Breve Recordatorio
Teorema de Stokes

Badajoz, 13 de junio de 2017

Dpto. de Matemáticas
Univ. de Extremadura

0.0.1. La estructura diferenciable de $\mathbb{R}^n$

Sea $V \subset \mathbb{R}^k$ un abierto. Decimos que una aplicación $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ es *diferenciable en* $x \in V$ si existe una aplicación lineal $DF_x\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ a la que llamamos *derivada de* F *en* x, tal que

$$\lim_{\|z\|\to 0} \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|} = 0.$$

(en cuyo caso es única, ya que de existir dos T_1 y T_2 coincidirían en todo p de la esfera unidad, pues para $z = \|z\|p$

$$\|T_1(p) - T_2(p)\| \leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - T_1(z)\| + \|F(x+z) - F(x) - T_2(z)\|}{\|z\|} \to 0.$$

Diremos que F es *diferenciable* si lo es en cada punto de V, en cuyo caso denotaremos con $DF\colon V \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, la aplicación derivada, $DF(x) = DF_x$. Diremos que F es de *clase* 1 si es diferenciable y DF continua[1]. Por inducción diremos que F es de clase m si DF es de clase $m-1$ y de clase ∞ si es de clase m para toda m. Se sigue de forma inmediata que si F es lineal, DF es constante y vale $DF_x = F$.

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y dos aplicaciones diferenciables $F\colon V \subset \mathbb{R}^k \to U \subset \mathbb{R}^n$ y $G\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se tiene que $G \circ F$ es diferenciable y se verifica la *Regla de la cadena*

$$D(G \circ F)_x = D(G_{F(x)}) \cdot D(F_x).$$

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, diremos que $F\colon V \subset \mathbb{R}^k \to U \subset \mathbb{R}^n$ es un *difeomorfismo* si es diferenciable, biyectiva y su inversa también es diferenciable, en cuyo caso se tiene como consecuencia de la regla de la cadena que $k = n$.

En términos de coordenadas la matriz (a_{ij}), asociada a la aplicación lineal DF_x, es la *matriz Jacobiana*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right), \quad \text{para } F = (f_1, \ldots, f_n)$$

pues tomando la componente i–ésima en la definición, la norma del máximo y $z = te_j$, tendremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} - a_{ij} \right| &= \frac{|f_i(x+z) - f_i(x) - \sum_{j=1}^k a_{ij} z_j|}{\|z\|} \\ &\leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|}, \end{aligned}$$

[1] Con cualquier norma en el espacio $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, pues al ser de dimensión finita todas definen la misma topología, sin embargo habitualmente consideraremos $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| = 1\}$

y haciendo $t \to 0$, se sigue que $a_{ij} = \partial f_i(x)/\partial x_j$. Por tanto $F = (f_i)$ y $DF = (\partial f_i/\partial x_j)$.

Denotaremos respectivamente con $\mathcal{C}(V)$, $\mathcal{C}^k(V)$ y $\mathcal{C}^\infty(V)$ las $\mathbb{R}$–álgebras de las funciones $f\colon V \to \mathbb{R}$, continuas, de clase k y de clase infinito en V y a menudo consideraremos el operador diferencial, sobreentendiendo la notación

$$\partial_j(f) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f) = \partial f/\partial x_j.$$

Teorema 0.1 *Sea F de clase $k \geq 1$, son equivalentes: (1) F es difeomorfismo local en $x \in V$. (2) DF_x es isomorfismo. (3) $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) \neq 0$, para $F = (f_1, \ldots, f_n)$.*

0.0.2. Variedades diferenciables

Definición. Llamamos *estructura diferenciable* en un espacio topológico $\mathcal{V}$, a una colección de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\{\mathcal{C}^\infty(V) \subset \mathcal{C}(V), \text{ con } V \text{ abierto de } \mathcal{V}\},$$

de subconjuntos de las funciones continuas de cada abierto V de $\mathcal{V}$, que llamaremos de *funciones diferenciables*, que satisfacen las siguientes propiedades:

i.- Dados abiertos V_i, el abierto $V = \cup V_i$ y $f\colon V \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Leftrightarrow \quad f_{|V_i} \in \mathcal{C}^\infty(V_i).$$

ii.- Para cada punto $x \in \mathcal{V}$ existe un abierto V_x, un abierto U de un $\mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $H : V_x \to U$, tal que para cada abierto $V \subset V_x$ y cada función $f\colon H(V) \to \mathbb{R}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(H(V)) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ H \in \mathcal{C}^\infty(V).$$

A las funciones $v_i = x_i \circ H$ las llamaremos *sistema de coordenadas* y a $(V_x; v_i)$ *entorno coordenado de x.*

Llamaremos *variedad diferenciable* a un espacio topológico *Hausdorff* y de *base numerable*, dotado de una estructura diferenciable.

El siguiente resultado nos da la existencia de *funciones badén.*

Proposición 0.2 *Sean C un cerrado y K un compacto de $\mathcal{V}$ disjuntos. Entonces existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ tal que $Im(h) = [0,1]$, $h(K) = 1$ y $h(C) = 0$.*

Definición. Diremos que una aplicación continua $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ entre variedades diferenciables es *diferenciable* (realmente es ∞–diferenciable, pero haremos ese abuso del lenguaje) si para cada abierto $U \subset \mathcal{U}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(U) \quad \Rightarrow \quad F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(F^{-1}(U)).$$

Diremos que F es un *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto F como su inversa son diferenciables. En particular la aplicación H de la definición de variedad es un difeomorfismo.

0.0.3. Espacio tangente. Aplicación lineal tangente

Definición. Llamamos *espacio tangente* de una variedad $\mathcal{V}$ en un punto $x \in \mathcal{V}$, al $\mathbb{R}$–espacio vectorial $T_x(\mathcal{V})$, de las derivaciones

$$D_x : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

en el punto x, es decir aplicaciones verificando:

a) $D_x(tf + sg) = tD_x f + sD_x g$.

b) $D_x t = 0$.

c) Regla de Leibnitz en x.- $D_x(fg) = f(x)D_x g + g(x)D_x f$,

para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ en $\mathbb{R}$. Llamamos *espacio cotangente* a su dual, que denotamos $T_x^*(\mathcal{V})$.

Definición. Llamamos *aplicación lineal tangente* de una aplicación diferenciable $F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, en $x \in \mathcal{V}$, a

$$F_* : T_x(\mathcal{V}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{U}), \qquad F_*(D_x) = D_x \circ F^*.$$

Llamamos *rango* de F en x al rango de F_*. A la aplicación dual ó transpuesta entre los espacios cotangentes la denotamos F^*.

