Breve Recordatorio
Teorema de Stokes

Badajoz, 4 de julio de 2017

Dpto. de Matemáticas
Univ. de Extremadura

◯ Breve Recordatorio Teorema de Stokes.

El problema de los dos cuerpos. Consideremos dos cuerpos de masas m_i que se mueven en el espacio tridimensional, con la métrica Euclídea $g_{ij} =$

δ_{ij}, atrayéndose mutuamente siguiendo la ley de Newton, del inverso del cuadrado de la distancia. En (**??**), pág. **??**, hemos demostrado que su centro de masa

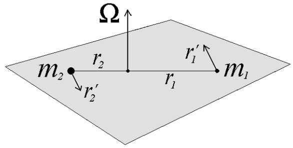

Figura 1. Plano del movimiento

$$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2},$$

sigue una linea recta con velocidad constante, por lo tanto podemos considerar un sistema de referencia en el que el centro de masa esté en el origen, por tanto $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ y r_1, r_2 y $r = r_1 - r_2$ son proporcionales, así como sus derivadas, y el momento angular de los dos cuerpos respecto de su centro de masa vale

$$\Omega = m_1 r_1 \times r_1' + m_2 r_2 \times r_2' = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2) r_1 \times r_1',$$

y como la fuerza $F_{21} = m_1 r_1''$ que actúa sobre m_1 es proporcional a $r_2 - r_1$, por tanto a r_1, tendremos que

$$\Omega' = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2) r_1 \times r_1'' = 0,$$

por tanto Ω es constante —que es el *Principio de la conservación del momento angular*—. y las órbitas de ambas masas están en el plano perpendicular a Ω que podemos considerar paralelo al eje z, por lo que ambas masas están en el plano xy.

Ademas si denotamos $M = m_1 + m_2$, tendremos que

$$m_1 r = m_1(r_1 - r_2) = -m_2 r_2 - m_1 r_2 = -M r_2, \qquad r_2 = -\frac{m_1}{M} r,$$
$$m_2 r = m_2 r_1 + m_1 r_1 = M r_1, \qquad r_1 = \frac{m_2}{M} r,$$
$$r = -\frac{M}{m_1} r_2 = \frac{M}{m_2} r_1,$$

y por tanto si conocemos r, conoceremos r_1 y r_2. Por tanto basta estudiar el comportamiento de r. Ahora bien r se mueve siguiendo la Ley de Newton atraído por una masa $M = m_1 + m_2$ fija en el origen[1], pues por la última

[1] Este problema lo hemos estudiado en la pág. **??**, ahora lo volvemos a estudiar de otra forma.

expresión se tiene que para $k = GM$

$$r'' = \frac{M}{m_2} r_1'' = -\frac{MGm_2}{m_2|r|^2} \frac{r_1}{|r_1|} = -\frac{k}{|r|^2} \frac{r}{|r|}.$$

Como además el momento angular es constante

$$\Omega = m_1 r_1 \times r_1' + m_2 r_2 \times r_2' = \frac{m_1 m_2}{M} r \times r'$$

tendremos que $r \times r' = W = (0, 0, w)$ es constante y para $r(t) = (x_i(t)) \in \mathbb{R}^3$, las funciones que definen las componentes de $W = \Omega/m = r \times r'$

$$w_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2, \quad w_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3, \quad w_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1,$$

son integrales primeras del campo Hamiltoniano (ver (**??**)) (en nuestro caso $x_3 = 0$, por tanto $x_3' = w_1 = w_2 = 0$),

$$D = \sum z_i \partial_{x_i} - k \sum \frac{x_i}{\rho^3} \partial_{z_i} = \sum h_{z_i} \partial_{x_i} - \sum h_{x_i} \partial_{z_i}$$

asociado a la ecuación de Newton (para $\rho = |r| = \sqrt{\sum x_i^2}$, $u = -k/\rho$ y $k = GM$)

