Apuntes de Grupos de Lie

Badajoz, 30 de diciembre de 2017

Volumen 3

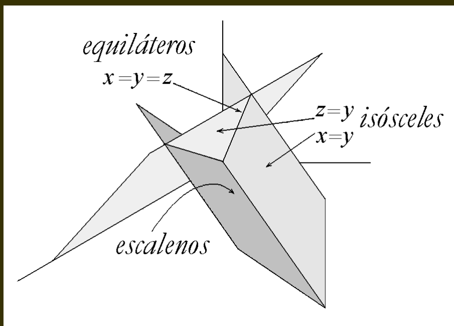

Fig. La Variedad de los triángulos

Dpto. de Matemáticas
Univ. de Extremadura

Apuntes de Grupos de Lie

Dpto. de Matemáticas
Univ. de Extremadura

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Índice general

Tema 1

Grupos de Lie

1.1. Introducción. Conceptos básicos

1.1.1. Variedades diferenciables

Definición. Llamamos *estructura diferenciable* en un espacio topológico $\mathcal{X}$, a una colección

$$\{\mathcal{C}^\infty(U) \subset \mathcal{C}(U), \quad \text{con } U \text{ abierto de } \mathcal{X}\},$$

de subconjuntos de las funciones continuas de cada abierto U de $\mathcal{X}$, cada una de las cuales es una $\mathbb{R}$-álgebra, que llamaremos de *funciones diferenciables*, que satisfacen las siguientes propiedades:

i.- La restricción de una función diferenciable es diferenciable, es decir dados dos abiertos $U \subset V$,

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad f_{|U} \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

ii.- Dada una colección U_i de abiertos, $U = \cup U_i$ y $f \in \mathcal{C}(U)$, cuya restricción a cada U_i es diferenciable, entonces $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

iii.- Para cada punto $x \in \mathcal{X}$ existe un abierto U_x, que lo contiene y al que llamaremos *entorno coordenado de* x, un abierto V de un $\mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $H : U_x \to V$, tal que para cada abierto $U \subset U_x$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(H(U)) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ H \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Llamaremos *variedad diferenciable* a un espacio topológico dotado de una estructura diferenciable.

Nota 1.1.1 Normalmente se suele añadir a la definición de variedad diferenciable el que sea *Hausdorff* y de *base numerable* (en esta primera lección consideraremos que las variedades son de base numerable). Sin embargo nosotros no lo incluimos en la definición por dos razones. La primera es que construiremos cocientes que serán variedades diferenciables, pero no Hausdorff en general y la segunda es que los grupos de Lie con la definición anterior automáticamente son Hausdorff y de base numerable sus componentes conexas.

Proposición 1.1.2 *En toda variedad diferenciable los puntos son cerrados.*

Demostración. Sean $x, p \in \mathcal{X}$ y $p \neq x$, entonces por la propiedad (iii) existe un entorno coordenado U_x de x que no contiene a p, por tanto $\{p\}^c$ es abierto y $\{p\}$ cerrado. ∎

Proposición 1.1.3 *Toda variedad es unión disjunta numerable de sus componentes conexas, que son abiertos y cerrados de la variedad.*

Demostración. Consideremos, para cada x de la variedad, la unión U_x de todos los conjuntos conexos de la variedad que contienen a x. Se demuestra fácilmente que cada U_x es conexo, que es abierto (por la propiedad iii), que es cerrado pues su complementario es abierto y que cada dos o son iguales o disjuntos, por tanto si el espacio tiene una base numerable de abiertos, la colección de estas componentes conexas a lo sumo es numerable. ∎

Definición. Diremos que una aplicación continua entre variedades diferenciables

$$F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

es *diferenciable* si para cada abierto $V \subset \mathcal{Y}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \Rightarrow \quad F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(f^{-1}(V)).$$

Definición. Llamamos *germen* en un punto x, de una función continua (diferenciable) f definida en un entorno abierto de x, a la clase de equivalencia de todas las funciones continuas (diferenciables) definidas en entornos abiertos de x, que coincidan con f en algún entorno de x. Denotaremos con $\mathcal{C}_x(\mathcal{X})$ (ó $\mathcal{C}_x$ si no hay confusión) y $\mathcal{C}_x^\infty$ las $\mathbb{R}$–álgebras de gérmenes de funciones continuas y diferenciables respectivamente en x.

Llamamos *espacio tangente* de una variedad $\mathcal{X}$ en un punto x al $\mathbb{R}$–espacio vectorial $T_x(\mathcal{X})$, de las derivaciones

$$D_x\colon \mathcal{C}_x^\infty \longrightarrow \mathbb{R},$$

en el punto x, el cual —si $\mathcal{X}$ es Hausdorff y de base numerable como supondremos en el resto de esta primera lección—, se demuestra que coincide con las derivaciones en x de todo el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ en $\mathbb{R}$. Llamamos *espacio cotangente* a su dual, que denotamos $T_x^*(\mathcal{X})$.

Llamamos *campos tangentes* a las derivaciones

$$D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X}),$$

las cuales forman un $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$–módulo, que denotamos $\mathcal{D}(\mathcal{X})$, y un álgebra con el producto definido por el *corchete de Lie*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Llamamos 1–*formas* a los elementos de su módulo dual $\Omega(\mathcal{X})$.

Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$ llamamos *diferencial* de f a la 1–forma

$$df\colon \mathcal{D}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X}), \qquad df(D) = Df.$$

Definición. Dada una aplicación diferenciable

$$F\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

llamamos *aplicación lineal tangente* en $x \in \mathcal{X}$ a

$$F_*\colon T_x(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{Y}), \qquad F_*(D_x) = D_x \circ F^*,$$

a la aplicación dual entre espacios cotangentes la denotamos F^*. Llamamos *rango* de F en x al rango de F_*, es decir a la dimensión de su imagen.

1.1.2. Inmersiones locales, subvariedades

Definición. Decimos que F es una *inmersión local* en x si la aplicación

$$F^*\colon C_{F(x)}^\infty \longrightarrow C_x^\infty, \qquad F^*(f) = f \circ F,$$

definida entre álgebras de gérmenes de funciones diferenciables, es sobre. Lo cual equivale a que

$$F_*\colon T_x(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{F(x)}(\mathcal{Y}),$$

sea inyectiva. Diremos que F es *inmersión* si es inyectiva e inmersión local en todo punto, en cuyo caso diremos que $F(\mathcal{X})$ es una *subvariedad inmersa* en $\mathcal{Y}$. Si además, con la topología inducida por $\mathcal{Y}$, resulta que

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow F(\mathcal{X}),$$

es un homeomorfismo, diremos que $F(\mathcal{X})$ es una *subvariedad* (ó *subvariedad regular* como la llaman algunos autores), de $\mathcal{Y}$.

Teorema de caracterización de subvariedades 1.1.4 *$\mathcal{S}$ es una subvariedad de una variedad $\mathcal{X}$ si y sólo si para cada $p \in \mathcal{S}$, existe un abierto coordenado V_p de p en $\mathcal{X}$, con coordenadas u_i, tal que*

$$\mathcal{S} \cap V_p = \{x \in V_p :\ u_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, k\}.$$

Teorema del rango 1.1.5 *Si $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es diferenciable de rango constante k, entonces para cada $p \in \mathcal{X}$ y $q = F(p)$ existen entornos coordenados V_p y V_q, con coordenadas $(u_1, \dots, u_n)$ y $(v_1, \dots, v_m)$, tales que si $x \in V_p$ tiene coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$, $F(x)$ tiene coordenadas*

$$(x_1, \dots, x_k, 0 \dots, 0).$$

Proposición 1.1.6 *Sea $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ diferenciable de rango constante k.*

1.- *Para cada $q \in \mathcal{Y}$, $F^{-1}(q)$ es vacío ó una subvariedad cerrada de $\mathcal{X}$, de dimensión* $\dim \mathcal{X} - k$.

2.- *Cada $p \in \mathcal{X}$ tiene un entorno abierto V_p tal que $F(V_p)$ es una subvariedad de $\mathcal{Y}$ de dimensión k.*

3.- *Si F es sobre* $\dim \mathcal{Y} = k$.

4.- *Si F es localmente inyectiva $k = n$ y F es inmersión local.*

Demostración. 1.- Sea $p \in F^{-1}(q)$, y consideremos los entornos del teorema del rango, entonces

$$\begin{aligned} F^{-1}(q) \cap V_p &= \{x \in V_p :\ F(x) = q\} \\ &= \{x \in V_p :\ v_j(F(x)) = v_j(q),\ j \le k\} \\ &= \{x \in V_p :\ u_j(x) = v_j(q),\ j \le k\}. \end{aligned}$$

2.- En el entorno V_p, F es composición de una proyección (que lleva abiertos en abiertos) y una inmersión, por tanto existe un abierto $U \subset V_q$, tal que $F(V_p) = \{y \in U : \ v_{k+1} = \cdots = v_n = 0\}$.

3.- Como $\mathcal{X}$ es de base numerable, por el apartado anterior $\mathcal{Y}$ se puede poner como unión numerable de subvariedades de dimensión k y si $k < \dim \mathcal{Y}$ es absurdo porque las subvariedades son de medida nula y la unión numerable de conjuntos de medida nula es de medida nula. También porque las subvariedades son densas en ningún lado y por el Teorema de Baire su unión numerable también es densa en ningún lado.

4.- Es obvio. ∎

1.1.3. Distribuciones

Definición. Llamaremos *distribución* en una variedad $\mathcal{X}$ a una aplicación

$$x \in \mathcal{X} \longrightarrow \Delta_x,$$

donde Δ_x es un subespacio de $T_x(\mathcal{X})$, verificando la siguiente condición:

Para cada $p \in \mathcal{X}$ existe un abierto $U_p \subset \mathcal{X}$ y campos $D_1, \ldots, D_r \in \mathcal{D}(U_p)$, tales que para todo $x \in U_p$, $D_{1x}, \ldots, D_{rx}$ son base de Δ_x. Si la variedad es conexa al número r lo llamamos *rango* de la distribución.

Dada una distribución Δ_x, definimos para cada abierto $V \subset \mathcal{X}$ el submódulo de $\mathcal{D}(V)$

$$\Delta(V) = \{D \in \mathcal{D}(V) : \ D_x \in \Delta_x \quad \forall x \in V\}.$$

Habitualmente llamamos distribución a $\Delta = \Delta(\mathcal{X})$.

Definición. Diremos que una distribución Δ es *involutiva* si para $D_1, D_2 \in \Delta$ se tiene que $[D_1, D_2] \in \Delta$.

Teorema de Frobenius 1.1.7 *Una distribución de rango r es involutiva si y sólo si para cada $x \in \mathcal{X}$ existe un entorno abierto V de x en $\mathcal{X}$, y un sistema de coordenadas $(u_1, \ldots, u_n)$ en V, tales que $\Delta(V)$ está generada por*

$$\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_r},$$

y las subvariedades de V (a las que llamaremos franjas del entorno)

$$\mathcal{S} = \{x \in V : \ u_{r+1} = cte, \ldots, u_n = cte\},$$

son tangentes a la distribución, es decir para cada $z \in \mathcal{S}$

$$T_z(\mathcal{S}) = \Delta_z.$$

Definición. Llamaremos *variedad integral* de una distribución Δ de $\mathcal{X}$, a toda subvariedad inmersa conexa $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$, por tanto tal que

$$i \colon \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{X},$$

es inmersión, tal que para cada $x \in \mathcal{H}$

$$i_*[T_x(\mathcal{H})] = \Delta_{F(x)},$$

si no es conexa diremos que es una *variedad tangente.*

Nota 1.1.8 Observemos que en el teorema de Frobenius las franjas del entorno son variedades integrales y por lo tanto si una distribución es involutiva por todo punto pasa una variedad integral.

Ejercicio 1.1.9 *Sea Δ una distribución involutiva en $\mathcal{X}$ y V un abierto coordenado como en el teorema de Frobenius. Demostrar que si $\mathcal{H} \subset V$ es una variedad integral (conexa), entonces está en una franja, es decir existen $a_{r+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tales que*

$$\mathcal{H} \subset \{x \in V : \; u_{r+1} = a_{r+1}, \ldots, u_n = a_n\}.$$

Definición. Llamaremos *variedad integral máxima* de una distribución, pasando por un punto x a una variedad integral (conexa) $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$, tal que si $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ es otra variedad integral con $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{K}.$$

Veremos que si Δ es una distribución involutiva, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima. Pero para ello necesitamos unos resultados previos.

Teorema 1.1.10 *Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades diferenciables, y consideremos el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & \mathcal{V} \\ & {\scriptstyle H}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle G} & \\ & \mathcal{W} & \end{array}$$

donde G es inmersión y H es diferenciable, entonces cada afirmación implica la siguiente:

i) $G(\mathcal{V})$ es una subvariedad de $\mathcal{W}$.

ii) F es continua.

iii) F es diferenciable.

Demostración. (i)⇒(ii) Para cada abierto $V \subset \mathcal{V}$ se tiene por ser G inyectiva

$$F^{-1}(V) = F^{-1}[G^{-1}[G(V)]] = H^{-1}[G(V)],$$

y F es continua por serlo H y $G(\mathcal{V})$ tener la topología inducida por $\mathcal{W}$, por lo que $G(V) = A \cap G(\mathcal{V})$, con A abierto de $\mathcal{W}$ y $F^{-1}(V) = H^{-1}(A)$.

(ii)⇒(iii) Si $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ es continua, entonces podemos definir para cada $x \in \mathcal{U}$

$$F^*\colon \mathcal{C}_{F(x)}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{C}_x(\mathcal{U}),$$

tal que $F^*[f] = [F^*f]$, para cualquier representante f. Ahora que F es diferenciable se demuestra fácilmente en germen, pues si f es el germen de una función diferenciable en $y = F(x) \in \mathcal{V}$, para un punto $x \in \mathcal{U}$, entonces $f = G^*(g)$ (por ser G inmersión local), para g el germen de una función diferenciable de $\mathcal{W}$, por lo tanto

$$F^*(f) = F^*[G^*(g)] = H^*(g),$$

es el germen de una función diferenciable. ∎

Teorema 1.1.11 *Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ variedades diferenciables, y consideremos el diagrama conmutativo de teorema anterior, con G inmersión, H diferenciable y además para cada $y \in \mathcal{V}$,*

$$G_*[T_y(\mathcal{V})] = \Delta_{G(y)},$$

para Δ una distribución involutiva de $\mathcal{W}$. Entonces F es continua y por el resultado anterior diferenciable.

Demostración. Sea $V \subset \mathcal{V}$ un abierto y $x \in F^{-1}(V)$, basta encontrar un entorno abierto de x cuya imagen por F esté en V. Para ello consideremos $y = F(x)$ y $z = H(x) = G(y)$ (sin pérdida de generalidad podemos considerar que las variedades son de base numerable, pues podemos quedarnos con sendos entornos coordenados de cada punto). Sea $(W_z; w_i)$, entorno coordenado de z con coordenadas $(w_1, \ldots, w_m)$, tal que $w_i(z) = 0$ y para cada $p \in W_z$

$$\Delta_p =< \frac{\partial}{\partial w_1}{}_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_n}{}_p >,$$

y consideremos el abierto $G^{-1}(W_z)$, el cual tiene por (1.1.3) una colección numerable de componentes conexas V_k que son abiertos. Llamemos V_0 a la que contiene a y y $V_y = V \cap V_0$.

Ahora consideremos las funciones de $G^{-1}(W_z)$, $v_i = G^*(w_i) = w_i \circ G$, las cuales son constantes, para $i = n+1, \ldots, m$, en cada componente conexa V_k, pues para cada $q \in V_k$ y $D_q \in T_q(\mathcal{V})$

$$D_q v_i = D_q(w_i \circ G) = G_*(D_q) w_i = 0,$$

ya que $G_*(D_q) \in \Delta_{G(q)}$. Por lo tanto existen números $a_{ik} \in \mathbb{R}$, con $i = n+1, \ldots, m$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$, tales que

$$v_i[V_k] = a_{ik}, \qquad v_i[V_0] = 0.$$

Por otra parte, las funciones $v_i = w_i \circ G$, para $i = 1, \ldots, n$, son un sistema de coordenadas en V_0, ya que si $q \in V_0$ y E_{iq} es la base de $T_q(V_0)$ tal que

$$G_*(E_{iq}) = \frac{\partial}{\partial w_i}_{G(q)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tendremos que $d_q v_j \in T_q^*(\mathcal{V})$ es su base dual, pues

$$d_q v_i(E_{jq}) = E_{jq}(w_i \circ G) = G_*[E_{jq}] w_i = \delta_{ij},$$

y en estas coordenadas $G \colon V_0 \to W_z$ se expresa de la forma

$$(y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0),$$

por tanto podemos considerar un abierto $W \subset W_z$, entorno de z tal que

$$G(V_y) = \{p \in W : \ w_{n+1}(p) = \cdots = w_m(p) = 0\}.$$

Si ahora llamamos U a la componente conexa del abierto $H^{-1}(W)$ que contiene a x, basta demostrar que $F(U) \subset V_y \subset V$ ó equivalentemente por ser G inyectiva

$$H(U) = G[F(U)] \subset G(V_y).$$

Ahora por una parte tenemos que $F(U) \subset G^{-1}(W_z) = \cup V_k$, pues $G[F(U)] = H(U) \subset W \subset W_z$ y por tanto para $i = n+1, \ldots, m$

$$w_i[H(U)] = v_i[F(U)] \subset \{a_{ik} \in \mathbb{R} : \ k = 0, 1, \ldots\},$$

pero por otra parte $w_i[H(U)]$ es conexo, por ser imagen continua de un conexo, por lo que debe ser constante y como $x \in U$, $w_i[H(U)] = 0$, es decir que

$$H(U) \subset \{p \in W : \ w_{n+1}(p) = \cdots = w_m(p) = 0\} = G(V_y). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.1.12 *Sea Δ una distribución involutiva en una variedad $\mathcal{X}$, entonces por cada punto de la variedad pasa una única variedad integral máxima.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{K}$ el conjunto de puntos que se unen a p por una curva continua, diferenciable —salvo en un número finito de puntos—, y en los puntos en los que es diferenciable es tangente a la distribución. Veamos que: $\mathcal{K}$ es una variedad diferenciable, conexa, con base numerable; que la inclusión $i\colon \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{X}$ es inmersión local; que $\mathcal{K}$ es variedad integral máxima; y que es única.

Por el Teorema de Frobenius Δ es totalmente integrable, por tanto cada punto $x \in \mathcal{X}$, tiene un entorno abierto coordenado cúbico $(U_x; u_i)$, cuyas franjas son tangentes a la distribución, ahora bien como $\mathcal{X}$ tiene base numerable V_m, existe un m tal que $x \in V_m \subset U_x$, ahora elegimos para cada uno de estos m –que es una colección numerable–, un $U_m = U_x$ cualquiera que contenga a V_m. De este modo tendremos un recubrimiento numerable de $\mathcal{X}$, por abiertos coordenados cúbicos $(U_m; u_{mi})$, cuyas franjas son tangentes a la distribución y por comodidad pondremos $p \in U_0$. Sea $q \in \mathcal{K}$, sea $U_{m(q)}$ el abierto del recubrimiento que lo contiene y

$$\begin{aligned} V_q = \{x \in U_{m(q)} :\ & u_{m(q)r+1}(x) = u_{m(q)r+1}(q), \dots, \\ & u_{m(q)n}(x) = u_{m(q)n}(q)\}, \end{aligned}$$

la franja del abierto que lo contiene, la cual está en $\mathcal{K}$, pues de q se llega a todos esos puntos por curvas tangentes a la distribución. Ahora consideramos en cada V_q la topología para la que

$$\phi = (u_{m(q)1}, \dots, u_{m(q)r})\colon V_q \to \phi(V_q) \subset \mathbb{R}^r,$$

es un homeomorfismo y definimos un abierto $A \subset \mathcal{K}$ sii $A \cap V_q$ es abierto de V_q, para cada q. Ahora consideramos la estructura diferencial en $\mathcal{K}$ que definen las aplicaciones ϕ. Con esta estructura diferenciable $\mathcal{K}$ es una variedad de dimensión r, conexa —pues es conexa por arcos por definición— y veamos que tiene una base numerable de abiertos.

Basta ver que para cada m, $U_m \cap \mathcal{K}$ es una colección numerable de franjas, para ello observamos que cada punto $x \in U_m \cap \mathcal{K}$, se une a p por una curva, que se recubre con una colección finita de abiertos $U_0, U_{i_1}, \dots, U_{i_m}$ —este recubrimiento puede hacerse de muchas formas, pero a lo sumo hay una colección numerable de ellos, pues es numerable la colección de subconjuntos finitos de un conjunto numerable—. Ahora en cada uno de los U_{i_j}, la curva por ser continua y tangente a la distribución va por una única franja, por tanto sale de la franja de U_0 que contiene a p y pasa a una franja de U_{i_1} de esta a una del siguiente abierto y así hasta el último. Basta entonces ver que cada franja S se interseca con cada abierto U_i en una colección a lo sumo numerable de franjas. $S \cap U_i$ es un abierto de la subvariedad S, que como tiene base numerable tiene (por (1.1.3)) una colección numerable de componentes conexas, que como son tangentes a la distribución y son conexas están cada una de ellas en una franja.

Por tanto $\mathcal{K}$ tiene base numerable y es una variedad diferenciable conexa, para la que la inclusión es inmersión local y es tangente a Δ. Por tanto es variedad integral pero además es maximal, pues si hubiera otra $\mathcal{N}$ pasando por p, cada punto suyo x puede unirse a p (pues es arco conexa) por una curva diferenciable tangente a la distribución, por tanto de $\mathcal{K}$.

Veamos ahora que es única. Por lo anterior si hubiera otra $\mathcal{N}$ pasando por p, sería $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ y por ser maximal, se daría la igualdad conjuntista. Ahora bien las dos inclusiones serían aplicaciones diferenciables por (1.1.11), por tanto son variedades diferenciables iguales y $\mathcal{K}$ es única. ∎

1.1.4. Proyecciones regulares

Definición. Diremos que una aplicación diferenciable $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es una *proyección regular* en $x \in \mathcal{X}$ si se verifican cualquiera de las condiciones equivalentes:

1. $\pi_*\colon T_x(\mathcal{X}) \to T_{\pi(x)}(\mathcal{Y})$, es sobre.

2. Existen entornos coordenados V_x de x y V_y de $y = \pi(x)$, tales que si $p \in V_x$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, $F(p)$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_m)$.

3. Existe una sección local $\sigma\colon V_y \to \mathcal{X}$, $\pi \circ \sigma = Id$, tal que $\sigma(y) = x$.

Diremos que π es *proyección regular* si lo es en todo punto.[1]

Veamos otras propiedades de las proyecciones regulares (pero antes demos un resultado previo).

Lema 1.1.13 *Si $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es continua, abierta y sobre, entonces $U \subset \mathcal{Y}$ es abierto (cerrado) si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset \mathcal{X}$ es abierto (cerrado).*

[1] Observemos que por el apartado 3 de (1.1.6) si π es sobre y de rango constante, entonces es proyección regular, pues se satisface la condición 2 de la definición en todo punto.

Demostración. "$\Rightarrow$"por continuidad. "$\Leftarrow$"por que por una parte se tiene que para $A \subset \mathcal{Y}$, $\pi^{-1}(A^c) = [\pi^{-1}(A)]^c$, por tanto basta demostrarlo para U abierto. Ahora como π es sobre, $\pi[\pi^{-1}(U)] = U$ y es abierto si $\pi^{-1}(U)$ es abierto. ∎

Proposición 1.1.14 *Si $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es una proyección regular sobre, entonces se tienen las propiedades siguientes:*

1. *Para cada abierto $U \subset \mathcal{Y}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, si y sólo si $f \circ \pi \in \mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(U))$.*
2. *Para cada abierto $U \subset \mathcal{Y}$, $\phi\colon U \to \mathcal{Z}$ es diferenciable si y sólo si $\phi \circ \pi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathcal{Z}$ es diferenciable.*
3. *Para cada abierto $U \subset \mathcal{Y}$, $\phi\colon U \to \mathcal{Z}$ es proyección regular si y sólo si $\phi \circ \pi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathcal{Z}$ es proyección regular.*
4. *$U \subset \mathcal{Y}$ es abierto (cerrado) si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset \mathcal{X}$ es abierto (cerrado).*
5. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$ es subvariedad si y sólo si $\pi^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{X}$ es subvariedad.*

Demostración. "$\Rightarrow$"Para (1) y (2) es obvio por ser π diferenciable, para (3) por ser la composición de proyecciones regulares una proyección regular. Para (5) sea $x \in \pi^{-1}(\mathcal{S})$ e $y = \pi(x) \in \mathcal{S}$, entonces existe un entorno coordenado de y, $(V_y; v_i)$, tal que

$$\mathcal{S} \cap V_y = \{z \in V_y : v_1 = \cdots = v_k = 0\},$$

entonces para $U_x = \pi^{-1}(V_y)$ y $u_i = \pi^* v_i$, que son diferenciablemente independientes, pues π^* es inyectiva, tendremos que

$$\pi^{-1}(\mathcal{S}) \cap U_x = \pi^{-1}(\mathcal{S} \cap V_y) = \{p \in U_x : u_1 = \cdots = u_k = 0\}.$$

Veamos ahora "$\Leftarrow$".

(1), (2) y (3) se demuestran fácilmente tomando secciones locales, teniendo en cuenta que π es sobre.

(5) Sea $y \in \mathcal{S}$ y $x \in \pi^{-1}(\mathcal{S})$, tal que $\pi(x) = y$ y consideremos sendos entornos abiertos coordenados U_x de x y U_y de y, con coordenadas respectivas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_m)$, tales que $x_i(x) = 0$ y si $p \in U_x$ tiene coordenadas $(p_1, \ldots, p_n)$, $\pi(p)$ tiene coordenadas $(p_1, \ldots, p_m)$, además podemos suponer que $\pi(U_x) = U_y$, que tenemos la sección de π,

$$\sigma\colon U_y \to U_x, \quad \sigma(y_1, \ldots, y_m) = (y_1, \ldots, y_m, 0 \ldots, 0),$$

y que existen funciones $u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{C}^\infty(U_x)$, diferenciablemente independientes y tales que

$$\pi^{-1}(\mathcal{S}) \cap U_x = \{p \in U_x : \; u_1(p) = \cdots = u_k(p) = 0\},$$

entonces $\mathcal{S}$ es subvariedad, ya que para $v_i = \sigma^*(u_i)$

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \cap U_y &= \pi[\pi^{-1}(\mathcal{S}) \cap U_x] \\ &= \{\pi(p) : \; p \in U_x, \; u_1(p) = \cdots = u_k(p) = 0\} \\ &= \{q \in U_y : \; v_1(q) = \cdots = v_k(q) = 0\},\end{aligned}$$

pues en la última igualdad $\subset$ se sigue tomando $q = \pi(p) \in \mathcal{S} \cap U_y$ (por las dos primeras igualdades), por tanto $\sigma(q) \in \pi^{-1}(\mathcal{S}) \cap U_x$, ya que $\pi[\sigma(q)] = q$, y $v_i(q) = u_i[\sigma(q)] = 0$ y la otra inclusión $\supset$ es obvia pues basta tomar $p = \sigma(q)$. El resultado se sigue pues para $i = 1, \ldots, k$, $v_i = \sigma^*(u_i)$ son diferenciablemente independientes, ya que si $\sum a_i dv_i = 0$, entonces $\sigma^*(\sum a_i du_i) = 0$ y si $\sum_{i=1}^k a_i du_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j dx_j$, por una parte tenemos

$$0 = \sigma^*(\sum a_i du_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j dy_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

y para $j = m+1, \ldots, n$ es $\pi_*(\partial x_j) = 0$, por tanto para τ_t el grupo uniparamétrico de ∂x_j, $\pi[\tau_t(p)] = \pi(p)$ y si $p \in \pi^{-1}(\mathcal{S}) \cap U_x$, entonces $\tau_t(p)$ también y

$$u_1[\tau_t(p)] = \cdots = u_k[\tau_t(p)] = 0,$$

lo cual implica que, para $j = m+1, \ldots, n$, $\partial u_i(p)/\partial x_j = 0$ y esto que $\lambda_j = 0$. Por tanto $\sum a_i du_i = 0$ y como las du_i son independientes, las $a_i = 0$. Por último (4) es consecuencia del Lema (1.1.13). ∎

1.2. Grupos de Lie

Una de las ideas subyacentes en la noción de grupo de Lie es la de movimiento. El grupo de Lie por excelencia es el de los movimientos rígidos en el espacio, los cuales no sólo forman un grupo, pues la composición de dos movimientos es un nuevo movimiento, sino que además el nuevo movimiento depende "diferenciablemente"de los dos dados.

