual que la estrechamente emparentada de "variedad" (de cualquier tipo, y especialmente la de "variedad algebraica"), tenían, cuando llegué a esos parajes, tal pinta de viejos que era como si estuvieran muertos...[76]. Y podría decir que con la aparición, uno tras otro, del punto de vista de los *esquemas* (y de su prole[77], más de diez mil páginas de fundamentos al final) y luego el de los *topos*, se desató finalmente una situación de crisis-que-no-dice-su-nombre.

En la imagen anterior, no habría que hablar de *un* chiquillo producido por una mutación repentina, sino de *dos*. Dos chiquillos que tienen un "aire de familia" innegable, aunque casi no se parezcan al difunto viejo. Además, mirando de cerca, podría decirse que el chiquillo Esquemas sería como un "eslabón de parentesco" entre la familia de Padre espacio (alias Variedades-de-toda-clase) y el chiquillo Topos[78].

20 La situación me parece muy similar a la que se presentó a principios de este siglo, con la aparición de la teoría de la relatividad de Einstein. Estaban en un callejón sin salida conceptual, más flagrante todavía, que se concretaba en una *contradicción* repentina que parecía irresoluble. Como debe ser, la idea que iba a poner orden en el caos era de una simplicidad infantil. Lo más notable (y conforme a un

[76]Esta afirmación (que a algunos parecerá perentoria) ha de tomarse con una "pizca de sal". No es ni más, ni menos válida que la (que retomo por mi cuenta más abajo) de que el "modelo newtoniano" de la mecánica (terrestre o celeste) estaba "moribundo" a principios de este siglo, cuando Einstein llegó en su auxilio. Es un hecho que en la mayoría de las situaciones "corrientes" en física, el modelo newtoniano es perfectamente adecuado aún hoy en día, y sería una locura (visto el margen de error admitido en las medidas) ir a buscar modelos relativistas. Igualmente, en numerosas situaciones matemáticas las antiguas nociones familiares de "espacio" y de "variedad" siguen siendo perfectamente adecuadas, sin tener que ir a buscar elementos nilpotentes, topos o "estructuras moderadas". Pero en ambos casos, en un número creciente de contextos que intervienen en la investigación puntera, los antiguos marcos conceptuales ya no son aptos para expresar incluso las situaciones más "corrientes".

[77](Para el matemático) En esa "prole" cuento principalmente los esquemas formales, las "multiplicidades" de todo tipo (y especialmente las multiplicidades esquemáticas, o formales) y los espacios llamados "rígido-analíticos" (introducidos por Tate, siguiendo a un "maestro de obra" que le proporcioné, inspirado por la nueva noción de topos, a la vez que por la de esquema formal). Esta lista, por otra parte, no es nada exhaustiva...

[78]A estos dos chiquillos habría que añadir un tercero más joven, aparecido en tiempos más inclementes: el chaval *Espacio moderado*. Como señalé en otra parte, no tuvo derecho a un certificado de nacimiento, y fue en la más absoluta ilegalidad como lo incluí entre los doce "temas capitales" que tuve el honor de introducir en matemáticas.

escenario de lo más repetitivo...) es que entre todas esas gentes brillante, eminentes, prestigiosas, que andaban de cabeza intentando "salvar los muebles", nadie hubiera pensado en esa idea. Era necesario que fuera un joven desconocido, recién salido de los bancos de las aulas, el que viniera (algo azorado quizás por su propia audacia...) a explicar a sus ilustres mayores lo que era necesario hacer para "salvar los fenómenos": ¡había que dejar de separar el espacio del tiempo[79]! Técnicamente todo estaba ya preparado para que esa idea eclosionara y fuera acogida. Y honra a los mayores de Einstein que en efecto hayan sabido acoger la nueva idea, sin protestar demasiado. Ésa es una señal de que todavía era una gran época...

Desde el punto de vista matemático, la nueva idea de Einstein era banal. Por el contrario, desde el punto de vista de nuestra concepción del *espacio físico* era una mutación profunda, y un "exilio" repentino. La primera mutación de esa clase, desde el modelo matemático del espacio físico desentrañado por Euclides hace 2400 años, y retomado tal cual por todos los físicos y astrónomos desde la antigüedad (incluido Newton) para describir los fenómenos mecánicos terrestres y estelares. Esa idea inicial de Einstein se hizo más profunda después, encarnándose en un modelo matemático más sutil, más rico y más flexible, con ayuda del rico arsenal de nociones matemáticas ya existentes[80]. Con la "teoría general de la relatividad" esa idea se ensancha en una amplia *visión* del mundo físico, abrazando en una misma mirada el mundo subatómico de lo infinitamente pequeño, el sistema solar, la Vía láctea y las galaxias lejanas, y la propagación de las ondas electromagnéticas en un espacio-tiempo curvado en cada punto por la materia que allí hay[81]. Ésa es la segunda y la última vez en la historia de la cosmología y de la física (después de la primera gran síntesis de Newton hace tres siglos) que ha aparecido una vasta visión unificadora, en el lenguaje de un modelo matemático, del conjunto de los fenómenos físicos del Universo.

Esta visión einsteiniana del Universo físico ha sido desbordada a su vez por los sucesos. "El conjunto de los fenómenos físicos" del que hay que dar cuenta ha tenido tiempo de engordar ¡desde principios de siglo! Han aparecido una multitud de teorías físicas para dar cuenta cada una, con mayor o menor éxito, de un paquete limitado de hechos, en la inmensa leonera de todos los "hechos observados". Y todavía se espera al chiquillo audaz que encuentre jugando la nueva clave (si hay alguna...), el "modelo-bombón" soñado que quiera "funcionar" para salvar todos los fenómenos a la vez...[82].

[79] Como descripción de la idea de Einstein, por supuesto que es algo breve. A nivel técnico, era necesario poner de manifiesto la estructura del nuevo espacio-tiempo (lo que ya estaba "en el aire" con la teoría de Maxwell y las ideas de Lorentz). Aquí el paso esencial no era de naturaleza técnica sino *"filosófica"*: darse cuenta de que la noción de simultaneidad para sucesos alejados no tenía ninguna realidad experimental. Ésa es la "constatación infantil", el "¡pero el Emperador está desnudo!", que permitió cruzar ese famoso "círculo imperioso e invisible que limita un Universo"...

[80] Sobre todo de la noción de "variedad riemanniana" y del cálculo tensorial sobre tales variedades.