Dadas dos aplicaciones diferenciables $F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ y $G : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$, se tiene que $G \circ F$ es diferenciable y se tiene la *regla de la cadena*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

0.0.4. Campos tangentes

Definición. Llamamos *campos tangentes en un abierto* V a las derivaciones

$$D : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V),$$

es decir aplicaciones verificando:

1.- $D(tf + rg) = tDf + rDg$,

2.- $Dt = 0$,

3.- Regla de Leibnitz: $D(fg) = f(Dg) + g(Df)$,

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y $t, r \in \mathbb{R}$.

Para cada abierto V denotamos con $\mathcal{D}(V)$ la colección de los campos tangentes en V, los cuales forman un haz de $\mathcal{C}^\infty(V)$–módulos. Denotamos su módulo dual con $\Omega(V) = \mathcal{D}(V)^*$ y a sus elementos los llamamos 1–*formas* y se demuestra que su dual se identifica canónicamente con el módulo de campos $\Omega^*(V) \equiv \mathcal{D}(V)$.

La ecuación $Df(p) = D_p f$, establece una biyección entre campos tangentes $D \in \mathcal{D}(V)$ y *campo de vectores tangentes, colocados diferenciablemente*, es decir tales que $D_p f$ es diferenciable en $p \in V$ para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$.

Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ llamamos *diferencial* de f a la 1–forma

$$df : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V), \qquad df(D) = Df.$$

Diremos que una aplicación diferenciable $F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, lleva un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ a otro $E \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, y lo denotamos $F_* D = E$, si para todo $x \in \mathcal{V}$,

$$F_* D_x = E_{F(x)},$$

lo cual equivale a que $D \circ F^* = F^* \circ E$.

En $\mathbb{R}^n$ las ∂_{x_i} son una base de los campos tangentes y su base dual son las dx_i, base de las 1–formas. En un abierto coordenado $(V; v_i)$ de la variedad, si $H = (v_i) : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ es el difeomorfismo correspondiente y G su inversa, entonces definimos $\partial v_i = G_*(\partial x_i)$, por tanto $H_*(\partial v_i) = \partial x_i$, las cuales son base de los campos tangentes. Del mismo modo las dv_i son la base dual, pues $dv_j(\partial v_i) = \delta_{ij}$. Por tanto todo campo se expresa como $\sum f_i \partial_{v_i}$, donde además $f_i = Dv_i$ y toda 1–forma se escribe como $\sum g_i dv_i$, siendo $g_i = \omega(\partial_{v_i})$.

Definición. Llamamos *corchete de Lie* de $D, E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, al campo tangente

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D,$$

Esta operación tiene las propiedades de producto (anticonmutativo), con la que $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ es un álgebra.

Proposición 0.3 *Dados $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, y $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:*

a) $[D_1, D_2] \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$.

b) $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$.

c) $[aD_1 + bD_2, D_3] = a[D_1, D_3] + b[D_2, D_3]$.

d) **Identidad de Jacobi:**

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0.$$

e) $[D_1, fD_2] = (D_1 f)D_2 + f[D_1, D_2]$.

f) Si $F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es diferenciable y para $i = 1, 2$, $D_i \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $E_i \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, tales que F lleva D_i en E_i, entonces F lleva $[D_1, D_2]$ en $[E_1, E_2]$.

0.0.5. Inmersiones locales, subvariedades

Definición. Decimos que $F : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ diferenciable, es una *inmersión local* en $x \in \mathcal{V}$ si

$$F_* : T_x(\mathcal{V}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{U}),$$

es inyectiva. Diremos que F es *inmersión* si es inyectiva e inmersión local en todo punto, en cuyo caso diremos que $F(\mathcal{V})$ es una *subvariedad inmersa* en $\mathcal{U}$. Si además, con la topología inducida por $\mathcal{U}$, resulta que

$$F : \mathcal{V} \longrightarrow F(\mathcal{V}),$$

es un homeomorfismo, diremos que $F(\mathcal{V})$ es una *subvariedad* de $\mathcal{U}$.

Teorema 0.4 *$\mathcal{S}$ es una subvariedad de una variedad $\mathcal{V}$ si y sólo si cada $p \in \mathcal{S}$, tiene un abierto coordenado $(V_p; v_i)$, tal que*

$$\mathcal{S} \cap V_p = \{x \in V_p : \ v_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, k\}.$$

0.0.6. Ecuaciones diferenciales

Definición. Llamaremos *curva parametrizada* en el abierto $V \subset \mathcal{V}$ a toda aplicación continua (fundamentalmente consideraremos las de clase ∞), definida en un intervalo abierto real I

$$\sigma \colon I \subset \mathbb{R} \to V.$$

Definición. Dado $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, diremos que una curva diferenciable $\sigma \colon I \to V$ es una *solución de la ecuación diferencial ordinaria* (EDO) definida por D, o una *curva integral* de D, si $\sigma_* \partial_t = D$, es decir para cada $t \in I$

$$\sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_t = D_{\sigma(t)}.$$

Sea $D = \sum f_i(x_1, \ldots, x_n)\partial_i$ en un abierto coordenado $(V; x_i)$, σ una curva integral de D y $x_i(t) = x_i[\sigma(t)]$, entonces

$$x_i'(t) = f_i[x_1(t), \ldots, x_n(t)], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definición. Llamamos *integral primera* de un campo tangente D a toda función f, tal que $Df = 0$.

Proposición 0.5 *Toda integral primera de un campo es constante en las curvas integrales del campo.*

Ejemplo. Sea m una masa que hemos lanzado y que se mueve en caída libre sobre la superficie de la tierra y sea $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ su posición, en el instante t, respecto de un sistema de coordenadas centrado en la tierra y ligado a ella. Si M es la masa de la tierra, la fuerza que actúa sobre m es $F = -G(Mm/|\sigma|^2)\sigma/|\sigma|$, que a su vez es igual a $m\ddot{\sigma}$, por tanto como estamos suponiendo que $|\sigma|$ es el radio de la tierra R (que suponemos esférica), tendremos que $\ddot{\sigma} = -g\sigma/|\sigma|$, para $g = GM/R^2$ y como el movimiento es muy local podemos considerar que $\sigma/|\sigma| = (0,0,1)$, en cuyo caso nuestro sistema de ecuaciones es $\ddot{x} = \ddot{y} = 0, \ddot{z} = -g$, es decir introduciendo las coordenadas de la velocidad $\dot{x} = z_1$, $\dot{y} = z_2$, $\dot{z} = z_3$, $\dot{z_1} = \dot{z_2} = 0$, $\dot{z_3} = -g$, que es un sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^6$, definido por el campo

$$D = z_1\partial_x + z_2\partial_y + z_3\partial_z - g\partial_{z_3},$$

el cual tiene una 1–forma incidente

$$\omega = \sum z_i dz_i + gdz = d\left(\frac{\sum z_i^2}{2} + gz\right) = dh,$$

siendo $h = \sum z_i^2/2 + gz$ la energía del sistema (cinética mas potencial) por unidad de masa. Por lo que h es constante en la trayectoria, ya que $0 = \omega(D) = dh(D) = Dh$.