Definición. Llamaremos *grupo de Lie* a una variedad diferenciable $\mathcal{G}$, con una estructura de grupo, para la que las aplicaciones de la estructura

$$(a, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \xrightarrow{\chi} ab \in \mathcal{G}, \qquad a \in \mathcal{G} \longrightarrow a^{-1} \in \mathcal{G}$$

son diferenciables. Habitualmente denotaremos con $e \in \mathcal{G}$ el elemento neutro del grupo y con notación multiplicativa la operación del grupo.

Llamaremos *morfismo de grupos de Lie* a todo homomorfismo de grupos de Lie que sea diferenciable.

Para cada elemento $a \in \mathcal{G}$ definimos las aplicaciones

$$R_a \colon b \in \mathcal{G} \longrightarrow ba \in \mathcal{G}, \qquad L_a \colon b \in \mathcal{G} \longrightarrow ab \in \mathcal{G},$$

consistentes en trasladar, por la derecha y por la izquierda respectivamente, el grupo mediante el elemento a.

Ejercicio 1.2.1 *Demostrar que las traslaciones anteriores son difeomorfismos tales que*

$$(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}, \qquad (R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}.$$

Ejercicio 1.2.2 *Demostrar que una variedad diferenciable $\mathcal{G}$, con estructura de grupo es un grupo de Lie si y sólo si*

$$(a,b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \xrightarrow{\mu} ab^{-1} \in \mathcal{G}$$

es diferenciable.

Ejercicio 1.2.3 *Demostrar que los $\mathbb{R}$–espacios vectoriales de dimensión finita, con la suma como operación, son grupos de Lie.*

Notación. Con $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ denotamos la variedad diferenciable formada por las matrices reales de orden n, con la estructura diferenciable dada por su biyección natural con $\mathbb{R}^{n^2}$.

Ejercicio 1.2.4 *Demostrar que el abierto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det \mathbf{A} \neq 0\},$$

formado por las matrices reales de orden n no singulares, llamado Grupo lineal general, forma un grupo de Lie con el producto como operación. Para $n = 1$, lo denotaremos con $\mathbb{R}^*$.

Ejercicio 1.2.5 *Demostrar que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ con el producto como operación es un grupo de Lie.*

Ejercicio 1.2.6 *El cuerpo de los cuaterniones es el primer ejemplo (históricamente) de un cuerpo no conmutativo y consiste en un espacio vectorial real de dimensión 4, con una base $(1, i, j, k)$, cuyos elementos son de la forma*

$$a + bi + cj + dk, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

que se suman componente a componente y su producto satisface $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ *y* $ki = -ik = j$. *Demostrar que los cuaterniones no nulos* $\mathbb{H}_4$, *con el producto anterior y la estructura de variedad diferenciable dada por su biyección con* $\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$, *es un grupo de Lie.*

Proposición 1.2.7 *Las traslaciones de un grupo de Lie* $\mathcal{G}$, *llevan componentes conexas en componentes conexas y la componente conexa que contiene al neutro* $\mathcal{G}_e$ *es un subgrupo normal, abierto y cerrado y grupo de Lie.*

Demostración. Las aplicaciones continuas llevan conexos en conexos, por tanto los homeomorfismos conservan las componentes conexas. Si $g, h \in \mathcal{G}_e$, entonces $L_{g^{-1}}(\mathcal{G}_e) = \mathcal{G}_e$, por tanto $g^{-1}h \in \mathcal{G}_e$ y la aplicación $(g, h) \to g^{-1}h$ es diferenciable pues $\mathcal{G}_e$ es un abierto. Ahora es subgrupo normal pues para cada $g \in \mathcal{G}$, $g\mathcal{G}_e g^{-1}$ es una componente conexa que contiene a e, por tanto es $\mathcal{G}_e$. ∎

El siguiente resultado es un simple ejercicio.

Proposición 1.2.8 *El producto finito de grupos de Lie es grupo de Lie.*

Lema 1.2.9 *Sea* $\mathcal{G}$ *un grupo de Lie conexo y* U *un entorno del neutro. Entonces* $\mathcal{G} = \cup U^n$, *para*

$$U^n = \{g_1 \cdots g_n : \ g_i \in U\}.$$

Demostración. Consideremos el abierto entorno de e, $V = U \cap U^{-1} \subset U$, para el que $V = V^{-1}$, y

$$\mathcal{H} = \cup V^n \subset \cup U^n \subset \mathcal{G},$$

que es subgrupo pues si $g, h \in \mathcal{H}$, entonces $gh^{-1} \in \mathcal{H}$, es abierto pues $L_g(V) = gV \subset \mathcal{H}$ es un entorno abierto de $g \in \mathcal{H}$ y es cerrado pues si $g \in \mathcal{H}^c$, $g\mathcal{H}$ es un entorno abierto de g que está en $\mathcal{H}^c$, pues como $\mathcal{H}$ es subgrupo $g\mathcal{H} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Por tanto por conexión se sigue que $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. ∎

Teorema 1.2.10 *Todo grupo de Lie conexo es Hausdorff y de base numerable.*

Demostración. $\mathcal{G}$ es Hausdorff sii la diagonal $D = \{(x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : x = y\}$ es cerrada, pero en nuestro caso $D = \mu^{-1}(e)$, para $\mu(x, y) = xy^{-1}$, que es continua y los puntos son cerrados.

Consideremos un entorno coordenado U del neutro, que es de base numerable B_i (basta considerar en $\mathbb{R}^n$ las bolas abiertas de radio racional centradas en puntos de $\mathbb{Q}^n$). Ahora como el producto $\chi\colon U \times U \to U^2$ es continua, dado un abierto $W \subset U^2$ y $xy \in W$ con $x, y \in U$, existen entornos B_i de x y B_j de y tales que $B_i B_j \subset W$, por tanto U^2 tiene una base numerable de abiertos $B_i B_j = \cup_{g \in B_i} g B_j$, así como cada U^n, y por el Lema anterior también la tiene $G = \cup U^n$. ∎

Corolario 1.2.11 *Todo grupo de Lie es Hausdorff y cada componente conexa es de base numerable.*

Demostración. Se sigue del resultado anterior y de (1.2.7). ∎

1.3. Subgrupos de Lie

Definición. Llamaremos *subgrupo de Lie* a toda subvariedad de un grupo de Lie que sea subgrupo (Algunos autores lo llaman *subgrupo de Lie regular*).

El resultado que sigue nos permitirá reconocer de una forma sencilla otros grupos de Lie.

Teorema 1.3.1 *Todo subgrupo de Lie es un grupo de Lie.*

Demostración. Basta demostrar que la aplicación μ en el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{H}\times\mathcal{H} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{H} & \qquad & (x,y) & \longrightarrow & xy^{-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}\times\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} & & (x,y) & \longrightarrow & xy^{-1}
\end{array}$$

es diferenciable, lo cual es consecuencia de (1.1.10). ∎

Corolario 1.3.2 *Sea $F\colon \mathcal{G} \to \mathcal{V}$ diferenciable y de rango constante, con $\mathcal{G}$ grupo de Lie. Si para un $y \in \mathcal{V}$, $G^{-1}(y)$ es subgrupo, entonces es grupo de Lie de dimensión $\dim \mathcal{G} - \operatorname{rang} F$.*

Demostración. Por (1.1.6) es subvariedad de esa dimensión, por tanto subgrupo de Lie y por el resultado anterior grupo de Lie. ∎

Corolario 1.3.3 *Si $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ es morfismo de grupos de Lie, entonces:*
1) *El rango de F es constante.*
2) $\ker F = F^{-1}(e_2)$, *para el neutro $e_2 \in \mathcal{G}_2$, es un subgrupo normal de $\mathcal{G}_1$ y un grupo de Lie de dimensión*

$$\dim \ker F = \dim \mathcal{G}_1 - \operatorname{rang} F.$$

3) $F(\mathcal{G}_1)$ *es un subgrupo de $\mathcal{G}_2$.*

Demostración. (1) Sea $x \in \mathcal{G}_1$ y $z = F(x^{-1})$, entonces para cualquier $y \in \mathcal{G}_1$

$$F(y) = F(x^{-1}xy) = zF(xy) = L_z \circ F \circ L_x(y),$$

por lo que el rango de F_* en e es igual al de F_* en x, por tanto es constante. (2) se sigue de (1.3.2). El resto es sencillo. ∎

Corolario 1.3.4 *Todo morfismo localmente inyectivo de grupos de Lie es inmersión local.*

Demostración. Por el resultado anterior el morfismo es de rango constante. Ahora por ser localmente inyectivo se sigue del corolario del teorema del rango que $k = n$, por tanto es una inmersión local. ∎

Ejercicio 1.3.5 *Demostrar que la circunferencia unidad $\mathcal{S}_1 = \mathbb{T}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, con el producto como operación, es un grupo de Lie.*

Ejercicio 1.3.6 *Demostrar que el toro n–dimensional,*

$$\mathbb{T}_n = S_1 \times \cdots \times S_1,$$

es un grupo de Lie.

Ejercicio 1.3.7 *Demostrar que el grupo de las afinidades de un espacio afín n–dimensional $\mathbb{A}_n$, sobre $\mathbb{R}$, es un grupo de Lie.*

Ejercicio 1.3.8 *Demostrar que el grupo de las proyectividades de un espacio proyectivo n–dimensional es un grupo de Lie.*

Ejercicio 1.3.9 *Demostrar que $\mathcal{S}_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|_2 = 1\}$, con el producto del grupo $\mathbb{H}_4$ (de los cuaterniones no nulos) es grupo de Lie.*

Ejercicio 1.3.10 *Demostrar que el grupo ortogonal*

$$\mathcal{O}_n = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \ \mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}\}$$

es un grupo de Lie.

Ejercicio 1.3.11 *Demostrar que el grupo ortogonal de signatura m, k*

$$\mathcal{O}_{m,k}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_{m+k}(\mathbb{R}) : \ \mathbf{A}^t\mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{E}\}$$

es un grupo de Lie, para I_n la identidad de $\mathbb{R}^n$ y

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.3.12 *Demostrar que el grupo simplético*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) : \ \mathbf{A}^t\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{J}\}$$

es un grupo de Lie, para

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.3.13 *Demostrar que el grupo lineal especial*

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \ \det \mathbf{A} = 1\}$$

es un grupo de Lie.

Ejercicio 1.3.14 *Demostrar que el grupo lineal especial ortogonal*

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{O}_n : \ \det \mathbf{A} = 1\}$$

es un grupo de Lie, que es $(\mathcal{O}_n)_e$.

Ejercicio 1.3.15 *Demostrar que las $\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ triangulares superiores (inferiores) forman un grupo de Lie.*

1.4. Subgrupos de Lie inmersos

En (1.3.1) hemos demostrado que toda subvariedad que sea subgrupo de un grupo de Lie es un grupo de Lie. Sin embargo una subvariedad inmersa en un grupo de Lie puede ser subgrupo (al que llamaremos *subgrupo de Lie inmerso*), como es el caso de la imagen por un morfismo inyectivo, y sin embargo no ser subvariedad, por no poseer la topología inducida. A continuación estudiamos un caso particular de esto:

Consideremos el morfismo de grupos de Lie

$$F\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longrightarrow F(x,y)=(\mathrm{e}^{2\pi ix},\mathrm{e}^{2\pi iy})\in\mathbb{T}^2,$$

que es inmersión local por serlo $x\to \mathrm{e}^{2\pi ix}$ ó por (1.3.4), pues F es localmente inyectiva. Si consideramos un número $\alpha\in\mathbb{R}$ y la inmersión local (que es inyectiva si y sólo si α es irracional, demuéstrelo el lector)

$$\sigma\colon t\in\mathbb{R}\longrightarrow \sigma(t)=F(t,\alpha t)\in\mathbb{T}^2,$$

tendremos que $C=\sigma(\mathbb{R})$ es una subvariedad inmersa que es subgrupo, sin embargo si α es irracional no es subvariedad, pues es densa en el toro $\mathbb{T}^2$ —y una subvariedad no puede ser densa por su caracterización—, para ver que es densa necesitamos un resultado previo.

Lema 1.4.1 *Todo subgrupo de* $(\mathbb{R},+)$ *es denso ó* $\mathbb{Z}p$*, con* $p\in\mathbb{R}$*.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un subgrupo y $p=\inf\{x>0 : x\in\mathcal{S}\}$, entonces existe $t_n\downarrow p$, con $t_n>0$ y $t_n\in\mathcal{S}$. Si a partir de un n los t_n son iguales tendremos que son p y por un lado $\mathbb{Z}p\subset\mathcal{S}$ y por otro dado $s\in\mathcal{S}$ existe $n\in\mathbb{Z}$, tal que $s\in(np,(n+1)p]$, por tanto $0<s-np\le p$ y $s-np\in\mathcal{S}$, por tanto $s=(n+1)p\in\mathbb{Z}p$, por tanto $\mathbb{Z}p=\mathcal{S}$. En caso contrario existe una subsucesión de t_n, que llamamos igual estrictamente decreciente y de Cauchy, por tanto para todo $\epsilon>0$ existe un n tal que $\epsilon>t_n-t_{n+1}>0$ y $s=t_n-t_{n+1}\in\mathcal{S}$, pero entonces dado $x\in\mathbb{R}$, existe un n tal que $x\in(ns,(n+1)s]$. Se sigue que $\mathcal{S}$ es denso. ∎

Lema 1.4.2 *La curva* $\sigma(\mathbb{R})$ *(para* α *irracional) es densa en el toro* $\mathbb{T}^2$ *y no es cerrada.*

Demostración. Dado un punto del toro $q=(\mathrm{e}^{2\pi ix},\mathrm{e}^{2\pi iy})$, queremos encontrar un $t\in\mathbb{R}$, tal que $\sigma(t)$ esté próximo a q. Ahora bien para todo $m\in\mathbb{Z}$

$$\sigma(t)=(\mathrm{e}^{2\pi it},\mathrm{e}^{2\pi i\alpha t})=(\mathrm{e}^{2\pi it},\mathrm{e}^{2\pi i(\alpha t+m)}),$$

y dado $\epsilon > 0$, basta encontrar $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que, para $t = x + n$,

$$|\alpha(x+n) + m - y| < \epsilon,$$

lo cual se sigue del lema anterior pues $\{\alpha n + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo y por tanto denso en $\mathbb{R}$, ya que no es de la forma $p\mathbb{Z}$, pues en ese caso $\alpha = n_1 p$ y $1 = n_2 p$, de donde $n_2 \alpha = n_2 n_1 p = n_1$ y $\alpha \in \mathbb{Q}$. Además no es un cerrado, pues C no es T^2, ya que por ejemplo no existe t para el que

$$\sigma(t) = (\mathrm{e}^{\pi i}, \mathrm{e}^{\pi i}) \in T^2. \quad \blacksquare$$

El ejemplo anterior nos da pie a dar la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *subgrupo de Lie inmerso (ó virtual)* de un grupo de Lie $\mathcal{G}$ a todo morfismo inyectivo

$$F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{G}$$

de grupos de Lie (en ocasiones y por abuso del lenguaje llamaremos subgrupo de Lie inmerso, a la imagen $\mathcal{H} = F(\mathcal{S})$, del morfismo, que por el corolario (1.3.4) es una subvariedad inmersa y al grupo $\mathcal{S}$ lo llamaremos su *parametrización*).

Si además la topología de $\mathcal{S}$ es la inicial del morfismo, $\mathcal{H}$ es una subvariedad y por tanto un subgrupo de Lie.

En los siguientes resultados daremos una caracterización que nos permitirá comprender algo mejor el ejemplo del toro, en ellas se establece que los conceptos: *subgrupo* (abstracto), *subvariedad* (diferenciable) y *cerrado* (topológico), están relacionados.

Proposición 1.4.3 *Todo subgrupo abierto de un grupo de Lie es cerrado.*

Demostración. Sea A el subgrupo abierto y $x \in \mathcal{G} - A$, entonces $L_x(A)$ es un abierto, entorno de x, que no corta a A, por tanto A es cerrado. $\blacksquare$

Teorema 1.4.4 *Sea $\mathcal{S}$ un subgrupo de un grupo de Lie $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{S}$ es subvariedad entonces es cerrado.*

Demostración. Si $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{G} = n$, $\mathcal{S}$ es un abierto y el resultado se sigue de la proposición anterior. Si $\dim \mathcal{S} = n-k < n$, basta demostrar que si $x_n \in \mathcal{S}$ tiene límite $x \in \mathcal{G}$, entonces $x \in \mathcal{S}$. Para ello consideremos un entorno coordenado del neutro U_e, con coordenadas u_i, tal que

$$\mathcal{S} \cap U_e = \{g \in U_e : \ u_1(g) = \cdots = u_k(g) = 0\}.$$

Ahora por la continuidad del producto podemos encontrar otro entorno del neutro $U \subset U_e$, tal que si $p, q \in U$, entonces $pq \in U_e$ y como $x_n^{-1}x \to e$ y $x^{-1}x_n \to e$, existe un N a partir del cual $x_n^{-1}x \in U$ y $x^{-1}x_n \in U$, por tanto para $n, m \geq N$ tendremos que

$$(x_n^{-1}x)(x^{-1}x_m) = x_n^{-1}x_m \in \mathcal{S} \cap U_e,$$

y por tanto $u_i(x_n^{-1}x_m) = 0$, para $i = 1, \ldots, k$, y haciendo m tender a infinito, como $x_n^{-1}x \in U_e$ se sigue por continuidad que $u_i(x_n^{-1}x) = 0$, para $i = 1, \ldots, k$, por lo tanto

$$x_n^{-1}x \in \mathcal{S} \cap U_e,$$

y multiplicando por $x_n \in \mathcal{S}$, tendremos que $x \in \mathcal{S}$. ∎

El recíproco también es cierto. Lo veremos en 1.10.5.

Teorema *Si $\mathcal{S}$ es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie, entonces es una subvariedad.*

En definitiva un subgrupo (abstracto) de un grupo de Lie es "*subvariedad si y sólo si es cerrado*".

1.5. Álgebras de Lie

Definición. Llamaremos *álgebra de Lie* sobre $\mathbb{R}$ a un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de un operador bilineal (producto), que denotamos $[\ ,\ ]$ y llamamos *corchete de Lie*, para el que se tienen las propiedades

$$[x, y] = -[y, x], \ (\textit{anticonmutatividad}\ )$$
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \ (\textit{identidad de Jacobi}\ )$$

Demostrar que los siguientes espacios forman álgebras de Lie:

Ejercicio 1.5.1 *El módulo $\mathcal{D}$ de los campos tangentes a una variedad, con el corchete de Lie $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.*

Ejercicio 1.5.2 *Todo espacio vectorial, definiendo* $[x, y] = 0$*, para cualquier par de vectores, define un álgebra de Lie. Llamaremos abeliana a toda álgebra de Lie con el corchete nulo.* (Nota.- Veremos en 1.8.6, la razón de llamarla así).

Ejercicio 1.5.3 *El espacio vectorial de los campos tangentes de* $\mathbb{R}^4$ *generado por los tres campos*

$$\begin{aligned}
&-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4},\\
&-x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4},\\
&-x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.4 *El espacio vectorial* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, de las matrices reales de orden* n*, con el corchete* $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$*.*

Ejercicio 1.5.5 *El espacio vectorial* $\mathcal{E} = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \operatorname{traz}(\mathbf{A}) = 0\}$*, con el corchete de matrices. Demostrar que si* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*,* $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \mathcal{E}$*.*

Ejercicio 1.5.6 *El espacio vectorial* $\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{A} + \mathbf{A}^t = 0\}$*, con el corchete de matrices.*

Ejercicio 1.5.7 *El espacio vectorial de las matrices de* $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ *del tipo*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{A}^t \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*,* $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *simétricas; con el corchete de matrices.*

Ejercicio 1.5.8 $\mathbb{R}^3$ *con el producto vectorial*

$$(x, y, z) \times (x', y', z') = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

Ejercicio 1.5.9 $\mathbb{R}^3$ *con el corchete*

$$[(x, y, z), (x', y', z')] = (yz' - zy', 2(xy' - yx'), 2(zx' - xz')).$$

1.5.1. Constantes de estructura.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n y sea $x_1,\ldots,x_n$ una base suya. Entonces existen constantes c_{ij}^k, a las que llamaremos *constantes de estructura, relativas a la base*, tales que $[x_i,x_j] = \sum c_{ij}^k x_k$. Estas constantes satisfacen las propiedades

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0,$$
$$\sum_{r=1}^{n}[c_{ij}^r c_{kr}^m + c_{jk}^r c_{ir}^m + c_{ki}^r c_{jr}^m] = 0,$$

y recíprocamente cualquier conjunto de n^3 constantes satisfaciendo estas propiedades, define un álgebra de Lie verificando $[x_i,x_j] = \sum c_{ij}^k x_k$. Esto permite clasificar fácilmente las álgebras de Lie de dimensión pequeña.

1.5.2. Álgebra de Lie de un grupo de Lie.

La importancia del concepto *álgebra de Lie*, reside en que hay un *álgebra de Lie* especial (que además es finito dimensional), asociada a cada grupo de Lie y que las propiedades del grupo quedan reflejadas en las de su álgebra. Por ejemplo los grupos de Lie conexos y simplemente conexos están completamente determinados por sus álgebras de Lie y el estudio de estos se reduce en parte al estudio de aquellas que en bastantes aspectos son mas sencillas.

Definición. Sea $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ diferenciable, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ y $E \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Diremos que F lleva D en E (y lo denotaremos $F_*D = E$) si para todo $x \in \mathcal{U}$ es $F_*D_x = E_{F(x)}$.

Lema 1.5.10 1) *F lleva D en E sii $F^* \circ D = E \circ F^*$.*
2) *Si $F_*D_1 = E_1$ y $F_*D_2 = E_2$, entonces $F_*[D_1,D_2] = [E_1,E_2]$.*

Definición. Diremos que un campo tangente a un grupo de Lie $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ es *invariante por la izquierda* (resp. *por la derecha*), si para cada $a \in \mathcal{G}$, $L_{a*}D = D$, (resp. $R_{a*}D = D$), es decir para cada $x \in \mathcal{G}$

$$L_{a*}D_x = D_{ax}, \quad \text{(resp. } R_{a*}D_x = D_{xa}).$$

Observemos que si D_1 y D_2 son invariantes, entonces también lo es su corchete, pues

$$L_{a*}[D_1,D_2] = [L_{a*}D_1, L_{a*}D_2] = [D_1,D_2]. \tag{1.1}$$

Definición. Llamaremos *álgebra de Lie (por la izquierda)* de un grupo de Lie $\mathcal{G}$, al álgebra de Lie de los campos invariantes por la izquierda

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \{D \in \mathcal{D}(\mathcal{G}) : L_{a*}D = D, \forall a \in \mathcal{G}\}$$

con el corchete de Lie como producto.

Del modo obvio se define el *álgebra de Lie por la derecha*, que denotamos con $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}$.

El siguiente resultado demuestra que ambas álgebras son canónicamente isomorfas, como espacios vectoriales, a $T_e(\mathcal{G})$ y por tanto como espacios vectoriales tienen la misma dimensión que el grupo. En general consideraremos sólo los campos invariantes por la izquierda, y sobrentenderemos las propiedades correspondientes de los campos invariantes por la derecha.

Proposición 1.5.11 *La aplicación $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \to D_e \in T_e(\mathcal{G})$, es un isomorfismo lineal.*

Demostración. Es lineal trivialmente. Es inyectiva pues para todo $x \in \mathcal{G}$, $D_x = L_{x*}D_e$, por tanto si $D_e = 0$, $D = 0$. Es sobre pues dado $D_e \in T_e(\mathcal{G})$ entonces el único posible campo $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ que en e define D_e es el que para cada $x \in \mathcal{G}$, $D_x = L_{x*}D_e$. Basta demostrar que el campo de vectores tangentes $\{D_x : x \in \mathcal{G}\}$, define un campo tangente D, es decir que para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$, la función

$$Df(x) = D_x f = D_e(f \circ L_x) \in \mathbb{R},$$

es diferenciable. Consideremos un campo $E \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ que en e defina $E_e = D_e$ y subámoslo al único campo $\tilde{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}\times\mathcal{G})$ tal que $\pi_{1*}\tilde{E} = 0$ y $\pi_{2*}\tilde{E} = E$. Sea χ la aplicación producto en $\mathcal{G}$, $\chi(a,b) = ab$, y consideremos la función y la aplicación diferenciable

$$g = f \circ \chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G} \times \mathcal{G}),$$
$$i \colon a \in \mathcal{G} \longrightarrow (x,a) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G},$$

entonces $i_*E_e = \tilde{E}_{(x,e)}$, pues $\pi_{1*}(i_*E_e) = 0$ y $\pi_{2*}(i_*E_e) = E_e$, por lo que

$$Df(x) = D_e(f \circ L_x) = D_e(g \circ i) = i_*D_e g = \tilde{E}g(x,e),$$

que es diferenciable en x. ∎

Ejercicio 1.5.12 *Demostrar que el álgebra de Lie de* $(\mathbb{R}^n, +)$ *es*

$$\{a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} : \quad a_i \in \mathbb{R}\},$$

por tanto es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ *con el corchete* $[x, y] = 0$*, por tanto es abeliana.*

Ejercicio 1.5.13 *Demostrar que el álgebra de Lie del grupo de los cuaterniones no nulos está generada por los campos*

$$\begin{aligned}
D_1 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4},\\
D_2 &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4},\\
D_3 &= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4},\\
D_4 &= -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4},
\end{aligned}$$

para los que

$$[D_1, D_i] = 0, \quad [D_2, D_3] = 2D_4, \quad [D_3, D_4] = 2D_2, \quad [D_4, D_2] = 2D_3.$$

Ejercicio 1.5.14 *Demostrar que el álgebra de Lie de* $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ *es* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *con el corchete de matrices.*

Nota 1.5.15 Del mismo modo, si ahora consideramos el grupo de Lie formado por los automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$, de un espacio vectorial n–dimensional $\mathcal{E}$, con la composición como producto, el cual es un abierto del espacio vectorial real n^2–dimensional $\mathrm{End}(\mathcal{E})$, de los endomorfismos de $\mathcal{E}$ —las aplicaciones lineales del espacio en si mismo—, entonces su álgebra de Lie es precisamente $\mathrm{End}(\mathcal{E})$ con el corchete

$$[F, G] = F \circ G - G \circ F,$$

lo cual se sigue del resultado anterior si, eligiendo una base en el espacio $\mathcal{E}$, identificamos $\mathrm{End}(\mathcal{E})$ con las matrices reales de orden n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con lo que tendremos que el grupo de los automorfismos del espacio vectorial se identifica con el *grupo lineal general* de orden n, con el producto de matrices como operación.