[81] Uno de los rasgos más llamativos que distingue este modelo del modelo euclidiano (o newtoniano) del espacio y el tiempo, y también del primer modelo de Einstein ("relatividad especial"), es que la *forma topológica global* del espacio-tiempo está indeterminada, en vez de estar prescrita imperativamente por la naturaleza del propio modelo. La cuestión de saber cuál es esa forma global me parece (en tanto que matemático) una de las más fascinantes de la cosmología

[82] Se llama "teoría unitaria" a una tal teoría hipotética que conseguiría "unificar" y conciliar la multitud de teorías parciales que hay. Tengo la sensación de que la reflexión fundamental que habrá de emprenderse deberá situarse en dos niveles diferentes.
1°) Una reflexión de naturaleza "filosófica" sobre la noción misma de "modelo matemático" de una parcela de la realidad. Después del éxito de la teoría newtoniana, se ha convertido en un axioma tácito del físico la *existencia* de un modelo matemático (incluso de un modelo único, o *"el"* modelo) para expresar la realidad física de modo perfecto, sin "fisuras" ni borrones. Ese consenso, que impera desde hace más de dos siglos, es una especie de vestigio fósil de la visión viva de un Pitágoras para el que "Todo es número". Puede ser que ése sea el nuevo "círculo invisible" que reemplazó a los antiguos círculos metafísicos en la delimitación del Universo del físico (mientras que la raza de los "filósofos de la naturaleza" parece definitivamente extinguida, suplantada con brío por la de los ordenadores...). A poco que se quiera pensar un momento, está claro que la validez de ese consenso no tiene nada de evidente. Incluso hay razones filosóficas muy serias que nos llevan a ponerla en duda a priori, o al menos, a prever límites muy estrictos en su validez. Ahora o nunca sería el momento de someter ese axioma a una crítica rigurosa, e incluso quizás, de "demostrar" más allá de toda duda posible que *no* tiene fundamento, que *no* existe ningún modelo matemático riguroso único que dé cuenta del conjunto de los fenómenos llamados físicos inventariados hasta el presente.
Una vez delimitada satisfactoriamente la noción misma de "modelo matemático" y la de "validez" de uno de tales modelos (en el límite de los "márgenes de error" admitidos en las medidas realizadas), la cuestión de una "teoría unitaria", o al

La comparación entre mi contribución a la matemática de mi tiempo y la de Einstein a la física, se me ha impuesto por dos razones: ambas obras se llevaron a cabo al favor de una *mutación de nuestra concepción del "espacio"* (en sentido matemático en un caso y en sentido físico en el otro); y ambas toman la forma de una *visión unificadora*, que abraza una vasta multitud de fenómenos y de situaciones previamente percibidas como separadas una de otras. Veo ahí un *parentesco espiritual* evidente entre su obra[83] y la mía.

En modo alguno me parece que haya contradicción entre ese parentesco y una evidente diferencia de *"substancia"*. Como ya dejé entrever hace poco, la mutación einsteiniana concierne a la noción de espacio físico, mientras que Einstein usa el arsenal de las nociones matemáticas ya conocidas, sin tener necesidad nunca de aumentarlo, o de trastornarlo. Su contribución consistió en elegir, entre las estructuras matemáticas conocidas en su tiempo, las que mejor se adaptaban para servir de "modelos" de los fenómenos del mundo físico, y suplantar al modelo moribundo[84] legado por sus predecesores. En ese sentido su obra ha sido la de un *físico*, y más allá, la de un *"filósofo de la naturaleza"*, en el sentido en que lo entendían Newton y sus contemporáneos. Esa dimensión filosófica está ausente de mi obra matemática, en la que nunca me planteé cuestiones sobre las eventuales relaciones entre las construcciones conceptuales "ideales", que se realizan en el Universo de los objetos matemáticos, y los fenómenos que se dan en el Universo físico (incluso los sucesos vividos, que se despliegan en la psique). Mi obra ha sido la de un *matemático*, que se desentiende deliberadamente de las "aplicaciones" (a las otras ciencias) y de las "motivaciones" y raíces psíquicas de su trabajo. De un matemático, en suma, conducido por su genio particular a aumentar sin cesar el arsenal de las nociones fundamentales de su arte. Así fui llevado, sin darme cuenta y como jugando, a cambiar completamente la noción más fundamental de la geometría: la de *espacio* (y la de "variedad"), es decir de nuestra concepción del *"lugar"* mismo donde viven los entes geométricos.

La nueva noción de espacio (una especie de "espacio generalizado" donde los puntos, que se supone

---

menos la de un "modelo óptimo" (en un sentido a precisar), por fin estará claramente planteada. Al mismo tiempo, sin duda se tendrá una idea más clara del grado de arbitrariedad que está ligado (puede ser que necesariamente) a la elección de un modelo.
2^{o}) Solamente *después* de tal reflexión, me parece que la cuestión técnica de extraer un modelo explícito, más satisfactorio que sus antecesores, adquiere todo su sentido. Entonces ése sería el momento, quizás, de desprenderse de un segundo axioma tácito del físico, que se remonta a la antigüedad, y profundamente anclado incluso en nuestra percepción del espacio: es el de la *naturaleza continua* del espacio y el tiempo (o del espacio-tiempo), del "lugar" donde se desarrollan los "fenómenos físicos".
Hará ya quince o veinte años, ojeando el modesto volumen que constituye la obra completa de Riemann, me llamó la atención una observación suya "de pasada". Observa que bien pudiera ser que la estructura última del espacio fuera "discreta", y que las representaciones "continuas" que nos hacemos quizás sean una simplificación (excesiva tal vez a la larga...) de una realidad más compleja; que para el espíritu humano, "lo continuo" es más fácil de captar que "lo discontinuo", y que nos sirve, por tanto, como una "aproximación" para aprehender lo discontinuo. Ésa es una observación de una penetración sorprendente en la boca de un matemático, en un momento en que el modelo euclidiano del espacio físico todavía no se había puesto en cuestión. En estricto sentido lógico, más bien es lo discontinuo lo que tradicionalmente ha servido como modo de aproximación técnica de lo continuo.
Los desarrollos matemáticos de los últimos decenios han mostrado una simbiosis mucho más íntima entre estructuras continuas y discontinuas de lo que hubiera podido imaginarse en la primera mitad de este siglo. En todo caso, encontrar un modelo "satisfactorio" (o, si fuera necesario, un conjunto de tales modelos que se "ajusten" del modo más satisfactorio posible...), tanto si éste es "continuo", "discreto" o de naturaleza "mixta" — es un trabajo que seguramente involucrará una gran imaginación conceptual, y un olfato consumado para aprehender y sacar a la luz estructuras matemáticas de un tipo nuevo. Me parece que esa clase de imaginación y "olfato" son raros, no sólo entre los físicos (donde Einstein y Schrödinger parecen estar entre las pocas excepciones), sino incluso entre los matemáticos (y ahí hablo con pleno conocimiento de causa).
Resumiendo, preveo que la esperada renovación (si aún debe venir...) vendrá más bien de alguien con alma matemática, bien informado de los grandes problemas de la física, que de un físico. Pero sobre todo, hará falta un hombre con la "abertura filosófica" necesaria para captar el nudo del problema. Éste no es de naturaleza técnica, sino un problema fundamental de "filosofía de la naturaleza".

[83] En modo alguno pretendo estar familiarizado con la obra de Einstein. De hecho, no he leído ninguno de sus trabajos y no conozco sus ideas más que de oídas y aproximadamente. Sin embargo tengo la impresión de distinguir "el bosque", aunque nunca haya hecho el esfuerzo de escrutar ninguno de sus árboles...

