

Breve Recordatorio

Badajoz, 22 de enero de 2018

Volumen 6

0.0.1. La estructura diferenciable de \mathbb{R}^n

Sea $V \subset \mathbb{R}^k$ un abierto. Decimos que una aplicación $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *diferenciable en $x \in V$* si existe una aplicación lineal $DF_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la que llamamos *derivada de F en x* , tal que

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|} = 0.$$

(en cuyo caso es única, ya que de existir dos T_1 y T_2 coincidirían en todo p de la esfera unidad, pues para $z = \|z\|p$

$$\|T_1(p) - T_2(p)\| \leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - T_1(z)\| + \|F(x+z) - F(x) - T_2(z)\|}{\|z\|} \rightarrow 0.$$

Diremos que F es *diferenciable* si lo es en cada punto de V , en cuyo caso denotaremos con $DF: V \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, la aplicación derivada, $DF(x) = DF_x$. Diremos que F es de *clase 1* si es diferenciable y DF continua¹. Por inducción diremos que F es de clase m si DF es de clase $m-1$ y de clase ∞ si es de clase m para toda m . Se sigue de forma inmediata que si F es lineal, DF es constante y vale $DF_x = F$.

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y dos aplicaciones diferenciables $F: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ y $G: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se tiene que $G \circ F$ es diferenciable y se verifica la *Regla de la cadena*

$$D(G \circ F)_x = D(G_{F(x)}) \cdot D(F_x).$$

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, diremos que $F: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ es un *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva y su inversa también es diferenciable, en cuyo caso se tiene como consecuencia de la regla de la cadena que $k = n$.

En términos de coordenadas la matriz (a_{ij}) , asociada a la aplicación lineal DF_x , es la *matriz Jacobiana*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right), \quad \text{para } F = (f_1, \dots, f_n)$$

pues tomando la componente i -ésima en la definición, la norma del máximo y $z = te_j$, tendremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} - a_{ij} \right| &= \frac{|f_i(x+z) - f_i(x) - \sum_{j=1}^k a_{ij}z_j|}{\|z\|} \\ &\leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|}, \end{aligned}$$

¹Con cualquier norma en el espacio $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, pues al ser de dimensión finita todas definen la misma topología, sin embargo habitualmente consideraremos $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| = 1\}$

y haciendo $t \rightarrow 0$, se sigue que $a_{ij} = \partial f_i(x)/\partial x_j$. Por tanto $F = (f_i)$ y $DF = (\partial f_i/\partial x_j)$.

Denotaremos respectivamente con $\mathcal{C}(V)$, $\mathcal{C}^k(V)$ y $\mathcal{C}^\infty(V)$ las \mathbb{R} -álgebras de las funciones $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, continuas, de clase k y de clase infinito en V y a menudo consideraremos el operador diferencial, sobreentendiendo la notación

$$\partial_j(f) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f) = \partial f/\partial x_j.$$

Teorema 0.1 *Sea F de clase $k \geq 1$, son equivalentes: (1) F es difeomorfismo local en $x \in V$. (2) DF_x es isomorfismo. (3) $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \neq 0$, para $F = (f_1, \dots, f_n)$.*

0.0.2. Variedades diferenciables

Definición. Llamamos *estructura diferenciable* en un espacio topológico \mathcal{V} , a una colección de \mathbb{R} -álgebras

$$\{\mathcal{C}^\infty(V) \subset \mathcal{C}(V), \text{ con } V \text{ abierto de } \mathcal{V}\},$$

de subconjuntos de las funciones continuas de cada abierto V de \mathcal{V} , que llamaremos de *funciones diferenciables*, que satisfacen las siguientes propiedades:

i.- Dados abiertos V_i , el abierto $V = \cup V_i$ y $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \Leftrightarrow f|_{V_i} \in \mathcal{C}^\infty(V_i).$$

ii.- Para cada punto $x \in \mathcal{V}$ existe un abierto V_x , un abierto U de un \mathbb{R}^n y un homeomorfismo $H: V_x \rightarrow U$, tal que para cada abierto $V \subset V_x$ y cada función $f: H(V) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(H(V)) \Leftrightarrow f \circ H \in \mathcal{C}^\infty(V).$$

A las funciones $v_i = x_i \circ H$ las llamaremos *sistema de coordenadas* y a $(V_x; v_i)$ *entorno coordinado de x* .

Llamaremos *variedad diferenciable* a un espacio topológico *Hausdorff* y de *base numerable*, dotado de una estructura diferenciable.

El siguiente resultado nos da la existencia de *funciones badén*.

Proposición 0.2 *Sean C un cerrado y K un compacto de \mathcal{V} disjuntos. Entonces existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ tal que $Im(h) = [0, 1]$, $h(K) = 1$ y $h(C) = 0$.*

Definición. Diremos que una aplicación continua $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ entre variedades diferenciables es *diferenciable* (realmente es ∞ -diferenciable, pero haremos ese abuso del lenguaje) si para cada abierto $U \subset \mathcal{U}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(U) \Rightarrow F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(F^{-1}(U)).$$

Diremos que F es un *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto F como su inversa son diferenciables. En particular la aplicación H de la definición de variedad es un difeomorfismo.

0.0.3. Espacio tangente. Aplicación lineal tangente

Definición. Llamamos *espacio tangente* de una variedad \mathcal{V} en un punto $x \in \mathcal{V}$, al \mathbb{R} -espacio vectorial $T_x(\mathcal{V})$, de las derivaciones

$$D_x: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

en el punto x , es decir aplicaciones verificando:

a) $D_x(tf + sg) = tD_xf + sD_xg.$

b) $D_x t = 0.$

c) *Regla de Leibnitz en x .* $D_x(fg) = f(x)D_xg + g(x)D_xf,$

para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ en \mathbb{R} . Llamamos *espacio cotangente* a su dual, que denotamos $T_x^*(\mathcal{V})$.

Definición. Llamamos *aplicación lineal tangente* de una aplicación diferenciable $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, en $x \in \mathcal{V}$, a

$$F_*: T_x(\mathcal{V}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{U}), \quad F_*(D_x) = D_x \circ F^*.$$

Llamamos *rango* de F en x al rango de F_* . A la aplicación dual ó transpuesta entre los espacios cotangentes la denotamos F^* .