Mas generalmente consideremos una masa m que se mueve siguiendo las leyes de Newton $F = m\ddot{\sigma}$, bajo la acción de una fuerza conservativa es decir que deriva de un potencial $F = -\operatorname{grad} p$, siendo p una función del espacio, por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{mecánica terrestre} \quad & p(x) = mgx_3, \quad F = -mg(0,0,1), \\ \text{mecánica celeste} \quad & p(x) = -GMm\frac{1}{\|x\|}, \quad F = -\frac{GMm}{\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|}, \end{aligned}$$

en cualquier caso introduciendo las coordenadas de la velocidad tendremos el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = z_1,\ \dot{y} = z_2,\ \dot{z} = z_3,\ \dot{z_1} = -p_x/m,\ \dot{z_2} = -p_y/m,\ \dot{z_3} = -p_z/m,$$

que corresponde al campo tangente

$$D = z_1\partial_x + z_2\partial_y + z_3\partial_z - \frac{p_x}{m}\partial_{z_1} - \frac{p_y}{m}\partial_{z_2} - \frac{p_z}{m}\partial_{z_3}$$

que tiene la 1–forma incidente exacta

$$p_x dx + p_y dy + p_z dz + mz_1dz_1 + mz_2dz_2 + mz_3dz_3 = d\left(p + \frac{m}{2}\sum z_i^2\right) = dh,$$

para h la energía (cinética mas potencial).

0.0.7. Fibrado tangente y Fibrado cotangente

.

Definición. Llamamos *fibrado tangente* de una variedad $\mathcal{V}$ al conjunto

$$\mathcal{T}\mathcal{V} = \{D_p \in T_p(\mathcal{V}) :\ p \in \mathcal{V}\},$$

de todos los vectores de todos los espacios tangentes $T_p(\mathcal{V})$ y la aplicación (proyección regular)

$$\pi\colon \mathcal{TV} \to \mathcal{V}, \quad \pi(D_p) = p.$$

Ahora cada abierto coordenado $(V; x_i)$ de $\mathcal{V}$, difeomorfo por (x_i) a un abierto $U_n \subset \mathbb{R}^n$, consideramos el conjunto $\pi^{-1}(V)$ con las funciones (coordenadas)

$$x_i(D_p) = x_i(p), \quad z_i(D_p) = D_p x_i,$$

para cada $D_p \in \pi^{-1}(V)$ (observemos que hemos llamado x_i a las primeras coordenadas en el fibrado aunque realmente son $\pi^*(x_i)$). Las cuales establecen una biyección $H = (x_i, z_i)\colon \pi^{-1}(V) \to U_n \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Se demuestra que estas cartas definen una estructura topológica y diferenciable y que para ella π es una *proyección regular*, es decir π_* es sobre (en coordenadas $\pi = (x_1, \ldots, x_n)$).

Llamamos *ecuación de segundo orden* en $\mathcal{V}$ a todo campo tangente Z del fibrado tangente tal que para todo punto del fibrado $D_p \in \mathcal{TV}$,

$$\pi_*(Z_{D_p}) = D_p.$$

Veamos la expresión de tal campo Z en nuestro abierto coordenado $(\pi^{-1}(V), (x_i, z_i))$, sin olvidar nuestro abuso del lenguaje $x_i = \pi^*(x_i)$

$$Z = \sum f_i \partial_{x_i} + \sum g_i \partial_{z_i}, \qquad \text{siendo}$$
$$f_i(D_p) = Zx_i(D_p) = Z_{D_p}(\pi^* x_i) = D_p x_i = z_i(D_p),$$

es decir $f_i = z_i$, por lo que en las coordenadas (x_i, z_i), sus curvas integrales satisfacen,

$$x_i'(t) = z_i(t), \quad z_i'(t) = g_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), z_1(t), \ldots, z_n(t)),$$

es decir el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$x_i''(t) = g_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Definición. Llamamos *fibrado cotangente* de una variedad $\mathcal{V}$ a

$$\mathcal{T}^*\mathcal{V} = \{\omega_p \in T_p^*(\mathcal{V}) : p \in \mathcal{V}\},$$

de todas las uno–formas de todos los espacios cotangentes $T_p^*(\mathcal{V})$, con la aplicación

$$\pi\colon \mathcal{T}^*\mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad \pi(\omega_p) = p.$$

Ahora para cada abierto coordenado $(V; x_i)$ de $\mathcal{V}$ consideremos el conjunto $\pi^{-1}(U)$ con las funciones (coordenadas), que en cada punto del fibrado cotangente $\omega_p \in \pi^{-1}(U)$ valen

$$x_i(\omega_p) = x_i(p), \quad z_i(\omega_p) = \omega_p(\partial x_i),$$

las cuales, como para el fibrado tangente, establecen una biyección con un abierto $U_n \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Se demuestra que estas cartas definen una única estructura topológica y diferenciable y que para ella π es una *proyección regular*.

Teorema 0.6 *$\mathcal{U} = \mathcal{T}^*\mathcal{V}$ tiene una uno–forma canónica, llamada forma de Liouville, que para la proyección π está definida en cada punto $\omega_p \in \mathcal{T}^*\mathcal{U}$ de la forma*

$$\lambda_{\omega_p} = \pi^*\omega_p.$$

Demostración. Basta demostrar que el campo de 1–formas λ_{ω_p} es diferenciable. Para ello consideremos un entorno coordenado $(U; x_i)$ y las correspondientes coordenadas (x_i, z_i) en $\mathcal{T}^*(U) = \pi^{-1}(U)$, entonces

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i. \quad \blacksquare$$

0.0.8. Grupos uniparamétricos

Definición. Diremos que una aplicación diferenciable

$$\tau \colon \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

es un *flujo* ó un *grupo uniparamétrico* si se tienen las siguientes propiedades:

a) Para todo $p \in \mathcal{V}$, $\tau(0, p) = p$.
b) Para todo $p \in \mathcal{V}$ y $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\tau(t, \tau(s, p)) = \tau(t + s, p).$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $p \in \mathcal{V}$ consideramos

$$\tau_t \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \qquad \tau_p \colon \mathbb{R} \to \mathcal{V},$$

tales que $\tau_t(p) = \tau_p(t) = \tau(t, p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathcal{V}$.

Nota 0.0.9 *Observemos que cada $\tau_t \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es realmente un difeomorfismo, para cada $t \in \mathbb{R}$, pues tiene inversa τ_{-t}. Además observemos que en términos de las aplicaciones τ_t, las propiedades (a) y (b) de grupo uniparamétrico se expresan de la forma*

$$\tau_0 = id, \qquad \tau_{t+s} = \tau_t \circ \tau_s,$$

por lo que que el conjunto $\{\tau_t, t \in \mathbb{R}\}$, es un grupo de difeomorfismos que opera sobre $\mathcal{V}$, y que esta forma de operar tiene una simple interpretación. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $p \in \mathcal{V}$, $\tau_t(p)$ es el punto de $\mathcal{V}$ al que llega p en el tiempo t.