[84] Para comentarios sobre el calificativo "moribundo", véase la nota 75 a pie de página.

forman el “espacio”, más o menos han desaparecido) no se parece en nada, en su substancia, a la noción aportada por Einstein en física (en absoluto desconcertante para un matemático). Por el contrario, la comparación se impone con la *mecánica cuántica* descubierta por *Schrödinger*[85]. En esta nueva mecánica, el “punto material” tradicional desaparece, para ser reemplazado por una especie de “nube probabilista” más o menos densa en una región del espacio o en otra, según la “probabilidad” de que el punto se encuentre en esa región. En esa óptica nueva se percibe bien una “mutación” en nuestro modo de concebir los fenómenos mecánicos más profunda aún que la encarnada por el modelo de Einstein — una mutación que no consiste en sustituir simplemente un modelo matemático algo estrecho por otro similar más amplio y cortado a medida. Esta vez el modelo nuevo se parece tan poco al viejo y buen modelo tradicional, que incluso el gran matemático especialista en mecánica debió sentirse repentinamente exilado, incluso perdido (o indignado...). Pasar de la mecánica de Newton a la de Einstein debió ser, para el matemático, algo así como pasar del viejo y buen dialecto provenzal al argot parisino de última moda. Pero pasar a la mecánica cuántica, me imagino, es pasar del francés al chino.

Esas “nubes probabilistas” que reemplazan a las tranquilizadoras partículas materiales de antaño, me recuerdan extrañamente los elusivos “entornos abiertos” que pueblan los topos, cual fantasmas evanescentes, para rodear “puntos” imaginarios a los que sigue aferrándose todavía y contra todo una imaginación recalcitrante...

21. Esta breve excursión a casa de los “vecinos de enfrente”, los físicos, podría servir de punto de referencia a un lector que (como casi todo el mundo) ignora todo lo del mundo de las matemáticas, pero que seguramente ha oído hablar de Einstein y de su famosa “cuarta dimensión”, o incluso de mecánica cuántica. Después de todo, aunque los inventores no hubieran previsto que sus descubrimientos se materializarían en unos Hiroshimas, y más tarde en unas carreras atómicas tanto militares como (supuestamente) “pacíficas”, el hecho es que los descubrimientos físicos tiene un impacto tangible y casi inmediato sobre el mundo de los hombres en general. El impacto de los descubrimientos matemáticos, y sobre todo de las matemáticas llamadas “puras” (es decir, sin motivación en las posibles “aplicaciones”) es menos directo, y seguramente es más delicado percibirlo. No tengo conocimiento, por ejemplo, de que mis contribuciones a la matemática hayan “servido” para algo, sea lo que sea, digamos para construir el menor aparato. No tengo ningún mérito en que así sea, eso es seguro, pero eso no impide que me tranquilice. Cuando hay aplicaciones, podemos estar seguros de que serán los militares (y después la policía) los primeros en adueñarse — y por lo que respecta a la industria (incluso la llamada “pacífica”) no siempre es mejor...

Es cierto que para mi propio provecho, o el de un lector matemático, debería intentar situar mi obra con unos “puntos de referencia” en la historia de las matemáticas, antes que ir a buscar analogías fuera. He pensado en ello estos últimos días, limitado por mi conocimiento bastante vago de la historia en cuestión[86]. A lo largo del “Paseo” ya he tenido ocasión de evocar una “línea” de matemáticos con un temperamento en el que me reconozco: Galois, Riemann, Hilbert. Si hubiera estado más al corriente de la historia de mi arte, habría podido prolongar esta línea más lejos en el pasado, o quizás intercalar otros nombres que sólo conozco de oídas. Lo que me ha chocado es que no recuerdo haber tenido noticia,

[85] Me parece entender (por ecos que me han llegado desde diversas parte) que generalmente se considera que en este siglo ha habido tres “revoluciones” o grandes cambios en física: la teoría de Einstein, el descubrimiento de la radioactividad por los Curie, y la introducción de la mecánica cuántica por Schrödinger.

[86] Ya desde mi infancia, nunca me atrajo la historia (ni tampoco la geografía). (En la quinta parte de Cosechas y Siembras (escrita solamente en parte) tendré ocasión de detectar “de paso” lo que me parece ser la razón profunda de ese “bloqueo” parcial contra la historia — un bloqueo que va desapareciendo, creo, durante estos últimos años.) La enseñanza matemática que recibí de mis mayores, en el “círculo bourbakista”, no arregló las cosas — en ella las referencias históricas ocasionales fueron más que raras.

aunque sólo fuera por alusiones de mis amigos o colegas más versados en historia que yo, de un matemático aparte de mí que haya aportado una multiplicidad de ideas innovadoras, no más o menos disjuntas unas de otras sino como partes de una vasta visión unificadora (como fue el caso de Newton y Einstein en física y en cosmología, y Darwin y Pasteur en biología). Solamente he tenido noticia de dos "momentos" en la historia de las matemáticas en que haya nacido una "visión" de amplia envergadura. Uno de esos momentos es el del nacimiento de las matemáticas como ciencia, en el sentido que lo entendemos hoy en día, hace 2500 años en la antigua Grecia. El otro es, ante todo, el del nacimiento del cálculo infinitesimal e integral en el siglo diecisiete, época marcada por los nombres de Newton, Leibnitz, Descartes y otros. Pero según sé, la visión nacida en uno y otro momento no fue la obra de un único hombre sino la obra colectiva de una época.

Por supuesto, entre la época de Pitágoras y Euclides y los comienzos del siglo diecisiete, la matemática tuvo tiempo de cambiar de rostro, al igual que entre la del "Cálculo de los infinitamente pequeños" creado por los matemáticos del siglo diecisiete y la de mediados del diecinueve. Pero hasta donde yo sé, los profundos cambios que se dieron en esos dos periodos, uno de más de dos mil años y el otro de tres siglos, nunca se concretizaron o condensaron en una visión nueva que se expresara en cierta obra[87], de forma similar a lo que ocurrió en física y en cosmología con las grandes síntesis de Newton y Einstein, en dos momentos cruciales de su historia.

Parecería que al ser el servidor de una vasta visión unificadora nacida en mí, soy "único en mi género" en la historia de las matemáticas desde su origen hasta nuestros días. ¡Lamento dar la impresión de querer singularizarme más de lo que parece estar permitido! Para mi alivio, creo distinguir una especie de *hermano* potencial (¡y providencial!) Antes ya tuve ocasión de de evocarlo, como el primero en la línea de mis "hermanos de temperamento": es *Evariste Galois.* En su corta y fulgurante vida[88] me parece percibir el comienzo de una gran visión — precisamente la de los "esponsales del número y la magnitud" en una visión geométrica nueva. En alguna parte de Cosechas y Siembras[89] evoco cómo, hace dos años, apareció en mí esta intuición súbita: que en el trabajo matemático que en ese momento ejercía sobre mí la fascinación más poderosa estaba "retomando la herencia de Galois". Esa intuición, pocas veces evocada después, ha tenido tiempo de madurar en silencio. A ello habrá contribuido seguramente la reflexión retrospectiva sobre mi obra que prosigo desde hace tres semanas. La filiación más directa que creo reconocer actualmente con un matemático del pasado es la que me liga con Evariste Galois. Con razón o sin ella, me parece que esa visión que desarrollé durante quince años de mi vida, y que siguió madurando en mí y enriqueciéndose durante los dieciséis años que han pasado desde mi salida de la