Dadas dos aplicaciones diferenciables $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ y $G: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$, se tiene que $G \circ F$ es diferenciable y se tiene la *regla de la cadena*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

0.0.4. Campos tangentes

Definición. Llamamos *campos tangentes en un abierto V* a las derivaciones

$$D: \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V),$$

es decir aplicaciones verificando:

1.- $D(tf + rg) = tDf + rDg,$

2.- $Dt = 0,$

3.- *Regla de Leibnitz:* $D(fg) = f(Dg) + g(Df),$

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $t, r \in \mathbb{R}$.

Para cada abierto V denotamos con $\mathcal{D}(V)$ la colección de los campos tangentes en V , los cuales forman un haz de $\mathcal{C}^\infty(V)$ -módulos. Denotamos su módulo dual con $\Omega(V) = \mathcal{D}(V)^*$ y a sus elementos los llamamos *1-formas* y se demuestra que su dual se identifica canónicamente con el módulo de campos $\Omega^*(V) \equiv \mathcal{D}(V)$.

La ecuación $Df(p) = D_p f$, establece una biyección entre campos tangentes $D \in \mathcal{D}(V)$ y *campo de vectores tangentes, colocados diferenciablemente*, es decir tales que $D_p f$ es diferenciable en $p \in V$ para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$.

Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ llamamos *diferencial* de f a la 1-forma

$$df: \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V), \quad df(D) = Df.$$

Diremos que una aplicación diferenciable $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, lleva un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a otro $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, y lo denotamos $F_* D = E$, si para todo $x \in \mathcal{V}$,

$$F_* D_x = E_{F(x)},$$

lo cual equivale a que $D \circ F^* = F^* \circ E$.

En \mathbb{R}^n las ∂_{x_i} son una base de los campos tangentes y su base dual son las dx_i , base de las 1-formas. En un abierto coordinado $(V; v_i)$ de la variedad, si $H = (v_i): V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ es el difeomorfismo correspondiente y G su inversa, entonces definimos $\partial v_i = G_*(\partial x_i)$, por tanto $H_*(\partial v_i) = \partial x_i$, las cuales son base de los campos tangentes. Del mismo modo las dv_i son la base dual, pues $dv_j(\partial v_i) = \delta_{ij}$. Por tanto todo campo se expresa como $\sum f_i \partial v_i$, donde además $f_i = Dv_i$ y toda 1-forma se escribe como $\sum g_i dv_i$, siendo $g_i = \omega(\partial v_i)$.

Definición. Llamamos *corchete de Lie* de $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, al campo tangente

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D,$$

Esta operación tiene las propiedades de producto (anticonmutativo), con la que $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un álgebra.

Proposición 0.3 *Dados $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, y $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:*

- a) $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$.
- b) $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$.
- c) $[aD_1 + bD_2, D_3] = a[D_1, D_3] + b[D_2, D_3]$.
- d) **Identidad de Jacobi:**

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0.$$

$$e) [D_1, fD_2] = (D_1 f)D_2 + f[D_1, D_2].$$

f) Si $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ es diferenciable y para $i = 1, 2$, $D_i \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $E_i \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, tales que F lleva D_i en E_i , entonces F lleva $[D_1, D_2]$ en $[E_1, E_2]$.

0.0.5. Inmersiones locales, subvariedades

Definición. Decimos que $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ diferenciable, es una *inmersión local* en $x \in \mathcal{V}$ si

$$F_*: T_x(\mathcal{V}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{U}),$$

es inyectiva. Diremos que F es *inmersión* si es inyectiva e inmersión local en todo punto, en cuyo caso diremos que $F(\mathcal{V})$ es una *subvariedad inmersa* en \mathcal{U} . Si además, con la topología inducida por \mathcal{U} , resulta que

$$F : \mathcal{V} \longrightarrow F(\mathcal{V}),$$

es un homeomorfismo, diremos que $F(\mathcal{V})$ es una *subvariedad* de \mathcal{U} .

Teorema 0.4 \mathcal{S} es una subvariedad de una variedad \mathcal{V} si y sólo si cada $p \in \mathcal{S}$, tiene un abierto coordenado $(V_p; v_i)$, tal que

$$\mathcal{S} \cap V_p = \{x \in V_p : v_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, k\}.$$

0.0.6. Ecuaciones diferenciales

Definición. Llamaremos *curva parametrizada* en el abierto $V \subset \mathcal{V}$ a toda aplicación continua (fundamentalmente consideraremos las de clase ∞), definida en un intervalo abierto real I

$$\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V.$$

Definición. Dado $D \in \mathcal{D}(V)$, diremos que una curva diferenciable $\sigma : I \rightarrow V$ es una *solución de la ecuación diferencial ordinaria* (EDO) definida por D , o una *curva integral* de D , si $\sigma_* \partial_t = D$, es decir para cada $t \in I$

$$\sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{\sigma(t)}.$$

Sea $D = \sum f_i(x_1, \dots, x_n) \partial_i$ en un abierto coordenado $(V; x_i)$, σ una curva integral de D y $x_i(t) = x_i[\sigma(t)]$, entonces

$$x'_i(t) = f_i[x_1(t), \dots, x_n(t)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Definición. Llamamos *integral primera* de un campo tangente D a toda función f , tal que $Df = 0$.

Proposición 0.5 Toda integral primera de un campo es constante en las curvas integrales del campo.

Ejemplo. Sea m una masa que hemos lanzado y que se mueve en caída libre sobre la superficie de la tierra y sea $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ su posición, en el instante t , respecto de un sistema de coordenadas centrado en la tierra y ligado a ella. Si M es la masa de la tierra, la fuerza que actúa sobre m es $F = -G(Mm/|\sigma|^2)\sigma/|\sigma|$, que a su vez es igual a $m\ddot{\sigma}$, por tanto como estamos suponiendo que $|\sigma|$ es el radio de la tierra R (que suponemos esférica), tendremos que $\ddot{\sigma} = -g\sigma/|\sigma|$, para $g = GM/R^2$ y como el movimiento es muy

local podemos considerar que $\sigma/|\sigma| = (0, 0, 1)$, en cuyo caso nuestro sistema de ecuaciones es $\ddot{x} = \ddot{y} = 0, \ddot{z} = -g$, es decir introduciendo las coordenadas de la velocidad $\dot{x} = z_1, \dot{y} = z_2, \dot{z} = z_3, \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \dot{z}_3 = -g$, que es un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^6 , definido por el campo

$$D = z_1\partial_x + z_2\partial_y + z_3\partial_z - g\partial_{z_3},$$

el cual tiene una 1-forma incidente

$$\omega = \sum z_i dz_i + g dz = d\left(\frac{\sum z_i^2}{2} + gz\right) = dh,$$

siendo $h = \sum z_i^2/2 + gz$ la energía del sistema (cinética mas potencial) por unidad de masa. Por lo que h es constante en la trayectoria, ya que $0 = \omega(D) = dh(D) = Dh$.

