Herramientas digitales de auto-aprendizaje para Matemáticas

HEDIMA, Grupo de Innovación Didáctica

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Bloque: Análisis Matemático

Tema: La integral definida

Índice

La integral definida. Definición y ejemplos

La integral definida

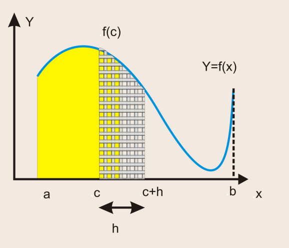
Sean

- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva.
- $A_f[a, c]$: área contenida entre la función, el eje OX, y las rectas $x = a$ y $x = c$. En lo que sigue, a será fijo y c será variable.

Relación entre las funciones $A_f[a, \cdot]$ y f

Cuando f es continua en c, se verifica que para cualquier $h > 0$ (pequeño) el valor de $A_f[a, c+h] - A_f[a, c]$ es aproximadamente $f(c)h$, o lo que es lo mismo,

$$\boxed{\frac{A_f[a, c+h] - A_f[a, c]}{h} \sim f(c)}$$



Tomando ahora límite cuando $h \longrightarrow 0$ en ambos miembros de la expresión

$$\frac{A_f[a, c+h] - A_f[a, c]}{h} \sim f(c)$$

y usando la definición de derivada, se tiene que

$$\boxed{A'_f[a, c] = f(c)}$$

es decir, $A_f[a, \cdot]$ es una primitiva de f.

Teorema (Teorema fundamental del cálculo y Regla de Barrow)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces $A_f[a, \cdot]$ es derivable y su derivada es f, o lo que es equivalente, $A_f[a, \cdot]$ es una primitiva de f.

$$A'_f[a, c] = f(c)$$

Además, si ϕ es primitiva de f, el área $A_f[a, b]$ se puede calcular así:

$$A_f[a, b] = [\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a),$$

Definición (Integral de Riemann)

Llamamos integral definida o de Riemann de f en el intervalo $[a, b]$ al valor de $A_f[a, b]$, que normalmente se denota con la expresión

$$\int_a^b f(x)dx$$

En caso de $a > b$, se define:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Para calcular la integral definida de una función continua basta conocer una de sus primitivas $\phi(x)$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = [\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a).$$

Ejemplos

- $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \mid_0^2 = \frac{8}{3}$
- $\int_0^{\pi/4} sen(x)dx = -cos(x) \Big|_0^{\pi/4} = -cos\pi/4 + cos0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$
- $\int_1^5 \sqrt{5x+1}dx = \frac{2(5x+1)^{3/2}}{15} \mid_1^5 = \frac{2(26)^{3/2}}{15} - \frac{2(6)^{3/2}}{15}$

Propiedades de la integral definida

Propiedades

1. Si m y M son respectivamente el valor mínimo y máximo de f en $[a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,\ \forall c \in \mathbb{R}.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ \forall c \in (a,b).$
5. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Teorema

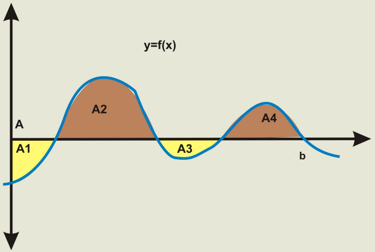
Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Además, se tiene

1. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$, y $f(x) \geq 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es igual al área de la región entre la gráfica de f y el eje OX desde a hasta b.
2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces
   1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es igual al área por encima del eje OX menos el área por debajo del eje OX
   2. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ es igual al área de la región entre la gráfica de f y el eje OX desde a hasta b.

Ejemplo

- La integral entre a y b de la función $f(x)$ del dibujo inferior es

$$\boxed{A_2 + A_4 - (A_1 + A_3)}$$



- Asimismo, se tiene que $\int |f(x)|dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$

Propiedades de la integral definida

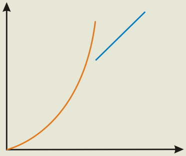
Observación

Hemos supuesto que $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$.
Sin embargo, todo sigue siendo válido si admitimos que f presenta un número finito de discontinuidades de salto finito.
Basta descomponer $[a,b]$ en intervalos donde f sí sea continua y podamos aplicar las propiedades anteriores.

Ejemplo

Por ejemplo, $f:[0,5]\longrightarrow R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\in[0,3] \\ x & \text{si } x\in(3,5] \end{cases}$$



presenta una discontinuidad de salto finito en $x=3$. Su integral definida en $[0,3]$ es

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^3 e^x\,dx+\int_3^5 x\,dx=[e^x]_0^3+\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5=(e^3-1)+8.$$

Propiedades de la integral definida

Observación

Es posible extender el concepto de integral definida a un marco más general. Por ejemplo, se pueden considerar funciones que no estén acotadas o que estén definidas sobre intervalos no acotados (llamadas integrales impropias). Sin embargo, estas cuestiones superan los objetivos de esta lección.