[87]Unas horas después de escribir estas líneas me chocó que no hubiera pensado en la vasta síntesis de las matemáticas contemporáneas que se esfuerza en presentar el tratado (colectivo) de N. Bourbaki. (Hablaremos abundantemente del grupo Bourbaki en la primera parte de Cosechas y Siembras.) Esto se debe, me parece, a dos razones.
Por una parte, esa síntesis se limita a una especie de "puesta en orden" de un amplio conjunto de ideas y resultados ya conocidos, sin aportar ideas innovadoras de su propia cosecha. Si hay una idea nueva, sería la de una definición matemática precisa de la noción de "estructura", que se reveló como un hilo conductor valioso a través de todo el tratado. Pero me parece que esa idea se asemeja más a la de un lexicógrafo inteligente e imaginativo que a un elemento de renovación de una lengua, que permite una aprehensión renovada de la realidad (aquí, la de los objetos matemáticos).
Por otra parte, desde los años cincuenta la idea de estructura fue sobrepasada por los acontecimientos, con la llegada repentina de métodos "categoriales" en las partes más dinámicas de las matemáticas, como la topología o la geometría algebraica. (Así, la noción de "topos" se niega a entrar en el "saco Bourbakista" de las estructuras ¡decididamente estrecho en las sisas!) Al decidir, ciertamente con pleno conocimiento de causa, no involucrarse en ese "infierno", Bourbaki renunció a su ambición inicial, que era la de proporcionar *los* fundamentos y *el* lenguaje básico para el conjunto de la matemática contemporánea.
Por el contrario, fijó un lenguaje, y a la vez un *estilo* de escribir y de enfocar las matemáticas. Ese estilo era al principio el reflejo (muy parcial) de cierto *espíritu*, herencia viva y directa de Hilbert. Durante los años cincuenta y sesenta ese estilo acabó por imponerse — para lo mejor y (sobre todo) para lo peor. Después de una veintena de años, ha terminado por ser un *"canon"* rígido de un rigor de pura fachada, y el espíritu que antaño lo animaba parece haber desaparecido para siempre.

[88]Evariste Galois (1811–1832) murió en un duelo a la edad de veintiún años. Creo que hay varias biografías suyas. De joven leí una biografía novelada, escrita por el físico Infeld, que me llamó mucho la atención.

[89]Ver "La herencia de Galois" (CyS I, sección 7).

escena matemática — que esa visión también es la que Galois no habría podido dejar de desarrollar[90], si él hubiera estado en estos parajes en mi lugar y sin que una muerte precoz viniera a cortar brutalmente un magnífico impulso.

Todavía hay otra razón que contribuye a darme ese sentimiento de un "parentesco esencial" — de un parentesco que no se reduce únicamente al "temperamento matemático", ni a los aspectos notables de una obra. Entre su vida y la mía, siento también un parentesco de destinos. Ciertamente Galois murió estúpidamente, a la edad de veintiún años, mientras que yo voy por mis sesenta años, y bien decidido a hacer huesos viejos. Sin embargo eso no impide que Evariste Galois fuera en vida, como yo un siglo y medio después, un *"marginal"* en el mundo matemático oficial. En el caso de Galois, a una mirada superficial pudiera parecerle que esa marginalidad era "accidental", que él aún no había tenido tiempo de "imponerse" por sus ideas innovadoras y por sus trabajos. En mi caso, durante los tres primeros años de mi vida de matemático, mi marginalidad se debía a mi ignorancia (tal vez deliberada...) de la existencia de un mundo de matemáticos, y desde hace dieciséis años, es la consecuencia de una elección deliberada. Es esa elección, seguramente, la que ha provocado como represalia una "voluntad colectiva sin fisuras" de borrar de las matemáticas cualquier traza de mi nombre, y con él también la visión de la que me había hecho servidor.

Pero más allá de esas diferencias accidentales, creo percibir en esa "marginalidad" una causa común, que siento esencial. Esa causa, que no la veo en circunstancias históricas, ni en particularidades de "temperamento" o de "carácter" (que sin duda son tan diferentes entre él y yo como puedan serlo entre una persona y cualquier otra), y todavía menos al nivel de "dones" (visiblemente prodigiosos en Galois, y comparativamente modestos en mí). Si hay un "parentesco esencial", lo veo en un nivel mucho más humilde, mucho más elemental.

Durante mi vida, he sentido tal parentesco en contadas ocasiones. Por él también me siento "pariente" de otro matemático, que fue uno de mis mayores: *Claude Chevalley*[91]. El vínculo que quiero señalar es el de una cierta "ingenuidad", o de una "inocencia", de la que ya he tenido ocasión de hablar. Ella se expresa por una propensión (a menudo poco apreciada por el entorno) a mirar las cosas con los propios ojos, más que a través de gafas graciosamente ofrecidas por algún grupo humano más o menos amplio, investido de autoridad por una razón u otra.

Esa "propensión", o esa actitud interior, no es el privilegio de una madurez, sino el de la infancia. Es un don recibido al nacer, al mismo tiempo que la vida — un don humilde y formidable. Un don profundamente oculto a menudo, que algunos han sabido conservar aunque sólo sea un poco, o quizás reencontrar...

También podemos llamarlo *el don de la soledad*.

[90] Estoy convencido de que un Galois hubiera ido todavía mucho más lejos que yo. Por una parte a causa de sus dones totalmente excepcionales (que a mí no me han tocado en suerte). Por otra porque probablemente no hubiera dedicado, como yo, la mayor parte de su energía a interminables y minuciosas tareas de puesta a punto de lo que ya estaba más o menos conseguido...

[91] Hablo de Claude Chevalley en Cosechas y Siembras un poco por aquí y por allí, y con más detalle en la sección "Encuentro con Claude Chevalley — o libertad y buenos sentimientos" (CyS I sección 11), y en la nota "Un adiós a Claude Chevalley" (CyS III, nota n^{o} 100).

Febrero de 1986

13. Ya han pasado sus buenos siete meses desde que esta carta fue escrita, y casi cuatro meses desde que fue enviada con el "tocho" que la acompaña. Y cada una[92] con una dedicatoria de mi puño y letra. Como una "botella en el mar", o mejor, como un montón de tales botellas errantes, mi mensaje tocó tierra y circuló por los rincones más recónditos de ese microcosmos matemático que me fue familiar. Y a causa de los ecos directos e indirectos que me llegan a lo largo de los días, las semanas y los meses, heme aquí inopinadamente delante de una especie de amplia radiografía del medio matemático tomada con un espectrógrafo omnidireccional, del que mis inocentes "botellas" serían otras tantas antenas viajeras. Debido a esto (¡nobleza obliga!) yo, al que sin embargo no falta en qué ocuparse, me encuentro delante de la nueva tarea de descifrar la radio y dar cuenta, lo mejor que pueda, de lo que lea en ella. Ésta será la sexta (y última ¡lo prometo!) parte de Cosechas y Siembras. Por tanto vendrá a coronar, si Dios me da vida, "la gran obra sociológica de mis últimos días". Por el momento algunos comentarios.