$$r'' = F = -\operatorname{grad} u = -\frac{k}{\rho^2} \frac{r}{\rho},$$

que es el Hamiltoniano de la función energía (por unidad de masa)

$$h = \frac{\sum z_i^2}{2} - \frac{k}{\rho},$$

y por tanto $(r, r') = (x_i, z_i = x_i')$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales de Hamilton,

$$x_i' = z_i = h_{z_i}, \quad z_i' = -\frac{k x_i}{\rho^3} = -h_{x_i},$$

y como tenemos que $Dh = 0$, h es constante en las curvas integrales de D, que es el *Principio de conservación de la energía*. Como además la fuerza F es central, se sigue de (**??**), la **Segunda Ley de Kepler**: *El radio vector posición de m barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Hemos visto que para $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, en nuestra trayectoria $r = (x, y)$, $w = xy' - x'y = \rho^2 \theta'$ es constante (entendiendo que las derivadas son respecto del tiempo y que la tercera componente de r es nula, por lo que podemos considerarla en el plano). Ahora para el vector velocidad $v(\theta(t)) = r'(t)$, tendremos que

$$-\frac{k}{\rho^2} \frac{r}{\rho} = r'' = v'(\theta)\theta' = \frac{w}{\rho^2} v'(\theta),$$

por tanto

$$v'(\theta) = -\frac{k}{w}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$
$$\text{de donde} \quad v(\theta) = \frac{k}{w}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) + B,$$

para B un vector constante. Ahora girando el plano podemos considerar que $B = (0, -b)$, en cuyo caso

$$W = (0,0,w) = r \times r' = \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \times \left((-\frac{k}{w}\operatorname{sen}\theta, \frac{k}{w}\cos\theta, 0) + (0, -b, 0) \right),$$

de donde se sigue que $w = \frac{k\rho}{w} - b\rho\cos\theta$, es decir

$$\rho = \frac{bw}{k}x + \frac{w^2}{k} = ex + p,$$

para

$$e = \frac{bw}{k}, \qquad p = \frac{w^2}{k}. \tag{1}$$

Esto tiene dos consecuencias fundamentales: la primera es un resultado enunciado por **Hamilton** que afirma que la hodógrafa[2] de toda masa es una circunferencia, llamando *hodógrafa* a la curva definida por su vector velocidad.

Teorema 0.1 *La curva definida por $v = r'$ es una circunferencia.*

Demostración. Obvio pues

$$v(\theta) = \frac{k}{w}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) + B,$$

para $B = (0, -ek/w)$ un vector constante. ∎

La segunda consecuencia es que

$$\rho = ex + p,$$

y por tanto nuestra trayectoria es una cónica[3] con un foco en el origen y eje x, pues $\rho = e(x + p/e)$, por tanto en sus puntos es constante el cociente entre

[2] *Hodógrafa* del griego *odos* camino y *grafein* dibujar (una linea).

[3] Una *cónica* es el corte de un cono con un plano y también el lugar geométrico de puntos del plano para los que es constante la relación de distancias a un punto fijo, llamado *foco*, y a una recta fija, llamada *directriz*; y a esa relación constante, que denotamos e se llama *excentricidad*. Remitimos al lector a este **enlace** para una demostración visual de las propiedades anteriores y a la pág. **??**, donde también se llega de forma natural, estudiando la refracción, a la expresión ¡lineal! $\rho = ex + p$, en las coordenadas (x, ρ), de las cónicas con un foco en el origen y eje x.

la distancia al origen, ρ, y la distancia, $x + p/e$, a la recta vertical $x = -p/e$. Esta constante es e la *excentricidad* y a p se le llama el *latus rectum.*. Además al vector $R = W \times B$ se le llama *vector de LaPlace–Runge–Lenz*:

Observemos que la curva $\rho = p - ex$ es $\rho = p + ex$ girada un ángulo π y también es su reflexión respecto del eje y; pues si $(x, y), (x, -y)$, satisfacen $\rho = p + ex$, entonces $(-x, y)$ y $(-x, -y)$ satisfacen $\rho = p - ex$.