Definición. Sea $\mathcal{W}$ un abierto de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ conteniendo a $\{0\} \times \mathcal{V}$, tal que para cada $p \in \mathcal{V}$, el conjunto

$$I(p) = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{W}\},$$

es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ conteniendo al origen. Diremos que una aplicación diferenciable

$$\tau : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V},$$

es un *grupo uniparamétrico local* si se verifica que:

a) Para cada $p \in \mathcal{V}$, $\tau(0,p) = p$.

b) Si $t \in I(p)$ y $q = \tau(t,p)$, entonces $I(p) = I(q) + t$, es decir

$$s \in I(q) \Leftrightarrow t + s \in I(p),$$

y se tiene que

$$\tau(s+t,p) = \tau(s,\tau(t,p)).$$

Si para cada $t \in \mathbb{R}$, consideramos el abierto de $\mathcal{V}$ y la aplicación

$$V_t = \{p \in \mathcal{V} : \ (t,p) \in \mathcal{W}\}, \qquad \tau_t \colon V_t \to V_{-t}, \quad \tau_t(p) = \tau(t,p),$$

entonces (a) y (b) se transforman respectivamente en: $\tau_0 = id \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. $V_{t+s} = \tau_s(V_t)$ y en ese dominio (que puede ser vacío) $\tau_{t+s} = \tau_t \circ \tau_s$.

Teorema 0.7 *Sea τ un grupo uniparamétrico local. Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y $p \in \mathcal{V}$ definimos*

$$(Df)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f[\tau(t,p)] - f(p)}{t},$$

entonces $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y para todo $p \in \mathcal{V}$, $\tau_{p*}(\partial_t) = D$, por tanto τ_p es una curva integral de D que pasa por p en el instante 0. A este campo D lo llamaremos el generador infinitesimal de τ. Además τ_t, deja invariante a su generador infinitesimal D, es decir, $\tau_{t*}D = D$.

0.0.10. Teoremas fundamentales de las EDO

Teorema 0.8 Existencia y unicidad *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, entonces para cada $p \in \mathcal{V}$ hay una única curva integral máxima $\tau_p \colon I(p) \to \mathcal{V}$, con $I(p)$ intervalo abierto conteniendo al 0, tal que $\tau_p(0) = p$.*

Teorema 0.9 Dependencia diferenciable *El conjunto*

$$\mathcal{W}_D = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} : \ t \in I(p)\},$$

es abierto y

$$\tau : \mathcal{W}_D \to \mathcal{V} \ , \quad \tau(t,p) = \tau_p(t).$$

es un grupo uniparamétrico local.

Teorema 0.10 del flujo *Sea $p \in \mathcal{V}$ un punto no singular de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, es decir tal que $D_p \neq 0$. Entonces p tiene un entorno abierto coordenado $(V_p; v_i)$, tal que en V_p*

$$D = \frac{\partial}{\partial v_1}.$$

Ejemplos de grupos uniparamétricos en $\mathbb{R}^n$ son: (1) $\tau(t,p) = p + te_i$, que corresponde al campo de las **traslaciones**, $D = \partial x_i$, el cual tiene integrales primeras x_j, para $j \neq i$.

(2) $\tau(t,p) = e^t \cdot p$, que corresponde al campo de las **Homotecias**, $H = \sum x_i \partial x_i$, el cual tiene integrales primeras x_i/x_j.

(3) $\tau(t,p) = G(t) \cdot p$, para $G(t)$ el giro de ángulo t de matriz $g_{ii} = \cos t$, $g_{ij} = -\operatorname{sen} t$, $g_{ji} = \operatorname{sen} t$, $g_{jj} = \cos t$, para i, j fijos y para el resto de la diagonal $g_{kk} = 1$ y el resto de elementos $g_{lk} = 0$. Que corresponde con el campo de los **Giros**, $G = -x_j \partial x_i + x_i \partial x_j$, el cual tiene integrales primeras x_k para $i \neq k \neq j$ y $x_i^2 + x_j^2$.

0.0.11. Campos tensoriales

Definición. Llamaremos *campo tensorial*, de tipo (p,q) en un abierto $V \subset \mathcal{V}$ —p veces covariante y q veces contravariante—, a toda aplicación $(p+q)$–lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(V)$

$$T_p^q \colon \mathcal{D}^p \times \Omega^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty,$$

es decir a todo tensor sobre el $\mathcal{C}^\infty(V)$–módulo $\mathcal{D}(V)$. Y denotaremos con $\mathcal{T}_p^q(\mathcal{D}(V))$ ó $\mathcal{T}_p^q(V)$ si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de tipo (p,q) sobre V, los cuales son haz de módulos.

En particular tendremos que $\mathcal{T}_1^0 = \Omega$, se demuestra que $\mathcal{T}_0^1 = \mathcal{D}$, y convenimos en llamar $\mathcal{T}_0^0 = \mathcal{C}^\infty$.

Definición. Definimos el *producto tensorial* $T \otimes Q \in \mathcal{T}_{p+p'}^{q+q'}$, de campos tensoriales $T \in \mathcal{T}_p^q$ y $Q \in \mathcal{T}_{p'}^{q'}$ y la *contracción interior* $i_D T \in \mathcal{T}_{p-1}^q$, por un campo tangente D

$$\begin{gathered} T \otimes Q(D_1, \ldots, D_{p+p'}, \omega_1, \ldots, \omega_{q+q'}) = \\ = T(D_1, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) Q(D_{p+1}, \ldots, D_{p+p'}, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'}). \\ i_D T(D_2, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) = T(D, D_2, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q), \end{gathered}$$

Dado un abierto coordenado $(V; v_i)$ las ∂_{v_i} son base de $\mathcal{D}$, las dv_i son su base dual, y

$$dv_{i_1} \otimes \ldots \otimes dv_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial v_{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial v_{j_q}},$$

es una base del módulo de los tensores de tipo (p,q).

0.0.12. Tensores hemisimétricos. Producto exterior

Definición. Diremos que un *tensor covariante* $T \in \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V})$ es *simétrico* si dados cualesquiera $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ y $1 \leq i < j \leq p$, se tiene

$$T(D_1, \ldots, D_i, \ldots, D_j, \ldots, D_p) = T(D_1, \ldots, D_j, \ldots, D_i, \ldots, D_p).$$

y diremos que T es *hemisimétrico* si

$$T(D_1,\ldots,D_i,\ldots,D_j,\ldots,D_p) = -T(D_1,\ldots,D_j,\ldots,D_i,\ldots,D_p).$$

Ejemplo de tensor simétrico. Llamaremos *métrica Riemanniana* en una variedad $\mathcal{V}$ a todo tensor $g \in \mathcal{T}_2^0$ simétrico tal que para todo campo D, $g(D,D) \geq 0$ y $g(D,D)(x) = 0$ sii $D_x = 0$.