En la acogida a mi modesta flotilla artesanal, lo que ha dominado, y con mucho, ha sido el tono medio-en-guasa, medio-hosco, con el aire de "ya está Grothendieck, que se ha vuelto paranoico a la vejez", o "ahí está un pretencioso que se lo ha creído" — ¡y ya está! Sin embargo no he recibido más que una carta con ese estilo[93], y otras dos con el de un discreto escarnio complacido consigo mismo[94]. La mayoría de los destinatarios matemáticos, incluyendo los que fueron mis alumnos, han respondido con el silencio[95] — un silencio que me dice mucho.

Eso no obsta para que ya haya tenido una voluminosa correspondencia. La mayoría de las cartas tienen el tono de un compromiso educado, que a menudo quiere ser amigable, preocupado por los buenos modales. Dos o tres veces he sentido, detrás de ese compromiso y como tamizado por él, el calor de un sentimiento aún vivo. Con frecuencia, cuando el compromiso no se expresa con protestas de buenos sentimientos (por su cuenta, o por la de otro), lo hace con cumplidos — ¡en mi vida he recibido tantos! Con el aire de "gran matemático", "páginas soberbias" (sobre la creatividad "y todo eso"...), "escritor indiscutible", y paro de contar. Para ser justo, incluso merecí un cumplido muy sentido (y nada irónico) sobre la riqueza de mi vida interior. Es inútil decir que en todas esas cartas mi interlocutor tiene cuidado de no entrar en el meollo de ninguna cuestión, y menos aún de implicarse personalmente; el tono sería más bien el de alguien a quien se hubiera "solicitado su opinión" (retomando los términos de una de esas cartas) sobre un asunto algo escabroso y además hipotético o imaginario, y en todo caso y sobre todo, un asunto *que no le concierne personalmente*. Cuando parece que va a tocar alguna de esas cuestiones, lo hace con la punta de los dedos y para apartarla de sí todo lo que puede — tanto si es prodigándome buenos consejos, o con prudentes condicionales, o con los lugares comunes que se usan cuando no se sabe qué decir, o de cualquier otra forma. No obstante algunos han dejado entender que *puede ser* que ocurrieran algunas cosas no muy normales — teniendo buen cuidado de no precisar de qué y de quién se trata...

[92] Con unas pocas excepciones, sobre todo las de los colegas que no conocía personalmente, que sólo recibieron los cuadernos 0 y 4 de la tirada provisional, de regalo por su participación activa en mi Entierro.

[93] Carta que proviene de uno de mis alumnos, que además fue enterrado conmigo.

[94] Enviadas por dos de mis antiguos colegas en el seno de Bourbaki, uno de los cuales era uno de los mayores que me acogieron con calurosa benevolencia en mis comienzos.

[95] De los ciento treinta y un envíos a matemáticos, hasta el presente sólo cincuenta y tres destinatarios han dado señales de vida, aunque no sea más que con un acuse de recibo. Entre éstos hay seis de mis ex-alumnos — no he tenido respuesta de ninguno de los otros ocho.

También he recibido ecos francamente calurosos, de parte de quince o dieciséis de mis antiguos y nuevos amigos. Algunos expresaron una emoción, sin intentar negarla o acallarla. Esos ecos, y otros igualmente calurosos que me llegan de fuera del medio matemático, han sido mi recompensa por un largo y solitario trabajo, realizado no para mí mismo, sino para todos.

Y entre los ciento treinta colegas que recibieron mi Carta, hay tres que respondieron en el sentido pleno del término, implicándose ellos mismos en vez de limitarse a un comentario lejano sobre los sucesos del siglo. También recibí uno de estos ecos de un interlocutor no matemático. Eran verdaderas *respuestas* a mi mensaje. Y ésa era también la mejor de mis recompensas.

14. Varios de mis colegas y amigos matemáticos han expresado la esperanza de que Cosechas y Siembras abra un gran *debate* en el medio matemático sobre el estado de las costumbres en ese medio, sobre la ética del matemático, y sobre el sentido y la finalidad de su trabajo. Por el momento, lo menos que se puede decir es que la cosa no va por ese camino. Desde ahora (y haciendo el juego de palabras de rigor) el debate sobre un Entierro tiene toda la pinta de convertirse de oficio ¡en el entierro de un debate!

Eso no impide, tanto si se quiere como si no y a pesar del silencio y la apatía de muchos, que de hecho se haya abierto un debate. Es poco probable que tenga la amplitud de un verdadero debate público, incluso (¡Dios no lo quiera!) la pompa y la rigidez de un debate "oficial". En todo caso ya son muchos los que se han dado prisa en encerrarlo en su fuero interno incluso antes de conocerlo, imbuidos del sempiterno e inmutable consenso de que "todo es lo mejor en el mejor de los mundos" (matemáticos en este caso). Sin embargo, quizás un cuestionamiento termine por venir *de fuera*, progresivamente, a través de "testigos" que no formen parte del mismo medio y no sean prisioneros de esos consensos de grupo, y que por tanto no se sientan (ni siquiera en su fuero interno) involucrados personalmente.

En casi todos los ecos que he recibido, constato una confusión sobre las dos cuestiones preliminares: *sobre qué* trata el "debate" propuesto (al menos tácitamente) por Cosechas y Siembras, y *quién* es apto para entenderlo y pronunciarse, o también: para formarse una opinión con pleno conocimiento de causa. Quisiera señalar *tres "puntos de referencia"* al respecto. Ciertamente eso no impedirá que los que tengan la confusión se mantengan en ella. Pero al menos, a los que quieran saber de qué se trata, tal vez eso pueda ayudarles a no dejarse distraer por los efectos sonoros de todo tipo (incluidos los mejor intencionados...).

a) Algunos amigos sinceros me aseguran que "todo se arreglará" (donde "todo", me imagino, significa "cosas" que desgraciadamente se habrían estropeado...); que no tengo más que volver, "imponerme con nuevos trabajos", dar conferencias, etc. — y otros harían el resto. Dirán "De todos modos hemos sido algo injustos con ese maldito Grothendieck" y rectificarán el tiro discretamente con mayor o menor convicción[96]; incluso me darán palmaditas en el hombro con un aire adulador tratándome de "gran matemático", con tal de calmar a alguien tan respetable que parece que va a ponerse nervioso y a provocar olas indeseables.

En modo alguno se trata, como sugieren esos amigos, de "soltar lastre" o de hacerlo soltar. Por mi parte no tengo ninguna necesidad de cumplidos ni de admiradores sinceros, y tampoco de "aliados" para "mi" causa o para cualquier otra causa. No se trata de mí, que me va de maravilla, ni de mi obra, que habla por ella misma aunque fuera a los sordos. Si este debate concierne, entre otros, a mi persona y a mi obra sólo es a título de *reveladores* de otra cosa, a través de la realidad de un Entierro (de lo más revelador en efecto).

[96] Ya he tenido ocasión de notar algunas de esas señales discretas, que muestran que se ha tomado buena nota de que el león se ha despertado...

Si hay “alguien” que me parece que debe inspirar un sentimiento de alarma, inquietud y urgencia, en modo alguno es mi persona, ni ninguno de mis “coenterrados”. Sino que se trata de un ser colectivo, a la vez imperceptible y muy tangible, del que se habla a menudo y nos guardamos mucho de examinar jamás, y que se llama *“la comunidad matemática”*.