Mas generalmente consideremos una masa m que se mueve siguiendo las leyes de Newton $F = m\ddot{\sigma}$, bajo la acción de una fuerza conservativa es decir que deriva de un potencial $F = -\text{grad } p$, siendo p una función del espacio, por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{mecánica terrestre} \quad p(x) &= mgx_3, \quad F = -mg(0, 0, 1), \\ \text{mecánica celeste} \quad p(x) &= -GMm\frac{1}{\|x\|}, \quad F = -\frac{GMm}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|}, \end{aligned}$$

en cualquier caso introduciendo las coordenadas de la velocidad tendremos el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = z_1, \dot{y} = z_2, \dot{z} = z_3, \dot{z}_1 = -p_x/m, \dot{z}_2 = -p_y/m, \dot{z}_3 = -p_z/m,$$

que corresponde al campo tangente

$$D = z_1\partial_x + z_2\partial_y + z_3\partial_z - \frac{p_x}{m}\partial_{z_1} - \frac{p_y}{m}\partial_{z_2} - \frac{p_z}{m}\partial_{z_3}$$

que tiene la 1-forma incidente exacta

$$p_x dx + p_y dy + p_z dz + mz_1 dz_1 + mz_2 dz_2 + mz_3 dz_3 = d\left(p + \frac{m}{2} \sum z_i^2\right) = dh,$$

para h la energía (cinética mas potencial).

0.0.7. Fibrado tangente y Fibrado cotangente

Definición. Llamamos *fibrado tangente* de una variedad \mathcal{V} al conjunto

$$\mathcal{TV} = \{D_p \in T_p(\mathcal{V}) : p \in \mathcal{V}\},$$

de todos los vectores de todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{V})$ y la aplicación (proyección regular)

$$\pi: \mathcal{TV} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \pi(D_p) = p.$$

Ahora cada abierto coordinado $(V; x_i)$ de \mathcal{V} , difeomorfo por (x_i) a un abierto $U_n \subset \mathbb{R}^n$, consideramos el conjunto $\pi^{-1}(V)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(D_p) = x_i(p), \quad z_i(D_p) = D_p x_i,$$

para cada $D_p \in \pi^{-1}(V)$ (observemos que hemos llamado x_i a las primeras coordenadas en el fibrado aunque realmente son $\pi^*(x_i)$). Las cuales establecen una biyección $H = (x_i, z_i): \pi^{-1}(V) \rightarrow U_n \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Se demuestra que estas cartas definen una estructura topológica y diferenciable y que para ella π es una *proyección regular*, es decir π_* es sobre (en coordenadas $\pi = (x_1, \dots, x_n)$).

Llamamos *ecuación de segundo orden* en \mathcal{V} a todo campo tangente Z del fibrado tangente tal que para todo punto del fibrado $D_p \in \mathcal{TV}$,

$$\pi_*(Z_{D_p}) = D_p.$$

Veamos la expresión de tal campo Z en nuestro abierto coordinado $(\pi^{-1}(V), (x_i, z_i))$, sin olvidar nuestro abuso del lenguaje $x_i = \pi^*(x_i)$

$$Z = \sum f_i \partial_{x_i} + \sum g_i \partial_{z_i}, \quad \text{siendo}$$

$$f_i(D_p) = Z x_i(D_p) = Z_{D_p}(\pi^* x_i) = D_p x_i = z_i(D_p),$$

es decir $f_i = z_i$, por lo que en las coordenadas (x_i, z_i) , sus curvas integrales satisfacen,

$$x'_i(t) = z_i(t), \quad z'_i(t) = g_i(x_1(t), \dots, x_n(t), z_1(t), \dots, z_n(t)),$$

es decir el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$x''_i(t) = g_i(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t)).$$

Definición. Llamamos *fibrado cotangente* de una variedad \mathcal{V} a

$$\mathcal{T}^*\mathcal{V} = \{\omega_p \in T_p^*(\mathcal{V}) : p \in \mathcal{V}\},$$

de todas las uno-formas de todos los espacios cotangentes $T_p^*(\mathcal{V})$, con la aplicación

$$\pi: \mathcal{T}^*\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \pi(\omega_p) = p.$$

Ahora para cada abierto coordinado $(V; x_i)$ de \mathcal{V} consideremos el conjunto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordenadas), que en cada punto del fibrado cotangente $\omega_p \in \pi^{-1}(U)$ valen

$$x_i(\omega_p) = x_i(p), \quad z_i(\omega_p) = \omega_p(\partial x_i),$$

las cuales, como para el fibrado tangente, establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^{2n} . Se demuestra que estas cartas definen una única estructura topológica y diferenciable y que para ella π es una *proyección regular*.

Teorema 0.6 $\mathcal{U} = \mathcal{T}^*\mathcal{V}$ tiene una uno-forma canónica, llamada forma de Liouville, que para la proyección π está definida en cada punto $\omega_p \in \mathcal{T}^*\mathcal{U}$ de la forma

$$\lambda_{\omega_p} = \pi^*\omega_p.$$

Demostración. Basta demostrar que el campo de 1-formas λ_{ω_p} es diferenciable. Para ello consideremos un entorno coordenado $(U; x_i)$ y las correspondientes coordenadas (x_i, z_i) en $\mathcal{T}^*(U) = \pi^{-1}(U)$, entonces

$$\lambda = \sum_{i=1}^n z_i dx_i. \quad \blacksquare$$

0.0.8. Grupos uniparamétricos

Definición. Diremos que una aplicación diferenciable

$$\tau: \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

es un *flujo* ó un *grupo uniparamétrico* si se tienen las siguientes propiedades:

- a) Para todo $p \in \mathcal{V}$, $\tau(0, p) = p$.
- b) Para todo $p \in \mathcal{V}$ y $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\tau(t, \tau(s, p)) = \tau(t + s, p).$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $p \in \mathcal{V}$ consideramos

$$\tau_t: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \tau_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V},$$

tales que $\tau_t(p) = \tau_p(t) = \tau(t, p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathcal{V}$.