1.6. Subálgebras de Lie

Definición. Diremos que un subespacio $\mathfrak{h}$ de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es una subálgebra de Lie si $[X,Y] \in \mathfrak{h}$, para $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Proposición 1.6.1 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces*

$$\Delta_x = \{D_x : \ D \in \mathfrak{h}\},$$

es una distribución involutiva e invariante por traslaciones por la izquierda.

Demostración. Sea $D_1, \ldots, D_r$ una base de $\mathfrak{h}$, entonces para todo $x \in \mathcal{G}$

$$\Delta_x =< D_{1x}, \ldots, D_{rx} > \quad \Rightarrow \quad \Delta =< D_1, \ldots, D_r >$$

y la distribución es involutiva pues $[D_i, D_j] \in \mathfrak{h}$, por tanto $[D_i, D_j] = \sum c_{ij}^k D_k$, de donde $[D_i, D_j] \in \Delta$. Además es invariante por traslaciones por la izquierda, pues para $x, p \in \mathcal{G}$

$$L_{x*}\Delta_p = \Delta_{xp}. \quad \blacksquare$$

Proposición 1.6.2 *Todo morfismo de grupos de Lie $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ define un morfismo de álgebras de Lie*

$$\varphi\colon \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}_2},$$

tal que si $\varphi(D) = E$, entonces para cada $x \in \mathcal{G}_1$

$$F_*(D_x) = E_{F(x)}.$$

por lo que lo denotaremos $\varphi = F_*$.

Demostración. Como todo campo invariante E está determinado por su valor en el neutro $e_2 \in \mathcal{G}_2$, que en nuestro caso debe ser

$$E_{e_2} = F_*(D_{e_1}),$$

la cuestión consiste en demostrar que este campo que en cada $y \in \mathcal{G}_2$ define el vector

$$E_y = L_{y*}(E_{e_2}) = L_{y*}[F_*(D_{e_1})],$$

satisface el resultado. Consideremos un $x \in \mathcal{G}_1$, entonces como $L_{F(x)} \circ F = F \circ L_x$, ya que

$$L_{F(x)}[F(z)] = F(x)F(z) = F(xz) = F[L_x(z)],$$

tendremos que

$$E_{F(x)} = L_{F(x)*}[F_*(D_{e_1})] = F_*[L_{x*}(D_{e_1})] = F_*(D_x).$$

Además se tiene que es morfismo de álgebras de Lie, pues por el lema anterior

$$\begin{aligned} F_*(rD_1 + sD_2) &= rF_*(D_1) + sF_*(D_2), \\ F_*[D_1, D_2] &= [F_*D_1, F_*D_2]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La aplicación anterior hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_{e_1}(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{F_*} & T_{e_2}(\mathcal{G}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1} & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{D}_{\mathcal{G}_2} \end{array}$$

Más adelante demostraremos que: “Si $F, G\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ son dos morfismos de grupos de Lie tales que $F_* = G_*$ en el neutro, entonces $F = G$ en un entorno del neutro. Si además $\mathcal{G}_1$ es conexo, $F = G$ en todo el grupo. Y si ambos son conexos y el primero es simplemente conexo, entonces dado un morfismo de sus álgebras φ existe un único morfismo F tal que $\varphi = F_*$”.

Nota 1.6.3 Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ es un subgrupo de Lie inmerso de un grupo de Lie $\mathcal{G}$, entonces $i\colon \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ es inmersión local y morfismo de grupos, por lo que ambas aplicaciones i_* en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_e(\mathcal{H}) & \xrightarrow{i_*} & T_e(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\mathcal{H}} & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \end{array}$$

son inyectivas y por (1.6.2), $\mathfrak{h} = i_*(\mathcal{D}_{\mathcal{H}})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} = \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, que por (1.6.1), define una distribución involutiva tangente a las subvariedades inmersas (que llamamos los *cosets* de $\mathcal{H}$), $L_x(\mathcal{H}) = x\mathcal{H}$, para cada $x \in \mathcal{G}$, (con la estructura diferenciable de $\mathcal{H}$ pasada por L_x), pues

$$\begin{aligned}\Delta_x &=< D_{1x}, \ldots, D_{rx} >= L_{x*}[i_*[T_e(\mathcal{H})]] \\ &= i_*[L_{x*}[T_e(\mathcal{H})]] = i_*[T_x(x\mathcal{H})].\end{aligned}$$

Además $\mathcal{H}$ es una variedad tangente que contiene al neutro, que en principio no es variedad integral pues no es necesariamente conexa como hemos exigido, sin embargo su componente conexa $\mathcal{H}_e$ que contiene al neutro, que como vimos en (1.2.7) es un subgrupo de Lie de $\mathcal{H}$, y sus cosets $x\mathcal{H}_e$, sí son variedades integrales, de hecho veremos que son las variedades integrales máximas de la distribución. Esta propiedad es la que nos permitirá reconstruir el subgrupo inmerso si lo que conocemos es su álgebra de Lie, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Teorema 1.6.4 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie y $\mathfrak{g} = \mathcal{D}_\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra, entonces existe un único subgrupo de Lie inmerso conexo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{h}$.*

Demostración. Por (1.6.1), $\mathfrak{h}$ define una distribución que es involutiva e invariante por traslaciones por la izquierda, es decir que para $x, p \in \mathcal{G}$

$$L_{x*}\Delta_p = \Delta_{xp},$$

por lo tanto si $\mathcal{S}$ es una subvariedad integral, también lo es $L_x(\mathcal{S})$. Consideremos en $\mathcal{G}_e$, que es de base numerable por (1.2.10), la subvariedad integral máxima $\mathcal{H}$, que contiene al neutro e (ver (1.1.12)), entonces para cada $h \in \mathcal{H}$, $L_{h^{-1}}(\mathcal{H})$ es una variedad integral que contiene el neutro, pues $L_{h^{-1}}(h) = e$, por lo tanto $L_{h^{-1}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ es subgrupo, pues

$$h, g \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad h^{-1}g \in \mathcal{H}.$$

Por otro lado el producto y paso al inverso

$$(g, h) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow gh \in \mathcal{H} \qquad h \in \mathcal{H} \longrightarrow h^{-1} \in \mathcal{H},$$

son diferenciables por (1.1.11), por la hipótesis y por ser la inclusión $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ inmersión local. Que $\mathcal{D}_\mathcal{H} = \mathfrak{h}$, se sigue de (1.6.3), pues allí hemos visto el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} T_e(\mathcal{H}) & \xrightarrow{i_*} & T_e(\mathcal{G}) & \supset & \Delta_e \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_\mathcal{H} & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{D}_\mathcal{G} & \supset & \mathfrak{h} \end{array}$$

siendo isomorfismos las flechas verticales e $i_*(T_e(\mathcal{H})) = \Delta_e$.

Veamos la unicidad. Supongamos que hay otro subgrupo de Lie inmerso conexo $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, tal que $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{h}$, entonces $\mathcal{F}$ es una subvariedad integral conexa de Δ que como contiene al neutro, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Ahora la composición de inclusiones

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G},$$

y la segunda inclusión son inmersiones locales, por lo que la primera es diferenciable, como consecuencia de (1.1.11), e inmersión local (entre grupos de la misma dimensión), por lo tanto difeomorfismo local y $\mathcal{F}$ es subgrupo abierto de $\mathcal{H}$, por tanto cerrado y por conexión son iguales y grupos de Lie isomorfos. ∎

Corolario 1.6.5 *Sea $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ un subgrupo de Lie inmerso y $\mathcal{H}_e$ su componente conexa que contiene al neutro, entonces sus cosets $x\mathcal{H}_e$ son las variedades integrales máximas de la distribución definida por $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.*

Demostración. Por el resultado anterior existe un único subgrupo de Lie inmerso conexo, cuya álgebra de Lie es $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ y como $\mathcal{D}_{\mathcal{H}_e} = \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ —como subálgebras de $\mathfrak{g}$—, tal subgrupo es $\mathcal{H}_e$. Además el resultado dice que este subgrupo es la subvariedad integral máxima que contiene al neutro y el resultado se sigue. ∎

Ejercicio 1.6.6 *Dar los campos del álgebra de Lie del grupo $\mathbb{C}^*$, correspondientes a $\partial x_e, \partial y_e \in T_e(\mathbb{C}^*)$. Y dar en términos de estos campos las subálgebras del álgebra de Lie y los subgrupos de Lie correspondientes.*

Ejercicio 1.6.7 *En los términos del ejercicio (1.5.13), demostrar que el espacio vectorial generado por los campos D_2, D_3, D_4, es una subálgebra del álgebra de Lie del grupo de los cuaterniones $\mathbb{H}_4$. Demostrar usando los resultados de esta lección que $\mathcal{S}_3$ es un grupo de Lie y que su álgebra de Lie es $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.*

1.7. Subgrupos uniparamétricos

Proposición 1.7.1 *Cada campo invariante es completo.*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ (idem para $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}$) con grupo uniparamétrico y curva integral máxima pasando por e,

$$\tau \colon \mathcal{W}_D \to \mathcal{G}, \qquad \tau_e : I(e) \longrightarrow \mathcal{G},$$

queremos ver que $\mathcal{W}_D = \mathbb{R} \times \mathcal{G}$. Como para cada $x \in \mathcal{G}$ es $L_{x*}D = D$, tendremos que para todo $x \in \mathcal{G}$, $\tau_t \circ L_x = L_x \circ \tau_t$, en el dominio abierto de τ_t. Ahora bien para cada $t \in I(e)$, el neutro $e \in \mathcal{G}$ está en ese dominio, por lo tanto para todo $x \in \mathcal{G}$ y todo $t \in I(e)$

$$\tau_x(t) = \tau_t(x) = x\tau_t(e) = x\tau_e(t), \tag{1.2}$$

en particular $I(e) \subset I(x)$ para todo $x \in \mathcal{G}$, lo cual implica que $I(x) = \mathbb{R}$, pues si $t \in I(x)$ y $a = \tau(t, x)$, entonces $I(x) = t + I(a)$ y por tanto $t + I(e) \subset I(x)$, por tanto D es completo. ∎

Corolario 1.7.2 *Si $D \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$, entonces $\tau_e \colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$, su curva integral máxima pasando por e, es morfismo de grupos.*

Demostración. Basta considerar (1.2), para $x = \tau_e(r)$. ∎

Definición. Llamamos *subgrupo uniparamétrico de* $\mathcal{G}$ a un elemento $\sigma \in Hom(\mathbb{R}, \mathcal{G})$, es decir a un morfismo de grupos de Lie $\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$, ó equivalentemente a un subgrupo $\{g_t = \sigma(t) \in \mathcal{G} : t \in \mathbb{R}\}$, tal que $t \in \mathbb{R} \to g_t \in \mathcal{G}$ es diferenciable y

$$g_0 = e, \quad g_{t+r} = g_t g_r,$$

el cual define un morfismo de álgebras

$$\sigma_* \colon \mathcal{D}_\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}_\mathcal{G},$$

y un campo invariante $D = \sigma_*(\partial t)$, del cual σ es una curva integral.

Proposición 1.7.3 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie. Entonces se tiene:*

1)

$$\left.\begin{array}{l} \sigma \in Hom(\mathbb{R}, \mathcal{G}) \\ D = \sigma_*(\partial t) \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} D \in \mathcal{D}_\mathcal{G} \\ \sigma = \tau_e \end{array}$$

para $\tau_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$ la curva integral de D pasando por e,

2) *Si $\tau_t \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ es el grupo uniparamétrico de $D \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$ y $g_t = \tau_e(t)$, entonces $\tau_t(x) = xg_t$ $(= g_t x)$, es decir $\tau_t = R_{g_t}$ $(= L_{g_t})$.*

Demostración. La implicación "$\Rightarrow$"de (1) se sigue del teorema de unicidad de solución de una EDO, pues $\tau_e(0) = e = \sigma(0)$ y

$$\tau_{e*}(\partial t)_t = D_{\tau(t,e)}, \quad \sigma_*(\partial t)_t = D_{\sigma(t)}.$$

El resto se sigue de (1.2). ∎

Nota 1.7.4 El resultado anterior nos da una biyección canónica entre los subgrupos uniparamétricos de $\mathcal{G}$ y el álgebra de Lie del grupo

$$Hom(\mathbb{R}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{G}}, \quad \sigma \longrightarrow \sigma_*(\partial t),$$

que en términos de subgrupos y grupos uniparamétricos, es

$$\{g_t \in \mathcal{G} : t \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \sigma_t = R_{g_t}, \tag{1.3}$$

y una biyección entre los subgrupos uniparamétricos de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}$, dada por

$$\{g_t \in \mathcal{G} : t \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \sigma_t = L_{g_t}. \tag{1.4}$$

Teorema 1.7.5 *Sea $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morfismo de grupos de Lie, y*

$$F_*\colon D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1} \longrightarrow F_*(D) \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}_2},$$

el correspondiente morfismo de álgebras de Lie. Si $D \in \mathcal{D}_{G_1}$ tiene subgrupo uniparamétrico asociado g_t, el de F_*D es $F(g_t)$.

Demostración. Si $\sigma(t) = g_t$, $\sigma_*(\partial t) = D$ y $\gamma = F \circ \sigma$ es el subgrupo uniparamétrico de $F_*(D)$, pues $\gamma_*(\partial t) = F_*(D)$. ∎

Corolario 1.7.6 *Las biyecciones (1.3) y (1.4) definen un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$L\colon \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{G}},$$

para el que $L[D_1, D_2] = [L(D_2), L(D_1)]$.

Demostración. Nuestra biyección en términos de grupos uniparamétricos es

$$R_{g_t} \longrightarrow L_{g_t},$$

ahora bien si consideramos el nuevo grupo $\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, *)$, donde la nueva operación es $x * y = yx$, que es diferenciable por ser composición de

$$(x, y) \longrightarrow (x^{-1}, y^{-1}) \longrightarrow x^{-1}y^{-1} \longrightarrow (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx,$$

tendremos que el difeomorfismo

$$F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}, \qquad F(x) = x^{-1},$$

es isomorfismo de grupos, por lo que se sigue de (1.6.2) que

$$F_* \colon \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{G}}} = \mathcal{D}^{\mathcal{G}},$$

es un morfismo de álgebras, y si D tiene subgrupo uniparamétrico g_t, entonces F_*D tiene $F(g_t) = g_{-t}$, por tanto $L(D) = -F_*(D)$ y el resultado se sigue. ∎

Ejemplo 1.7.7 El Grupo lineal general Consideremos el *grupo lineal general* de orden n,

$$\mathcal{G} = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \det \mathbf{A} \neq 0\},$$

con el producto de matrices como operación en $\mathcal{G}$. En el ejercicio (1.5.14) hemos demostrado que la composición $H(\mathbf{A}) = D_{\mathbf{A}}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & T_e[\mathcal{M}_n(\mathbb{R})] = T_e(\mathcal{G}) & \to & \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \\ \mathbf{A} & \to & \sum a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_e & \to & \sum a_{ij} D_{ij} = D_{\mathbf{A}} \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie. Consideremos también $H' = L \circ H \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}^{\mathcal{G}}$, para el isomorfismo vectorial L de (1.7.6), entonces se tiene:

Proposición 1.7.8 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ un campo tangente y $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, los siguientes apartados son equivalentes:*

1) $D = H(\mathbf{A})$, $(D = H'(\mathbf{A}))$.

2) $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ $(D \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}})$ *y*

$$D_e = \sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

3)

$$Dx_{ij} = \sum_k x_{ik} a_{kj}, \qquad (Dx_{ij} = \sum_k a_{ik} x_{kj}).$$

4) *El grupo uniparamétrico de D es*

$$\sigma_t(\mathbf{B}) = \mathbf{B}\, \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}, \qquad (\sigma_t(\mathbf{B}) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}\, \mathbf{B}).$$

5) *El subgrupo uniparamétrico correspondiente a D es*

$$g_t = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$$

6) *La ecuación diferencial asociada a D es*

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X})$$

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) lo vimos en el ejercicio.
(2) $\Leftarrow$ (5)

$$\begin{aligned} D_e(x_{ij}) &= \lim \frac{x_{ij}[\sigma_t(\mathbf{I})] - x_{ij}(\mathbf{I})]}{t} \\ &= \lim x_{ij}\left[\frac{\mathrm{e}^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I}}{t}\right] = x_{ij}(\mathbf{A}) = a_{ij}. \end{aligned}$$

(4)$\Leftrightarrow$ (5) Por (1.3).
(2) $\Rightarrow$ (5) Por la unicidad del campo invariante. ∎

En definitiva tenemos la composición de aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} T_e(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ D_e & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathrm{e}^{\mathbf{A}} \end{array}$$

donde la primera es el isomorfismo canónico y la segunda la exponencial de matrices. En la siguiente lección veremos que en todo grupo de Lie hay una conexión natural y por tanto una aplicación exponencial, que en el caso del grupo lineal es la composición anterior (ver el ejemplo (1.8.2)). Esta es la razón del nombre "*aplicación exponencial*.$^{\text{en}}$ las variedades diferenciables con conexión.

Con ayuda del siguiente resultado podremos describir explícitamente los subgrupos uniparamétricos de un subgrupo de un grupo de Lie en términos de los del grupo.

Teorema 1.7.9 *Sea $\mathcal{H}$ es un subgrupo de Lie inmerso de un grupo de Lie $\mathcal{G}$. Una aplicación $\sigma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un subgrupo uniparamétrico de $\mathcal{H}$ sii existe un subgrupo uniparamétrico $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$, tal que $\gamma = i\circ\sigma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$.*

Demostración. $\Rightarrow$ es trivial. La otra implicación también es trivial salvo la diferenciabilidad de σ, que es consecuencia de (1.1.11). ∎

Ejercicio 1.7.10 *Demostrar que $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n$ es un subgrupo uniparamétrico si y sólo si $\sigma(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, con $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$. Y que el álgebra de Lie de $\mathcal{O}(3)$ es $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial*

$$(x, y, z)(x', y', z') = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

Ejercicio 1.7.11 *Demostrar que* $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ *es un subgrupo uniparamétrico si y sólo si* $\sigma(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, *con* $\operatorname{traz} \mathbf{A} = 0$. *Demostrar que el álgebra de Lie de* $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ *es* $\mathbb{R}^3$ *con el producto*

$$(x, y, z)(x', y', z') = (yz' - zy', 2(xy' - yx'), 2(zx' - xz')).$$

Ejercicio 1.7.12 *Demostrar que* $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ *(ver ejercicio (1.3.12)), es un subgrupo uniparamétrico sii* $\sigma(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, *con* $\mathbf{A}^t\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} = 0$. *Demostrar que el álgebra de Lie de* $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ *es el espacio vectorial de las matrices del tipo*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{A}^t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

con $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *simétricas; con el corchete de matrices (ver ejercicio (1.5.7)).*

1.8. La aplicación exponencial

Nota 1.8.1 Recordemos que una *conexión lineal* en una variedad diferenciable $\mathcal{V}$, se define como una aplicación

$$\nabla\colon \mathcal{D}(\mathcal{V}) \times \mathcal{D}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}), \quad (D_1, D_2) \rightsquigarrow D_1^{\nabla} D_2,$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) $D^{\nabla}(fD_1 + gD_2) = (Df)D_1 + fD^{\nabla}D_1 + (Dg)D_2 + gD^{\nabla}D_2$,
ii) $(fD_1 + gD_2)^{\nabla}D = fD_1^{\nabla}D + gD_2^{\nabla}D$.

Ahora bien en todo grupo de Lie $\mathcal{G}$ podemos definir una *conexión* (realmente dos), definiendo un traslado paralelo por la identificación natural que hay entre todos los espacios tangentes mediante el difeomorfismo traslación por la izquierda (derecha) ya que

$$L_{x*} : T_e(\mathcal{G}) \longrightarrow T_x(\mathcal{G}),$$

es un isomorfismo. Por tanto dados $x, y \in \mathcal{G}$ la aplicación $F = L_{yx^{-1}}$ es un difeomorfismo que lleva x en y, con el que definimos el trasladado paralelo de D_x a y como $F_*D_x \in T_y(\mathcal{G})$. Si esto lo hacemos para todo y, obtenemos un campo $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ y como todo campo invariante (por la izquierda) satisface esta propiedad tendremos que los campos $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ son los geodésicos para esta conexión. La cual también podemos dar de la siguiente forma: Consideremos una base $D_1, \ldots, D_n$ del espacio vectorial $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, entonces como en cada punto son vectores independientes, pues lo son en e, también es base del módulo de campos, por tanto todo campo es $E = \sum f_i D_i$ y definimos la conexión de la forma

$$D^{\nabla} E = \sum (D f_i) D_i,$$

para la cual son paralelos todos los campos de $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$.

Consideremos ahora la *aplicación exponencial* en el neutro $e \in \mathcal{G}$

$$\exp\colon T_e(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G},$$

que define esta conexión, que nos lleva cada D_e, al punto al que se llega por la geodésica que define D_e, en el instante 1, la cual sabemos por los cursos de geometría diferencial que es diferenciable y difeomorfismo local en el origen. Ahora bien D_e define un campo invariante $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, cuyo grupo es

$$\sigma_t = R_{g_t},$$

con g_t un subgrupo uniparamétrico y cuya curva integral $\sigma_e(t) = g_t$ pasando por e es geodésica, pues $D^{\nabla} D = 0$ y

$$g_1 = \sigma_e(1) = \exp(D_e).$$

Ejemplo 1.8.2 En el caso particular $\mathcal{G} = Gl_n(\mathbb{R})$, tendremos que D se identifica con una matriz $\mathbf{A}$, y su subgrupo uniparamétrico correspondiente es

$$g_t = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = g_1 = \exp(D_e),$$

y como $D_e = H(\mathbf{A})$ se identifica de forma canónica con $\mathbf{A}$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{H} & T_e(\mathcal{G}) \\ {\scriptstyle \exp} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \exp} \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

donde la exp de la izquierda es la *exponencial* de matrices y la de la derecha la que define la conexión.

Proposición 1.8.3 *Si g_t es el subgrupo uniparamétrico asociado a $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, entonces*

$$\exp(tD_e) = g_t, \qquad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R},$$
$$\exp(mD_e) = (\exp D_e)^m, \qquad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z},$$

Demostración. Basta observar que $\gamma(r) = g_{tr}$ es el subgrupo uniparamétrico asociado a tD y $\exp(tD_e) = \gamma(1) = g_t$. ∎

Proposición 1.8.4 *Sea $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morfismo de grupos de Lie, entonces para e_1 y e_2 los neutros respectivos se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} T_{e_1}(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{F_*} & T_{e_2}(\mathcal{G}_2) \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{F} & \mathcal{G}_2 \end{array}$$

Demostración. Sea $D_{e_1} \in T_{e_1}(\mathcal{G}_1)$ y D el campo invariante que define, con subgrupo uniparamétrico asociado g_t, entonces se tiene que $\exp(D_{e_1}) = g_1$. Por otra parte si $E_{e_2} = F_*(D_{e_1})$ y E es el campo invariante que define, entonces $F_*(D) = E$ y su subgrupo asociado es por (1.7.5) $F(g_t)$, por lo tanto $\exp(E_{e_2}) = F(g_1)$. ∎

Corolario 1.8.5 *Sean $F, G\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ dos morfismos de grupos de Lie tales que $F_* = G_*$ en el neutro, entonces $F = G$ en un entorno del neutro. Si además $\mathcal{G}_1$ es conexo, $F = G$ en todo el grupo.*

Demostración. La primera parte se sigue del resultado anterior por ser exp un difeomorfismo local en el neutro y la segunda de (1.2.9). ∎

Teorema 1.8.6 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie y $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ su álgebra de Lie. Entonces:*

i) *$\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ es abeliana sii para g_t y h_s subgrupos uniparamétricos de $\mathcal{G}$, $g_t h_s = h_s g_t$.*

ii) *Si $\mathcal{G}$ es abeliano, entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ es abeliana.*

iii) *Si $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ es abeliana, la componente conexa del neutro, $\mathcal{G}_e$, es un grupo de Lie abeliano.*

Demostración. (i) Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, con subgrupos uniparamétricos g_t y h_t, entonces $[D_1, D_2] = 0$ sii para $X_t = R_{g_t}$, $Y_t = R_{h_t}$, sus grupos uniparamétricos

$$X_t \circ Y_s = R_{h_s g_t} = R_{g_t h_s} = Y_s \circ X_t \quad \Leftrightarrow \quad g_t h_s = h_s g_t.$$

(ii) Es obvio por (i).

(iii) Consideremos ahora la aplicación

$$\exp\colon T_e(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}, \qquad \exp(D_e) = g_1,$$

para g_t el subgrupo uniparamétrico correspondiente a D_e, la cual es un difeomorfismo local en el cero, por tanto existe un entorno $U \subset \mathcal{G}$ del neutro tal que todo punto suyo es de la forma g_1, para g_t un subgrupo uniparamétrico de $\mathcal{G}$. Ahora si $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ es abeliana y $g, h \in U$, entonces $gh = hg$, pues $g = g_1$, $h = h_1$, para g_t y h_t sendos subgrupos uniparamétricos y por (i) $h_1 g_1 = g_1 h_1$. Se sigue de (1.2.9) que $\mathcal{G}_e$ es abeliano. ∎

Lema 1.8.7 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie, $\chi\colon \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ su producto, $(a,b) \in \mathcal{G}\times\mathcal{G}$, $D_{1a} \in T_a(\mathcal{G})$, $D_{2b} \in T_b(\mathcal{G})$ y $E_{(a,b)} \in T_{(a,b)}(\mathcal{G}\times\mathcal{G})$ tales que $\pi_{1*}(E_{(a,b)}) = D_{1a}$ y $\pi_{2*}(E_{(a,b)}) = D_{2b}$, para π_i las proyecciones, entonces*

$$\chi_*(E_{(a,b)}) = R_{b*}D_{1a} + L_{a*}D_{2b}.$$

En particular si $a = b = e$, $\chi_*(E_{(e,e)}) = D_{1e} + D_{2e}$.