Denotaremos con $\Lambda_p(\mathcal{V})$ ó Λ_p si no hay confusión, el conjunto de los campos tensoriales de $\mathcal{T}_p^0(\mathcal{V})$ que son hemisimétricos. Entenderemos por $\Lambda_0 = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ y por $\Lambda_1 = \mathcal{T}_1^0(\mathcal{V}) = \Omega$.

Definición. Dada una permutación $\sigma \in S_p$, definimos la aplicación $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$–lineal

$$\sigma\colon \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V}) \to \mathcal{T}_p^0(\mathcal{V}),$$

que para $T \in \mathcal{T}_p^0$ y $D_1,\ldots,D_p \in \mathcal{D}$, vale

$$\sigma(T)[D_1,\ldots,D_p] = T(D_{\sigma(1)},\ldots,D_{\sigma(p)}).$$

Definición. Llamaremos *aplicación de hemisimetrización* a la aplicación $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$–lineal

$$\mathcal{H}\colon \mathcal{T}_p^0(V) \to \Lambda_p(V), \quad \mathcal{H}(T) = \sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\sigma(T).$$

Proposición 0.11 a) *$\mathcal{H}^2 = p!\mathcal{H}$.* b) *Si $\mathcal{H}(T) = 0$, para $T \in \mathcal{T}_p^0$, entonces $\mathcal{H}(T\otimes Q) = \mathcal{H}(Q\otimes T) = 0$, para cada $Q \in \mathcal{T}_q^0$.* c) *$\mathcal{H}(\mathcal{T}_p^0) = \Lambda_p$.* d) *$T \in \mathcal{T}_p^0$ es hemisimétrico si y sólo si $\mathcal{H}(T) = p!T$.* e) *Si $F\colon V \longrightarrow U$ es diferenciable entonces $\mathcal{H}$ conmuta con*

$$F^*\colon \mathcal{T}_p^0(U) \to \mathcal{T}_p^0(V).$$

Definición. Sean $\omega_r = \mathcal{H}(T_r) \in \Lambda_r$ y $\omega_s = \mathcal{H}(T_s) \in \Lambda_s$. Llamaremos *producto exterior* de estos campos tensoriales al campo tensorial

$$\omega_r \wedge \omega_s = \mathcal{H}(T_r \otimes T_s),$$

por tanto si $\omega_i \in \Lambda_1$, $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p = \mathcal{H}(\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_p)$, pues $\mathcal{H}(\omega_i) = \omega_i$; y si $D_i \in \mathcal{D}$

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p(D_1,\ldots,D_p) = \sum_{\sigma\in S_p} (\operatorname{sig}\sigma)\omega_1 D_{\sigma(1)}\cdots\omega_p D_{\sigma(p)} = \det(\omega_i D_j).$$

Proposición 0.12 *(a) $\omega_r\wedge\omega_s = (-1)^{rs}\omega_s\wedge\omega_r$.*
(b) $i_D(\omega_r\wedge\omega_s) = (i_D\omega_r)\wedge\omega_s + (-1)^r\omega_r\wedge(i_D\omega_s)$.
(c) Si r es impar $\omega_r\wedge\omega_r = 0$.

Proposición 0.13 *Para* $n < r$, $\Lambda_r = \{0\}$ *y en un abierto coordenado* $(V; v_i)$, *una base de* $\Lambda_r(V)$, *para* $r \le n$, *es*

$$dv_{i_1} \wedge \ldots \wedge dv_{i_r}, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n.$$

0.0.13. Derivada de Lie.

Definición. Dado un campo D con grupo uniparamétrico τ_t y un campo tensorial T llamamos *derivada de Lie* de T con D al campo tensorial del mismo tipo

$$D^L T = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^* T - T}{t}.$$

Proposición 0.14 i) $D^L T = Df$, *para cada* $T = f \in \mathcal{C}^\infty$.
ii) $D^L T = [D, E]$, *para cada* $T = E \in \mathcal{D}$.
iii) $D^L(df) = d(Df)$, *para cada* $f \in \mathcal{C}^\infty$.
iv) $D^L(T \otimes T') = D^L T \otimes T' + T \otimes D^L T'$.
v) $D(\omega E) = D^L \omega(E) + \omega(D^L E)$, *para cada* $\omega \in \Omega$ *y* $E \in \mathcal{D}$.
vi) *Para cada campo tensorial* T, $D_i \in \mathcal{D}$ *y* $\omega_j \in \Omega$

$$\begin{aligned} D[T(D_i, \omega_j)] = D^L T(D_i, \omega_j) + T(D^L D_1, D_2, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) + \cdots + \\ + T(D_1, \ldots, D^L D_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) + T(D_1, \ldots, D_p, D^L \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q) + \\ + \cdots + T(D_1, \ldots, D_p, \omega_1, \ldots, \omega_{q-1}, D^L \omega_q). \end{aligned}$$

vii) $D^L T = 0$ *si y sólo si* $\tau_{t*} T = T$, *para cada campo tensorial* T *y restringiendo* T *a los entornos en los que* τ_t *es difeomorfismo.*
viii) $(D_1 + D_2)^L = D_1^L + D_2^L$.
ix) $[D_1, D_2]^L = D_1^L \circ D_2^L - D_2^L \circ D_1^L$.
x) $D^L(\omega_r \wedge \omega_s) = D^L \omega_r \wedge \omega_s + \omega_r \wedge D^L \omega_s$.

0.0.14. Diferencial exterior.

Existe una única aplicación $\mathbb{R}$–lineal $d\colon \Lambda = \oplus_p \Lambda_p \longrightarrow \Lambda$, a la que llamamos *diferencial exterior*, tal que para cada $p \ge 0$, $d(\Lambda_p) \subset \Lambda_{p+1}$ y para todo $D \in \mathcal{D}$ verifica

$$D^L = i_D \circ d + d \circ i_D.$$

Diremos que una p–forma ω_p es *exacta* si es $d\omega_{p-1}$, para una $\omega_{p-1} \in \Lambda_{p-1}$ y que es *cerrada* si $d\omega_p = 0$.

La diferencial tiene las siguientes propiedades:
1) $d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q$.
2) $d^2 = 0$. Por tanto toda forma exacta es cerrada.

3) $D^L \circ d = d \circ D^L$, para cada $D \in \mathcal{D}$.

4) Si $F\colon V \longrightarrow U$ es diferenciable, entonces $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$, para cada $\omega \in \Lambda$.