Nota 0.0.9 Observemos que cada $\tau_t: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ es realmente un difeomorfismo, para cada $t \in \mathbb{R}$, pues tiene inversa τ_{-t} . Además observemos que en términos de las aplicaciones τ_t , las propiedades (a) y (b) de grupo uniparamétrico se expresan de la forma

$$\tau_0 = id, \quad \tau_{t+s} = \tau_t \circ \tau_s,$$

por lo que el conjunto $\{\tau_t, t \in \mathbb{R}\}$, es un grupo de difeomorfismos que opera sobre \mathcal{V} , y que esta forma de operar tiene una simple interpretación. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $p \in \mathcal{V}$, $\tau_t(p)$ es el punto de \mathcal{V} al que llega p en el tiempo t .

Definición. Sea \mathcal{W} un abierto de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ conteniendo a $\{0\} \times \mathcal{V}$, tal que para cada $p \in \mathcal{V}$, el conjunto

$$I(p) = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{W}\},$$

es un intervalo abierto de \mathbb{R} conteniendo al origen. Diremos que una aplicación diferenciable

$$\tau : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V},$$

es un *grupo uniparamétrico local* si se verifica que:

- a) Para cada $p \in \mathcal{V}$, $\tau(0, p) = p$.
- b) Si $t \in I(p)$ y $q = \tau(t, p)$, entonces $I(p) = I(q) + t$, es decir

$$s \in I(q) \Leftrightarrow t + s \in I(p),$$

y se tiene que

$$\tau(s + t, p) = \tau(s, \tau(t, p)).$$

Si para cada $t \in \mathbb{R}$, consideramos el abierto de \mathcal{V} y la aplicación

$$V_t = \{p \in \mathcal{V} : (t, p) \in \mathcal{W}\}, \quad \tau_t : V_t \rightarrow V_{-t}, \quad \tau_t(p) = \tau(t, p),$$

entonces (a) y (b) se transforman respectivamente en: $\tau_0 = id: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. $V_{t+s} = \tau_s(V_t)$ y en ese dominio (que puede ser vacío) $\tau_{t+s} = \tau_t \circ \tau_s$.

Teorema 0.7 *Sea τ un grupo uniparamétrico local. Para cada $f \in C^\infty(\mathcal{V})$ y $p \in \mathcal{V}$ definimos*

$$(Df)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[\tau(t, p)] - f(p)}{t},$$

entonces $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y para todo $p \in \mathcal{V}$, $\tau_{p*}(\partial_t) = D$, por tanto τ_p es una curva integral de D que pasa por p en el instante 0. A este campo D lo llamaremos el generador infinitesimal de τ . Además τ_t , deja invariante a su generador infinitesimal D , es decir, $\tau_{t*}D = D$.

0.0.10. Teoremas fundamentales de las EDO

Teorema 0.8 Existencia y unicidad *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, entonces para cada $p \in \mathcal{V}$ hay una única curva integral máxima $\tau_p: I(p) \rightarrow \mathcal{V}$, con $I(p)$ intervalo abierto conteniendo al 0, tal que $\tau_p(0) = p$.*

Teorema 0.9 Dependencia diferenciable *El conjunto*

$$\mathcal{W}_D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} : t \in I(p)\},$$

es abierto y

$$\tau : \mathcal{W}_D \rightarrow \mathcal{V}, \quad \tau(t, p) = \tau_p(t).$$

es un grupo uniparamétrico local.

Teorema 0.10 del flujo *Sea $p \in \mathcal{V}$ un punto no singular de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, es decir tal que $D_p \neq 0$. Entonces p tiene un entorno abierto coordinado $(V_p; v_i)$, tal que en V_p*

$$D = \frac{\partial}{\partial v_1}.$$

Ejemplos de grupos uniparamétricos en \mathbb{R}^n son: (1) $\tau(t, p) = p + te_i$, que corresponde al campo de las **traslaciones**, $D = \partial x_i$, el cual tiene integrales primeras x_j , para $j \neq i$.

(2) $\tau(t, p) = e^t \cdot p$, que corresponde al campo de las **Homotecias**, $H = \sum x_i \partial x_i$, el cual tiene integrales primeras x_i/x_j .

(3) $\tau(t, p) = G(t) \cdot p$, para $G(t)$ el giro de ángulo t de matriz $g_{ii} = \cos t$, $g_{ij} = -\sin t$, $g_{ji} = \sin t$, $g_{jj} = \cos t$, para i, j fijos y para el resto de la diagonal $g_{kk} = 1$ y el resto de elementos $g_{lk} = 0$. Que corresponde con el campo de los **Giros**, $G = -x_j \partial x_i + x_i \partial x_j$, el cual tiene integrales primeras x_k para $i \neq k \neq j$ y $x_i^2 + x_j^2$.

0.0.11. Campos tensoriales

Definición. Llamaremos *campo tensorial*, de tipo (p, q) en un abierto $V \subset \mathcal{V}$ — p veces covariante y q veces contravariante—, a toda aplicación $(p+q)$ -lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(V)$

$$T_p^q: \mathcal{D}^p \times \Omega^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty,$$

es decir a todo tensor sobre el $\mathcal{C}^\infty(V)$ -módulo $\mathcal{D}(V)$. Y denotaremos con $\mathcal{T}_p^q(\mathcal{D}(V))$ ó $\mathcal{T}_p^q(V)$ si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de tipo (p, q) sobre V , los cuales son haz de módulos.

En particular tendremos que $\mathcal{T}_1^0 = \Omega$, se demuestra que $\mathcal{T}_0^1 = \mathcal{D}$, y convenimos en llamar $\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{C}^\infty$.

Definición. Definimos el *producto tensorial* $T \otimes Q \in \mathcal{T}_{p+p'}^{q+q'}$, de campos tensoriales $T \in \mathcal{T}_p^q$ y $Q \in \mathcal{T}_{p'}^{q'}$ y la *contracción interior* $i_D T \in \mathcal{T}_{p-1}^q$, por un campo tangente D

$$\begin{aligned} T \otimes Q(D_1, \dots, D_{p+p'}, \omega_1, \dots, \omega_{q+q'}) &= \\ = T(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) Q(D_{p+1}, \dots, D_{p+p'}, \omega_{q+1}, \dots, \omega_{q+q'}). \\ i_D T(D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) &= T(D, D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q), \end{aligned}$$

Dado un abierto coordenado $(V; v_i)$ las ∂_{v_i} son base de \mathcal{D} , las dv_i son su base dual, y

$$dv_{i_1} \otimes \dots \otimes dv_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial v_{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial v_{j_q}},$$

es una base del módulo de los tensores de tipo (p, q) .