Demostración. Se tiene que $E_{(a,b)}) = r_{b*}D_{1a} + l_{a*}D_{2b}$, para

$$\begin{aligned} r_b\colon \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\times\mathcal{G}, \quad r_b(x) = (x,b) \quad \Rightarrow \quad \chi\circ r_b = R_b,\\ l_a\colon \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}\times\mathcal{G}, \quad l_a(x) = (a,x) \quad \Rightarrow \quad \chi\circ l_a = L_a, \end{aligned}$$

sin mas que aplicar π_{i*}, por lo tanto

$$\chi_*(E_{(a,b)}) = R_{b*}D_{1a} + L_{a*}D_{2b}. \quad ∎$$

Corolario 1.8.8 *Sean $\sigma_1(t) = g_t$ y $\sigma_2(t) = h_t$ subgrupos uniparamétricos de un grupo de Lie correspondientes a campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$, entonces $\sigma(t) = h_t g_t$ es una curva diferenciable para la que*

$$\sigma(0) = e, \qquad \sigma_*(\partial t)_0 = D_{1e} + D_{2e}.$$

Si además $h_s g_t = g_t h_s$, para $t, s \in \mathbb{R}$, entonces σ es subgrupo uniparamétrico y corresponde al campo $D_1 + D_2$.

Demostración. Para $\gamma = (\sigma_1, \sigma_2)$, σ es la composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{G}\times\mathcal{G} & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{G} \\ t & \to & (h_t, g_t) & \to & h_t g_t \end{array}$$

y para $E_{(e,e)} = \gamma_*(\partial t)$ se tiene $\pi_{i*}(E_{(e,e)}) = D_{ie}$ y se sigue del Lema anterior que

$$\sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = \chi_* E_{(e,e)} = D_{1e} + D_{2e}.$$

Lo último es obvio pues σ es morfismo de grupos y $D_1 + D_2 \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$. ∎

Teorema 1.8.9 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie cuya álgebra es abeliana, entonces la aplicación* $\exp\colon T_e(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ *es morfismo de grupos de Lie. Si además $\mathcal{G}$ es conexo entonces la aplicación es sobre.*

Demostración. Sean $D_{1e}, D_{2e} \in T_e(\mathcal{G})$,

$$\exp(D_{1e}) = g_1, \quad \exp(D_{2e}) = h_1,$$

g_t, h_t los subgrupos uniparamétricos correspondientes y $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ los campos invariantes que definen. Entonces como el álgebra es abeliana tendremos, por (1.8.6), que $h_s g_t = g_t h_s$ y por el corolario anterior $\sigma(t) = g_t h_t$ es un subgrupo uniparamétrico correspondiente a $D_1 + D_2$, por tanto

$$\exp(D_{1e} + D_{2e}) = \sigma(1) = g_1 h_1 = \exp(D_{1e}) \exp(D_{2e}).$$

Que es sobre se sigue aplicando que es morfismo de grupos, que es difeomorfismo local en el cero y (1.2.9). ∎

Ejercicio 1.8.10 *Demostrar que* $\exp\colon T_e(\mathcal{S}_1) \to \mathcal{S}_1$ *es*

$$\exp\left(t \frac{\partial}{\partial y}\right) = \mathrm{e}^{it}.$$

1.9. El funtor de Lie

Hemos visto que cada grupo de Lie $\mathcal{G}$ define un álgebra de Lie $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ y cada morfismo F de grupos de Lie define un morfismo F_* de álgebras de Lie, esto permite definir un funtor entre ambas categorías, que llamamos *Funtor de Lie*. Hemos visto en (1.8.4), que en general si conocemos F_*, conocemos localmente F. Ahora veremos que en ciertas condiciones lo conocemos globalmente.

Definición. Diremos que una aplicación continua entre espacios topológicos $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un *revestimiento* si todo $y \in \mathcal{Y}$ tiene un entorno abierto V_y tal que $F^{-1}(V_y)$ es homeomorfo a $V_y \times D$ con D discreto, haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(V_y) & \sim & V_y \times D \\ {\scriptstyle F}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ & V_y & \end{array}$$

(recordemos que D es discreto si todo subconjunto suyo (en particular los puntos) es abierto). Lo llamaremos *revestimiento conexo* si $\mathcal{X}$ es conexo.

Definición. Diremos que un espacio topológico conexo $\mathcal{Y}$ es *simplemente conexo* si todo revestimiento conexo de $\mathcal{Y}$ es homeomorfismo.

Lema 1.9.1 *Sea $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morfismo de grupos de Lie, con $\mathcal{G}_2$ conexo, y difeomorfismo local. Entonces F es revestimiento.*

Demostración. F es sobre por ser $F(\mathcal{G}_1)$ subgrupo abierto y por (1.4.3) cerrado. Sea $y \in \mathcal{G}_2$, entonces $F^{-1}(y)$ es una subvariedad discreta, pues si $x \in F^{-1}(y)$ y consideramos sendos entornos de x e y, U_x y V_y, en los que F es difeomorfismo, $F(F^{-1}(y) \cap U_x) = y$, por tanto $F^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$. Sea $D = F^{-1}(e_2)$ y veamos que $F^{-1}(V_y)$ es homeomorfo a $V_y \times D$, haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(V_y) \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "F"'] & & V_y \times D \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & V_y & \end{tikzcd}$$

para ello basta definir, para $\sigma = F^{-1}\colon V_y \to U_x$, las funciones mutuamente inversas $G(a, d) = \sigma(a)d$ y $H(z) = (F(z), (\sigma F(z))^{-1} z)$. ∎

Teorema 1.9.2 *Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ grupos de Lie, con $\mathcal{G}_1$ simplemente conexo y sea $\varphi\colon \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1} \to \mathcal{D}_{\mathcal{G}_2}$, un morfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único morfismo de grupos de Lie $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, tal que $F_* = \varphi$.*

Demostración. La unicidad es consecuencia del corolario (1.8.5). Veamos la existencia: Consideremos el grupo de Lie producto $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ y los morfismos inyectivos de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1} \to \overline{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}} : \quad & \pi_{1*}\overline{D} = D, \quad \pi_{2*}\overline{D} = 0, \\ E \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}_2} \to \overline{E} \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}} : \quad & \pi_{1*}\overline{E} = 0, \quad \pi_{2*}\overline{E} = E, \end{aligned}$$

pues se tiene que $L_{(x,y)*}\overline{D} = \overline{D}$, ya que

$$\begin{aligned} \pi_{1*} L_{(x,y)*}\overline{D} &= L_{x*}\pi_{1*}\overline{D} = D, \\ \pi_{2*} L_{(x,y)*}\overline{D} &= L_{y*}\pi_{2*}\overline{D} = 0, \end{aligned}$$

idem para $\overline{E}$, y podemos considerar la subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$ de igual dimensión que $\mathcal{D}_{\mathcal{G}_1}$, formada por los campos

$$\mathfrak{h} = \{\overline{D} + \overline{\varphi(D)} : D \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1}\},$$

pues se tiene que para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}_1}$

$$\begin{aligned}[\overline{D_1} + \overline{\varphi(D_1)}, \overline{D_2} + \overline{\varphi(D_2)}] &= [\overline{D_1}, \overline{D_2}] + [\overline{\varphi(D_1)}, \overline{\varphi(D_2)}] \\ &= \overline{[D_1, D_2]} + \overline{\varphi([D_1, D_2])} \in \mathfrak{h},\end{aligned}$$

sin más que ver sus componentes, es decir aplicando π_{i*}. Ahora se tiene por (1.6.4) que existe un único subgrupo de Lie inmerso conexo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{h}$ y las proyecciones $\pi_i : \mathcal{H} \subset \mathcal{G} \to \mathcal{G}_1$ son morfismos de grupos de Lie y basta considerar el morfismo $F = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, para lo cual basta demostrar que π_1 es isomorfismo: Observemos que $\pi_{1*}(\overline{D} + \overline{\varphi(D)})_{(x,y)} = D_x$ y si $D_x = 0$, entonces $D = 0$ y π_{1*} es inyectiva, por tanto isomorfismo pues ambos espacios tienen igual dimensión. Por tanto π_1 es difeomorfismo local y revestimiento por el Lema anterior y por ser $\mathcal{G}_1$ simplemente conexo es difeomorfismo global pues es homeomorfismo. Ahora se tiene que

$$F_*(D) = \pi_{2*}[\pi_{1*}^{-1}(D)] = \pi_{2*}(\overline{D} + \overline{\varphi(D)}) = \varphi(D). \quad \blacksquare$$

Corolario 1.9.3 *Si $\mathcal{G}_1$ es simplemente conexo, entonces $Hom(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = Hom(\mathcal{D}_{\mathcal{G}_1}, \mathcal{D}_{\mathcal{G}_2})$.*

Corolario 1.9.4 *Dos grupos de Lie simplemente conexos, con álgebras de Lie isomorfas son isomorfos.*

Por último hay un resultado debido a Ado (ver Jacobson, p.199), cuya demostración no es fácil y omitimos que dice que "*Toda álgebra de Lie es subálgebra de un $\mathcal{M}_n$, para algún n*". Como consecuencia de él y de (1.6.4), se tiene el siguiente resultado que tampoco demostramos.

Teorema 1.9.5 *Dada un álgebra de Lie finito dimensional $\mathfrak{g}$, existe un grupo de Lie $\mathcal{G}$ (único simplemente conexo), con álgebra de Lie $\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \mathfrak{g}$.*

1.10. Subgrupos cerrados

En (1.4.4) demostramos que un subgrupo de un grupo de Lie si es subvariedad es cerrado. En esta lección veremos el recíproco.

Lema 1.10.1 *Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo cerrado del grupo de Lie $\mathcal{G}$ y*

$$\gamma\colon (-r, r) \subset \mathbb{R} \to T_e(\mathcal{G}),$$

una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = 0$ *y* $\exp[\gamma(t)] \in \mathcal{H}$, *para* $t \in (-r, r)$, *entonces* $\exp[t\gamma'(0)] \in \mathcal{H}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como $\gamma'(0) = \lim n\gamma(1/n)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, la sucesión $m_n \in \mathbb{Z}$ tal que $m_n \leq nt < m_n+1$, verifica $t\gamma'(0) = \lim m_n\gamma(1/n)$, pues

$$|t\gamma'(0) - m_n\gamma(1/n)| \leq |t\gamma'(0) - tn\gamma(1/n)| + |nt - m_n||\gamma(1/n)|,$$

por tanto se sigue de (1.8.3) que

$$\exp[t\gamma'(0)] = \lim \exp[m_n\gamma(1/n)] = \lim[\exp\gamma(1/n)]^{m_n} \in \mathcal{H},$$

pues $\exp[\gamma(1/n)] \in \mathcal{H}$ y es subgrupo cerrado. ∎

Lema 1.10.2 *Sea* $\mathcal{H}$ *un subgrupo cerrado del grupo de Lie* $\mathcal{G}$, *entonces*

$$\mathcal{S} = \{v \in T_e(\mathcal{G}) : \ \exp[tv] \in \mathcal{H}, \quad \textit{para todo} \ \ t \in \mathbb{R}\},$$

es un subespacio vectorial.

Demostración. Si $v \in \mathcal{S}$, entonces $tv \in \mathcal{S}$ obviamente. Sean $v_1, v_2 \in \mathcal{S}$, entonces por (1.8.3) $\sigma_1(t) = \exp(tv_1) = g_t \in \mathcal{H}$ y $\sigma_2(t) = \exp(tv_2) = h_t \in \mathcal{H}$, son las curvas integrales pasando por e, de los campos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{G}}$, que en el neutro definen v_1 y v_2 respectivamente. Consideremos la curva $\sigma(t) = g_th_t \in \mathcal{H}$, que por (1.8.8) verifica

$$\sigma(0) = e, \quad \sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 = D_{1e} + D_{2e} = v_1 + v_2.$$

Ahora si llamamos $\gamma(t) \in T_e(\mathcal{G})$ a la correspondiente curva pasada por la aplicación exponencial en el entorno donde es difeomorfismo, $\exp[\gamma(t)] = \sigma(t) \in \mathcal{H}$, por tanto $\gamma'(0) = v_1+v_2$ y por el lema anterior $\exp[t(v_1+v_2)] \in \mathcal{H}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por tanto $v_1 + v_2 \in \mathcal{S}$. ∎

En un grupo de Lie podemos definir, para cada subespacio vectorial $\mathcal{S}$ de $T_e(\mathcal{G})$, una aplicación diferenciable,

$$\varphi\colon T_e(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G},$$

que también es difeomorfismo local en 0, del siguiente modo: Sea $\mathcal{N} \subset T_e(\mathcal{G})$ un subespacio complementario de $\mathcal{S}$, es decir tal que $T_e(\mathcal{G}) = \mathcal{S}\oplus\mathcal{N}$, por ejemplo consideramos una base $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathcal{S}$, la extendemos a una $v_1, \ldots, v_n$ de $T_e(\mathcal{G})$ y definimos $\mathcal{N} =< v_{k+1}, \ldots, v_n >$. Ahora definimos para cada $v \in T_e(\mathcal{G})$, $v = v_S + v_N \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$, la función

$$\varphi(v) = \exp(v_N) \cdot \exp(v_S).$$

Proposición 1.10.3 *La aplicación* $\varphi\colon T_e(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$ *es difeomorfismo local en el* 0.

Demostración. Consideremos el sistema de coordenadas lineales x_i asociado a la base v_i. Basta demostrar que $\varphi_*(\partial x_i)_0 = v_i$, ahora bien $(\partial x_i)_0 = \sigma_*(\partial t)_0$, para $\sigma(t) = tv_i$, y como $\varphi[\sigma(t)] = \exp(tv_i)$ es por 1.8.3 la curva integral del campo $D_i \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$ que en el neutro vale v_i, el resultado se sigue. ∎

Considerando entornos difeomorfos

$$\varphi = U_0 \subset T_e(\mathcal{G}) \to U_e \subset \mathcal{G},$$

podemos definir un sistema de coordenadas u_i en el abierto U_e, tal que $x_i = \varphi^*(u_i)$, que tiene la siguiente interesante propiedad: Denotemos

$$\mathfrak{h} = \{D \in \mathfrak{g} : \ D_e \in \mathcal{S}\},$$

es decir la imagen de $\mathcal{S}$ por el isomorfismo canónico $T_e(\mathcal{G}) \to \mathfrak{g}$, sean $D_1, \ldots, D_k \in \mathfrak{g}$, la imagen de $v_1, \ldots, v_k$ y consideremos la distribución correspondiente

$$\Delta_x =< D_{1x}, \ldots, D_{kx} > .$$

Proposición 1.10.4 *Si* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de* $\mathfrak{g}$*, la distribución* Δ *es involutiva y*

$$\Delta(U_e) =< \frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_k} > .$$

Demostración. Basta demostrar que para $x = \varphi(v) \in U_e$ e $i = 1, \ldots, k$, $\partial u_{ix} \in \Delta_x$. Para ello consideremos $v = \sum b_i v_i = s + n \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$ —por tanto $x = \exp(n) \cdot \exp(s) = g \cdot h$— y la curva

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \varphi(v + tv_i) = \varphi(b_1 v_1 + \ldots + (b_i + t)v_i + \ldots + b_n v_n) \\ &= \exp(n) \cdot \exp(s + tv_i) = g \cdot \exp(s + tv_i),\end{aligned}$$

que pasa por x y tiene $\partial u_{ix} = \sigma_*(\partial t)_0$ como vector tangente, pues $[u_j \circ \sigma]'(0) = \delta_{ij}$. Ahora por (1.6.4) sabemos que la subvariedad integral máxima $\mathcal{H}$, que contiene al neutro e es un subgrupo de Lie inmerso conexo de $\mathcal{G}$ y sus cosets $z\mathcal{H}$, son variedades integrales de Δ, por lo que basta demostrar que $\sigma_*(\partial t)_0 \in T_x[x\mathcal{H}] = \Delta_x$. Primero observemos que

$$\varphi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{H},$$

pues si $v = \sum_{i=1}^k a_i v_i \in \mathcal{S}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(tv) = \exp(tv) \in \mathcal{H},$$

pues por (1.8.3) es la curva integral, que pasa por e, del campo $D = \sum_{i=1}^k a_i D_i \in \Delta$ y del campo $\overline{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$, que también es completo y coincide con D en $\mathcal{H}$ (pues $v \in \mathcal{S} = \Delta_e = T_e(\mathcal{H})$). Por tanto $\varphi(v) = \exp(v) \in \mathcal{H}$. Por tanto como $s \in \mathcal{S}$, $h = \exp(s) \in \mathcal{H}$ y por ser subgrupo,

$$x\mathcal{H} = gh\mathcal{H} = g\mathcal{H},$$

por último

$$\begin{aligned} s + tv_i \in \mathcal{S} \quad &\Rightarrow \quad \exp(s + tv_i) \in \mathcal{H} \\ &\Rightarrow \quad \sigma(t) = g \cdot \exp(s + tv_i) \in g\mathcal{H} = x\mathcal{H} \\ &\Rightarrow \quad \sigma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 \in T_x[x\mathcal{H}] = \Delta_x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por último se tiene el resultado con el que empezamos la lección.

Teorema 1.10.5 *Todo subgrupo cerrado $\mathcal{H}$ de un grupo de Lie $\mathcal{G}$, es subvariedad.*

Demostración. Veamos que dado cualquier punto $g \in \mathcal{H}$ existe un entorno coordenado $(U_g; u_i)$, tal que

$$\mathcal{H} \cap U_g = \{x \in U_g : u_{k+1} = \cdots = u_n = 0\}.$$

Para ello basta demostrarlo en el neutro e, pues haciendo la traslación L_g, como $L_g(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, lo tendremos para g.

Consideremos el subespacio $\mathcal{S}$ de (1.10.2) y por (1.10.3) el difeomorfismo $\varphi\colon U_0 \subset T_e(\mathcal{G}) \to U_e \subset \mathcal{G}$. Por la definición de $\mathcal{S}$, $\varphi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{H}$ y basta demostrar que existe un entorno de 0, $U \subset U_0$, para el que $\varphi(\mathcal{S} \cap U) = \mathcal{H} \cap \varphi(U)$. Ahora la inclusión $\varphi(\mathcal{S} \cap U) \subset \mathcal{H} \cap \varphi(U)$ se tiene siempre, por tanto en caso contrario podremos encontrar una sucesión $v_n \in U_0$, tal que $v_n \to 0$, $g_n = \varphi(v_n) \to e$ en $\mathcal{H}$ y $v_n \notin \mathcal{S}$, pero entonces $v_n = x_n + y_n \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}$, con $y_n \in \mathcal{N} \backslash \{0\}$, $y_n \to 0$ y $g_n = \varphi(v_n) = \exp(y_n) \cdot \exp(x_n) \in \mathcal{H}$, por tanto $\exp(y_n) \in \mathcal{H}$. Ahora $y_n / \|y_n\|$ está en un compacto y tiene una subsucesión convergente (que llamamos igual) a un punto límite $y \in \mathcal{N}$, con $\|y\| = 1$ y llegamos a una contradicción pues se tiene que $y \in \mathcal{S}$ ya que $ty = \lim ty_n/\|y_n\|$ y para la sucesión $m_n \in \mathbb{Z}$, $m_n \le t/\|y_n\| < m_n + 1$, $ty = \lim m_n y_n$, pues

$$\|ty - m_n y_n\| \le \|ty - ty_n/\|y_n\|\| + \|m_n y_n - ty_n/\|y_n\|\|,$$

y por (1.8.3), $\exp(ty) = \lim \exp(m_n y_n) = \lim[\exp(y_n)]^{m_n} \in \mathcal{H}$. ∎

Ejercicio 1.10.6 *Demostrar que si $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ es un morfismo de grupos de Lie con $\mathcal{G}_1$ compacto, entonces $F(\mathcal{G}_1)$ es un subgrupo de Lie.*

1.11. Grupos de Lie abelianos

En esta lección vamos a clasificar los grupos de Lie abelianos. Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie abeliano, entonces hemos visto en (1.8.9) que la aplicación

$$\exp\colon \mathcal{E} = T_e(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G},$$

es un morfismo de grupos de Lie (sobre, si el grupo es conexo) y difeomorfismo local en 0, por tanto en todo punto y se sigue como en (1.9.1) que el subgrupo cerrado

$$H = \ker \exp = \exp^{-1}(e) \subset \mathcal{E},$$

es discreto (por (1.3.3) es un grupo de Lie de dimensión 0).

Lema 1.11.1 *Dado el difeomorfismo local y sobre*

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}_n, \quad \pi(x_1, \ldots, x_n) = (\mathrm{e}^{2\pi i x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi i x_n}),$$

y un subgrupo $H \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y discreto con $\mathbb{Z}^n \subset H$, se tiene que $\pi(H)$ es finito.

Demostración. H es unión disjunta en $z = (z_i) \in \mathbb{Z}^n$ de

$$H \cap [z, z+1) = H \cap [0,1) + z,$$

para $[z, z+1) = \prod_{i=1}^n [z_i, z_i + 1)$, siendo $\pi(H \cap [z, z+1)) = \pi(H \cap [0,1))$, por tanto basta demostrar que $H \cap [0,1)$ es finito. En caso contrario tendríamos una sucesión de puntos distintos $x_n \in H$ en el compacto $[0,1]$ por tanto con un punto límite x, que estaría en H por ser cerrado, pero todo entorno de x tendría puntos x_n lo cual contradice que H sea discreto. ∎

El siguiente resultado que a continuación usaremos es una conocida caracterización de Teoría de Grupos y no lo demostramos.

Teorema 1.11.2 *Todo grupo abeliano finito generado es de la forma*

$$H \simeq \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_s.$$

Teorema 1.11.3 *Todo subgrupo cerrado y discreto $H \subset \mathcal{E}$ es*

$$H = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r,$$

con los $e_i \in H$ linealmente independientes en $\mathcal{E}$.

Demostración. Sea $< H >=< v_1, \ldots, v_n >$, con los $v_i \in H$ independientes y consideremos el isomorfismo $< H > \to \mathbb{R}^n$, $v_i \to e_i$ y llamemos H también a su imagen. Entonces por ser subgrupo y los $e_i \in H$ tendremos que $\mathbb{Z}^n \subset H$ y por el lema anterior tenemos que

$$\pi(H) = \{\pi(h_1), \cdots, \pi(h_m)\},$$

por tanto para todo $h \in H$ existe un h_i tal que $\pi(h) = \pi(h_i)$, es decir $h - h_i \in \mathbb{Z}^n$ y tenemos que H es un subgrupo abeliano generado por

$$h_1, \ldots, h_m, v_1, \ldots, v_n$$

por tanto por el teorema anterior será de la forma

$$\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z},$$

pero en este caso los términos del tipo $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ no aparecen pues sus elementos corresponderían a $z \in H$, tales que $m_i z = 0$, los cuales no existen, por tanto es de la forma

$$\mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r,$$

y falta ver que los $e_i \in < H >$ son independientes. En caso contrario como generan $< H >$ podemos tomar una base de $< H >$ entre ellos, $e_1, \ldots, e_n$ y el difeomorfismo local

$$\pi \colon \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n = \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}_n,$$

para el que $\pi(H) = \{\pi(h_1), \ldots, \pi(h_k)\}$ es finito, pero

$$H = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \oplus \mathbb{Z}e_{n+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r,$$

y π es inyectivo en $\mathbb{Z}e_{n+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r$, lo cual es absurdo pues este espacio es infinito, a menos que $r = n$. ∎

1.11.1. Grupos de Lie abelianos conexos. Clasificación

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos la siguiente clasificación.

Teorema 1.11.4 *Todo grupo de Lie abeliano y conexo es isomorfo a*

$$\mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Demostración. Por el resultado anterior,

$$H = \ker \exp = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r$$

con los e_i independientes que extendemos a una base $e_1, \ldots, e_n \in T_e(\mathcal{G})$. Ahora considerando las coordenadas asociadas a esta base tenemos que el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
T_e(\mathcal{G}) & \sim & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \\
x & \to & (x_1, x_2) \\
{\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
\mathcal{G} & \xleftarrow{\phi} & \mathbb{T}_r \times \mathbb{R}^{n-r} \\
\exp(x) & & (\pi(x_1), x_2)
\end{array}$$

para $x_1 = (a_1, \ldots, a_r)$ y $x_2 = (a_{r+1}, \ldots, a_n)$ si $x = \sum a_i e_i$, define una única ϕ para la que el diagrama es conmutativo, pues

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2) \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}^n, x_2 = y_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x - y \in H \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x) = \exp(y),
\end{aligned}$$

que es isomorfismo de grupos y difeomorfismo pues cada flecha descendente es morfismo de grupos, sobre (exp por ser $\mathcal{G}$ conexo) y difeomorfismo local. ∎

1.11.2. Idem no conexos. Clasificación

Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie abeliano no conexo y sea $\mathcal{G}_e$ su componente conexa que contiene al neutro, que por (1.2.7) es un grupo de Lie, por tanto isomorfo por el resultado anterior a

$$\mathcal{G}_e \simeq \mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Ahora bien en (1.2.7) también vimos que era subgrupo normal[2], por tanto existe el grupo cociente $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_e$ —que son las componentes conexas— y es grupo de Lie con la topología discreta y la estructura diferenciable formada por todas las funciones en todos sus subconjuntos, para el que la proyección natural es morfismo de grupos de Lie

$$\pi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{G}_e, \tag{1.5}$$

pues es continua —ya que la imagen recíproca de un abierto es la unión de algunas componentes conexas, que son abiertas—, es abierta obviamente y diferenciable pues dada cualquier función f en el cociente, $\pi^* f$ es constante en cada componente conexa y por tanto diferenciable y tenemos la sucesión exacta de grupos de Lie

$$0 \to \mathcal{G}_e \xrightarrow{i} \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{G}/\mathcal{G}_e \to 0,$$

siendo $\mathcal{G}_e = \mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^{n-k}$ un $\mathbb{Z}$–*módulo inyectivo*.

Definición. Un A–módulo M es *inyectivo* si dado cualquier morfismo inyectivo de A–módulos $i\colon M' \to M''$ y un morfismo de A–módulos $f\colon M' \to M$, existe otro $h\colon M'' \to M$ que hace conmutativo el diagrama (ver Navarro, p.312).

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M'' \\ & {}_f\searrow \quad \swarrow_h & \\ & M & \end{array}$$

Ahora bien si consideramos un ideal $\mathfrak{a}$ del anillo A y un $x \in M$ la aplicación $f\colon \mathfrak{a} \to M$, $f(a) = ax$ es morfismo de A–módulos, pero además si M es inyectivo así son todos, pues considerando la inclusión $i\colon \mathfrak{a} \to A$, para cada morfismo de A–módulos $f\colon \mathfrak{a} \to M$, existe un morfismo $h\colon A \to M$ haciendo el diagrama conmutativo, por tanto $f(a) = h(a) = ah(1)$.

Esta simple condición necesaria es suficiente para que el módulo sea inyectivo, como se comprueba en la siguiente caracterización.