Durante estas últimas semanas, he terminado por verla como una persona de carne y hueso, que padecería una *gangrena* profunda. Los mejores alimentos, los platos más escogidos, en ella se vuelven veneno, que propaga e incrusta más el mal. Sin embargo tiene una bulimia irresistible y se ceba más y más, seguramente como forma de dar el pego con respecto a un mal del que no quisiera enterarse a ningún precio. Todo lo que se le diga es tiempo perdido — incluso las palabras más sencillas han perdido su sentido. Dejan de llevar un mensaje y sólo sirven para desencadenar los mecanismos del miedo y el rechazo...

b) La mayoría de mis colegas y antiguos amigos, incluso los mejor dispuestos, cuando se atreven a dar una opinión se rodean de prudentes condicionales, del tipo “si fuera verdad que ... en efecto sería inadmisible” — a fin de irse a dormir contentos. Sin embargo creí haber sido muy claro...

Con la perspectiva de siete meses, puedo precisar que *en la casi-totalidad de los hechos* relatados y comentados en Cosechas y Siembras, *su realidad no es objeto de ninguna controversia.* Volveré más tarde sobre algunas raras excepciones que serán señaladas como tales, cada una en su lugar. En cuanto a los restantes hechos, después de escribir la versión primitiva de Cosechas y Siembras una cuidadosa confrontación con algunos de los principales afectados (a saber, Pierre Deligne, Jean-Pierre Serre y Luc Illusie) ha permitido eliminar los errores de detalle y llegar a un acuerdo sin ambigüedades sobre los hechos materiales[97].

Así, de ningún modo se debate sobre la realidad de los hechos, que no se pone en duda, sino sobre la cuestión de *si las prácticas y las actitudes descritas por esos hechos deben considerarse aceptables y “normales” o no.*

Se trata de prácticas que en mi testimonio califico (puede ser que sin razón...) de escandalosas, de abusos de confianza y de poder, y de flagrantes deshonestidades que más de una vez alcanzan la dimensión de lo inicuo y lo sinvergüenza. Lo más inimaginable que aún me quedaba por aprender, después de haberme enterado de esos hechos (impensables hace quince años), es que la gran mayoría de mis colegas matemáticos, incluso entre los que fueron mis alumnos o amigos, considera ahora esas prácticas como normales y perfectamente honorables.

c) Para muchos de mis colegas y antiguos amigos hay una segunda forma de mantener una confusión. Es del tipo: “lo siento, pero no soy especialista en la materia — no nos pida que comprendamos unos hechos que (afortunadamente) nos pasan por encima de la cabeza...” Por el contrario, afirmo que para entender los hechos principales no es necesario ser “especialista” (¡lo siento a mi vez!), ni siquiera saberse la tabla de multiplicar o el teorema de Pitágoras. No más que haber leído “El Cid” o las fábulas de La Fontaine. Un niño normal de diez años es tan capaz como el más afamado de los especialistas (incluso más que él...)[98].

Permítaseme ilustrar este punto con un ejemplo sacado del Entierro[99]: el “primero en llegar”. No

---

[97] Me alegra expresar mi agradecimiento a los tres por la buena voluntad de la que han hecho gala en esta ocasión, y hago constar su total buena fe en lo que respecta a las cuestiones sobre los hechos materiales.

[98] Por supuesto que no he escrito Cosechas y Siembras para un niño de diez años. Para dirigirme a él hubiera elegido un lenguaje que le fuera familiar.

[99] Se trata de la primera “gran operación” de Entierro que descubrí, cierto 19 de abril de 1984 en que también me vino el nombre de “El Entierro”. Ver al respecto las dos notas escritas ese mismo día, “Recuerdo de un sueño — o el nacimiento de los motivos”, y “El Entierro — o el Nuevo Padre” (CyS III, n^{o}s 51, 52). Allí también está la referencia completa del

es necesario conocer los pormenores de la multiforme y delicada noción matemática de "motivo", ni tener el certificado de estudios, para entender los siguientes hechos, y para formarse un juicio al respecto.

1º) Entre 1963 y 1969 introduje la noción de "motivo" y a su alrededor desarrollé una "filosofía" y una "teoría", en parte conjeturales. Con razón o sin ella (poco importa aquí) considero la teoría de motivos como lo más profundo que he aportado a la matemática de mi tiempo. Por otra parte, hoy en día la importancia y la profundidad del "yoga motívico" no las pone en duda nadie (después de diez años de un silencio casi total desde que salí de la escena matemática).

2º) En el primer y único libro (publicado en 1981) dedicado a la teoría de motivos (en el que ese nombre, introducido por mí, figura en el título), el único párrafo que puede hacer suponer al lector que mi modesta persona tenga relación cercana o lejana con alguna teoría que pueda parecerse a la que se desarrolla a lo largo de ese libro, se encuentra en la página 261. Ese párrafo (de dos líneas y media) explica al lector que la teoría desarrollada no tiene nada que ver con la de cierto Grothendieck (teoría mencionada allí por primera y última vez, sin otra referencia ni precisión).

3º) Hay una conjetura célebre, llamada "conjetura de Hodge" (poco importa aquí su enunciado preciso), cuya validez implicaría que la sedicente "otra" teoría de motivos desarrollada en el brillante volumen es *idéntica* a (un caso muy particular de) la que yo había desarrollado, a la vista de todos, casi veinte años antes.

Podría añadir 4º), que el más prestigioso de los cuatro firmantes del libro fue alumno mío y de mí aprendió durante años las brillantes ideas que presenta como si acabase de encontrarlas[100], y 5º), que ambas circunstancias son públicamente notorias entre las personas bien informadas, pero es inútil buscar en la literatura algún rastro escrito atestiguando que dicho brillante autor pudiera haber aprendido algo de mí[101], y que 6º) la delicada cuestión de aritmética que (según me ha explicado el autor principal en persona) constituye el problema central del libro (y sin que mi nombre fuera pronunciado) había sido desentrañada por mí en los años sesenta, en la estela del "yoga de los motivos", y que el autor se enteró de ella por mí; y aún podría añadir unos 7º, 8º, etc. (lo que ciertamente no dejaré de hacer en su momento).

Lo anterior será suficiente para mi propósito, que es éste: Para enterarse de esos hechos y formar un juicio al respecto, no se necesitan "destrezas" particulares — *esto no se "decide" a ese nivel*. La facultad que aquí está en juego, aparte de una razón sana (que en principio se supone en todos), es la que yo llamaría con el nombre de *sentimiento de decencia*.

El libro en cuestión es uno de los más citados en la literatura matemática, y su "autor principal" es uno de los matemáticos más prestigiosos actualmente. Dicho esto, lo más notable en esta historia, a mi parecer, es que *nadie* de entre los numerosos lectores del libro, incluidos los que saben de primera mano de qué se trata y fueron mis alumnos o mis amigos — que *nadie haya visto en él nada anormal*. En todo caso, hasta el momento presente en que escribo estas líneas ni uno sólo me ha comunicado la más mínima reserva sobre ese libro prestigioso[102].