0.0.12. Tensores hemisimétricos. Producto exterior

Definición. Diremos que un *tensor covariante* $T \in \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V})$ es *simétrico* si dados cualesquiera $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $1 \leq i < j \leq p$, se tiene

$$T(D_1, \dots, D_i, \dots, D_j, \dots, D_p) = T(D_1, \dots, D_j, \dots, D_i, \dots, D_p).$$

y diremos que T es *hemisimétrico* si

$$T(D_1, \dots, D_i, \dots, D_j, \dots, D_p) = -T(D_1, \dots, D_j, \dots, D_i, \dots, D_p).$$

Ejemplo de tensor simétrico. Llamaremos *métrica Riemanniana* en una variedad \mathcal{V} a todo tensor $g \in \mathcal{T}_2^0$ simétrico tal que para todo campo D , $g(D, D) \geq 0$ y $g(D, D)(x) = 0$ sii $D_x = 0$.

Denotaremos con $\Lambda_p(\mathcal{V})$ ó Λ_p si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(\mathcal{V})$ que son hemisimétricos. Entenderemos por $\Lambda_0 = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y por $\Lambda_1 = \mathcal{T}_1^0(\mathcal{V}) = \Omega$.

Definición. Dada una permutación $\sigma \in S_p$, definimos la aplicación $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ -lineal

$$\sigma: \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V}),$$

que para $T \in \mathcal{T}_p^0$ y $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}$, vale

$$\sigma(T)[D_1, \dots, D_p] = T(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(p)}).$$

Definición. Llamaremos *aplicación de hemisimetrización* a la aplicación $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ -lineal

$$\mathcal{H}: \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda_p(\mathcal{V}), \quad \mathcal{H}(T) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sig}(\sigma) \sigma(T).$$

Proposición 0.11 a) $\mathcal{H}^2 = p! \mathcal{H}$. b) Si $\mathcal{H}(T) = 0$, para $T \in \mathcal{T}_p^0$, entonces $\mathcal{H}(T \otimes Q) = \mathcal{H}(Q \otimes T) = 0$, para cada $Q \in \mathcal{T}_q^0$. c) $\mathcal{H}(\mathcal{T}_p^0) = \Lambda_p$. d) $T \in \mathcal{T}_p^0$ es hemisimétrico si y sólo si $\mathcal{H}(T) = p!T$. e) Si $F: V \rightarrow U$ es diferenciable entonces \mathcal{H} conmuta con

$$F^*: \mathcal{T}_p^0(U) \rightarrow \mathcal{T}_p^0(V).$$

Definición. Sean $\omega_r = \mathcal{H}(T_r) \in \Lambda_r$ y $\omega_s = \mathcal{H}(T_s) \in \Lambda_s$. Llamaremos *producto exterior* de estos campos tensoriales al campo tensorial

$$\omega_r \wedge \omega_s = \mathcal{H}(T_r \otimes T_s),$$

por tanto si $\omega_i \in \Lambda_1$, $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = \mathcal{H}(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p)$, pues $\mathcal{H}(\omega_i) = \omega_i$; y si $D_i \in \mathcal{D}$

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p(D_1, \dots, D_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sig } \sigma) \omega_1 D_{\sigma(1)} \dots \omega_p D_{\sigma(p)} = \det(\omega_i D_j).$$

Proposición 0.12 (a) $\omega_r \wedge \omega_s = (-1)^{rs} \omega_s \wedge \omega_r$.

(b) $i_D(\omega_r \wedge \omega_s) = (i_D \omega_r) \wedge \omega_s + (-1)^r \omega_r \wedge (i_D \omega_s)$.

(c) Si r es impar $\omega_r \wedge \omega_r = 0$.

Proposición 0.13 Para $n < r$, $\Lambda_r = \{0\}$ y en un abierto coordinado $(V; v_i)$, una base de $\Lambda_r(V)$, para $r \leq n$, es

$$dv_{i_1} \wedge \dots \wedge dv_{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n.$$

0.0.13. Derivada de Lie.

Definición. Dado un campo D con grupo uniparamétrico τ_t y un campo tensorial T llamamos *derivada de Lie de T con D* al campo tensorial del mismo tipo

$$D^L T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^* T - T}{t}.$$

Proposición 0.14 i) $D^L T = Df$, para cada $T = f \in C^\infty$.

ii) $D^L T = [D, E]$, para cada $T = E \in \mathcal{D}$.

iii) $D^L(df) = d(Df)$, para cada $f \in C^\infty$.

iv) $D^L(T \otimes T') = D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$.

v) $D(\omega E) = D^L \omega(E) + \omega(D^L E)$, para cada $\omega \in \Omega$ y $E \in \mathcal{D}$.

vi) Para cada campo tensorial T , $D_i \in \mathcal{D}$ y $\omega_j \in \Omega$

$$\begin{aligned} D[T(D_i, \omega_j)] &= D^L T(D_i, \omega_j) + T(D^L D_1, D_2, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) + \dots + \\ &+ T(D_1, \dots, D^L D_p, \omega_1, \dots, \omega_q) + T(D_1, \dots, D_p, D^L \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q) + \\ &+ \dots + T(D_1, \dots, D_p, \omega_1, \dots, \omega_{q-1}, D^L \omega_q). \end{aligned}$$

vii) $D^L T = 0$ si y sólo si $\tau_{t*} T = T$, para cada campo tensorial T y restringiendo T a los entornos en los que τ_t es difeomorfismo.

viii) $(D_1 + D_2)^L = D_1^L + D_2^L$.

ix) $[D_1, D_2]^L = D_1^L \circ D_2^L - D_2^L \circ D_1^L$.

x) $D^L(\omega_r \wedge \omega_s) = D^L \omega_r \wedge \omega_s + \omega_r \wedge D^L \omega_s$.

0.0.14. Diferencial exterior.

Existe una única aplicación \mathbb{R} -lineal $d: \Lambda = \bigoplus_p \Lambda_p \rightarrow \Lambda$, a la que llamamos *diferencial exterior*, tal que para cada $p \geq 0$, $d(\Lambda_p) \subset \Lambda_{p+1}$ y para todo $D \in \mathcal{D}$ verifica

$$D^L = i_D \circ d + d \circ i_D.$$

Diremos que una p -forma ω_p es *exacta* si es $d\omega_{p-1}$, para una $\omega_{p-1} \in \Lambda_{p-1}$ y que es *cerrada* si $d\omega_p = 0$.

La diferencial tiene las siguientes propiedades:

1) $d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q$.

2) $d^2 = 0$. Por tanto toda forma exacta es cerrada.