Criterio del ideal 1.11.5 *(Ver* Navarro*, p.312) Sea M un A–módulo tal que para cada morfismo de A–módulos $f\colon \mathfrak{a} \to M$, existe un $x \in M$ tal que $f(a) = ax$ para todo $a \in \mathfrak{a}$, entonces M es inyectivo.*

[2]Es decir que para todo $g \in \mathcal{G}$, $g\mathcal{H}g^{-1} \subset \mathcal{H}$, en cuyo caso si $\mathcal{H}$ es normal, $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ tiene una estructura natural de grupo para la que $\pi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ es morfismo de grupos.

Corolario 1.11.6 *$\mathcal{G}_e$ es un $\mathbb{Z}$–módulo inyectivo.*

Demostración. $\mathcal{G}_e = \mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^{n-k}$ es un *grupo divisible*, es decir que dado $g' \in \mathcal{G}_e$ y $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ existe $g \in \mathcal{G}_e$ tal que, $g' = mg$. Por otra parte los grupos abelianos son módulos sobre $\mathbb{Z}$ (por comodidad usamos notación aditiva) y los ideales de $\mathbb{Z}$ son $m\mathbb{Z}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Ahora veamos que se verifica el criterio del ideal. Sea $f: m\mathbb{Z} \to \mathcal{G}_e$ un morfismo de módulos y $g' = f(m)$, ahora como $\mathcal{G}_e$ es divisible existe $g \in \mathcal{G}_e$ tal que $g' = mg$, luego

$$f(zm) = zf(m) = zg' = z(mg) = (zm)g. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.11.7 *Todo grupo de Lie abeliano es de la forma*

$$\mathbb{T}_k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathcal{H},$$

con $\mathcal{H}$ un grupo de Lie discreto.

Demostración. Por el resultado anterior $\mathcal{G}_e$ es un $\mathbb{Z}$–módulo inyectivo, entonces dada la identidad en $\mathcal{G}_e$, existe un morfismo de grupos h que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_e \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "id"'] & & \mathcal{G} \arrow[dl, "h"] \\ & \mathcal{G}_e & \end{tikzcd}$$

es decir que para $g \in \mathcal{G}_e$, $h(g) = g$, lo cual unido a que tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{G}_e \underset{\leftarrow}{\overset{i}{\rightarrow}} \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{G}_e \to 0,$$

nos permite definir

$$\sigma: \mathcal{H} \to \mathcal{G}, \quad \sigma[\pi(g)] = g - h(g),$$

que es un morfismo de grupos de Lie tal que $\pi \circ \sigma = id$. En primer lugar está definida en todo punto porque π es sobre y está bien definida pues si $\pi(g_1) = \pi(g_2)$, entonces para $g = g_1 - g_2$, $\pi(g) = e$, por tanto $g \in \mathcal{G}_e$ y $h(g) = g$, por tanto

$$\sigma[\pi(g_1)] = g_1 - h(g_1) = g_2 - h(g_2) = \sigma[\pi(g_2)].$$

Por otro lado es morfismo de grupos pues lleva el neutro al neutro y

$$\sigma[\pi(g_1) + \pi(g_2)] = g_1 - h(g_1) + g_2 - h(g_2) = \sigma[\pi(g_1)] + \sigma[\pi(g_2)],$$

por último es diferenciable porque $\mathcal{H}$ es discreto, pero entonces $h(g) = g - \sigma[\pi(g)]$ también es diferenciable. Ahora podemos establecer el isomorfismo $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_e \times \mathcal{H}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{F} & \mathcal{G}_e \times \mathcal{H} \\ g & \to & (h(g), \pi(g)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xleftarrow{G} & \mathcal{G}_e \times \mathcal{H} \\ g' + \sigma(a') & \longleftarrow & (g', a') \end{array}$$

pues $F \circ G = id$ y $G \circ F = id$. ∎

1.12. La acción de un grupo

Definición. Diremos que un grupo de Lie $\mathcal{G}$ *actúa (por la izquierda)*, sobre una variedad diferenciable $\mathcal{X}$ si existe una aplicación diferenciable

$$\theta \colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

satisfaciendo las condiciones:

i) Para el neutro $e \in \mathcal{G}$ y cualquier $x \in \mathcal{X}$

$$\theta(e, x) = x.$$

ii) Para cualesquiera $a, b \in \mathcal{G}$ y $x \in \mathcal{X}$

$$\theta(a, \theta(b, x)) = \theta(ab, x).$$

Llamaremos $\mathcal{G}$–variedad a una variedad en la que actúa el grupo de Lie $\mathcal{G}$.

Nota 1.12.1 Por comodidad escribiremos habitualmente gx en lugar de $\theta(g, x)$ y para cada $g \in \mathcal{G}$ consideraremos los difeomorfismos

$$\theta_g : x \in \mathcal{X} \longrightarrow gx \in \mathcal{X},$$

en cuyos términos las condiciones de la definición se expresan de la forma

$$ex = x, \quad g(hx) = (gh)x; \quad \theta_e = \mathrm{id}, \quad \theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}.$$

Para cada $x \in \mathcal{X}$ también consideraremos las aplicaciones diferenciables

$$\theta_x \colon g \in \mathcal{G} \longrightarrow gx \in \mathcal{X},$$

Del modo obvio se define una acción por la derecha.

Definición. Diremos que una aplicación $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, entre $\mathcal{G}$–variedades es $\mathcal{G}$–diferenciable si es diferenciable y conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\times\mathcal{X} & \stackrel{\theta_1}{\longrightarrow} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle (\mathrm{id},\phi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathcal{G}\times\mathcal{Y} & \stackrel{\theta_2}{\longrightarrow} & \mathcal{Y} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (g,x) & \longrightarrow & gx \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g,\phi(x)) & \longrightarrow & g\phi(x)=\phi(gx) \end{array}$$

y diremos que es un $\mathcal{G}$–difeomorfismo si además es difeomorfismo.

Definición. Diremos que la acción es *fiel* ó *efectiva* si es inyectiva la aplicación

$$g \in \mathcal{G} \longrightarrow \theta_g \in \mathit{Diff}(\mathcal{X}),$$

donde denotamos con $\mathit{Diff}(\mathcal{X})$ el grupo de los difeomorfismos de $\mathcal{X}$ en sí mismo, con la composición. En cuyo caso se tiene que

$$gx = x, \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \Leftrightarrow \quad g = e,$$

y podemos considerar que $\mathcal{G}$ es un subgrupo de $\mathit{Diff}(\mathcal{X})$.

Ejemplo 1.12.2 El producto en un grupo de Lie

$$\chi\colon \mathcal{G}\times\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \qquad \chi(g,h) = gh,$$

es una acción.

Ejemplo 1.12.3 Para $F\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ morfismo de grupos de Lie,

$$\theta\colon \mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}_2, \qquad \theta(x,y) = F(x)y,$$

es una acción.

Ejemplo 1.12.4 Sea $\mathcal{H}$ un subgrupo de Lie de un grupo de Lie $\mathcal{G}$, entonces la restricción de una acción

$$\theta\colon \mathcal{G}\times\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

a $\mathcal{H}\times\mathcal{X}$, es una acción.

Ejemplo 1.12.5 La acción natural de $\mathcal{G} = Gl_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$

$$\theta\colon Gl_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \theta(\mathbf{A},x) = \mathbf{A}x.$$

Ejemplo 1.12.6 Consideremos el grupo de Lie $\mathcal{G} = \text{Mov}(\mathbb{R}^n)$ de los movimientos rígidos en $\mathbb{R}^n$, es decir de las transformaciones de la forma

$$T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \mathbf{A}x + a$$

para $\mathbf{A} \in \mathcal{O}_n$ y $a \in \mathbb{R}^n$, con la composición. Observemos que como variedad diferenciable es $\mathcal{O}_n \times \mathbb{R}^n$, sin embargo como grupo no es el grupo producto, pues la operación de composición en términos del producto es

$$(\mathbf{A}, a)(\mathbf{B}, b) = (\mathbf{AB}, \mathbf{A}b + a).$$

La aplicación

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \theta(T, x) = T(x),$$

que en términos matriciales es

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \theta((\mathbf{A}, a), x) = \mathbf{A}x + a,$$

es una acción.

Ejemplo 1.12.7 Consideremos la variedad diferenciable $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$, de las *referencias* de $\mathbb{R}^n$, formada por todas las bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, que podemos identificar, fijando una base como por ejemplo la $\{e_1, \ldots, e_n\}$, con $Gl_n(\mathbb{R})$ (mediante esta identificación consideramos su estructura diferenciable).

Definimos la acción natural de $\mathcal{G} = Gl_n(\mathbb{R})$ en $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{R}^n), \quad \theta(\mathbf{A}, \{v_1, \ldots, v_n\}) = \{\mathbf{A}v_1, \ldots, \mathbf{A}v_n\},$$

que en términos de la identificación es

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \qquad \theta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{AB}.$$

Ejemplo 1.12.8 En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tenemos la acción natural

$$\theta\colon Gl_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \theta(\mathbf{P}, \mathbf{A}) = \mathbf{PAP}^{-1}.$$

Ejemplo 1.12.9 La conjugación en un grupo de Lie

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \qquad \theta(g, h) = ghg^{-1}$$

es una acción, para la que $\theta_g = L_g \circ R_{g^{-1}}\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ es isomorfismo de grupos de Lie, por tanto $\theta_{g*}\colon \mathcal{D}_\mathcal{G} \to \mathcal{D}_\mathcal{G}$ es isomorfismo de álgebras de Lie y

$$\beta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{D}_\mathcal{G} \to \mathcal{D}_\mathcal{G}, \quad \beta(g, D) = \theta_{g*}D,$$

es una acción (veremos que es diferenciable en (1.12.11)), para la que si $D \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$ tiene subgrupo uniparamétrico g_t, $\beta_g D$ tiene gg_tg^{-1}.

Ejercicio 1.12.10 *Demostrar que en el ejemplo (1.12.9), para $\mathcal{G} = Gl_n(\mathbb{R})$ se tiene que β es la acción del ejemplo (1.12.8), donde consideramos el isomorfismo $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \sim \mathcal{D}_\mathcal{G}$ visto en el ejercicio (1.5.14).*

Definición. Llamamos *representación adjunta* de un grupo de Lie al morfismo de grupos de Lie (en términos del ejemplo anterior)

$$\mathrm{Ad}\colon \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\mathcal{G}), \qquad g \to \theta_{g*},$$

el cual define un morfismo de álgebras de Lie (ver (1.5.15))

$$\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_*\colon \mathcal{D}_\mathcal{G} \to \mathcal{D}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\mathcal{G})} \equiv \mathrm{End}(\mathcal{D}_\mathcal{G}).$$

Teorema 1.12.11 *Las aplicaciones β y* Ad *son diferenciables.*

Demostración. Basta demostrar que Ad es diferenciable pues β es la composición

$$\mathcal{G} \times \mathcal{D}_\mathcal{G} \xrightarrow{(\mathrm{Ad},id)} \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\mathcal{G}) \times \mathcal{D}_\mathcal{G} \to \mathcal{D}_\mathcal{G},$$

donde la última es el producto.

Considerando un sistema de coordenadas (x_i) del grupo en el neutro y la base de $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ definida por los campos invariantes D_i que en el neutro definen las parciales, tendremos que

$$\mathrm{Ad}(x)(D_i) = \theta_{x*}(D_i) = \sum f_{ij}(x) D_j,$$

y basta demostrar que las f_{ij} son diferenciables. Ahora si consideramos los campos $\overline{D_i} \in \mathcal{D}(\mathcal{G} \times \mathcal{G})$, tales que $\pi_{1*}(\overline{D_i}) = 0$ y $\pi_{2*}(\overline{D_i}) = D_i$, y la aplicación $\varphi(y) = (x, y)$, tendremos: que $\varphi_*(D_{ie}) = \overline{D}_{i(x,e)}$, pues satisface las propiedades anteriores; que $\theta_x = \theta \circ \varphi$ y que

$$f_{ij}(x) = \theta_{x*}(D_{ie}) x_j = \theta_*(\varphi_* D_{ie}) x_j = \overline{D_i}(x_j \circ \theta)(x, e). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.12.12 *Para cada $D \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$,* $\mathrm{ad}(D)(E) = D^L E$.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$, entonces como $\mathrm{ad}(D)(E), D^L E \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$ basta demostrar que coinciden en el neutro. Ahora tenemos el diagrama conmutativo visto en (1.8.4)

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_\mathcal{G} & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathcal{D}_{\mathcal{G}'} = \mathrm{End}(\mathcal{D}_\mathcal{G}) \\
{\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\
\mathcal{G} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathcal{G}' = \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\mathcal{G})
\end{array}$$

y para $ad(D) \equiv \mathbf{A}$, $ad(tD) \equiv t\mathbf{A}$ y como $\mathbf{A} = (\exp(t\mathbf{A}))'(0)$, tendremos que $ad(D) = (\exp(ad(tD))'(0)$; y por otro lado si $g_t = \exp(tD)$ es el subgrupo uniparamétrico de D, R_{g_t} es su grupo uniparamétrico y como $\theta_{g_t} = R_{g_{-t}} \circ L_{g_t}$, para $\theta(x, y) = xyx^{-1}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
(D^L E)_e &= \frac{d}{dt}(R_{g_{-t}*}E_{g_t})_{|t=0} = \frac{d}{dt}(R_{g_{-t}*}(L_{g_t}E_e))_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\theta_{g_t*}E_e)_{|t=0} = \frac{d}{dt}((Ad(g_t)E)_e)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((Ad(\exp(tD))E)_e)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(ad(tD)E)_e)_{|t=0} \\
&= (ad(D)E)_e. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición. Sea $\mathcal{G}$ un grupo que actúa sobre una variedad diferenciable $\mathcal{X}$. Llamaremos *órbita de un punto* $x \in \mathcal{X}$, al subconjunto de $\mathcal{X}$

$$\theta_x(\mathcal{G}) = \mathcal{G}x = \{gx : \ g \in \mathcal{G}\},$$

en general para $A \subset \mathcal{X}$ denotaremos $\mathcal{G}A = \{gx : g \in \mathcal{G}, x \in A\}$.

Diremos que un punto es *fijo* por la acción si $\mathcal{G}x = x$ y diremos que la acción es *transitiva* si para algún $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{G}x = \mathcal{X}$, es decir θ_x es sobre, en cuyo caso se demuestra fácilmente que la igualdad es cierta para cualquier $x \in \mathcal{X}$. Diremos que es *simplemente transitiva* si dados $x, y \in \mathcal{X}$ existe un único $g \in \mathcal{G}$ tal que $y = gx$, es decir todas las θ_x son biyectivas.

Ejemplo 1.12.13 La acción natural de $Gl_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ del ejemplo (1.12.5), tiene al origen fijo y es transitiva en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, por lo tanto sus órbitas son triviales, $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, sin embargo no lo son si consideramos la restricción (ver el ejemplo 6), de esta acción para distintos subgrupos de $Gl_n(\mathbb{R})$. Por ejemplo si consideramos el subgrupo $\mathcal{O}_n$, las órbitas son las esferas centradas en el origen, pues

$$\|\mathbf{A}x\|^2 = x^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} x = x^t x = \|x\|^2.$$

Ejemplo 1.12.14 La acción definida en el ejemplo (1.12.7) es simplemente transitiva.

Proposición 1.12.15 *Para cada $x \in \mathcal{X}$ las aplicaciones diferenciables $\theta_x \colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ son de rango constante y son proyecciones regulares si la acción es transitiva.*

Demostración. Para ver que son de rango constante basta considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\theta_x} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle \mathrm{L_g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{\mathrm{g}}} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\theta_x} & \mathcal{X} \end{array}$$

ahora bien si la acción es transitiva, cada θ_x es sobre y por (1.1.6) proyección regular. ∎

Definición. Sea $\mathcal{G}$ un grupo que actúa sobre una variedad diferenciable $\mathcal{X}$. Llamaremos *grupo de isotropía* de un punto $x \in \mathcal{X}$, a los elementos del grupo que lo dejan invariante

$$I_x = \{g \in \mathcal{G} : \ gx = x\} = \theta_x^{-1}\{x\}.$$

Diremos que $\mathcal{G}$ *actúa libremente* en $\mathcal{X}$ si el neutro es el único elemento que deja fijo un punto, es decir que dados $g \in \mathcal{G}$ y $x \in \mathcal{X}$,

$$gx = x \quad \Rightarrow \quad g = e.$$

Teorema 1.12.16 *Cada órbita de una acción de un grupo de Lie compacto es subvariedad y compacta.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ una órbita y $x \in \mathcal{O}$, entonces $\mathcal{O} = \theta_x(\mathcal{G})$ y como θ_x es de rango constante por (1.12.15), existe por (1.1.6) un abierto $U_e \subset \mathcal{G}$ entorno del neutro, tal que $\theta_x(U_e)$ es una subvariedad de $\mathcal{X}$. Veamos que hay un entorno abierto V de x tal que $\theta_x(\mathcal{G}) \cap V = \theta_x(U_e)$. Por un lado $V^c = C = \theta_x((U_e I_x)^c)$ es cerrado pues es compacto, ya que $(U_e I_x)^c$ es un cerrado del grupo que es compacto. Por otro lado es disjunto de $\theta_x(U_e)$, pues si existen $g \in U_e$ y $h \in (U_e I_x)^c$, tales que $gx = hx$, entonces $g^{-1}h \in I_x$ y $h \in U_e I_x$, y por otro lado $\theta_x(\mathcal{G})$ es la unión disjunta de $\theta_x(U_e)$ y C, pues dado $y = gx \in \theta_x(\mathcal{G})$, tal que $y \notin \theta_x(U_e)$, para todo $h \in U_e$, $gx \neq hx$, por tanto $h^{-1}g \notin I_x$, es decir $g \notin hI_x$ y $g \in (U_e I_x)^c$. Por tanto $\theta_x(\mathcal{G}) \cap V = \theta_x(U_e)$. ∎

Ejemplo 1.12.17 $\mathbb{T}_n$ es obviamente un grupo de Lie compacto y $\mathcal{O}_n$ también pues es el cerrado $\{\sum z_{ij} z_{kj} = \delta_{ik}\}$ y acotado ya que por las ecuaciones anteriores, $|z_{ik}| \leq \sum z_{ij}^2 = 1$.

Proposición 1.12.18 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo que actúa sobre una variedad diferenciable $\mathcal{X}$, entonces para cada $x \in \mathcal{X}$, I_x es un subgrupo cerrado, por tanto de Lie. Si además la acción es transitiva, para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$, I_x e I_y son subgrupos conjugados.*

1.12.1. Grupos de Lie clásicos conexos

El siguiente resultado es de gran utilidad en el estudio de los grupos de Lie conexos.

Proposición 1.12.19 *Sea $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ una acción transitiva, con $\mathcal{X}$ conexo, entonces:*

1) *$\theta\colon \mathcal{G}_e \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ también es una acción transitiva.*
2) *Para todo x son isomorfos los grupos $\mathcal{G}/\mathcal{G}_e \simeq I_x/I_x \cap \mathcal{G}_e$.*
3) *Si algún I_x es conexo entonces $\mathcal{G}$ es conexo.*

Demostración. (1) Por (1.12.15), cada $\theta_x : \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ es una proyección regular, por tanto abierta y para $\mathcal{G}_i$ las componentes conexas de $\mathcal{G}$, que son abiertas, tendremos que $\theta_x(\mathcal{G}_i)$ son abiertos que coinciden con $\theta_x(\mathcal{G}_e)$ ó son disjuntos con él, pues si existen $g \in \mathcal{G}_i$ y $h \in \mathcal{G}_e$, tales que $gx = hx$, entonces como $R_g(\mathcal{G}_e) = \mathcal{G}_i$, tendremos que

$$\theta_x(\mathcal{G}_i) = \theta_x(\mathcal{G}_e g) = \theta_x(\mathcal{G}_e h) = \theta_x(\mathcal{G}_e),$$

y como

$$\mathcal{X} = \theta_x(\cup_i \mathcal{G}_i) = \cup_i \theta_x(\mathcal{G}_i),$$

por conexión tendremos que $\mathcal{X} = \theta_x(\mathcal{G}_e)$.

(2) Consideremos el morfismo de grupos de Lie F composición de (ver (1.5), pág.46)

$$I_x \hookrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{G}/\mathcal{G}_e,$$

el cual es sobre pues dado $g \in \mathcal{G}$, existe $h \in I_x$ tal que $h \in g\mathcal{G}_e$, y esto se sigue de (1) pues existe $g_e \in \mathcal{G}_e$ tal que $g_e x = gx$, por tanto $h = g_e^{-1} g \in I_x$ y $h \in \mathcal{G}_e g = g\mathcal{G}_e$, pues $\mathcal{G}_e$ es normal. Ahora se tiene que

$$I_x/I_x \cap \mathcal{G}_e = I_x/\ker F \simeq \operatorname{Im}(F) = \mathcal{G}/\mathcal{G}_e.$$

(3) Como $\mathcal{G}_e$ es abierto y cerrado en $\mathcal{G}$, $I_x \cap \mathcal{G}_e$ es abierto y cerrado en I_x que es conexo por tanto coinciden y por (2) $\mathcal{G}_e = \mathcal{G}$. ∎

Corolario 1.12.20 *Son conexos los grupos de Lie*

$$\begin{aligned} \mathrm{Gl}_n^+ &= \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det \mathbf{A} > 0\}, \\ \mathrm{Sl}_n &= \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \ \det \mathbf{A} = 1\}, \\ \mathrm{SO}_n &= \{\mathbf{A} \in \mathcal{O}_n : \ \det \mathbf{A} = 1\}. \end{aligned}$$

Demostración. Veámoslo por inducción: Para $n = 1$, $\mathrm{Gl}_1^+ = \mathbb{R}^+$, y $\mathrm{Sl}_1 = \mathrm{SO}_1 = \{1\}$ son obviamente conexos, supongámoslo para $n-1$ y veámoslo para n, para ello consideramos la acción transitiva (para los dos primeros grupos)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\} & \to & \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ (\mathbf{A}, x) & & \mathbf{A}x \end{array}$$

y el punto $x = e_n = (0, \dots, 0, 1)$, ahora para $\mathcal{G} = \mathrm{Sl}_n$

$$\begin{aligned} I_x &= \{\mathbf{A} = (a_{ij}) : \det \mathbf{A} = 1, \mathbf{A}e_n = e_n\} = \\ &= \{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} : \det \mathbf{A}_{n-1} = 1, a \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &\simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathrm{Sl}_{n-1} . \end{aligned}$$

es conexo por inducción, se sigue del resultado anterior que lo es Sl_n. Similarmente para $\mathcal{G} = \mathrm{Gl}_n^+$

Para SO_n consideramos la acción transitiva

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_n \times \mathcal{S}_{n-1} & \to & \mathcal{S}_{n-1} \\ (\mathbf{A}, x) & & \mathbf{A}x \end{array}$$

y basta observar que $I_x \simeq \mathrm{SO}_{n-1}$. ∎

1.13. El espacio topológico de órbitas

1.13.1. Conjunto cociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto $\mathcal{X}$ y

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \ x \sim y\}.$$

Definición. Lamamos *conjunto cociente* de $\mathcal{X}$ por R a un conjunto $\mathcal{Y}$, con una aplicación

$$\pi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

tal que para cada conjunto $\mathcal{T}$ y $Hom(\mathcal{Y},\mathcal{T})$ el conjunto de las aplicaciones $\phi\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{T}$, se tenga la biyección

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathcal{Y},\mathcal{T}) & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \psi\colon \mathcal{X}\to\mathcal{T} \\ x\sim x' \quad\Rightarrow\quad \psi(x)=\psi(x') \end{array}\right\} \\ \phi & \to & \phi\circ\pi \end{array}$$

Es fácil demostrar que si existe tal conjunto verificando esa propiedad universal:

1.- π es constante en las clases de equivalencia, pues basta considerar la identidad en $\mathcal{Y}$, a la que le corresponde una única ψ que es π.

2.- La aplicación π es sobre, pues si $\mathrm{Im}\,\pi\neq\mathcal{Y}$, considerando $\mathcal{T}=\mathcal{Y}$ tenemos dos aplicaciones, la identidad y ϕ que sea la identidad en $\mathrm{Im}\,\pi$ y constante en el complementario que corresponden a la misma $\psi=\pi$.

3.- Es único salvo biyecciones (obvio por las propiedades anteriores).

También es fácil demostrar que existe, pues el conjunto $\mathcal{X}/R=\{[x]:x\in\mathcal{X}\}$ de las clases de equivalencia con $\pi(x)=[x]$ satisfacen la propiedad y se tiene que

$$R=\{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}:\pi(x)=\pi(y)\}.$$

1.13.2. Espacio topológico cociente.

Sea ahora $\sim$ una relación de equivalencia en un espacio topológico $\mathcal{X}$ y

$$R=\{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}:\ x\sim y\}.$$

Definición. Llamamos *espacio topológico cociente*, a un espacio topológico $\mathcal{Y}$, con una aplicación continua $\pi\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, tal que para cada espacio topológico $\mathcal{T}$ y $Hom(\mathcal{Y},\mathcal{T})$ el conjunto de las aplicaciones continuas $\phi\colon\mathcal{Y}\to\mathcal{T}$, se tenga la biyección

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathcal{Y},\mathcal{T}) & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \psi\colon \mathcal{X}\to\mathcal{T},\quad \text{continua} \\ x\sim x' \quad\Rightarrow\quad \psi(x)=\psi(x') \end{array}\right\} \\ \phi & \to & \phi\circ\pi \end{array}$$

Ejercicio 1.13.1 *Demostrar que si existe tal espacio topológico $\mathcal{Y}$, π es sobre, constante en las clases de equivalencia e $\mathcal{Y}$ es único salvo homeomorfismos.*

Definición. Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia. Consideramos en el conjunto cociente $\mathcal{X}/R$, la *topología cociente*, es decir aquella para la cual $A \subset \mathcal{X}/R$ es abierto si $\pi^{-1}(A)$ es un abierto de $\mathcal{X}$.

Ejercicio 1.13.2 *Demostrar que el conjunto cociente con la topología cociente satisface la propiedad universal y* $R = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \pi(x) = \pi(y)\}$.

Lema 1.13.3 *Si* $\mathcal{X}/R$ *es Hausdorff con la topología cociente entonces* R *es un cerrado del espacio producto* $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$*. Si la proyección* $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/R$ *es abierta, entonces también se tiene el recíproco.*

Demostración. Sea $\Phi = \pi \times \pi$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{X}/R \ \text{ Hausdorff} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta = \{([x],[x]) \in \mathcal{X}/R \times \mathcal{X}/R\} \quad \text{es cerrado} \\ &\Rightarrow \quad \Phi^{-1}(\Delta) = R \quad \text{es cerrado,} \end{aligned}$$

y si π es abierta también lo es $\Phi = \pi \times \pi$ que además es continua y sobre por tanto por (1.1.13) Δ es cerrado (y $\mathcal{X}/R$ es Hausdorff), pues $R = \Phi^{-1}(\Delta)$ es cerrado. ∎

1.13.3. Cociente de una $\mathcal{G}$–variedad por el grupo $\mathcal{G}$

Si $\mathcal{G}$ es un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable $\mathcal{X}$

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

podemos definir la *relación de equivalencia* en $\mathcal{X}$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in \mathcal{G} : \ x = gy \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}x = \mathcal{G}y.$$

Definición. El conjunto cociente $\mathcal{X}/R$, que denotaremos $\mathcal{X}/\mathcal{G}$, es el conjunto de las órbitas y dotado de la topología cociente lo llamaremos *espacio de órbitas* de la acción.