En cuanto a los que, entre mis colegas y antiguos amigos, nunca han tenido ese libro entre sus manos y se aprovechan de ello para alegar incompetencia, les digo: no se necesita ser "especialista" para pedir el libro en una biblioteca matemática cualquiera, hojearlo, y comprobar vosotros mismos lo que

---

libro del que vamos a hablar.

[100] No intento decir que en ese libro no haya ideas, e incluso buenas ideas, debidas a ese autor o a los otros coautores. Pero toda la problemática del libro y el contexto conceptual que le da sentido, incluyendo la delicada teoría de las $\otimes$-categorías (llamadas sin razón "tannakianas") que técnicamente forma el corazón del libro, son obra mía.

[101] Salvo una línea de un informe de Serre, en 1977, del que hablaremos en su lugar.

[102] En total ha habido dos colegas (incluyendo a Zoghman Mebkhout) que me han comunicado tales "reservas". Ninguno de los dos puede considerarse un "lector" de ese libro. Lo han leído por curiosidad, para enterarse...

nadie niega...

15. Esta “operación motivos” no es más que *una* de las cuatro “grandes operaciones” del mismo género, entre una nube de otras de menor envergadura y del mismo estilo. No es la “mayor” de las mistificaciones colectivas que dan consistencia a mi “novela costumbrista” ni la más inicua. Ha consistido en saquear[103] el rebaño del rico, aprovechando su ausencia (o su muerte...), y no en llegar (ante la indiferencia general) a estrangular por placer el cordero del pobre delante de él. E incluso en el lenguaje matemático que ahora es de uso corriente, hay títulos de libros de apariencia anodina y conceptos o enunciados citados constantemente, que por ellos mismos constituyen ya una mistificación o una impostura[104], y testimonian a su modo la desgracia de una época.

Si creo haber hecho algo útil para la “comunidad matemática”, es haber sacado a la luz del día cierto número de hechos poco gloriosos, que comenzaban a pudrirse a la sombra. Seguramente el tipo de hechos que todo el mundo roza todos los días, o poco menos, de cerca o de lejos. ¿Cuántos se han tomado la molestia de pararse, aunque sólo sea un instante, para olfatear el aire y mirar?

Quien haya estado expuesto a la arrogancia de unos y a la deshonestidad de otros (o de los mismos) tal vez crea que fue una desgracia muy particular que le tocó a él en suerte. Confrontando su experiencia con mi testimonio, quizás sienta que esa “desgracia” también es un nombre que le ha dado a un *espíritu de los tiempos*, que pesa sobre él como pesa sobre todos. Y (¡quién sabe!) puede que le incite a implicarse en un debate que le concierne tanto como a mí.

Pero si esa “ropa sucia” que “expongo en la plaza pública” no provoca más que la burla sin alegría de unos y el embarazo educado de otros, ante la indiferencia de todos, entonces una situación que era confusa se habrá vuelto muy clara. (Al menos para el que aún se preocupe de usar sus propios ojos). Los consensos tradicionales de la buena fe y la decencia[105], en la relación entre matemáticos y la del matemático con su arte, serían cosas del pasado, “superadas”. Sin que ninguna asociación internacional de matemáticos lo haya proclamado solemnemente, sería algo bien sabido y casi oficial: ahora *todos los golpes le están permitidos*, sin reserva ni limitación, a la “cofradía por cooptación” de los que tienen el poder en el mundo matemático. Todos los trapicheos de ideas para manejar a su antojo al lector apático que sólo quiere creer, todos los tráficos de paternidad, y las citas-camelo entre compadres y el silencio para los que están condenados al silencio, y el favoritismo y las falsificaciones de toda clase que llegan hasta el plagio más grosero a la vista de todos — *sí y amén a todo*, con la bendición, con la palabra o el silencio (cuando no con la participación activa y diligente), de todos los “grandes nombres” y todos los patronos grandes y pequeños en la plaza pública de las matemáticas. ¡Sí y amén al *“nuevo estilo”* que hace furor! Por asentimiento (casi) unánime, lo que fue un arte se ha convertido en la feria del embrollo y la rebatiña, bajo la mirada paternal de los jefes.

En el mundo de los matemáticos hubo un tiempo en que el ejercicio del poder estaba limitado por consensos unánimes e intangibles, expresión de un sentimiento colectivo de *decencia*. Esos consensos y ese sentimiento ahora serían algo anticuado y superado, seguramente indignos de la era de los ordenadores, de las cápsulas espaciales y de la bomba de neutrones.

---

[103](N. del T.) *Piller* en el original, que significa tanto robar como plagiar.

[104]Aquí pienso sobre todo en la insólita sigla “SGA $4\frac{1}{2}$” (¡qué útiles son los números fraccionarios!), que es una doble impostura por sí misma (y una de las siglas más citadas en la literatura matemática contemporánea), y en los nombres “dualidad de Verdier” o “dual de Verdier”, “conjetura de Deligne-Grothendieck”, y en fin “categorías tannakianas” (en que Tannaka, por una vez, no tiene parte, ya que jamás fue consultado...). Los consideraremos con más detalle en su lugar.

[105]Cuando hablo de esos “consensos de buena fe y decencia” no quiero decir que nunca hayan sido transgredidos. Pero cuando eran transgredidos, se trataba de “transgresiones”, y los consensos mismos seguían siendo aceptados.

En adelante sería algo logrado y definitivo: el poder, para la cofradía de los que lo disfrutan, es un *poder discrecional*.

16. Me parece que en la Carta me he explicado con suficiente claridad sobre el espíritu con que he escrito Cosechas y Siembras, como para que esté muy claro que en modo alguno pretendo hacer de historiador. Se trata de un testimonio de buena fe de una experiencia de primera mano, y de una reflexión sobre esa experiencia. Testimonio y reflexión están a disposición de todos, incluido el historiador, que podrá utilizarlos como un material entre otros. A él le corresponderá someter ese material a un análisis crítico conforme a los cánones de rigor de su arte.

Por supuesto, conviene distinguir entre los *hechos* en sentido restringido (los "hechos en bruto" o "hechos materiales") y la "valoración" o *"interpretación"* de esos hechos, que les da un *sentido*, el cual no es el mismo para un observador (o un coactor) que para otro. Grosso-modo, puede decirse que el aspecto "testimonio" de Cosechas y Siembras se refiere a los hechos, y que su aspecto "reflexión" se refiere a su interpretación, es decir a mi trabajo para darles un sentido. Entre los "hechos" que componen el testimonio incluyo los "hechos psíquicos", principalmente los sentimientos, asociaciones e imágenes de todo tipo que se reflejan en mi testimonio, tanto si se dieron en un pasado más o menos lejano o en el momento mismo de escribir.