- 3) $D^L \circ d = d \circ D^L$, para cada $D \in \mathcal{D}$.
 4) Si $F: V \rightarrow U$ es diferenciable, entonces $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$, para cada $\omega \in \Lambda$.
 5) Para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ y $\omega \in \Omega$ se tiene

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega[D_1, D_2].$$

0.0.15. Fibrado cotangente. Campos Hamiltonianos

Hemos visto que en el fibrado cotangente $\mathcal{T}^*(\mathcal{V})$, de una variedad diferenciable \mathcal{V} , hay una 1-forma canónica λ , llamada de Liouville, que en coordenadas se escribe de la forma $\sum z_i dx_i$. Su diferencial $\Lambda = d\lambda$ (en coordenadas $= \sum dz_i \wedge dx_i$) es una 2-forma que define un isomorfismo canónico entre los campos y las 1-formas en el fibrado cotangente

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^*(\mathcal{V})) \rightarrow \Omega(\mathcal{T}^*(\mathcal{V})), \quad D \rightarrow i_D \Lambda,$$

que en coordenadas es

$$i_D \Lambda = i_D \left(\sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i \right) = \sum_{i=1}^n D z_i dx_i - \sum_{i=1}^n D x_i dz_i,$$

y por tanto se tiene la correspondencia

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow -dz_i, \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \rightarrow dx_i.$$

Definición. Diremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ es un *campo Hamiltoniano* si $i_D \Lambda$ es exacta, es decir si existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que

$$i_D \Lambda = -dh,$$

a esta función h la llamaremos *Hamiltoniano* asociado al campo D (que en general denotaremos con D_h).

Si D es Hamiltoniano, es decir $i_D \Lambda = -dh$, entonces h es integral primera suya, $Dh = 0$, y en coordenadas

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i},$$

y sus curvas integrales satisfacen las llamadas *ecuaciones de Hamilton*

$$x'_i = \frac{\partial h}{\partial z_i}(x, z), \quad z'_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}(x, z).$$

0.0.16. Variedades orientadas.

Si $(V; x_i)$ es un abierto coordenado de una variedad \mathcal{V} de dimensión n , entonces $\Lambda_n(V) = \{f\omega_n : f \in \mathcal{C}^\infty(V)\}$ siendo

$$\omega_n = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Si V es conexo, las posibles bases de $\Lambda_n(V)$ son de dos tipos: las que tienen la misma *orientación* que ω_n , es decir las de la forma $f\omega_n$ con $f > 0$, y las que tienen orientación contraria (con $f < 0$).

Definición. Diremos que una variedad $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ es *orientable* si existe $\omega_n \in \Lambda_n$, que no se anula en ningún punto de \mathcal{V} . Si además \mathcal{V} es conexa el conjunto $\{\omega \in \Lambda_n : \omega_x \neq 0, \forall x \in \mathcal{V}\}$ es unión disjunta de

$$\Lambda^+ = \{f\omega_n, f > 0\}, \quad \text{y} \quad \Lambda^- = \{f\omega_n, f < 0\}.$$

Una *orientación* en \mathcal{V} consiste en elegir una de las dos clases anteriores, que generalmente denotamos Λ^+ . Por una *variedad orientada* (\mathcal{V}, Λ^+) , entenderemos una variedad orientable, conexa y con una orientación. En una variedad orientada diremos que dos n -formas $\omega, \omega' \in \Lambda_n$, *tienen la misma orientación* si están en la misma clase y *orientación contraria* si están en distinta. Del mismo modo diremos que dos sistemas de coordenadas $v = (v_i)$ y $u = (u_i)$, en un abierto coordenado V , están igualmente orientados si $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n$ y $du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ están en la misma clase. Diremos que una base de campos D_i está *bien orientada* si $\omega(D_1, \dots, D_n) > 0$, para $\omega \in \Lambda^+$. Observemos que si $E_i = \sum a_{ij} D_j$ es otra base de campos, entonces

$$\begin{aligned} \omega(E_1, \dots, E_n) &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \left(\prod_{i=1}^n a_{ij_i} \right) \omega(D_{j_1}, \dots, D_{j_n}) \\ (1) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right) \omega(D_{\sigma(1)}, \dots, D_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right) \omega(D_1, \dots, D_n) = \det(a_{ij}) \omega(D_1, \dots, D_n), \end{aligned}$$

y el signo del $\det(a_{ij})$ dice si está bien orientada o no.

Ejemplos de variedades orientables son:

- 1) \mathbb{R}^n con $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.
- 2) Una hipersuperficie cerrada de \mathbb{R}^n , $\mathcal{S} = \{f = 0\}$, con $d_x f \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{S}$. Basta tomar $\omega = i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$, donde $N = \text{grad}(f) \in \mathcal{D}(\mathcal{S})^\perp$ es no nulo.
- 3) Los espacios proyectivos reales de dimensión impar.
- 4) El fibrado cotangente de cualquier variedad de dimensión n , $\Omega_{2n} = \Lambda \wedge \cdots \wedge \Lambda$, pues localmente $\Lambda = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i$ y $\Omega_{2n} = n! dz_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge dx_n$.

Ejemplos de variedades no orientables son:

- 1) La banda de Möebius.
- 2) Los espacios proyectivos reales de dimensión par.

0.0.17. Integración en una variedad orientada

Definición. Llamaremos *soporte* de $\omega \in \Lambda_n$, al cerrado

$$\text{sop}(\omega) = \overline{\{x \in \mathcal{V} : \omega_x \neq 0\}}.$$

Definición. Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad orientada, $(V; v = (v_i))$ un abierto conexo coordinado de \mathcal{V} y $V_n = v(V) \subset \mathbb{R}^n$ el abierto correspondiente por el difeomorfismo v . Por brevedad denotamos la n -forma $dv = dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda_n(V)$. Dada una n -forma $\omega \in \Lambda_n$ de soporte compacto en V , por tanto nula fuera de V , se expresa en este abierto de la forma $\omega = f(v)dv$, para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, la cual se anula fuera de V_n , y definimos la *integral* de ω como

$$(2) \quad \int \omega = \begin{cases} \int f \, dm = \int_{V_n} f \, dx_1 \cdots dx_n, & \text{si } dv \in \Lambda^+; \\ - \int f \, dm, & \text{si } dv \in \Lambda^-. \end{cases}$$

para m la medida de Lebesgue.