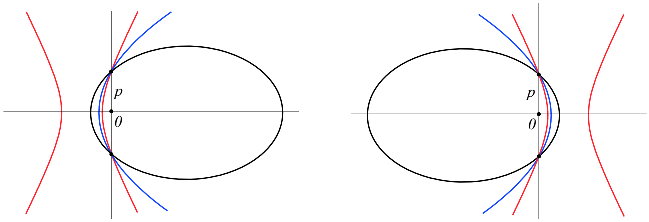

Figura 2. Haz de cónicas con foco el origen: Izqda. $\rho = ex + p$. Dcha. $\rho = -ex + p$

Tenemos así la **Primera Ley de Kepler** (ver la pág. **??**): *La trayectoria de la masa es una cónica y M está en un foco.*

Además podemos dar la relación entre la energía h y la excentricidad e de la cónica, pues tenemos

$$r' = \frac{k}{w}\left((-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) + (0, -e)\right), \quad \rho = ex + p, \quad p = w^2/k,$$

por tanto

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} r' \cdot r' - \frac{k}{\rho} = \frac{k^2}{2w^2}(1 + e^2 - 2e\cos\theta) - \frac{k}{\rho} \\ &= \frac{k^2}{2w^2}\left(1 + e^2 - \frac{2ex}{\rho} - \frac{2w^2}{\rho k}\right) \\ &= \frac{k^2}{2w^2}(e^2 - 1), \quad \text{por tanto} \\ e &= \sqrt{1 + 2h\frac{w^2}{k^2}}. \end{aligned}$$

Por tanto la cónica es:

$$\begin{aligned} &\text{elipse} &&\Leftrightarrow && e < 1 &&\Leftrightarrow && h < 0 &&\Leftrightarrow && r' \cdot r' < \frac{2k}{\rho} \\ &\text{parábola} &&\Leftrightarrow && e = 1 &&\Leftrightarrow && h = 0 &&\Leftrightarrow && r' \cdot r' = \frac{2k}{\rho} \\ &\text{hipérbola} &&\Leftrightarrow && e > 1 &&\Leftrightarrow && h > 0 &&\Leftrightarrow && r' \cdot r' > \frac{2k}{\rho} \end{aligned}$$

Las hodógrafas correspondientes son:

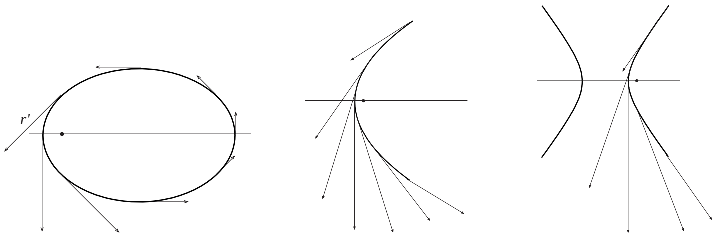

Figura 3. Velocidades en trayectorias elíptica, parabólica e hiperbólica.

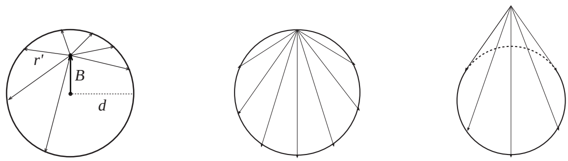

Figura 4. Hodógrafas correspondientes a elipse, parábola e hipérbola.

Por otra parte la cantidad $\sqrt{2k/\rho}$ es la *velocidad de escape* a distancia ρ, es decir la velocidad a partir de la cual la masa que está a distancia ρ seguiría una órbita no elíptica y por tanto no regresaría más. En el caso de la superficie de la Tierra (ver datos en la pág. **??**), esta velocidad es de unos $11,5$ km/seg.