5) Para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ y $\omega \in \Omega$ se tiene

$$d\omega(D_1, D_2) = D_1(\omega D_2) - D_2(\omega D_1) - \omega[D_1, D_2].$$

0.0.15. Fibrado cotangente. Campos Hamiltonianos

Hemos visto que en el fibrado cotangente $\mathcal{T}^*(\mathcal{V})$, de una variedad diferenciable $\mathcal{V}$, hay una 1–forma canónica λ, llamada de Liouville, que en coordenadas se escribe de la forma $\sum z_i dx_i$. Su diferencial $\Lambda = d\lambda$ (en coordenadas $= \sum dz_i \wedge dx_i$) es una 2–forma que define un isomorfismo canónico entre los campos y las 1–formas en el fibrado cotangente

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^*(\mathcal{V})) \to \Omega(\mathcal{T}^*(\mathcal{V})) \ , \quad D \to i_D\Lambda,$$

que en coordenadas es

$$i_D\Lambda = i_D(\sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i) = \sum_{i=1}^n Dz_i dx_i - \sum_{i=1}^n Dx_i dz_i,$$

y por tanto se tiene la correspondencia

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \to -dz_i, \qquad \frac{\partial}{\partial z_i} \to dx_i.$$

Definición. Diremos que $D \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ es un *campo Hamiltoniano* si $i_D\Lambda$ es exacta, es decir si existe $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que

$$i_D\Lambda = -dh,$$

a esta función h la llamaremos *Hamiltoniano* asociado al campo D (que en general denotaremos con D_h).

Si D es Hamiltoniano, es decir $i_D\Lambda = -dh$, entonces h es integral primera suya, $Dh = 0$, y en coordenadas

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

y sus curvas integrales satisfacen las llamadas *ecuaciones de Hamilton*

$$x_i' = \frac{\partial h}{\partial z_i}(x,z) \ , \quad z_i' = -\frac{\partial h}{\partial x_i}(x,z).$$

0.0.16. Variedades orientadas.

Si $(V; x_i)$ es un abierto coordenado de una variedad $\mathcal{V}$ de dimensión n, entonces $\Lambda_n(V) = \{f\omega_n : f \in \mathcal{C}^\infty(V)\}$ siendo

$$\omega_n = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Si V es conexo, las posibles bases de $\Lambda_n(V)$ son de dos tipos: las que tienen la misma *orientación* que ω_n, es decir las de la forma $f\omega_n$ con $f > 0$, y las que tienen orientación contraria (con $f < 0$).

Definición. Diremos que una variedad $(\mathcal{V}, \mathcal{C}^\infty)$ es *orientable* si existe $\omega_n \in \Lambda_n$, que no se anula en ningún punto de $\mathcal{V}$. Si además $\mathcal{V}$ es conexa el conjunto $\{\omega \in \Lambda_n : \omega_x \neq 0, \forall x \in \mathcal{V}\}$ es unión disjunta de

$$\Lambda^+ = \{f\omega_n,\ f > 0\}, \quad \text{y} \quad \Lambda^- = \{f\omega_n,\ f < 0\}.$$

Una *orientación* en $\mathcal{V}$ consiste en elegir una de las dos clases anteriores, que generalmente denotamos Λ^+. Por una *variedad orientada* $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$, entenderemos una variedad orientable, conexa y con una orientación. En una variedad orientada diremos que dos n–formas $\omega, \omega' \in \Lambda_n$, *tienen la misma orientación* si están en la misma clase y *orientación contraria* si están en distinta. Del mismo modo diremos que dos sistemas de coordenadas $v = (v_i)$ y $u = (u_i)$, en un abierto coordenado V, están igualmente orientados si $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n$ y $du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ están en la misma clase. Diremos que una base de campos D_i está *bien orientada* si $\omega(D_1, \ldots, D_n) > 0$, para $\omega \in \Lambda^+$. Observemos que si $E_i = \sum a_{ij} D_j$ es otra base de campos, entonces

$$\begin{aligned} \omega(E_1, \ldots, E_n) &= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}) \omega(D_{j_1}, \ldots, D_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}) \omega(D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(n)}) \qquad (1) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) (\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}) \omega(D_1, \ldots, D_n) = \det(a_{ij}) \omega(D_1, \ldots, D_n), \end{aligned}$$

y el signo del $\det(a_{ij})$ dice si está bien orientada o no.

Ejemplos de variedades orientables son:

1) $\mathbb{R}^n$ con $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

2) Una hipersuperficie cerrada de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} = \{f = 0\}$, con $d_x f \neq 0$ para cada $x \in \mathcal{S}$. Basta tomar $\omega = i_N(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$, donde $N = \operatorname{grad}(f) \in \mathcal{D}(S)^\perp$ es no nulo.

3) Los espacios proyectivos reales de dimensión impar.

4) El fibrado cotangente de cualquier variedad de dimensión n, $\Omega_{2n} = \Lambda \wedge \cdots \wedge \Lambda$, pues localmente $\Lambda = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge dx_i$ y $\Omega_{2n} = n!\, dz_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge dx_n$.

Ejemplos de variedades no orientables son:
1) La banda de Möebius.
2) Los espacios proyectivos reales de dimensión par.

0.0.17. Integración en una variedad orientada

Definición. Llamaremos *soporte de* $\omega \in \Lambda_n$, al cerrado

$$\text{sop}(\omega) = \overline{\{x \in \mathcal{V} : \omega_x \neq 0\}}.$$

Definición. Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad orientada, $(V; v = (v_i))$ un abierto conexo coordenado de $\mathcal{V}$ y $V_n = v(V) \subset \mathbb{R}^n$ el abierto correspondiente por el difeomorfismo v. Por brevedad denotamos la n–forma $dv = dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda_n(V)$. Dada una n–forma $\omega \in \Lambda_n$ de soporte compacto en V, por tanto nula fuera de V, se expresa en este abierto de la forma $\omega = f(v)dv$, para $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, la cual se anula fuera de V_n, y definimos la *integral* de ω como

$$\int \omega = \begin{cases} \int f\, dm = \int_{V_n} f dx_1 \cdots dx_n, & \text{si } dv \in \Lambda^+; \\ -\int f\, dm, & \text{si } dv \in \Lambda^-. \end{cases} \tag{2}$$

para m la medida de Lebesgue.

Para ver que está bien definida, consideremos otro sistema de coordenadas $u = (u_i)$ de V, y el abierto correspondiente $U_n = u(V)$, para el que

$$\omega = g(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = f(v)dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

y por tanto tales que $f(v_1, \ldots, v_n) = g(u_1, \ldots, u_n) \det(\partial u_i/\partial v_j)$, es decir para el difeomorfismo $F = (f_i) = u \circ v^{-1} : V_n \subset \mathbb{R}^n \to U_n \subset \mathbb{R}^n$, con $f_i = y_i \circ F$, que en V_n

$$f(x) = g[F(x)] \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),$$

y por el *Teorema del cambio de variable* se tiene que

$$\int_{U_n} g(y)dy_1 \cdots dy_n = \int_{V_n} g[F(x)]\, |\det(f_{ix_j})| dx_1 \cdots dx_n$$

por lo que $\int g\, dm = \pm \int f\, dm$, con el signo positivo si el determinante es positivo (lo cual equivale a que u y v estén igualmente orientados) y negativo en caso contrario.