Para ver que está bien definida, consideremos otro sistema de coordenadas $u = (u_i)$ de V , y el abierto correspondiente $U_n = u(V)$, para el que

$$\omega = g(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = f(v)dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

y por tanto tales que $f(v_1, \dots, v_n) = g(u_1, \dots, u_n) \det(\partial u_i / \partial v_j)$, es decir para el difeomorfismo $F = (f_i) = u \circ v^{-1} : V_n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_n \subset \mathbb{R}^n$, con $f_i = y_i \circ F$, que en V_n

$$f(x) = g[F(x)] \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),$$

y por el *Teorema del cambio de variable* se tiene que

$$\int_{U_n} g(y)dy_1 \cdots dy_n = \int_{V_n} g[F(x)] |\det(f_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n$$

por lo que $\int g \, dm = \pm \int f \, dm$, con el signo positivo si el determinante es positivo (lo cual equivale a que u y v estén igualmente orientados) y negativo en caso contrario.

Dado que el Teorema de cambio de variable es válido para funciones g Borel medibles no negativas ó integrables, la definición de integral se puede generalizar para n formas no diferenciables, en particular para una n -forma de soporte compacto que sea diferenciable en dos abiertos disjuntos cuyo complementario sea de medida nula.

0.0.18. Variedades con borde

Definición. Recordemos que en un espacio topológico \mathcal{V} la frontera de un conjunto A , ∂A , es el conjunto de puntos cuyos entornos cortan tanto al conjunto A como a A^c . Por lo que obviamente $\partial A = \partial A^c$. Por otra parte también se tiene que $\partial A = \overline{A} - A^0$.

Definición. Llamaremos *variedad con borde* en una variedad \mathcal{V} a un cerrado $C = \overline{V}$ con V un abierto conexo y tal que $\partial V = \partial \overline{V} = S$ sea una subvariedad cerrada de dimensión $n - 1$ (ó el \emptyset), a la que llamamos su *borde* que separa dos variedades con borde C y V^c .

Proposición 0.15 *Sea C una variedad con borde S de \mathcal{V} y sea $x \in S$. Entonces existe un entorno abierto V_x de x en \mathcal{V} y $f \in C^\infty(V)$, con $d_p f \neq 0$ para todo $p \in V_x$, tales que*

$$S \cap V_x = \{p \in V_x : f(p) = 0\}, \quad V \cap V_x = \{p \in V : f(p) < 0\}.$$

Además si W_x es otro entorno de x y $g \in C^\infty(W_x)$ verificando las condiciones anteriores, entonces para cada $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ se tiene que $D_x f > 0$ si $D_x g > 0$ y diremos que D_x apunta hacia fuera de C .

Una orientación en \mathcal{V} induce una orientación natural en el borde de cada variedad con borde $C \subset \mathcal{V}$.

Proposición 0.16 *Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad orientada, $x \in S$ y V un abierto entorno coordenado de x en \mathcal{V} . Entonces si $D, D' \in \mathcal{D}(V)$ son no nulos y apuntan hacia fuera de C y $\omega, \omega' \in \Lambda^+(V)$, se tiene que las $n - 1$ -formas de $S \cap V$, $i^*(i_D \omega)$ e $i^*(i_{D'} \omega')$ son no nulas y tienen la misma orientación, que es (si ∂v_1 apunta hacia fuera de C y $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda^+(V)$)*

$$i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n).$$

Proposición 0.17 *Sea C una variedad con borde en una variedad orientada (\mathcal{V}, Λ^+) . Entonces Λ^+ induce una orientación natural en ∂C .*

Definición. Definimos la integral de $\omega \in \Lambda_n$ en una variedad con borde C de \mathcal{V} (ω con soporte compacto si C es arbitrario y cualquiera si C es compacto), como

$$\int_C \omega = \int I_C \omega,$$

donde I_C es la función indicador, que vale 1 en C y 0 fuera.

0.0.19. El Teorema de Stokes.

Teorema 0.18 (Teorema de Stokes) Sea (\mathcal{V}, Λ^+) una variedad orientada de dimensión n y sea C una variedad con borde de \mathcal{V} . Entonces para cualquier $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$, si C es compacto, ó en general cualquier $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$ de soporte compacto, se tiene

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Corolario 0.19 En una variedad orientable \mathcal{V} , n -dimensional, toda n -forma exacta tiene integral 0 en cualquiera de los casos: (i) la variedad es compacta ó (ii) la n -forma es de soporte compacto.

En 1828 M.V. OSTROGRADSKY demostró la fórmula (para $n = 3$)

$$\int_C (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial C} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

que es un caso particular de la fórmula de Stokes y básicamente el Teorema de la divergencia que veremos mas adelante.

En 1854 (año en el que gana Maxwell el premio Smith), G. GABRIEL STOKES plantea para ese premio el problema: *Demostrar la fórmula*

$$\int_C (R_y - Q_z) dy dz + (R_x - P_z) dx dz + (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial C} P dx + Q dy + R dz.$$

Formula de Gauss-Green 0.20 Sea V un abierto de \mathbb{R}^2 con $\partial V = \partial \bar{V}$ una subvariedad 1-dimensional de \mathbb{R}^2 . Entonces para $P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ se tiene, siendo $C = \bar{V}$ compacto o P y Q de soporte compacto,

$$\int_C (Q_x - P_y) dx \wedge dy = \int_{\partial C} P dx + Q dy.$$

Criterio De Bendixson 0.21 Sea $D = f\partial_x + g\partial_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si $f_x + g_y > 0$ (< 0), entonces D no tiene órbitas cíclicas.

El Teorema de Stokes, se puede generalizar a variedades con borde con “esquinas”.

0.0.20. Forma de volumen en variedades de Riemann

Teorema 0.22 En una variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V}, g, \Lambda^+)$ existe una única n -forma $\omega_v \in \Lambda^+$, a la que llamaremos forma de volumen, tal que para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada base ortonormal bien orientada $D_i \in T_x(\mathcal{V})$, se tiene $\omega_{v_x}(D_1, \dots, D_n) = 1$.