Distingo tres clases de *fuentes* de los hechos que describo o tengo en cuenta. Están los hechos que me devuelve el *recuerdo*, más o menos preciso en unas ocasiones y borroso en otras, y a veces deformado. Al respecto, garantizo mi disposición de veracidad en el momento en que escribo, pero no la ausencia de errores. Por el contrario, he tenido ocasión de descubrir unos cuantos, que señalo en su lugar con notas a pie de página posteriores. Por otra parte están los *documentos escritos*, principalmente cartas y sobre todo publicaciones científicas como es debido, que en cada ocasión cito con toda la precisión deseable. Por último, están los *testimonios de terceras personas*. A veces complementan mis propios recuerdos, permitiéndome reavivarlos, precisarlos y a veces corregirlos. En unas pocas ocasiones (sobre las que volveré en seguida) ese testimonio me aporta informaciones totalmente nuevas respecto de las que ya conocía. Cuando me hago eco de uno de estos testimonios, eso no significa que tenga la posibilidad de verificar su exactitud y fundamento por completo, sino simplemente que encaja de modo tan plausible en el rico tejido de hechos que ya conocía de primera mano como para convencerme (con razón o sin ella...) de que ese testimonio era esencialmente verdadero.

Me parece que un lector atento en ningún momento tendrá dificultad alguna en "separar" los hechos de sus interpretaciones y (en el primer caso) distinguir, entre las tres fuentes que acabo de describir, cuál está en juego.

* *
*

Cuando he aludido al testimonio de una tercera persona del que me hice eco sin haber podido "verificar su fundamento por completo", se trataba del de *Zoghman Mebkhout* sobre la vasta operación de escamoteo de su obra. Entre todos los "hechos materiales" que tengo en cuenta en Cosechas y Siembras, los únicos que actualmente están sujetos a discusión o que, según mi propio criterio en el momento presente, necesitan una rectificación, son algunos hechos atestiguados sólo por el testimonio de Mebkhout. Para concluir esta posdata presentaré unos comentarios críticos acerca de la versión del "caso Mebkhout" presentada en la tirada provisional de Cosechas y Siembras. Comentarios y rectificaciones más detallados se incluirán, cada uno y cada una en su lugar, en la edición impresa (que será el texto definitivo de Cosechas y Siembras).

Me parece que la "versión Mebkhout", de la que quise hacerme portavoz, esencialmente consiste en las dos tesis siguientes:

1º) Entre 1972 y 1979 Mebkhout fue el único[106], ante la indiferencia general e inspirándose en mi obra, que desarrolló la "filosofía de los $\mathcal{D}$-módulos" como nueva teoría de "coeficientes cohomológicos" en mi sentido.

2º) Tanto en Francia como a nivel internacional, habría habido un consenso en escamotear su nombre y su papel en esa teoría nueva, una vez que su alcance empezó a ser reconocido.

Esta versión estaba muy documentada, por una parte por las publicaciones de Mebkhout, totalmente convincentes, y por otra parte por numerosas publicaciones de otros autores (principalmente las *Actas* del Coloquio de Luminy en junio de 1981) en que el propósito deliberado de escamoteo es indudable. En fin, los detalles más precisos que Mebkhout me proporcionó después (y de los que me hago eco en la parte "El Entierro (3) — o las Cuatro Operaciones"), sin ser directamente verificables, concordaban completamente con cierto ambiente general cuya realidad ya no tenía ninguna duda para mí.

Acabo de enterarme de algunos hechos nuevos[107] que muestran que hace falta matizar mucho el punto 1º) anterior. El aislamiento en que se encontraba Mebkhout[108] era bien real; pero era un aislamiento relativo. En Francia hubo los trabajos de J.P. *Ramis* sobre el mismo tema (trabajo de los que Mebkhout no me dijo ni una palabra) y, sobre todo, parece que algunas ideas importantes desarrolladas y llevadas a buen puerto por Mebkhout, de las que se atribuye la paternidad, pudieran deberse a Kashiwara[109]. Al mismo tiempo esto vuelve inverosímiles o dudosos algunos episodios del contencioso Mebkhout-Kashiwara tal y como se narran en la versión Mebkhout, de la que fui el portavoz (demasiado) fiel.

Es indudable que al nivel del "trabajo a destajo", al igual que por concebir ciertas ideas que supo llevar a buen término, Mebkhout fue uno de los principales pioneros de la nueva teoría de $\mathcal{D}$-módulos, tal vez incluso *el* principal pionero; en todo caso el único que se dedicó en cuerpo y alma a esa tarea, cuyo verdadero alcance aún se le escapaba, igual que se le escapaba a todos. También es cierto que la operación de escamoteo que tuvo lugar alrededor de su obra, operación que culminó en el Coloquio de Luminy, para mí sigue siendo una de las grandes desgracias del siglo en el mundo matemático. Pero sería erróneo pretender (como hice de buena fe) que Mebkhout estuvo solo en la tarea. Por el contrario, fue el único que tuvo la honestidad y el coraje de decir claramente la importancia de mis ideas y de mi obra en sus trabajos y en la eclosión de la nueva teoría.

Una posdata no es el lugar adecuado para entrar en los detalles de ese caso — lo haré en su lugar, incluyendo comentarios que aclaren el contexto psicológico de la "versión Mebkhout". Si el "contencioso Mebkhout-Kashiwara" reviste algún interés para mí, sólo es en la medida en que ilumina el ambiente

[106] Excepción hecha del teorema de constructibilidad de Kashiwara de 1975, cuya importancia nadie pone en duda. Pero de acuerdo con la versión de Mebkhout ésa sería la única contribución de Kashiwara a la teoría que estaba naciendo. Esa versión (inexacta) estaba corroborada por la ausencia de otras publicaciones de Kashiwara en que al menos hubiera aludido a las ideas maestras.

[107] Estoy agradecido a Pierre Schapira y a Christian Houzel por haber llamado mi atención sobre esos hechos, y sobre el carácter tendencioso de mi presentación del contencioso Mebkhout-Kashiwara.

[108] Ese aislamiento provenía ante todo de la indiferencia de mis ex-alumnos ante los trabajos de Mebkhout, que obstinadamente parecía dispuesto a inspirarse en un "antepasado" condenado al olvido por un consenso unánime...

[109] La más importante de esas ideas es la de la "correspondencia" (utilizando la jerga de moda) llamada "de Riemann-Hilbert" para los $\mathcal{D}$-módulos. La conjetura pertinente fue demostrada por Mebkhout, y también (según afirma Schapira) por Kashiwara (mientras que Mebkhout me aseguraba que su demostración era la única publicada). La cuestión de la prioridad en la demostración aún es oscura para mí, y renuncio a pasar los días que me quedan poniéndola en claro...
En cuanto al enunciado-hermano en términos de $\mathcal{D}^\infty$-módulos, parece no haber duda de que la paternidad de la idea y la demostración pertenece a Mebkhout.

general de una época. Y para mí, incluso hasta en sus deformaciones y a causa de las fuerzas que las originaron, también la "versión Mebkhout" resulta ser, junto a otros materiales menos discutibles que aporto al "dossier de una época", un elocuente "signo de los tiempos".

Me queda retractarme públicamente por la ligereza de haber presentado el contencioso Mebkhout-Kashiwara con un cuadro que sólo tenía en cuenta el testimonio y los documentos aportados por Mebkhout, como si esa versión no pudiera ponerse en duda. Esa versión presentaba a una tercera persona como ridícula, incluso odiosa, razón de más para hacer gala de prudencia. Por mi ligereza y por esa falta de sana prudencia, presento aquí de buena gana a M. Kashiwara mis excusas más sinceras.