Estas cónicas ($\rho = p + ex$) de ecuaciones cartesianas $x^2 + y^2 = (ex + p)^2$, son simétricas respecto del eje x y se cortan con él en los puntos $(x_i, 0)$, con $x_i^2 = \rho_i^2 = (ex_i + p)^2$, es decir

$$x_i = \pm(ex_i + p) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{p}{1-e} \ \ (\text{si } e \neq 1), \qquad x_2 = -\frac{p}{1+e},$$

siendo $x_1 < x_2 < 0$ en el caso de hipérbola ($e > 1$), $x_2 < 0 < x_1$ en el caso de elipse ($e < 1$) y $x_2 < 0$ y x_1 en el infinito en el caso de parábola. Llamamos *apofoco*, al mas alejado del foco, con distancia ρ_1 y coordenadas $(x_1, 0)$ y *perifoco*, al mas cercano[4], con distancia ρ_2 y coordenadas $(x_2, 0)$. Observemos que R apunta (si es elipse) hacia el apofoco.

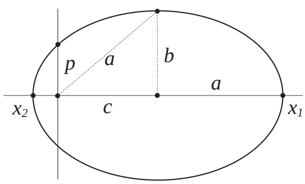

Figura 5.

[4]Del griego, *apo*=lejos y *peri*=alrededor. En el caso de ser el sol el que está en el foco, se llaman *afelio* y *perihelio* (de *helios*=sol). La Tierra pasa por su perihelio sobre el 3 de enero y por su afelio sobre el 3 de julio.

En el caso de que la cónica sea elipse

$$\rho_1 = \frac{p}{1-e}, \quad \rho_2 = \frac{p}{1+e}$$

y tiene centro, que es el punto medio entre el perifoco y el apofoco y dista del foco la **semidiferencia** de ρ_1 y ρ_2

$$c = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} = \frac{pe}{1-e^2},$$

tiene semieje mayor la **semisuma** de ρ_1 y ρ_2

$$a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{p}{1-e^2} = \frac{c}{e}, \tag{2}$$

por lo que se llama *distancia media*, y la excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Además para el centro $x = c$ el valor correspondiente de ρ es a, (ver la Fig.**??**), pues

$$\rho = ec + p = e\frac{pe}{1-e^2} + \frac{p(1-e^2)}{1-e^2} = \frac{p}{1-e^2} = a,$$

y si consideramos b tal que, $a^2 = b^2 + c^2$, entonces por (**??**) $c = ea$ y

$$b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\right)^2 = \rho_1\rho_2,$$

por tanto b es la **media geométrica** de ρ_1 y ρ_2, y también vale

$$b^2 = a^2(1-e^2) = ap,$$

por lo tanto el *latus rectum* es la **media armónica** de ρ_1 y ρ_2, pues

$$p = \frac{b^2}{a} = 2\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{2}{\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}}$$

y la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (ex+p)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-e^2)x^2 - 2exp - p^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-e^2}{ap}x^2 - \frac{2ep}{ap}x - \frac{p^2}{ap} + \frac{y^2}{ap} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2xea - ap + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

y por tanto b es el semieje menor.

Si ahora consideramos el tiempo T, en el que la masa da una vuelta alrededor de M, por la elipse correspondiente, tendremos por la segunda Ley de Kepler (**??**), considerando que el área que encierra la elipse es πab, que

$$2\pi ab = wT \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{w^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{w^2} = \frac{4\pi^2}{k} a^3,$$

pues $b^2 = ap$; que es la **tercera Ley de Kepler**: *Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias.*

Observemos que por (**??**), (**??**) y (**??**),

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2 = -\frac{2hw^2}{k^2} = -\frac{2hp}{k},$$

por lo que la energía h determina el semieje mayor pues $a = -k/2h$; el momento (dividido por m), w, determina el latus rectum $p = w^2/k$ y los dos valores determinan la excentricidad e. Esas dos leyes de conservación, por tanto, determinan la forma de la trayectoria cónica, aunque no su dirección, que nos la da el vector B o equivalentemente el de LaPlace–Runge–Lenz.