Sea $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{D}$ una base ortonormal bien orientada en un abierto coordenado (con las coordenadas bien orientadas) (V, v_i) . Si en él $g = \sum g_{ij} dv_i \otimes dv_j$ y $\partial_i = \sum a_{ij} E_j$, tendremos que $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \sum a_{ik} a_{jk}$, es decir que $(g_{ij}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Y por tanto $(\det \mathbf{A})^2 = \det(g_{ij})$ y si $\omega_v = f dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n$, tendremos por (1) que

$$f = \omega_v(\partial v_1, \dots, \partial v_n) = \det(A) = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Cualquier n -forma $\omega_v \in \Lambda^+$ en una variedad orientada nos permite definir el concepto de volumen $\text{Vol}(C) = \int_C \omega_v$. En el caso particular de que nuestra variedad sea Riemanniana y subvariedad $S_n \subset \mathbb{R}^m$, con la métrica inducida de \mathbb{R}^m y la tengamos parametrizada por una inmersión $F: U_n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S_n \subset \mathbb{R}^m$, tendremos que sobre S_n , $F = (f_j)$ es difeomorfismo de inversa $v = (v_i)$ que es un sistema de coordenadas en S_n (que nos define la orientación), para el que $\partial v_i = F_* \partial x_i = \sum_{j=1}^m (\partial f_j / \partial x_i) \partial y_j$ y como

$$\det(g_{ij}(F(x))) = \det(\partial v_i \cdot \partial v_j)(F(x)) = \det(DF_x)^t(DF_x) = J(DF_x)^2,$$

tendremos que $\text{Vol} = \gamma_n H_n$, pues (ver [Apuntes de Teoría de la medida.](#))

$$\gamma_n H_n(F(A)) = \int_A J(DF_x) dm_n = \int_{F(A)} \omega_v.$$

0.0.21. Aplicaciones a la Física

Definición. Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+, \omega_v)$ una variedad orientada con una forma de volumen $\omega_v \in \Lambda^+$. Llamamos *divergencia de un campo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a la función $\text{div}(D) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $D^L \omega_v = \text{div}(D) \omega_v = d(i_D \omega_v)$, pues $D^L \omega_v \in \Lambda_n$. Si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ y $D = \sum f_i \partial_i$, entonces $\text{div}(D) = \sum (\partial_i f_i)$.

Definición. Dada una hipersuperficie S de una variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V}, g, \omega_v)$ (borde de una variedad con borde C), con vector normal unitario exterior ∂_n , llamaremos *flujo de un campo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de S , a

$$(3) \quad \int_S D \cdot \partial_n \omega_S = \int_S i_D \omega_v,$$

para $\omega_S = i_{\partial_n} \omega_v$ la forma de volumen de S .

Teorema de la divergencia 0.23 *El flujo de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de una hipersuperficie, frontera de una variedad con borde C de una variedad Riemanniana orientada \mathcal{V} , es igual a la integral de la divergencia del campo D en C .*

Teorema de Liouville 0.24 Sea V un abierto de una variedad orientada (\mathcal{V}, ω_v) con una forma de volumen y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico τ_t . Si denotamos $V_t = \tau_t(V)$ y $V(t) = \text{Vol}[V_t]$, entonces

$$V'(t) = \int_{V_t} \text{div}(D) \omega_v.$$

Corolario 0.25 Si $\text{div}(D) = 0$, entonces el g.u.l. τ_t de D conserva los volúmenes. En particular el de las ecuaciones de Hamilton en $\mathcal{T}^*(\mathcal{V})$, $x'_i = -h_{z_i}$, $z'_i = h_{x_i}$, conserva los volúmenes, pues $D^L \Omega_{2n} = 0$, ya que $D^L \Lambda = di_D \Lambda = d(-dh) = 0$.

Definición. Llamamos *circulación* de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ sobre una curva orientada L de la variedad Riemanniana (\mathcal{V}, g) a

$$\int_L i_D g$$

Si nuestra variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V}, g, \omega_v)$ es tridimensional, llamamos *rotacional* de D , $R = \text{rot } D$, al único campo tangente que verifica, $i_R \omega_v = d(i_D g)$. En el caso $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ y $D = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$R = (h_y - g_z)\partial_x + (f_z - h_x)\partial_y + (g_x - f_y)\partial_z.$$

Si S es una superficie orientada del espacio, con borde la curva L , entonces por Stokes

$$\int_L i_D g = \int_S d(i_D g) = \int_S i_{\text{rot } D} \omega,$$

Teorema del rotacional 0.26 En el espacio, la circulación a lo largo de una curva cerrada, frontera de una superficie S es igual al flujo del rotacional a través de S .

0.0.22. Interpretación física de la integral compleja

A continuación veremos la interpretación física de la $\int f(z)dz$, para una función $f = u + iv$, con $u, v \in C^\infty(U)$. En primer lugar llamaremos *campo tangente asociado* a $f = u + iv$, al campo que define su conjugada,

$$D = u\partial_x - v\partial_y \in \mathcal{D}(U).$$

Consideramos en el plano la métrica Riemanniana estándar g con 2-forma de área $\omega_2 = dx \wedge dy$ y consideremos una curva L orientada. Como es Riemanniana, tiene una 1-forma de longitud ω_1 , que en el vector unitario T (bien orientado) vale 1. Consideremos su ortogonal unitario N tal que $\omega_2(N, T) = 1$.

Por último consideremos una parametrización de L bien orientada, es decir $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $L = \sigma[a, b]$, y $\omega_1(\sigma') > 0$. Entonces se tiene que en L

$$\begin{aligned} i_D g &= u dx - v dy = (D \cdot T) \omega_1, & i_D \omega_2 &= v dx + u dy = (D \cdot N) \omega_1, \\ \int_L f(z) dz &= \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L (u dx - v dy) + i \int_L (v dx + u dy) \\ &= \int_L i_D g + i \int_L i_D \omega_2 = \int_L D \cdot T \omega_1 + i \int_L D \cdot N \omega_1 \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt = \int_a^b f(\sigma(t)) \sigma'(t) dt. \end{aligned}$$

Observemos que la parte real es la **circulación** de D a lo largo de L y la parte imaginaria el **flujo** de D que atraviesa L .

Ahora bien si nuestra curva es cerrada, borde de una variedad con borde C , podremos utilizar Stokes y para la función $\text{rot } D = -u_y - v_x$

$$\int_L f(z) dz = \int_{\partial C} i_D g + i \int_{\partial C} i_D \omega_2 = \int_C \text{rot } D \omega_2 + i \int_C \text{div } D \omega_2.$$

La condición necesaria y suficiente para que f sea holomorfa en U es que u y v sean de clase 1 en U y se satisfagan las ECUACIONES DE CAUCHY–RIEMANN (a la izquierda)

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div } D = u_x - v_y = 0, \\ \text{rot } D = -u_y - v_x = 0, \end{cases}$$

y se tiene el **Teorema de Cauchy**, $\int_L f(z) dz = 0$ en cualquier curva cerrada L borde de una variedad con borde $C \subset U$.