Dado que el Teorema de cambio de variable es válido para funciones g Borel medibles no negativas ó integrables, la definición de integral se puede generalizar para n formas no diferenciables, en particular para una n–forma de soporte compacto que sea diferenciable en dos abiertos disjuntos cuyo complementario sea de medida nula.

0.0.18. Variedades con borde

Definición. Recordemos que en un espacio topológico $\mathcal{V}$ la frontera de un conjunto A, ∂A, es el conjunto de puntos cuyos entornos cortan tanto al conjunto A como a A^c. Por lo que obviamente $\partial A = \partial A^c$. Por otra parte también se tiene que $\partial A = \overline{A} - A^0$.

Definición. Llamaremos *variedad con borde* en una variedad $\mathcal{V}$ a un cerrado $C = \overline{V}$ con V un abierto conexo y tal que $\partial V = \partial \overline{V} = S$ sea una subvariedad cerrada de dimensión $n-1$ (ó el $\varnothing$), a la que llamamos su *borde* que separa dos variedades con borde C y V^c.

Proposición 0.15 *Sea C una variedad con borde S de $\mathcal{V}$ y sea $x \in S$. Entonces existe un entorno abierto V_x de x en $\mathcal{V}$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, con $d_p f \neq 0$ para todo $p \in V_x$, tales que*

$$S \cap V_x = \{p \in V_x : f(p) = 0\}, \quad V \cap V_x = \{p \in V : f(p) < 0\}.$$

Además si W_x es otro entorno de x y $g \in \mathcal{C}^\infty(W_x)$ verificando las condiciones anteriores, entonces para cada $D_x \in T_x(\mathcal{V})$ se tiene que $D_x f > 0$ sii $D_x g > 0$ y diremos que D_x apunta hacia fuera de C.

Una orientación en $\mathcal{V}$ induce una orientación natural en el borde de cada variedad con borde $C \subset \mathcal{V}$.

Proposición 0.16 *Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad orientada, $x \in S$ y V un abierto entorno coordenado de x en $\mathcal{V}$. Entonces si $D, D' \in \mathcal{D}(V)$ son no nulos y apuntan hacia fuera de C y $\omega, \omega' \in \Lambda^+(V)$, se tiene que las $n-1$–formas de $S \cap V$, $i^*(i_D\omega)$ e $i^*(i_{D'}\omega')$ son no nulas y tienen la misma orientación, que es (si ∂v_1 apunta hacia fuera de C y $dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \in \Lambda^+(V)$)*

$$i^*(dv_2 \wedge \cdots \wedge dv_n).$$

Proposición 0.17 *Sea C una variedad con borde en una variedad orientada $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$. Entonces Λ^+ induce una orientación natural en ∂C.*

Definición. Definimos la integral de $\omega \in \Lambda_n$ en una variedad con borde C de $\mathcal{V}$ (ω con soporte compacto si C es arbitrario y cualquiera si C es compacto), como

$$\int_C \omega = \int I_C \omega,$$

donde I_C es la función indicador, que vale 1 en C y 0 fuera.

0.0.19. El Teorema de Stokes.

Teorema 0.18 (Teorema de Stokes) *Sea $(\mathcal{V}, \Lambda^+)$ una variedad orientada de dimensión n y sea C una variedad con borde de $\mathcal{V}$. Entonces para cualquier $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$, si C es compacto, ó en general cualquier $\omega \in \Lambda_{n-1}(\mathcal{V})$ de soporte compacto, se tiene*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Corolario 0.19 *En una variedad orientable $\mathcal{V}$, n–dimensional, toda n–forma exacta tiene integral 0 en cualquiera de los casos: (i) la variedad es compacta ó (ii) la n–forma es de soporte compacto.*

En 1828 M.V.Ostrogradsky demostró la fórmula (para $n = 3$)

$$\int_C (P_x + Q_y + R_z)\, dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial C} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$

que es un caso particular de la fórmula de Stokes y básicamente el Teorema de la divergencia que veremos mas adelante.

En 1854 (año en el que gana Maxwell el premio Smith), G. Gabriel Stokes plantea para ese premio el problema: *Demostrar la fórmula*

$$\int_C (R_y - Q_z)\, dydz + (R_x - P_z)\, dxdz + (Q_x - P_y)\, dxdy = \int_{\partial C} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Formula de Gauss-Green 0.20 *Sea V un abierto de $\mathbb{R}^2$ con $\partial V = \partial \overline{V}$ una subvariedad 1–dimensional de $\mathbb{R}^2$. Entonces para $P, Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ se tiene, siendo $C = \overline{V}$ compacto o P y Q de soporte compacto,*

$$\int_C (Q_x - P_y) dx \wedge dy = \int_{\partial C} Pdx + Qdy.$$

Criterio De Bendixson 0.21 *Sea $D = f\partial_x + g\partial_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si $f_x + g_y > 0$ (< 0), entonces D no tiene órbitas cíclicas.*

El Teorema de Stokes, se puede generalizar a variedades con borde con "*esquinas*".

0.0.20. Forma de volumen en variedades de Riemann

Teorema 0.22 *En una variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V}, g, \Lambda^+)$ existe una única n–forma $\omega_v \in \Lambda^+$, a la que llamaremos forma de volumen, tal que para cada $x \in \mathcal{V}$ y cada base ortonormal bien orientada $D_i \in T_x(\mathcal{V})$, se tiene $\omega_{vx}(D_1, \ldots, D_n) = 1$.*

Sea $E_1,\dots,E_n\in\mathcal{D}$ una base ortonormal bien orientada en un abierto coordenado (con las coordenadas bien orientadas) (V,v_i). Si en él $g=\sum g_{ij}dv_i\otimes dv_j$ y $\partial_i=\sum a_{ij}E_j$, tendremos que $g_{ij}=g(\partial_i,\partial_j)=\sum a_{ik}a_{jk}$, es decir que $(g_{ij})=\mathbf{A}\mathbf{A}^t$, para $\mathbf{A}=(a_{ij})$. Y por tanto $(\det\mathbf{A})^2=\det(g_{ij})$ y si $\omega_v=f dv_1\wedge\cdots\wedge dv_n$, tendremos por (1) que