Por otra parte la velocidad v de la masa a una distancia dada ρ, determina la energía $E = v^2/2 - k/\rho$, la cual determina el semieje a, que a su vez determina el período T. De esto se sigue que si en un punto estalla una masa dirigiéndose los trozos en direcciones distintas pero con la misma velocidad v, al cabo de un mismo tiempo T, en el que han seguido distintas elipses, se reúnen en el punto original.

Nota 0.0.1 *Por último observemos que en el caso de elipse, el vector de LaPlace–Runge–Lenz, que tiene módulo ke y dirección el semieje mayor*

$$R = W \times B,$$

es suma de $W \times r'$, que es perpendicular a r', y el vector en la dirección de r de módulo k. Se sigue por semejanza de triángulos que si P es el punto de la elipse (definido por r) y Q el punto en el que la normal a la elipse en P corta al eje mayor de la elipse, entonces $0Q/0P = e$ es la excentricidad.

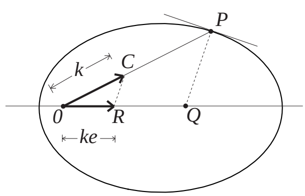

Figura 6. Propiedad de la elipse

Demostrar que las cónicas $\rho = ex + 1$ y $\rho = ex + p$ son homotéticas de razón p. ▮

Demostrar que en una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante. ▮

Cortamos un cono de base circular con un plano y proyectamos la curva intersección al plano de la base. Demostrar que la curva es una cónica con foco en el eje del cono. ▮

Dado un punto P de una elipse, consideremos el punto Q corte del semieje mayor y la normal a la elipse por P. Demostrar que para F un foco, FQ/FP es constante y es la excentricidad. ▮

Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos en cada punto P de $\mathbb{R}^2$ la recta cuya perpendicular por P corta al eje x en un punto Q, tales que es constante $|Q|/|P|^n = a$. Encontrar las curvas tangentes. ¿Qué interpretación tiene a para $n = 1$?. ▮

Dada una circunferencia con centro O y otro punto C (ver Fig. **??**), se considera en cada punto P del plano distinto de los dados, la recta perpendicular a CQ, para Q el punto de corte de la circunferencia y la semirrecta OP. Encontrar las curvas tangentes a estas rectas. ▮

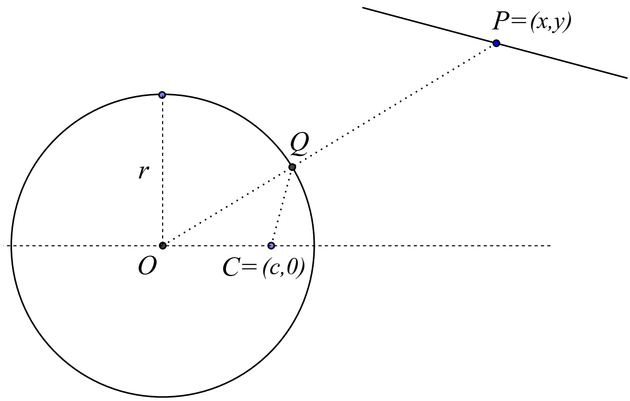

Figura 7.

Suponiendo que una masa M esté en reposo, demostrar que la velocidad inicial que debe tener un satélite que está a una distancia r de M, para que su órbita sea circular es, $\sqrt{GM/r}$. ▮

Sabiendo que para la Tierra, $GM = 398\,600,4418\ \frac{\text{km}^3}{\text{seg}^2}$ (ver la pág. **??**), calcular a que altura debemos poner un satélite para que sea geoestacionario, es decir se mueva como si estuviera unido rígidamente a la Tierra. ▮

Demostrar el recíproco del Teorema de la Hodografa (**??**), es decir que si una trayectoria r (de una masa que se mueve debido a una fuerza central, es decir $r'' \sim r$) tiene hodógrafa que es una circunferencia, entonces r es una cónica con la fuente de atracción en el foco. $\blacksquare$