Proposición 1.13.4 *Si* $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *es una acción conjuntista tal que cada* θ_g *es continua, entonces es abierta la proyección*

$$\pi\colon x \in \mathcal{X} \longrightarrow [x] \in \mathcal{X}/\mathcal{G}.$$

Demostración. Si cada θ_g es continua, automáticamente es homeomorfismo y para cada abierto U de $\mathcal{X}$, $\pi(U)$ es abierto pues

$$\pi^{-1}[\pi(U)] = \bigcup_{x\in U} \mathcal{G}x = \{gx \in \mathcal{X} : g \in \mathcal{G}, x \in U\} = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \theta_g(U). \quad \blacksquare$$

Sin embargo este espacio topológico en general no es Hausdorff (en caso de que lo fuera las órbitas serían cerrados pues $\pi^{-1}([x]) = \mathcal{G}x$).

Nota 1.13.5 Ídem si lo que tenemos es una acción por la derecha

$$\theta\colon \mathcal{X} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{X},$$

en cuyo caso definimos la relación de equivalencia en $\mathcal{X}$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in \mathcal{G} :\ x = yg \quad \Leftrightarrow \quad x \in y\mathcal{G},$$

y el conjunto cociente $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ correspondiente es el conjunto de las órbitas $[x] = x\mathcal{G}$.

1.13.4. Cociente de un grupo por un subgrupo

Consideremos ahora el caso particular de tener la acción trivial puramente conjuntista (por la derecha) en un grupo de Lie $\mathcal{G}$ de un subgrupo abstracto $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$,

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad \theta(g,h) = gh$$

en tal caso consideramos el espacio de órbitas correspondiente

$$\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{x\mathcal{H} :\ x \in \mathcal{G}\},$$

para el que se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.13.6 *La proyección $\pi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ es abierta y son equivalentes las afirmaciones:*
1) *$\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es Hausdorff.*
2) *Los puntos de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ son cerrados.*
3) *$\mathcal{H}$ es cerrado.*
4) *$\mathcal{H}$ es subgrupo de Lie.*

Demostración. De (1.13.4), se sigue que π es abierta pues $\theta_h = R_h$.

(1)⇒(2)⇒(3) Si $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es Hausdorff, sus puntos son cerrados, por tanto también lo es $\mathcal{H} = \pi^{-1}([e])$.

(3)⇒(4) lo vimos en (1.10.5) y (4)⇒(3) en (1.4.4).

Por último (3)⇐(1) se sigue del lema (1.13.3), pues π es abierta y R cerrado ya que para

$$F\colon (x,y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow y^{-1}x \in \mathcal{G},$$

si $\mathcal{H}$ es cerrado también lo es

$$R = \{(x,y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : \ x\mathcal{H} = y\mathcal{H}\} = F^{-1}(\mathcal{H}). \qquad \blacksquare$$

Nota 1.13.7 Además también se tiene que la aplicación

$$\lambda\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G}/\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}, \qquad \lambda(x, y\mathcal{H}) = xy\mathcal{H},$$

es una acción continua por (1.1.13), ya que π es continua, abierta y sobre y es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{G} \times \mathcal{G}/\mathcal{H} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{G}/\mathcal{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x,y) & \longrightarrow & xy \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (x, y\mathcal{H}) & \longrightarrow & xy\mathcal{H} \end{array}$$

que verifica

$$\pi \circ L_x = \lambda_x \circ \pi,$$

y λ es transitiva pues para cualesquiera $x, y \in \mathcal{G}$

$$\lambda_{xy^{-1}}(y\mathcal{H}) = x\mathcal{H}.$$

Pero en (1.15.5) demostraremos algo más, veremos que $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable, (única por satisfacer la propiedad universal), respecto de la que π y λ son diferenciables y que además es el modelo universal de las variedades sobre las que actúa transitivamente un grupo de Lie, variedades que reciben el nombre de *espacios homogéneos*.

Por último tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.13.8 *Sea $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ una acción transitiva conjuntista y $x \in \mathcal{X}$, entonces hay una única aplicación G*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\theta_x"'] & & \mathcal{G}/I_x \arrow[dl, "\phi"] \\ & \mathcal{X} & \end{tikzcd}$$

que hace conmutativo el diagrama. Además ϕ es biyectiva, continua si θ_x lo es y homeomorfismo si la acción es diferenciable.

Demostración. La existencia y unicidad de ϕ se sigue de la propiedad universal del conjunto cociente pues

$$g \sim g' \quad \Rightarrow \quad g \in g' I_x \quad \Rightarrow \quad \theta_x(g) = \theta_x(g'),$$

además ϕ es inyectiva y es sobre por ser la acción transitiva. Es continua por la propiedad universal del espacio topológico cociente y porque θ_x lo es; y es abierta, pues si $A \subset \mathcal{G}/I_x$ es abierto, también lo es

$$\phi(A) = \phi[\pi(\pi^{-1}(A))] = \theta_x(\pi^{-1}(A)),$$

por ser θ_x abierta, ya que por (1.12.15) es proyección regular. ∎

1.14. Variedad cociente categorial

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en la variedad $\mathcal{X}$ y $R = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \ x \sim y\}$. Un caso particular de relación de equivalencia que consideraremos es el definido por un grupo de Lie $\mathcal{G}$ que actúa por la izquierda en una variedad diferenciable $\mathcal{X}$

$$\theta \colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

en cuyo caso consideraremos la relación

$$R = \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \ x \in \mathcal{G}y\},$$

(si la acción es por la derecha consideraremos $R = \{(x,y) : x \in y\mathcal{G}\}$).

Definición. Llamaremos *cociente categorial de $\mathcal{X}$ por R* a cualquier variedad diferenciable $\mathcal{Y}$ con una aplicación diferenciable

$$\pi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

tal que para cada variedad diferenciable $\mathcal{T}$ y $Hom(\mathcal{Y},\mathcal{T})$ el conjunto de las aplicaciones diferenciables $\phi \colon \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$, se tenga la biyección

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathcal{Y},\mathcal{T}) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \psi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{T}, & \text{diferenciable} \\ x \sim x' \quad \Rightarrow & \psi(x) = \psi(x') \end{array} \right\} \\ \phi & \to & \phi \circ \pi \end{array}$$

Ejercicio 1.14.1 *Demostrar que si existe tal variedad es única salvo difeomorfismos, que π es sobre y constante en las clases de equivalencia.*

Pero el cociente categorial no siempre existe y hay casos en los que existe y no es el espacio topológico cociente.

Ejemplo 1.14.2 Consideremos en $\mathcal{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia $(x, y) \sim (x', y')$ si $x = x'$, en este caso no existe la variedad cociente, pues si existiese se verificaría que

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad \pi(x, y) = \pi(x', y'),$$

pues considerando la aplicación diferenciable y constante en las clases de equivalencia

$$\pi_1 \colon \mathcal{S}_1 \to \mathbb{R}, \quad \pi_1(x, y) = x,$$

existe una única ϕ diferenciable que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle \pi_1} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \phi} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(x, y) = \pi(x', y') \quad & \Rightarrow \quad \phi(\pi(x, y)) = \phi(\pi(x', y')) \\ & \Rightarrow \quad x = x' \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \sim (x', y') \\ & \Rightarrow \quad \pi(x, y) = \pi(x', y'), \end{aligned}$$

además como π es sobre se sigue de estas implicaciones que ϕ es inyectiva y como también es continua, $\mathcal{Y}$ es Hausdorff, por otra parte como π es sobre, continua y $\mathcal{S}_1$ compacto, $\mathcal{Y}$ es compacto. Ahora si consideramos el espacio topológico cociente $\mathcal{S}_1/R = [-1, 1]$ y la aplicación continua π, existe una única aplicación continua $\overline{\phi}$ que hace el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1 & \xrightarrow{\overline{\pi}} & [-1, 1] \\ {\scriptstyle \pi} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \overline{\phi}} \\ & \mathcal{Y} & \end{array}$$

y es sobre e inyectiva y como lleva compactos en compactos es cerrada (pues los cerrados en un compacto son compactos y los compactos en un Hausdorff son cerrados) y por tanto es abierta, por tanto homeomorfismo, pero el espacio topológico $[-1,1]$ no admite estructura diferenciable, pues si la tuviera sería de dimensión 1, pues $(-1,1)$ es entorno del 0 difeomorfo a $\mathbb{R}$ —pues de ser difeomorfo a otro $\mathbb{R}^n$ en particular sería homeomorfo y no lo es porque al quitarle un punto siempre desconecta y $\mathbb{R}^n$ no—; pero el 1 no tiene ningún entorno difeomorfo a $\mathbb{R}$, pues si a un entorno de $\mathbb{R}$ le quitamos un punto quedan dos componentes conexas, sin embargo a un entorno del 1 en $[-1,1]$ le quitamos el 1 y queda una única componente conexa.

Ejemplo 1.14.3 Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia $x \sim x'$ si existe $t \neq 0$ tal que $x = tx'$. El espacio topológico cociente es $\mathbb{P}_1 \cup \{0\}$ siendo el $\{0\}$ el único punto cerrado, pues $\pi^{-1}\{0\} = \{0\}$, que es cerrado, pero $\pi^{-1}(< u >) = \{tu : t \neq 0\}$ que no es cerrado, por tanto no puede ser la variedad cociente de existir, pues en las variedades los puntos son cerrados. Pero la variedad cociente existe y es un punto $\{p\}$, pues toda aplicación diferenciable $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{T}$, constante en las clases de equivalencia es constante, ya que para todo x, $\{\psi(x)\}$ es cerrado y por tanto $\psi^{-1}[\psi(x)]$, que contiene a $\{tx : t \neq 0\}$, por tanto a su adherencia que es toda la recta, por tanto contiene al 0 y $\psi(x) = \psi(0)$.

Estos ejemplos nos inducen a afinar la definición.

1.15. Variedad cociente geométrico

Definición. Llamaremos *cociente geométrico de $\mathcal{X}$ por R* a cualquier variedad diferenciable $\mathcal{Y}$ con una proyección regular sobre,

$$\pi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

cuyas fibras sean las clases de equivalencia de R (en particular son subvariedades cerradas de $\mathcal{X}$).

En el siguiente resultado demostramos que el cociente geométrico también es único de existir, pues coincide con el categorial.

Teorema 1.15.1 *Si $\pi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es el cociente geométrico de $\mathcal{X}$ por R entonces:*

1. *Es la variedad cociente categorial.*
2. *Es el espacio topológico cociente $\mathcal{X}/R$.*
3. *El anillo de funciones de cada abierto $U \subset \mathcal{Y}$ es*

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f \in \mathcal{C}(U) : \; f \circ \pi \in \mathcal{C}^\infty[\pi^{-1}(U)]\}.$$

4. *$\mathcal{X}/R$ es Hausdorff si y sólo si R es cerrado.*

Demostración. Sea $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, constante en las clases de equivalencia de R, entonces existe una única $\phi\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$, tal que $\psi = \phi \circ \pi$, pues π es sobre y sus fibras son las clases de equivalencia. Se sigue que como conjunto es el conjunto cociente. Ahora de (1.1.13) se sigue que si ψ es continua ϕ es continua, por tanto como espacio topológico es el cociente topológico y si ψ es diferenciable ϕ es diferenciable, por tanto como variedad es el cociente categorial.

(3) Se sigue de (1.1.14) y (4) de (1.13.3), pues π es abierta. ∎

Definición. Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ espacios topológicos y $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $\phi\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ continuas. Llamamos *producto fibrado* de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ sobre $\mathcal{Y}$, al subespacio topológico

$$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z} = \{(x,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} : \ \pi(x) = \phi(z)\},$$

el cual tiene la propiedad universal

$$Hom_{\mathcal{Y}}(\mathcal{T}, \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z}) = Hom_{\mathcal{Y}}(\mathcal{T}, \mathcal{X}) \times Hom_{\mathcal{Y}}(\mathcal{T}, \mathcal{Z}).$$

Lema 1.15.2 *Si $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es una proyección regular, entonces para toda aplicación diferenciable $\phi\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z}$ es una subvariedad de $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ y $\pi_2\colon \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ es proyección regular.*

Demostración. Sea (x,z) un punto del producto fibrado, sea $y = \pi(x) = \phi(z)$ y consideremos entornos coordenados V_x de x, con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y V_y de y, con coordenadas $(y_1, \ldots, y_m)$, tales que para $i = 1, \ldots, m$, $x_i = \pi^*(y_i)$. Consideremos un entorno coordenado de z, V_z, con coordenadas $(z_1, \ldots, z_k)$, tal que $\phi(V_z) \subset V_y$ y en él $y_i \circ \phi = \phi_i(z_1, \ldots, z_k)$, entonces

$$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z} \cap (V_x \times V_z) = \{(x', z') : \ x_i = \phi_i(z_1, \ldots, z_k)\}.$$

Además π_2 es proyección regular pues admite secciones locales, pues si $\sigma\colon U_y \to \mathcal{X}$ lo es de π y $\sigma(y) = x$,

$$\sigma' = (\sigma \circ \phi) \times Id\colon \phi^{-1}(U_y) \to \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z},$$

lo es de π_2 y $\sigma'(z) = (x,z)$. ∎

Veamos ahora una caracterización de la existencia del cociente.

Teorema de Godement 1.15.3 *Existe cociente geométrico de $\mathcal{X}$ por R sii R es subvariedad de $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ y $\pi_2\colon R\subset\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ es proyección regular (y por tanto[3] π_1).*

Demostración. "$\Rightarrow$"Si $\pi\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}/R$ es proyección regular, entonces por (1.15.2)

$$R=\{(x,z):\ \pi(x)=\pi(z)\}=\mathcal{X}\times_{\mathcal{X}/R}\mathcal{X},$$

es subvariedad de $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ y ambas proyecciones $\pi_i\colon R\to\mathcal{X}$ son proyección regular.

"$\Leftarrow$"De existir el cociente geométrico se sigue de (1.15.1) que es el espacio topológico cociente $\mathcal{X}/R$ con la estructura diferenciable en cada abierto $U\subset\mathcal{X}/R$

$$\mathcal{C}^\infty(U)=\{f\in\mathcal{C}(U):\ f\circ\pi\in\mathcal{C}^\infty[\pi^{-1}(U)]\}.$$

Basta entonces ver que realmente es variedad diferenciable y que la proyección π es regular.

(1) π es abierta, pues si $U\subset\mathcal{X}$ es abierto, entonces también lo es $\pi(U)$, pues

$$\begin{aligned}\pi^{-1}[\pi(U)]&=\{x:\ \exists y\in U,\ \pi(x)=\pi(y)\}\\&=\{x:\ \exists y\in U,\ (x,y)\in R\}\\&=\{x:\ \exists r\in R,\ \pi_1(r)=x,\ \pi_2(r)\in U\}\\&=\pi_1[\pi_2^{-1}(U)],\end{aligned}$$

y π_1 es abierta pues es proyección regular.

Ahora observemos que si existe el cociente geométrico, entonces para cada abierto saturado $V\subset X$, es decir formado por clases de equivalencia y por tanto tal que $V=\pi^{-1}[\pi(V)]$, se tiene que V/R es un abierto de $\mathcal{X}/R$ y si en él consideramos la estructura diferenciable heredada, es decir

$$\mathcal{C}^\infty(U)=\{f\in\mathcal{C}(U):\ f\circ\pi\in\mathcal{C}^\infty[\pi^{-1}(U)]\},$$

para cada abierto U de V/R, entonces $\pi\colon V\to V/R$ es el cociente geométrico de V por R.

[3] Pues basta considerar el difeomorfismo $\phi\colon\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}\times\mathcal{X}$, $\phi(x,y)=(y,x)$, para el que $\phi(R)=R$ y $\pi_1=\pi_2\circ\phi$.

Basta entonces demostrar que para cada $x_0 \in \mathcal{X}$ hay un abierto saturado V, con $x_0 \in V$ tal que con los anillos $\mathcal{C}^\infty(U)$, V/R es variedad diferenciable y $\pi\colon V \to V/R$ proyección regular, pues con tales V/R recubrimos $\mathcal{X}/R$.

(2) Veámoslo primero sin exigir que V sea saturado:

En primer lugar se sigue de (1.1.14) que cada clase de equivalencia $\overline{x_0} = \pi^{-1}[\pi(x_0)]$ es una subvariedad de $\mathcal{X}$, pues

$$\overline{x_0} \times \{x_0\} = \pi_2^{-1}(x_0),$$

es una subvariedad de R, ya que π_2 es una proyección regular, que lo es de $\subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ y que está en $\mathcal{X} \times \{x_0\}$, por tanto es subvariedad suya.

Consideremos ahora una subvariedad W transversal a $\overline{x_0}$ en x_0, por tanto

$$T_{x_0}(\mathcal{X}) = T_{x_0}(\overline{x_0}) \oplus T_{x_0}(W),$$

y consideremos por $\pi_2\colon R \to \mathcal{X}$,

$$R_W = \pi_2^{-1}(W) = R \cap (\mathcal{X} \times W) \supset \overline{x_0} \times \{x_0\},$$

que por (1.1.14) es una subvariedad de R, que a su vez es subvariedad de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, por tanto R_W es subvariedad de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ y de $\mathcal{X} \times W$. Además $\pi_2\colon R_W \to W$ es proyección regular pues la composición

$$W \longrightarrow R_W \xrightarrow{\pi_2} W, \quad x \to (x, x) \to x.$$

es la identidad, por tanto la fibra de x_0, $\overline{x_0} \times \{x_0\}$, es subvariedad y por (1.1.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \dim T_{(x_0,x_0)}(R_W) &= \dim T_{(x_0,x_0)}(\overline{x_0} \times \{x_0\}) + \dim T_{x_0}(W) \\ &= \dim T_{x_0}(\overline{x_0}) + \dim T_{x_0}(W) = \dim T_{x_0}(\mathcal{X}), \end{aligned}$$

lo cual implica que $\pi_1\colon R_W \to \mathcal{X}$ es difeomorfismo local en (x_0, x_0), pues tienen igual dimensión y π_{1*} es sobre pues en su imagen está $T_{x_0}(W)$, ya que la composición

$$W \xrightarrow{\Delta} R_W \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{X}, \quad x \to (x, x) \to x,$$

es la identidad y también está $T_{x_0}(\overline{x_0})$ pues la composición

$$\overline{x_0} \xrightarrow{Id \times \{x_0\}} R_W \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{X}, \quad x \to (x, x_0) \to x,$$

también es la identidad, por tanto está su suma directa y π_{1*} es sobre y así $\pi_1\colon R_W \to \mathcal{X}$ es difeomorfismo local en (x_0, x_0). Ahora se sigue que existe un entorno abierto de (x_0, x_0) en $R_W = R \cap (\mathcal{X} \times W)$, que podemos tomar de la forma $R \cap (U \times W_0)$, con W_0 entorno de x_0 en W, difeomorfo por π_1 a un entorno abierto V de x_0 en $\mathcal{X}$. De esta forma podemos considerar

$$\begin{array}{ccc} R \cap (U \times W_0) & \xrightarrow{\pi_1} & V \\ & {\scriptstyle \pi_2} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \tau} & \\ & W_0 & \end{array}$$

siendo $\tau\colon V \to W_0$ la segunda componente de su inversa, es decir $\tau(x) = y$, donde y es el único punto de W_0 equivalente a x. Ahora cambiamos W_0 por $W' = W_0 \cap V$ y V por $V' = \tau^{-1}(W')$, de tal modo que

$$\pi_1\colon R \cap (V' \times W') \longrightarrow V',$$

es difeomorfismo y la segunda componente de su inversa

$$\tau\colon V' \longrightarrow W', \quad x \to \tau(x) = y,$$

donde y es el único punto de W' equivalente a x, es una proyección regular, pues $\tau \circ \pi_1 = \pi_2$, y si cambiamos W' por su abierto $\tau(V')$ (que seguimos llamando W'), tendremos que $\tau\colon V' \to W'$ es proyección regular sobre; y como además las fibras de τ son las clases de equivalencia de la relación $\overline{R} = R \cap (V' \times V')$, inducida por R en V', tendremos que $\tau\colon V' \to W'$ es el cociente geométrico de V' por la relación que R induce en V'.

(3) Veámoslo ahora con V saturado: Consideremos el abierto V' encontrado en (2) y sea

$$\pi\colon V = \pi^{-1}[\pi(V')] \longrightarrow \pi(V) = V/R,$$

considerando la estructura diferenciable en V/R dada por la biyección

$$V/R \sim W', \quad [x] \to \tau(x),$$

ahora $\pi\colon V \to V/R$ es proyección regular pues se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_2^{-1}(V') \subset R & \xrightarrow{\pi_1} & \pi^{-1}[\pi(V')] = V \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ V' & \xrightarrow{\tau} & W' = V/R. \end{array} \quad \blacksquare$$

En el caso particular de que la relación de equivalencia esté definida por la acción de un grupo, podemos quitar la hipótesis de que π_2 sea proyección regular en R y decir algo más.

Corolario 1.15.4 *Sea $\theta\colon \mathcal{G}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ una acción en una variedad $\mathcal{X}$ y $R=\{(x,y):\ \mathcal{G}x=\mathcal{G}y\}$. Entonces existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/\mathcal{G}=\mathcal{X}/R$ sii R es una subvariedad de $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$. Además en tal caso la aplicación*

$$\Phi\colon \mathcal{G}\times\mathcal{X}\to R,\quad \Phi(g,x)=(gx,x),$$

es proyección regular.

Demostración. Si R es subvariedad Φ es diferenciable por (1.1.10), pág.6, y $\pi_2\colon R\to X$ es proyección regular, pues lo es la composición

$$\mathcal{G}\times\mathcal{X}\xrightarrow{\Phi}R\xrightarrow{\pi_2}\mathcal{X},\quad (g,y)\to(gy,y)\to y,$$

por tanto por el teorema anterior existe el cociente geométrico. Además: cada órbita $\mathcal{G}x=\pi^{-1}[\pi(x)]$ es una subvariedad de $\mathcal{X}$ por ser $\pi\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}/\mathcal{G}$ proyección regular; $\theta_x\colon\mathcal{G}\to\mathcal{G}x$ es proyección regular por (1.12.15); y por ser $\pi_2\colon R\to\mathcal{X}$ proyección regular, cada fibra $\mathcal{G}x\times\{x\}=\pi_2^{-1}\{x\}$ es, por (1.1.6), pág.4, subvariedad de R de dimensión $\dim R-\dim\mathcal{X}=\dim\ker\pi_{2*}$, para la que

$$\pi_{2*}D_r=0\quad\Leftrightarrow\quad D_r\in T_r(\mathcal{G}x\times\{x\}),$$

pues $T_r(\mathcal{G}x\times\{x\})\subset\ker\pi_{2*}$ y tienen igual dimensión.

Ahora Φ es sobre y para ver que es proyección regular consideremos un punto $p=(g,x)\in\mathcal{G}\times\mathcal{X}$, $r=\Phi(p)$ y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{G}\times\{x\} & \xrightarrow{(\theta_x,id)} & \mathcal{G}x\times\{x\} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{G}\times\mathcal{X} & \xrightarrow{\Phi} & R & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{X}
\end{array}\qquad
\begin{array}{ccccc}
(h,x) & \longrightarrow & (hx,x) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
(h,x) & \longrightarrow & (hx,x) & \longrightarrow & x
\end{array}$$

y se sigue de la equivalencia anterior y este diagrama que dado $D_r\in T_r(R)$, con $\pi_{2*}D_r=0$, existe T_p, con $\Phi_*T_p=D_r$; y en general se sigue para un D'_r —considerando que existe T'_p tal que $\varphi_*T'_p=\pi_{2*}D'_r$, por ser $\varphi=\pi_2\circ\Phi$ proyección regular—, pues $D_r=D'_r-\Phi_*T'_p$ está en las hipótesis anteriores y $D'_r=\Phi_*(T_p+T'_p)$. ∎

Corolario 1.15.5 *Si $\mathcal{H}$ es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie $\mathcal{G}$, entonces existe el cociente geométrico $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ y es Hausdorff, de la acción natural por la derecha de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{G}$ y*

$$\lambda\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G}/\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}, \qquad \lambda(x, y\mathcal{H}) = (xy)\mathcal{H},$$

es una acción diferenciable y π es morfismo de $\mathcal{G}$–variedades. Si además $\mathcal{H}$ es normal en $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ es grupo de Lie.

Demostración. Observemos que $R = \{(x,y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : \ y \in x\mathcal{H}\}$ es la imagen de la subvariedad $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$, por el difeomorfismo

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \quad (a,b) \to (a, ab),$$

por tanto es subvariedad y por el corolario anterior existe el cociente y es Hausdorff por (1.13.6). Que λ es diferenciable se sigue del diagrama de (1.13.7) y ser $\pi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ proyección regular, además $\pi(gh) = g\pi(h)$. Por último se demuestra fácilmente que las operaciones del grupo cociente son diferenciables. ∎

Corolario 1.15.6 *Sea $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ una acción en una variedad $\mathcal{X}$, entonces para todo $x \in \mathcal{X}$ existe el cociente geométrico $\mathcal{G}/I_x$, es Hausdorff y la órbita $\mathcal{G}x$ es subvariedad inmersa. Además en cualquiera de los siguientes casos:*

1) *Si existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/\mathcal{G}$.*
2) *Si $\mathcal{G}$ es un grupo compacto.*
3) *Si $\mathcal{G}/I_x$ es compacto.*
4) *Si $\mathcal{G}x$, con la topología heredada, es una subvariedad topológica.*

se tiene que $\mathcal{G}x$ es una subvariedad de $\mathcal{X}$ (compacta en los casos (2) y (3)) y la aplicación entre $\mathcal{G}$–variedades

$$\mathcal{G}/I_x \longrightarrow \mathcal{G}x, \quad [g] \to gx,$$

es un $\mathcal{G}$–difeomorfismo.

Demostración. Por (1.12.18) $I_x = \theta_x^{-1}(x)$ es un subgrupo de Lie y por el resultado anterior existe el cociente geométrico $\mathcal{G}/I_x$ (y es Hausdorff), de la acción natural de I_x en $\mathcal{G}$ por la derecha. Además $\mathcal{G}x$ es subvariedad inmersa pues se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\theta_x"'] & \mathcal{G}/I_x \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{G}x \arrow[r, "i"] & \mathcal{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\theta_x"'] & \mathcal{G}/I_x \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

siendo ϕ biyectiva y continua por (1.13.8), considerando en la órbita la topología heredada, pues θ_x es continua; y ψ es de rango constante (se demuestra como en (1.12.15)) e inyectiva, por tanto inmersión local por (1.1.6).

(1) Si existe el cociente geométrico, $\mathcal{G}x$ es una subvariedad de $\mathcal{X}$ por ser $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{G}$ proyección regular y ser $\mathcal{G}x = \pi^{-1}[\pi(x)]$.