$$f=\omega_v(\partial v_1,\dots,\partial v_n)=\det(A)=\sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Cualquier n–forma $\omega_v\in\Lambda^+$ en una variedad orientada nos permite definir el concepto de volumen $\mathrm{Vol}(C)=\int_C\omega_v$. En el caso particular de que nuestra variedad sea Riemanniana y subvariedad $S_n\subset\mathbb{R}^m$, con la métrica inducida de $\mathbb{R}^m$ y la tengamos parametrizada por una inmersión $F\colon U_n\subset\mathbb{R}^n\to S_n\subset\mathbb{R}^m$, tendremos que sobre S_n, $F=(f_j)$ es difeomorfismo de inversa $v=(v_i)$ que es un sistema de coordenadas en S_n (que nos define la orientación), para el que $\partial v_i=F_*\partial x_i=\sum_{j=1}^m(\partial f_j/\partial x_i)\partial y_j$ y como

$$\det(g_{ij}(F(x))=\det(\partial v_i\cdot\partial v_j)(F(x))=\det(DF_x)^t(DF_x)=J(DF_x)^2,$$

tendremos que $\mathrm{Vol}=\gamma_n H_n$, pues (ver apuntes TMed)

$$\gamma_n H_n(F(A))=\int_A J(DF_x)\,dm_n=\int_{F(A)}\omega_v.$$

0.0.21. Aplicaciones a la Física

Definición. Sea $(\mathcal{V},\Lambda^+,\omega_v)$ una variedad orientada con una forma de volumen $\omega_v\in\Lambda^+$. Llamamos *divergencia de un campo* $D\in\mathcal{D}(\mathcal{V})$ a la función $\mathrm{div}(D)\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, tal que $D^L\omega_v=\mathrm{div}(D)\omega_v=d(i_D\omega_v)$, pues $D^L\omega_v\in\Lambda_n$. Si $\mathcal{V}=\mathbb{R}^n$ y $D=\sum f_i\partial_i$, entonces $\mathrm{div}(D)=\sum(\partial_i f_i)$.

Definición. Dada una hipersuperficie S de una variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V},g,\omega_v)$ (borde de una variedad con borde C), con vector normal unitario exterior ∂_n, llamaremos *flujo de un campo* $D\in\mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de S, a

$$\int_S D\cdot\partial_n\;\omega_S=\int_S i_D\omega_v, \tag{3}$$

para $\omega_S=i_{\partial_n}\omega_v$ la forma de volumen de S.

Teorema de la divergencia 0.23 *El flujo de un campo $D\in\mathcal{D}(\mathcal{V})$ a través de una hipersuperficie, frontera de una variedad con borde C de una variedad Riemanniana orientada $\mathcal{V}$, es igual a la integral de la divergencia del campo D en C.*

Teorema de Liouville 0.24 *Sea V un abierto de una variedad orientada $(\mathcal{V}, \omega_v)$ con una forma de volumen y $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ con grupo uniparamétrico τ_t. Si denotamos $V_t = \tau_t(V)$ y $V(t) = \mathrm{Vol}\,[V_t]$, entonces*

$$V'(t) = \int_{V_t} \mathrm{div}(D)\,\omega_v.$$

Corolario 0.25 *Si $\mathrm{div}(D) = 0$, entonces el g.u.l. τ_t de D conserva los volúmenes. En particular el de las ecuaciones de Hamilton en $\mathcal{T}^*(\mathcal{V})$, $x_i' = -h_{z_i}$, $z_i' = h_{x_i}$, conserva los volúmenes, pues $D^L\Omega_{2n} = 0$, ya que $D^L\Lambda = di_D\Lambda = d(-dh) = 0$.*

Definición. Llamamos *circulación* de un campo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ sobre una curva orientada L de la variedad Riemanniana $(\mathcal{V}, g)$ a

$$\int_L i_D g$$

Si nuestra variedad Riemanniana orientada $(\mathcal{V}, g, \omega_v)$ es tridimensional, llamamos *rotacional* de D, $R = \mathrm{rot}\, D$, al único campo tangente que verifica, $i_R\omega_v = d(i_D g)$. En el caso $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ y $D = f\partial_x + g\partial_y + h\partial_z$

$$R = (h_y - g_z)\partial_x + (f_z - h_x)\partial_y + (g_x - f_y)\partial_z.$$

Si S es una superficie orientada del espacio, con borde la curva L, entonces por Stokes

$$\int_L i_D g = \int_S d(i_D g) = \int_S i_{\mathrm{rot}\, D}\omega,$$

Teorema del rotacional 0.26 *En el espacio, la circulación a lo largo de una curva cerrada, frontera de una superficie S es igual al flujo del rotacional a través de S.*

0.0.22. Interpretación física de la integral compleja

A continuación veremos la interpretación física de la $\int f(z)dz$, para una función $f = u + iv$, con $u, v \in \mathcal{C}^\infty(U)$. En primer lugar llamaremos *campo tangente asociado* a $f = u + iv$, al campo que define su conjugada,

$$D = u\partial_x - v\partial_y \in \mathcal{D}(U).$$

Consideramos en el plano la métrica Riemanniana estándar g con 2–forma de área $\omega_2 = dx \wedge dy$ y consideremos una curva L orientada. Como es Riemanniana, tiene una 1–forma de longitud ω_1, que en el vector unitario T (bien orientado) vale 1. Consideremos su ortogonal unitario N tal que $\omega_2(N, T) = 1$.

Por último consideremos una parametrización de L bien orientada, es decir $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $L = \sigma[a,b]$, y $\omega_1(\sigma') > 0$. Entonces se tiene que en L

$$i_D g = udx - vdy = (D \cdot T)\,\omega_1, \quad i_D\omega_2 = vdx + udy = (D \cdot N)\,\omega_1,$$

$$\begin{aligned}
\int_L f(z)dz &= \int_L (u+iv)(dx+idy) = \int_L (udx - vdy) + i\int_L (vdx + udy) \\
&= \int_L i_D g + i\int_L i_D\omega_2 = \int_L D \cdot T\,\omega_1 + i\int_L D \cdot N\,\omega_1 \\
&= \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt.
\end{aligned}$$

Observemos que la parte real es la **circulación** de D a lo largo de L y la parte imaginaria el **flujo** de D que atraviesa L.

Ahora bien si nuestra curva es cerrada, borde de una variedad con borde C, podremos utilizar Stokes y para la función $\operatorname{rot} D = -u_y - v_x$

$$\int_L f(z)dz = \int_{\partial C} i_D g + i\int_{\partial C} i_D\,\omega_2 = \int_C \operatorname{rot} D\,\omega_2 + i\int_C \operatorname{div} D\,\omega_2.$$

La condición necesaria y suficiente para que f sea holomorfa en U es que u y v sean de clase 1 en U y se satisfagan las ecuaciones de Cauchy–Riemann (a la izquierda)

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} D = u_x - v_y = 0, \\ \operatorname{rot} D = -u_y - v_x = 0, \end{cases}$$

y se tiene el **Teorema de Cauchy**, $\int_L f(z)dz = 0$ en cualquier curva cerrada L borde de una variedad con borde $C \subset U$.