(2) Si $\mathcal{G}$ es compacto, por (1.12.16) de la pág.53, $\mathcal{G}x$ es subvariedad y es compacta pues $\theta_x(\mathcal{G}) = \mathcal{G}x$.

(3) Si $\mathcal{G}/I_x$ es compacta, ϕ lleva cerrados en cerrados y por tanto es homeomorfismo.

(4) Como ψ es inmersión local, todo punto de $\mathcal{G}/I_x$ tiene un entorno U tal que $\psi(U) = \phi(U) \subset \mathcal{G}x$ es subvariedad de $\mathcal{X}$, por tanto subvariedad topológica de $\mathcal{G}x$ y

$$\dim \mathcal{G}/I_x = \dim U = \dim H(U) \le \dim \mathcal{G}x.$$

Ahora si $\dim \mathcal{G}/I_x < \dim \mathcal{G}x$, por ser $\mathcal{G}/I_x$ variedad podemos recubrirla con una colección numerable de compactos B_n y cada $K_n = \phi(B_n)$ es compacto y $\phi\colon B_n \to K_n$ es homeomorfismo, además K_n es un recubrimiento numerable de compactos de $\mathcal{G}x$ y si alguno tiene $\overset{\circ}{K}_n \neq \emptyset$, entonces

$$\dim \mathcal{G}x = \dim \overset{\circ}{K}_n \le \dim K_n = \dim B_n \le \dim \mathcal{G}/I_x < \dim \mathcal{G}x,$$

por tanto $\overset{\circ}{K}_n = \emptyset$ para todo n, lo cual es absurdo por el **Teorema de Baire**[4]. Se sigue que $\dim \mathcal{G}/I_x = \dim \mathcal{G}x$ y por el **Teorema de invarianza de dominios**[5] ϕ es abierta, por tanto homeomorfismo y en definitiva $\mathcal{G}x$ es subvariedad (difeomorfa a $\mathcal{G}/I_x$) y $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G}x \to \mathcal{G}x$, es una acción transitiva. Por último $\phi(g[h]) = g\phi([h])$. ∎

Corolario 1.15.7 *Sea $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ una acción en una variedad $\mathcal{X}$. Si cada punto $x \in \mathcal{X}$ tiene un entorno abierto U_x tal que $U_x \cap gU_x = \emptyset$, para $g \neq e$, entonces existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/\mathcal{G}$. Además $\mathcal{G}$ es discreto.*

Demostración. Para cada $g \in \mathcal{G}$, $\Gamma_g = \{(x, gx) : \ x \in \mathcal{X}\}$ es una subvariedad cerrada, pues es la imagen de Δ por el difeomorfismo

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \quad (x, y) \to (x, gy).$$

[4] *Si U_n es una sucesión de abiertos densos de un espacio Hausdorff localmente compacto, $\cap U_n$ es densa.*

[5] Si $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, con $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto es continua e inyectiva, entonces es abierta.

Además $R = \cup_{g\in\mathcal{G}}\Gamma_g$ y es subvariedad pues para cada $(x, gx) \in R$, el abierto $U_x \times (gU_x)$ corta a R sólo en puntos de Γ_g. Por último $\mathcal{G}$ es discreto pues para $\theta_x \colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$, $\theta_x^{-1}(gU_x)$ es un entorno de g que no contiene ningún otro elemento del grupo. ∎

Corolario 1.15.8 *Sea $\mathcal{G}$ un grupo de Lie finito que actúa por la izquierda, sin isotropía, en una variedad Hausdorff $\mathcal{X}$, entonces existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ y es Hausdorff.*

Demostración. Por no tener isotropía, dados $g \in \mathcal{G}\backslash\{e\}$ y $x \in \mathcal{X}$, $x \neq gx$ y por ser $\mathcal{X}$ Hausdorff, tienen entornos abiertos disjuntos, V_x de x y V_{gx} de gx. Ahora el entorno abierto de x

$$V_x \cap [\cap_{g\in\mathcal{G}} g^{-1} V_{gx}] = U_x,$$

es tal que $U_x \cap gU_x = \emptyset$ y el resultado se sigue del corolario anterior. Ahora como $\mathcal{X}$ es Hausdorff, Δ es cerrado y por tanto los Γ_g y por tanto R que es su unión finita, por lo que el cociente es Hausdorff. ∎

Corolario 1.15.9 *Sea $\mathcal{X}$ una variedad Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de los subconjuntos de $\mathcal{X}$ de cardinal n tiene una estructura natural de variedad diferenciable Hausdorff.*

Demostración. Consideremos los abiertos (por ser $\mathcal{X}$ Hausdorff)

$$\mathcal{X}_{ij} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n : \ x_i \neq x_j\},$$

entonces para $\mathcal{S}_n$ el grupo de permutaciones de n elementos, nuestra variedad es

$$\cap_{1\leq i<j\leq n} \mathcal{X}_{ij}/\mathcal{S}_n. \quad ∎$$

Ejemplo 1.15.10 Variedad de soluciones de una EDO Consideremos un campo tangente a una variedad diferenciable $D \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$, con grupo uniparamétrico τ, y la relación de equivalencia R_D *estar en la misma trayectoria*, es decir

$$x \sim x' \quad \Leftrightarrow \quad \exists t : \ x' = \tau_t(x).$$

Definición. Si existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/R_D$, lo llamaremos *variedad de soluciones de D.*

Nota 1.15.11 En general no existe, pues basta considerar en el toro $\mathbb{T}_2 = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_1$, y en las coordenadas (θ, θ') el campo $D = \partial_\theta + \alpha\partial_{\theta'}$, con $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, cuyas trayectorias son densas (ver (1.4.2), pág.18) en el toro y no cerradas y si existiese el cociente cada punto suyo $[x]$ sería cerrado y por tanto cada órbita $\pi^{-1}([x])$.

Lema 1.15.12 *Sea $\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ una acción en una variedad $\mathcal{X}$. Si existe un recubrimiento abierto $\mathcal{X} = \cup U_r$ donde cada U_r es $\mathcal{G}$–invariante, es decir $\theta_g(U_r) = U_r$, para todo g y existen los cocientes $U_r/\mathcal{G}$, entonces existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/\mathcal{G}$*

Demostración. Basta demostrar que es subvariedad

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{X}^2 : \mathcal{G}x = \mathcal{G}y\},$$

ahora bien sabemos que lo son $R_r = \{(x, y) \in U_r^2 : \mathcal{G}x = \mathcal{G}y\}$, y se tiene que $R \cap U_r^2 = R_r$. ∎

Teorema 1.15.13 *Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ y $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$, tales que $Dh > 0$, entonces existe el cociente geométrico $\mathcal{X}/R_D$.*

Demostración. Podemos considerar D completo multiplicándolo por una función no nula adecuada, en cuyo caso las trayectorias no se modifican. Sea $\tau\colon \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ su grupo uniparamétrico, el cual es una acción que define la relación de equivalencia, por tanto nos preguntamos por la existencia del cociente por el grupo real aditivo $\mathcal{X}/\mathbb{R}$.

Para cada $r \in \operatorname{Im} h \subset \mathbb{R}$, consideremos la hipersuperficie $H_r = \{h = r\}$ (pues $dh \neq 0$, ya que $dh(D) = Dh > 0$) y veamos que $\varphi\colon \mathbb{R} \times H_r \to \mathcal{X}$, $\varphi(t, x) = \tau(t, x)$ es inyectiva y difeomorfismo local:

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) = \varphi(t', x') \quad &\Rightarrow \quad \sigma_x(t - t') = \tau_{t-t'}(x) = x' \\
&\Rightarrow \quad \sigma_x(t - t') = x', \quad \sigma_x(0) = x \\
&\Rightarrow \quad h[\sigma_x(t - t')] = h(x') = r = h(x) = h[\sigma_x(0)] \\
&\Rightarrow \quad t = t' \quad \Rightarrow \quad x = x',
\end{aligned}$$

pues si σ es una curva integral de D entonces $f = h \circ \sigma$ es creciente, ya que $0 < Dh = \sigma_*(\partial_t)h = f'$. Ahora como φ es de rango constante, pues se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R} \times H_r & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} & \qquad & (t, x) & \longrightarrow & \tau(t, x) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathbb{R} \times H_r & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} & & (t + t', x) & \longrightarrow & \tau(t + t', x)
\end{array}$$

para ver que es difeomorfismo local, basta ver que φ_* es isomorfismo en los puntos de la forma $(0,x)$. Consideremos un entorno coordenado de $x \in H_r$ en $\mathcal{X}$, con coordenadas $x_1 = h$, $x_2, \ldots, x_n$, tales que $Dx_2 = \cdots = Dx_n = 0$, por tanto las x_i son coordenadas en H_r y como $\varphi(0,z) = z$

$$\varphi_*(\partial t)_{(0,x)} = D_x = (D_x x_1)(\partial x_1)_x, \quad \varphi_*(\partial x_i)_{(0,x)} = (\partial x_i)_x.$$

Por lo tanto existe un abierto U_r de $\mathcal{X}$ tal que

$$\varphi\colon \mathbb{R} \times H_r \to U_r \subset \mathcal{X},$$

es difeomorfismo; además $\varphi_*\partial t = D$, $\varphi(0,z) = z$, para todo $z \in H_r$, por tanto $H_r \subset U_r$ y como $\mathcal{X} = \cup H_r$, tenemos también que $\mathcal{X} = \cup U_r$. Pero además existe el cociente geométrico

$$\pi_r = \pi_2 \circ \varphi^{-1}\colon U_r \to U_r/R_D = (\mathbb{R} \times H_r)/\mathbb{R} = H_r,$$

y por el Lema se tiene el resultado. ∎

En el resultado anterior hemos demostrado que existe el cociente

$$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/R = \overline{\mathcal{X}},$$

pero además tenemos el recubrimiento de abiertos $\mathcal{X} = \cup U_r$ y el correspondiente $\overline{\mathcal{X}} = \cup \overline{U_r}$, para $\overline{U_r} = \pi(U_r) \equiv H_r$. Con estos abiertos se puede ver fácilmente que el cociente no tiene por qué ser Hausdorff, por ejemplo consideremos en $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ el campo $D = \partial_x$, en cuyo caso las trayectorias son las rectas $y = \mathit{cte} \neq 0$ y las dos semirrectas $\{y = 0, x < 0\}$, $\{y = 0, x > 0\}$. Ahora como existe una función $h = x$ tal que $Dh > 0$, existe el cociente que como conjunto es $\mathbb{R}$, pero con dos orígenes y esta recubierto por dos abiertos $\mathbb{R} = \overline{U_{-1}} = \pi(H_{-1})$ que es entorno de uno y $\mathbb{R} = \overline{U_1} = \pi(H_1)$ que es entorno del otro.

Variedad de soluciones de un sistema mecánico. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con su métrica euclídea y sus coordenadas x_i y en el fibrado tangente las correspondientes (x_i, z_i). Consideremos en el fibrado tangente la 1–*forma canónica de Liouville*

$$\theta(\widetilde{D}_{D_p}) = \pi_*(\widetilde{D}_{D_p}) \cdot D_p,$$

que en coordenadas es $\theta = \sum z_i dx_i$ y la 2–forma $d\theta$.

Definición. Llamamos *espacio de fases de r partículas* moviéndose en $\mathbb{R}^3$, con masas m_i a

$$\mathbb{R} \times T(\mathbb{R}^3) \times \cdots \times T(\mathbb{R}^3).$$

con la 2–forma $\omega_2 = \sum m_i d\theta_i$.

Definición. Consideremos el caso de una única partícula de masa m. En cuyo caso consideramos la 2–forma $\omega_2 = md\theta$. Diremos que se *mueve debido a un campo de fuerzas* $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, con $Ft = 0$, siguiendo la *Ley de Newton* si su trayectoria es $\sigma(t) = (x_i(t))$, tal que $m\sigma''(t) = F$, es decir su subida $(t, \sigma(t), \sigma'(t))$ es tangente al campo de $\mathbb{R} \times T(\mathbb{R}^3)$

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \sum z_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \frac{F_i(t,x)}{m} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Observemos que por el resultado anterior, como $Zt = 1 > 0$, este campo tiene variedad de soluciones

$$\overline{\mathcal{X}} = \mathbb{R} \times T(\mathbb{R}^3)/R_Z,$$

y que cada $T(\mathbb{R}^3) \equiv H_r = \{t = r\}$ se identifica con un abierto $\overline{U_r}$ que recubren el cociente $\overline{\mathcal{X}}$. Además cada uno de estos abiertos $\overline{U_r}$ tiene una estructura simplética ω_{2r} vía su identificación con $T(\mathbb{R}^3)$ considerando la 2–forma $\omega_2 = m \sum dz_i \wedge dx_i$. A continuación caracterizaremos el hecho de que estas estructuras simpléticas repeguen, de forma que definan una estructura simplética en $\overline{\mathcal{X}}$.

Definición. Llamamos 2*–forma de Poincaré–Cartan* a la única 2–forma Ω_2, en $\mathcal{X} = \mathbb{R} \times T(\mathbb{R}^3)$, que cumple:

1) $\Omega_{2|t=t_0} = \omega_2$.
2) $i_Z \Omega_2 = 0$.

Observemos que de existir es única pues para vectores D_1, D_2 del fibrado, $\Omega_2(D_1, D_2) = \omega_2(D_1, D_2)$ y $\Omega_2(Z, D) = 0$. Existe y en coordenadas es

$$\Omega_2 = m \sum dz_i \wedge dx_i + \sum F_i dx_i \wedge dt - m \sum z_i dz_i \wedge dt,$$

además $\operatorname{rad} \Omega_2 =< Z >$. Y en el caso particular de que F sea conservativa (en cada instante) y derive de un potencial $u(x,t)$, $F = -\operatorname{grad} u = -\sum u_{x_i} \partial x_i$, entonces

$$\Omega_2 = m \sum dz_i \wedge dx_i + dt \wedge d\mathcal{E},$$

para $\mathcal{E} = (1/2)m \sum z_i^2 + u$ la energía. En este sentido se tiene la siguiente caracterización.

Teorema 1.15.14 *Son equivalentes:*

1) *F es conservativa en cada instante.*

2) $Z^L\Omega_2 = 0$.

3) $d\Omega_2 = 0$.

4) *Existe una estructura simplética $\overline{\omega_2}$, en el cociente $\overline{\mathcal{X}}$, que para la proyección $\pi\colon \mathcal{X} \to \overline{\mathcal{X}}$, $\pi^*(\overline{\omega_2}) = \Omega_2$.*

5) *Existe una estructura simplética $\overline{\omega_2}$, en el cociente $\overline{\mathcal{X}}$, que en cada abierto $\overline{U_r}$ es ω_{2r}.*

Demostración. Se sigue de la expresión local de Ω_2 que

$$d\Omega_2 = \sum dF_i \wedge dx_i \wedge dt = d(\sum F_i dx_i) \wedge dt.$$

y si F es conservativa $\sum F_i dx_i = du - u_t dt$ y tenemos (1)⇒(3) y si $d\Omega_2 = 0$, tendremos que $F_{ix_j} = F_{jx_i}$ lo cual implica que existe $u(x,t)$ diferenciable tal que $F_i = u_{x_i}$, tal función es

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_{x_{10}}^{x_1} F_1(s, x_{20}, \ldots, x_{n0}, t)\, ds + \\ & + \int_{x_{20}}^{x_2} F_2(x_1, s, x_{30}, \ldots, x_{n0}, t)\, ds + \cdots + \\ & + \int_{x_{n0}}^{x_n} F_n(x_1, \ldots, s, t)\, ds, \end{aligned}$$

por tanto F es conservativa en cada instante y tenemos (3)⇒(1).

Como $i_Z\Omega_2 = 0$, se tiene que $Z^L\Omega_2 = i_Z d\Omega_2$ y se tiene (3)⇒(2).

(2)⇒(3) Se sigue de la igualdad anterior y de que

$$d\Omega_2(Z, -, -) = 0, \quad d\Omega_2(D_1, D_2, D_3) = d\omega_2(D_1, D_2, D_3) = 0$$

para D_i verticales para la proyección.

(4)⇒(3) Es Obvio.

(2)⇒(4) Como $Z^L\Omega_2 = 0$ y $i_Z\Omega_2 = 0$, se demuestra fácilmente en coordenadas que existe una única 2–forma $\overline{\omega_2}$, tal que $\pi^*(\overline{\omega_2}) = \Omega_2$, la cual es cerrada ya que dados $x, y = \pi(x)$,

$$d_y\overline{\omega_2}(D_1, D_2, D_3) = d_y\overline{\omega_2}(\pi_* E_1, \pi_* E_2, \pi_* E_3) = d_x\Omega_2(E_1, E_2, E_3) = 0,$$

pues por (3) lo es Ω_2; y no tiene radical por ser $\operatorname{rad}\Omega_2 =< Z >$.

(5)⇒(4) Las propiedades que caracterizan a Ω_2 son: $\Omega_{2|t=t_0} = \omega_2$ y $i_Z\Omega_2 = 0$ y ambas las satisface $\pi^*(\overline{\omega_2})$; la segunda obviamente y la primera por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_r \equiv T\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} \\ \simeq\big\downarrow & & \big\downarrow\pi \\ \overline{U_r} & \xrightarrow{i} & \overline{\mathcal{X}} \end{array}$$

(4)⇒(5) Se sigue del diagrama conmutativo anterior. ∎

Definición. Llamaremos *simetría infinitesimal* del sistema mecánico, a todo campo $D \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times T\mathbb{R}^3)$, tal que $D^L\Omega_2 = 0$.

Si D es una simetría infinitesimal y F es conservativa en cada instante

$$D^L\Omega_2 = d\Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d(i_D\Omega_2) = D^L\Omega_2 - i_D d\Omega_2 = 0,$$

y por el **Lema de Poincare**, $i_D\Omega_2 = dh$ y a h se la llama *invariante Nöether* de D, que es una integral primera de Z, pues

$$Zh = dh(Z) = \Omega_2(D, Z) = 0,$$

además $h = \varphi^*\overline{h}$, pues h es constante en las órbitas de Z. Ahora en el caso particular de que F no dependa de t, ni el potencial u ni la energía $\mathcal{E}$ dependen de t y se sigue de la expresión en coordenadas de Ω_2, que ∂_t es una simetría infinitesimal cuyo invariante Nöether es la energía $\mathcal{E}$, que al ser integral primera de Z define una función en el cociente $\overline{\mathcal{E}}$ y como

$$Z - \frac{\partial}{\partial t} = \sum z_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \frac{F_i(x)}{m} \frac{\partial}{\partial z_i},$$

es un campo que Z deja invariante, se proyecta en un campo $\overline{Z}$, para el que

$$i_{\overline{Z}}\overline{\omega_2} = -d\overline{\mathcal{E}}.$$

1.16. Espacios Homogéneos

Definición. Una variedad $\mathcal{X}$ se llama *espacio homogéneo* de un grupo de Lie $\mathcal{G}$ si hay una acción transitiva de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{X}$.

Ejemplo 1.16.1 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es un espacio homogéneo de $Gl_n(\mathbb{R})$

Ejemplo 1.16.2 S_{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathcal{O}_n$.

Corolario 1.16.3 *Si una acción $\theta\colon \mathcal{G}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ es transitiva, el homeomorfismo de (1.13.8)*

$$\phi\colon \mathcal{G}/I_x \longrightarrow \mathcal{X},$$

es un $\mathcal{G}$–difeomorfismo.

Demostración. Es consecuencia de (1.15.6). ∎

Nota 1.16.4 De este resultado se sigue que si tenemos una acción transitiva (conjuntista) de un grupo de Lie $\mathcal{G}$ en un conjunto $\mathcal{X}$

$$\theta\colon \mathcal{G}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X},$$

y existe una estructura diferenciable en $\mathcal{X}$, para la que θ sea diferenciable esta es única. Además si el grupo de isotropía I_x de algún $x\in\mathcal{X}$ es cerrado, entonces tal estructura diferenciable en $\mathcal{X}$ es la de $\mathcal{G}/I_x$. Esto nos permite construir variedades diferenciables como ponen de manifiesto los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.16.5 El espacio proyectivo. Consideremos el conjunto $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de las rectas $[x]$ pasando por el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$, en el que actúa transitivamente el grupo $\mathcal{G}=\mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R})$

$$(\mathbf{A},[x])\longrightarrow[\mathbf{A}x],$$

la cual hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\times\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}\times\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbf{A},\mathbf{x}) & \longrightarrow & \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{A},[\mathbf{x}]) & \longrightarrow & [\mathbf{A}\mathbf{x}] \end{array}$$

El subgrupo de isotropía $I_r\subset\mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R})$, del punto $r=[e_1]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ es

$$\begin{aligned}\{\mathbf{A}\in\mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R}):\ x_{21}=\cdots=x_{n+1,1}=0\}&=\\ =\{\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}):\det\mathbf{A}=1,\ x_{21}=\cdots=x_{n+1,1}=0\},\end{aligned}$$

una subvariedad cerrada, por tanto subgrupo de Lie. Se sigue que la estructura diferenciable del espacio proyectivo es la de

$$\mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R})/I_r.$$

Ejemplo 1.16.6 Las variedades de Grassman. Consideremos el espacio $\mathcal{G}(k,n)$ de los subespacios de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ al que vamos a dotar de una estructura diferenciable de una forma natural. Consideremos la acción natural de $Gl_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$, la cual es transitiva en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e induce una acción transitiva

$$Gl_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{G}(k,n) \longrightarrow \mathcal{G}(k,n),$$

ahora bien el subgrupo de isotropía $\mathcal{H}$ del elemento de $\mathcal{G}(k,n)$ que corresponde al subespacio k dimensional generado por $e_1, \ldots, e_k$

$$\{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\},$$

está formado por las matrices

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{A} \in Gl(k,\mathbb{R})$, $\mathbf{C} \in Gl(n-k,\mathbb{R})$ y $\mathbf{B}$ es arbitraria, y es un subgrupo de Lie cerrado, por lo tanto

$$Gl_n(\mathbb{R})/\mathcal{H},$$

tiene una estructura natural de variedad diferenciable que podemos trasladar a $\mathcal{G}(k,n)$, pues son biyectivos.

Se llaman *variedades de Grassman* a los $\mathcal{G}(k,n)$ con esa estructura diferenciable (para otra descripción ver el Warner, p.129).

Ejemplo 1.16.7 Consideremos el grupo de Lie

$$\mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in Gl(n+1,\mathbb{R}) : \det \mathbf{A} = 1, \mathbf{A}^t\mathbf{A} = I\},$$

actuando sobre $S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, mediante

$$\theta\colon \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R}) \times S_n \longrightarrow S_n, \quad \theta(\mathbf{A},x) = \mathbf{A}x,$$

la cual es transitiva y el subgrupo de isotropía de e_{n+1} es isomorfo a $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, por tanto

$$S_n \sim \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Ejemplo 1.16.8 Sea $\mathcal{X} = \{\mathbf{A} \in Gl_{2n}(\mathbb{R}) : A^2 = -I\}$ y consideremos la acción

$$\theta\colon Gl_{2n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad \theta(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1},$$

la cual es transitiva y el grupo de isotropía de

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde a multiplicar por i en $\mathbb{C}^n (= \mathbb{R}^{2n})$, es $Gl_n(\mathbb{C})$ y

$$\mathcal{X} \sim Gl_{2n}(\mathbb{R})/Gl_n(\mathbb{C}).$$

1.17. El fibrado normal

A lo largo de esta lección consideraremos $(\mathcal{X}, T_2)$ una variedad Riemanniana Hausdorff e $\mathcal{Y}$ una subvariedad suya.

Definición. Llamaremos *Fibrado normal a* $\mathcal{Y}$, a la subvariedad diferenciable n–dimensional del fibrado tangente

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} = \{D_y \in T(\mathcal{X}) : \ y \in \mathcal{Y}, \ D_y \perp T_y(\mathcal{Y})\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} T_y(\mathcal{Y})^{\perp},$$

con la aplicación diferenciable

$$\pi \colon \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{Y}, \quad D_y \longrightarrow y,$$

para la cual consideramos la *sección* 0

$$s_0 \colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}, \quad y \longrightarrow 0_y,$$

y la subvariedad del fibrado normal $\widehat{\mathcal{Y}} = s_0(\mathcal{Y})$ difeomorfa a $\mathcal{Y}$.

Veamos que realmente $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ es una subvariedad diferenciable del fibrado tangente $T(\mathcal{X})$, para ello consideremos un $D_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \subset T(\mathcal{X})$ y sea $y = \pi(D_y)$. Consideremos un entorno coordenado $V_y \subset \mathcal{X}$, con coordenadas (x_i), tal que

$$\mathcal{Y} \cap V_y = \{x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\},$$

por tanto $(x_1, \dots, x_m)$ son coordenadas en ese abierto de $\mathcal{Y}$ y en sus puntos las $\partial x_1, \dots, \partial x_m$ son tangentes a $\mathcal{Y}$. Consideremos ahora el proceso de Gramm–Schdmitz para construir a partir de la base de campos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathcal{D}(V_y),$$

una base $D_1, \ldots, D_n$ ortonormal —es decir $T_2(D_i, D_j) = \delta_{ij}$— y tal que cada

$$< D_1 \ldots, D_i >=< \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i} >, \quad D_i = \sum_{j=1}^{i} f_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

por tanto para cada $p \in \mathcal{Y} \cap V_y$,

$$D_{1p}, \ldots, D_{mp} \in T_p(\mathcal{Y}), \quad D_{m+1p}, \ldots, D_{np} \in T_p(\mathcal{Y})^{\perp},$$

y ambas son bases de dichos espacios.

Consideremos ahora el sistema de coordenadas (x_i, z_i) en el abierto coordenado $W_y = \pi^{-1}(V_y)$ de $T(\mathcal{X})$, para $z_i(D) = Dx_i$, para cada $D \in W_y$ y consideremos las nuevas funciones en ese abierto, para $i = 1, \ldots, n$,

$$w_i(D) = T_2(D, D_i) \quad \Rightarrow \quad w_i = \sum_{k=1}^{n} z_k \left(\sum_{j=1}^{i} f_{ij} g_{kj} \right),$$

en cuyos términos tenemos que (x_i, w_i) son también sistema de coordenadas en W_y y se tiene que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \cap W_y = \{x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0, w_1 = 0, \ldots, w_m = 0\},$$

por tanto es subvariedad y dicho abierto tiene coordenadas

$$(x_1, \ldots, x_m, w_{m+1}, \ldots, w_n),$$

en cuyos términos se tiene que

$$\widehat{\mathcal{Y}} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \cap W_y = \{w_{m+1} = 0, \cdots, w_n = 0\}.$$

1.17.1. El Teorema del entorno tubular.

Consideremos ahora el *campo geodésico*, $Z \in \mathcal{D}[T(\mathcal{X})]$ y su grupo uniparamétrico

$$\tau \colon \mathcal{W}_Z \subset \mathbb{R} \times T(\mathcal{X}) \longrightarrow T(\mathcal{X}),$$

para el que se tiene que $\tau(tr, D_p) = \tau(t, rD_p)$ y

$$g_{D_p}(t) = \pi[\tau(t, D_p)],$$

es la geodésica que pasa por $p = \pi(D_p)$ en $t = 0$ y en él tiene vector tangente D_p. Recordemos que $\exp(D_p) = g(1, D_p)$ si $(1, D_p) \in \mathcal{W}_Z$. Consideremos ahora el conjunto abierto

$$\mathcal{A} = \{D_p \in T(\mathcal{X}) : \ (1, D_p) \in \mathcal{W}_Z\},$$

y la aplicación diferenciable ϕ, definida en el abierto del fibrado normal $\mathcal{N} = \mathcal{A} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ y composición de

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{N} & \hookrightarrow & \mathcal{A} & \hookrightarrow & \mathcal{W}_Z & \xrightarrow{\tau} & T(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X} \\ D_y & \to & D_y & \to & (1, D_y) & \longrightarrow & \tau(1, D_y) & \longrightarrow & \pi[\tau(1, D_y)], \end{array}$$

por tanto $\phi(D_y) = \exp(D_y)$, aunque preferimos cambiarle el nombre, para que no haya equívocos en su dominio.

Teorema 1.17.1 *La aplicación $\phi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ es difeomorfismo local en los puntos de la subvariedad $\widehat{\mathcal{Y}}$.*

Demostración. $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ y $\mathcal{X}$ tienen la misma dimensión n, veamos que ϕ_* lleva base en base en los puntos de $\widehat{\mathcal{Y}}$. Sea $s_0(y) = 0_y \in \widehat{\mathcal{Y}}$, y consideremos un entorno coordenado suyo $W_y; (x_i, w_i)$ en el fibrado tangente, para el que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \cap W_y = \{x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0, w_1 = 0, \dots, w_m = 0\},$$

es subvariedad con coordenadas

$$(x_1, \dots, x_m, w_{m+1}, \dots, w_n),$$

en estos términos se tiene que (para $x_i(0_y) = y_i$ y $w_i(0_y) = 0$)

$$\begin{aligned} \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{0_y} x_j &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x_j[\phi(y_1, \dots, y_i + \epsilon, \dots, y_m, 0, \dots, 0)] - x_j[y]}{\epsilon} \\ &= \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}_y x_j, \\ \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial w_i} \right)_{0_y} x_j &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x_j[\phi(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, \epsilon, \dots, 0))] - x_j[y]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x_j[\phi(\epsilon D_{iy})] - x_j[y]}{\epsilon} \\ &= (x_j \circ g_{D_{iy}})'(0) = g_{D_{iy}*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_0 x_j = D_{iy} x_j, \end{aligned}$$

pues $\phi(0_p) = p$ y $\phi(\epsilon D_{iy}) = \pi\tau(1, \epsilon D_{iy}) = \pi\tau(\epsilon, D_{iy}) = g_{D_{iy}}(\epsilon)$. ∎

Veremos a continuación que si $\mathcal{Y}$ es compacta entonces podemos reducir el abierto $\mathcal{N}$, conteniendo a $\widehat{\mathcal{Y}}$, tal que $\phi\colon \mathcal{N} \to \phi(\mathcal{N})$ sea difeomorfismo. Pero antes necesitamos un resultado previo.

Lema 1.17.2 *Si $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ son espacios topológicos, $K_1 \subset \mathcal{X}_1$ y $K_2 \subset \mathcal{X}_2$ son compactos y W es un abierto de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ tal que $K_1 \times K_2 \subset W$, entonces existen abiertos $U_1 \subset \mathcal{X}_1$ y $U_2 \subset \mathcal{X}_2$, tales que $K_1 \times K_2 \subset U_1 \times U_2 \subset W$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}_1$, entonces $\{x\} \times K_2$ es compacto por ser imagen continua de K_2 por $y \in \mathcal{X}_2 \to (x, y) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, y si elegimos para cada punto suyo (x, y) un entorno abierto $U_x \times V_y \subset W$, podremos extraer de estos un subrecubrimiento finito y considerar $U^x = \cap U_x$ —que es entorno abierto de x— y $V^x = \cup V_y$ —que es un entorno abierto de K_2—, por tanto $\{x\} \times K_2 \subset U^x \times V^x \subset W$. Ahora como los U^x, para $x \in K_1$, recubren a K_1, podremos extraer un subrecubrimiento finito y para estos considerar $U_1 = \cup U^x$ y $U_2 = \cap V^x$. ∎

Teorema 1.17.3 *Si $\mathcal{Y}$ es compacta entonces existe un abierto $U \subset \mathcal{N}$, tal que $\widehat{\mathcal{Y}} \subset U$ y un abierto $V \subset \mathcal{X}$, tal que $\mathcal{Y} \subset V$, tales que*

$$\phi\colon U \longrightarrow V,$$

es difeomorfismo.

Demostración. Si en un punto ϕ es difeomorfismo local, lo es en un entorno del punto, por tanto podemos considerar el abierto $A \subset \mathcal{N}$, en el que ϕ es difeomorfismo local, el cual es un entorno de $\widehat{\mathcal{Y}}$. Ahora basta encontrar un abierto U, en el que ϕ sea inyectiva y tal que $\widehat{\mathcal{Y}} \subset U \subset A$, pues en tal caso $\phi(U) \subset \mathcal{X}$ es abierto y $\phi\colon U \to \phi(U)$ es difeomorfismo. En primer lugar el conjunto

$$W = \{(x, y) \in A \times A : \ x = y \quad \text{ó} \ \ \phi(x) \neq \phi(y)\},$$

es abierto, pues si $(x, y) \in W$, siendo $x = y$, entonces como ϕ es difeomorfismo local en x, existe un abierto $U_x \subset A$ entorno de x, en el que ϕ es inyectiva y por tanto $U_x \times U_x \subset W$, y si $x \neq y$, entonces $\phi(x) \neq \phi(y)$ y existen entornos disjuntos suyos en $\mathcal{X}$, cuyas contraimágenes, U_x y U_y verifican $U_x \times U_y \subset W$.

Por otro lado $\widehat{\mathcal{Y}} \times \widehat{\mathcal{Y}} \subset W$ y aplicando el Lema anterior tendremos que existe un abierto $U \subset A$, tal que

$$\widehat{\mathcal{Y}} \times \widehat{\mathcal{Y}} \subset U \times U \subset W \subset A \times A,$$

y en definitiva $\widehat{\mathcal{Y}} \subset U \subset A$ y en él ϕ es inyectiva. ∎

Teorema del entorno tubular 1.17.4 *Si $\mathcal{Y}$ es compacta existe un $\epsilon > 0$, y un abierto $\mathcal{X}_\epsilon$ de $\mathcal{X}$, que contiene a $\mathcal{Y}$, tales que*

$$\phi\colon \mathcal{N}_\epsilon = \{D_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} :\ T_2(D_y, D_y) < \epsilon\} \longrightarrow \mathcal{X}_\epsilon,$$

es difeomorfismo.

Demostración. Para cada $0_y \in \widehat{\mathcal{Y}}$ consideremos un abierto coordenado $U_y \subset \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$, entorno de 0_y, con el difeomorfismo correspondiente definido al comienzo de la lección,

$$F = (x_1, \dots, x_m, w_{m+1}, \dots, w_n),$$
$$U_y \xrightarrow{F} V_n \subset \mathbb{R}^n, \quad 0_y \to F(0_y) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0).$$

Además podemos suponer que U_y está en el abierto U del resultado anterior —pues basta considerar $U \cap U_y$— y podemos encontrar un abierto $V_m \subset \mathbb{R}^m$, entorno de $(y_1, \dots, y_m)$ y un $\epsilon_y > 0$, tales que

$$F(U_y) = V_m \times \{(w_{m+1}, \dots, w_n) : \sum w_i^2 < \epsilon_y\},$$

y sus elementos D con coordenadas (x_i, w_i) satisfacen

$$T_2(D, D) = T_2(\sum w_i D_i, \sum w_i D_i) = \sum_{i=m+1}^{n} w_i^2 < \epsilon_y.$$

Ahora recubriendo el compacto $\widehat{\mathcal{Y}}$ por estos abiertos podemos extraer un subrecubrimiento finito U_{y_j} y para $\epsilon = \min\{\epsilon_j\}$, tendremos que

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{D_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} :\ T_2(D_y, D_y) < \epsilon\} \subset \cup_j U_{y_j},$$

es un abierto de U que contiene a $\widehat{\mathcal{Y}}$ y el resultado se sigue del teorema anterior. ∎

1.18. La acción en el fibrado normal

Consideremos la acción en una variedad diferenciable $\mathcal{X}$

$$\theta\colon \mathcal{G} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

con $\mathcal{G}$ un grupo de Lie compacto. Entonces por (**??**), (pág.**??**) la órbita $\mathcal{Y} = \mathcal{G}x$ es una subvariedad compacta de $\mathcal{X}$ en la que actúa el grupo por la acción

$$\mathcal{G} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}, \quad (g, hx) \longrightarrow (gh)x.$$

El grupo también actúa en el fibrado tangente por

$$\overline{\theta}\colon \mathcal{G} \times T(\mathcal{X}) \longrightarrow T(\mathcal{X}), \quad (g, D_x) \longrightarrow \theta_{g*}D_x,$$

es fácil ver que la aplicación es diferenciable y acción y que $\pi\colon T(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ es $\mathcal{G}$–morfismo. A menudo escribiremos por comodidad gD_x en lugar de $\theta_{g*}D_x$

A continuación veremos cómo podemos construir una métrica Riemanniana T_2 en la variedad de tal forma que los difeomorfismos

$$\theta_g\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad x \longrightarrow gx,$$

para $g \in \mathcal{G}$, sean isometrías. Para ello tenemos que considerar —si $m = \dim \mathcal{G}$—, una m–forma invariante en $\mathcal{G}$ que construimos a continuación.

1.18.1. La medida de Haar.

Consideremos una base $D_{ie} \in T_e(\mathcal{G})$, $i = 1, \ldots, m$, y su extensión a la correspondiente base de campos invariantes por la derecha $D_1, \ldots, D_m \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}}$, consideremos ahora su base dual $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Omega$, las cuales también son invariantes por la derecha, pues para $i = 1, \ldots, m$ y $g \in \mathcal{G}$,

$$R_g^*\omega_i(D_j) = \omega_i(R_{g*}D_j) = \omega_i(D_j) = \delta_{ij},$$

por tanto $R_g^*\omega_i = \omega_i$. Consideremos ahora la m–forma que llamaremos de *Haar*

$$\Lambda = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m,$$

la cual es no nula (por tanto todo grupo de Lie es orientable) e invariante por la derecha, pues para toda $g \in \mathcal{G}$,

$$R_g^*\Lambda = (R_g^*\omega_1) \wedge \cdots \wedge (R_g^*\omega_m) = \Lambda.$$

1.18.2. Construcción de una métrica Riemanniana invariante.

Consideraremos en $\mathcal{X}$ una métrica cualquiera $\overline{T}_2$, entonces para cada $x \in \mathcal{X}$ y $D_x, E_x \in T_x(\mathcal{X})$, la función $f(g) = (\overline{T}_2)_{gx}(gD_x, gE_x)$, es diferenciable, pues es la composición

$$\mathcal{G} \longrightarrow T(\mathcal{X}) \times_{\mathcal{X}} T(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g \to (gD_x, gE_x) \to (gD_x)(gE_x),$$

observemos que si en $T(\mathcal{X})$ consideramos coordenadas (x_i, z_i) y las subimos a $T(\mathcal{X}) \times T(\mathcal{X})$, $(x_i, z_i; x'_i, z'_i)$, entonces localmente $T(\mathcal{X}) \times_{\mathcal{X}} T(\mathcal{X})$ es $x_i = x'_i$ y tiene coordenadas (x_i, z_i, z'_i), en cuyos términos la segunda aplicación es $\sum z_i z'_j g_{ij}$, para $g_{ij} = \partial x_i \cdot \partial x_j$. Ahora, componiendo f con un difeomorfismo $R_h \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, para $h \in \mathcal{G}$, obtenemos una función del mismo tipo, para el punto $hx \in \mathcal{X}$ y los vectores $R_{h*}D_x, R_{h*}E_x \in T_{hx}(\mathcal{X})$.

Ahora basta definir la nueva métrica

$$T_2(D_x, E_x) = \int_{\mathcal{G}} f\Lambda = \int_{\mathcal{G}} (\overline{T}_2)_{gx}(gD_x, gE_x)\Lambda,$$

la cual es invariante pues para cualquier $h \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \theta_h^* T_2(D_x, E_x) &= T_2(hD_x, hE_x) \\ &= \int_{\mathcal{G}} (\overline{T}_2)_{ghx}[(gh)D_x, (gh)E_x]\Lambda \\ &= \int_{\mathcal{G}} (R_h^* f)\Lambda = \int_{\mathcal{G}} R_h^*(f\Lambda) = \int_{\mathcal{G}} f\Lambda \\ &= T_2(D_x, E_x). \end{aligned}$$

1.18.3. La acción sobre el Fibrado normal.

Ahora considerando esta métrica Riemanniana tenemos que el grupo también actúa en el fibrado normal por la acción

$$\overline{\theta} \colon \mathcal{G} \times \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}, \quad (g, D_y) \longrightarrow gD_y,$$

que está bien definida por ser la métrica invariante, pues para cada $g \in \mathcal{G}$, $\theta_g \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es una isometría que lleva la subvariedad $\mathcal{Y} = \mathcal{G}x$ en $\mathcal{Y}$, por tanto $\theta_{g*}[T_y(\mathcal{Y})] = T_{gy}(\mathcal{Y})$, de donde

$$D_y \in T_y(\mathcal{Y})^{\perp} \quad \Rightarrow \quad gD_y \in T_{gy}(\mathcal{Y})^{\perp} \quad \Rightarrow \quad gD_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}},$$

además trivialmente es acción y es diferenciable por (1.1.10), pág.6, y por ser diferenciable la acción en el fibrado tangente. En estos términos tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.18.1 *$\mathcal{N}_\epsilon$ y $\mathcal{X}_\epsilon$ son $\mathcal{G}$–variedades y el difeomorfismo del teorema del entorno tubular, $\phi \colon \mathcal{N}_\epsilon \to \mathcal{X}_\epsilon$, es un $\mathcal{G}$–difeomorfismo.*

Demostración. Se tiene que conmuta el diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}\times\mathcal{N}_\epsilon & \stackrel{\overline{\theta}}{\to} & \mathcal{N}_\epsilon \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathcal{G}\times\mathcal{X}_\epsilon & \stackrel{\theta}{\to} & \mathcal{X}_\epsilon
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(g,D_y) & \longrightarrow & gD_y \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
(g,\phi(D_y)) & \longrightarrow & g[\phi(D_y)]=\phi(gD_y)
\end{array}
$$

lo cual es consecuencia de que las $\theta_g\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ son isometrías y por tanto llevan geodésicas en geodésicas, ahora bien si denotamos con G_{D_y} la geodésica que pasa por y y en él tiene vector tangente D_y, tendremos que $\theta_g[G_{D_y}]$ es la geodésica que pasa por gy y en él tiene vector tangente gD_y, es decir

$$\theta_g[G_{D_y}]=G_{gD_y},$$

ahora bien como $\phi(D_y)=G_{D_y}(1)$, se sigue que

$$\theta_g[\phi(D_y)]=\theta_g[G_{D_y}(1)]=G_{gD_y}(1)=\phi(gD_y),$$

y el diagrama es conmutativo. ∎

1.19. El espacio de órbitas

Consideremos la acción en una variedad diferenciable $\mathcal{X}$

$$\theta\colon\mathcal{G}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X},$$

con $\mathcal{G}$ un grupo de Lie compacto. Entonces hemos visto en (1.15.6) (pág.68) que cada órbita $\mathcal{G}x$ es una subvariedad compacta, para la que se tiene el difeomorfismo

$$\mathcal{G}/I_x\longrightarrow\mathcal{G}x,\quad [g]\longrightarrow gx.$$

En general el espacio de órbitas $\mathcal{X}/\mathcal{G}$, con la topología cociente no es una variedad diferenciable, sin embargo en esta lección veremos que podemos hacer una partición de este espacio en distintas familias de órbitas, que llamaremos *estratos* de modo que cada estrato sea una variedad diferenciable.

1.19.1. Tipo de isotropía.

Observemos que dos puntos de una misma órbita $\mathcal{G}x$ tienen grupos de isotropía conjugados, pues

$$I_{gx}=\{h\in\mathcal{G}:\ h(gx)=gx\}=\{h\in\mathcal{G}:\ g^{-1}hgx=x\}=gI_xg^{-1},$$

y que si dos puntos $x, z \in \mathcal{X}$ tienen grupos de isotropía conjugados entonces sus órbitas son difeomorfas, pues

$$I_x = gI_zg^{-1} = I_{gz} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}x \sim \mathcal{G}/I_x = \mathcal{G}/I_{gz} \sim \mathcal{G}z.$$

Definición. Llamamos *tipo de isotropía* de un punto $x \in \mathcal{X}$, al par de números naturales (con el segundo estrictamente positivo)

$$\tau \colon \mathcal{X} \to \mathcal{T} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+,$$
$$\tau(x) = (\dim I_x, \text{ número de componentes conexas de } I_x).$$

Observemos que el número de componentes conexas es finito pues son abiertos del grupo de Lie compacto I_x.

Según hemos dicho dos puntos de una misma órbita $\mathcal{G}x$ tienen subgrupos de isotropía conjugados, en particular difeomorfos y por tanto son del mismo tipo de isotropía, por tanto son las órbitas más que los puntos las que tienen tipo de isotropía.

Lema 1.19.1 *Si $\phi \colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ es un $\mathcal{G}$–difeomorfismo, entre $\mathcal{G}$–variedades, entonces para todo $x \in \mathcal{X}_1$, $I_x = I_{\phi(x)}$.*

Demostración. Es obvio pues $\phi(gx) = g\phi(x)$. ∎

Lema 1.19.2 *Sean $x \in \mathcal{X}$ y $D_x \in T_x(\mathcal{X})$, entonces*

$$\tau(D_x) = \tau(x) \quad \Leftrightarrow \quad I_{D_x} = I_x \quad \Leftrightarrow \quad I_x \subset I_{D_x}.$$

Demostración. La segunda equivalencia es trivial pues siempre se tiene

$$I_{D_x} = \{g \in \mathcal{G} : \ gD_x = D_x\} \subset I_x,$$

en cuanto a la primera, “⇐.es por definición y “⇒”se sigue de la inclusión anterior y por tanto como $\tau(D_x) = \tau(x)$ ambos tienen igual dimensión y el subgrupo I_{D_x} es un abierto del grupo I_x y por (1.4.3) es cerrado, por tanto está formado por unas cuantas componentes conexas de él, pero tienen igual número de componentes conexas, por tanto son iguales. ∎

Teorema 1.19.3 *Sea $t \in \mathcal{T}$, entonces el conjunto $\mathcal{X}^t = \tau^{-1}(t)$, de los puntos que tienen tipo t es una subvariedad (formada por órbitas).*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}^t$, queremos encontrar un entorno suyo que se corte con $\mathcal{X}^t$ en una subvariedad. Consideremos el $\mathcal{G}$–difeomorfismo de (1.18.1), $\phi\colon \mathcal{N}_\epsilon \to \mathcal{X}_\epsilon$, para la órbita $\mathcal{Y} = \mathcal{G}x$, tal que $\phi(0_x) = x$. Como por (1.19.1) el tipo es invariante por ϕ, basta demostrar que existe un entorno de $v = 0_x$, que se corta con

$$\{D_y \in \mathcal{N}_\epsilon : \ \tau(D_y) = t\},$$

en una subvariedad del fibrado normal ó más generalmente con

$$\mathcal{N}^t = \{D_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} : \ \tau(D_y) = t\}.$$

Consideremos el subespacio vectorial (por la segunda igualdad)

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^t_x &= \{D_x \in T_x(\mathcal{Y})^\perp : \ \tau(D_x) = t = \tau(x)\},\\ &= \{D_x \in T_x(\mathcal{Y})^\perp : \ \forall g \in I_x, \ gD_x = D_x\}, \qquad \text{(por (1.19.2))}\end{aligned}$$

una sección local $\sigma\colon V_y \to \mathcal{G}$, de la proyección regular $\theta_x\colon \mathcal{G} \to \mathcal{Y}$, con V_y entorno abierto de un $y \in \mathcal{Y}$ (ahora sólo necesitamos el caso $y = x$, pero en el siguiente corolario necesitaremos lo que viene a continuación para todo y); y la composición

$$V_y \times T_x(\mathcal{Y})^\perp \hookrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \xrightarrow{\overline{\theta}} \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}},$$

cuya imagen es el abierto del fibrado $\pi^{-1}(V_y)$ y sobre él es un difeomorfismo

$$V_y \times T_x(\mathcal{Y})^\perp \longrightarrow \pi^{-1}(V_y), \quad (z, D_x) \to \sigma(z)D_x,$$

pues tiene inversa diferenciable ya que su primera componente es π y la segunda es, para $\tau = \sigma \circ \pi$, la composición

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^{-1}(V_y) & \xrightarrow{(\tau,id)} & \mathcal{G} \times \pi^{-1}(V_y) & \to & \mathcal{G} \times \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} & \xrightarrow{\overline{\theta}} & \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \\ D_p & \to & (\sigma(p) = g, D_p) & \to & (g^{-1}, D_p) & \to & g^{-1}D_p \end{array}$$

siendo $g^{-1}D_p \in T_x(\mathcal{Y})^\perp$, pues $p = \theta_x\sigma(p) = gx$, es decir $g^{-1}p = x$.

Ahora como $V_y \times \mathcal{N}^t_x$ es una subvariedad de $V_y \times T_x(\mathcal{Y})^\perp$ el resultado se sigue, pues su imagen es

$$\mathcal{N}^t \cap \pi^{-1}(V_y). \quad \blacksquare$$

Corolario 1.19.4 *La aplicación*

$$\mathcal{Y} \times \mathcal{N}^t_x \longrightarrow \mathcal{N}^t, \quad (gx, D_x) \to gD_x,$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Primero hay que ver que está bien definida, es decir que si $gx = hx$ (es decir $h^{-1}g \in I_x$), entonces $gD_x = hD_x$ (es decir $h^{-1}g \in I_{D_x}$), lo cual se sigue de (1.19.2), pues $\tau(D_x) = t = \tau(x)$, por tanto $I_{D_x} = I_x$. Por otro lado tiene inversa y por último en el resultado anterior hemos visto que localmente es difeomorfismo, por tanto lo es globalmente. ∎

1.19.2. Variedad cociente.

Consideremos las siguientes acciones

$$\mathcal{G} \times (\mathcal{Y} \times \mathcal{N}_x^t) \longrightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{N}_x^t, \quad (g, (y, D_x)) \to (gy, D_x),$$
$$\mathcal{G} \times \mathcal{N}^t \longrightarrow \mathcal{N}^t, \quad (g, D_y)) \to gD_y,$$

en estos términos se tiene.

Teorema 1.19.5 *El difeomorfismo $\mathcal{Y} \times \mathcal{N}_x^t \to \mathcal{N}^t$ del resultado anterior es un $\mathcal{G}$–difeomorfismo.*

Demostración. Es obvio. ∎

Lema 1.19.6 *Sean $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ $\mathcal{G}$–variedades y*

$$\phi \colon \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$$

un $\mathcal{G}$–difeomorfismo, entonces existe una de las variedades diferenciables cociente $\mathcal{X}_i/\mathcal{G}$ si y sólo si existe la otra y son difeomorfas.

Demostración. Es obvio. ∎

Teorema 1.19.7 *Existe el cociente geométrico $\mathcal{X}^t/\mathcal{G}$.*

Demostración. Por el corolario (1.15.4) del teorema de Godement basta ver que la relación de equivalencia $R^t = R \cap (\mathcal{X}^t \times \mathcal{X}^t)$ es una subvariedad de $\mathcal{X}^t \times \mathcal{X}^t$.

Sea $(x, y) \in R^t$ y $\mathcal{X}_\epsilon$ el entorno del teorema del entorno tubular para la órbita $\mathcal{Y} = \mathcal{G}x$, que contiene a x e y. Ahora por una parte existe el cociente geométrico $(\mathcal{Y} \times \mathcal{N}_x^t)/\mathcal{G}$ y es

$$\pi \colon \mathcal{Y} \times \mathcal{N}_x^t \longrightarrow \mathcal{N}_x^t, \quad \pi(y, D_x) = D_x,$$

pues π es proyección regular y cada fibra $\pi^{-1}(D_x)$ es una órbita, la de (x, D_x), ya que

$$\mathcal{G} \cdot (x, D_x) = \{(gx, D_x) : \ g \in \mathcal{G}\} = \mathcal{Y} \times \{D_x\} = \pi^{-1}(D_x).$$

Por otra parte, como consecuencia de los resultados anteriores también existe el cociente geométrico $\mathcal{N}^t/\mathcal{G}$, por tanto el de

$$(\mathcal{X}^t \cap \mathcal{X}_\epsilon)/\mathcal{G} = (\mathcal{N}^t \cap \mathcal{N}_\epsilon)/\mathcal{G},$$

y por Godement $R^t \cap (\mathcal{X}_\epsilon \times \mathcal{X}_\epsilon) = R \cap [(\mathcal{X}^t \cap \mathcal{X}_\epsilon) \times (\mathcal{X}^t \cap \mathcal{X}_\epsilon)]$ es una subvariedad de $\mathcal{X}^t \times \mathcal{X}^t$. ∎

Lema 1.19.8 *Sea $\pi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ una proyección regular cerrada y con fibras compactas (i.e. propia) entonces para todo $y \in \mathcal{V}$ existe un abierto entorno de y cuyos puntos tienen fibras difeomorfas. En particular si $\mathcal{V}$ es conexo sus fibras son difeomorfas.*

Demostración. Consideremos en $\mathcal{U}$ una métrica Riemanniana, entonces todo campo tangente $D \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ (con grupo uniparamétrico $\sigma\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$) tiene una única subida canónica $\tilde{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ (con grupo $\tilde{\sigma}\colon \tilde{\mathcal{W}} \to \mathcal{U}$), tal que $\pi_* \tilde{D} = D$ y para cada $x \in \mathcal{U}$, $y = \pi(x)$ y $F_y = \pi^{-1}(y)$, $\tilde{D}_x \in T_x(F_y)^\perp$.

Ahora para cada $x \in F_y$, existe un entorno abierto de $(0, x)$, $(-\epsilon_x, \epsilon_x)\times U_x \subset \tilde{\mathcal{W}}$ y como los U_x son un recubrimiento abierto del compacto F_y, podemos tomar un subrecubrimiento finito y definir su unión U y considerar el mínimo ϵ de los ϵ_x correspondientes. Ahora como $F_y \subset U$, $\pi(U^c)$ es un cerrado que no contiene a y, por tanto existe un entorno abierto de y, V_y disjunto de $\pi(U^c)$ y por tanto $\pi^{-1}(V_y) \subset U$ y

$$(-\epsilon, \epsilon) \times \pi^{-1}(V_y) \subset \tilde{\mathcal{W}},$$

lo cual implica que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\pi^{-1}(V_y) \subset \mathcal{U}_t = \{p \in \mathcal{U} : \ (t, p) \in \tilde{\mathcal{W}}\},$$

por otra parte como $\pi_* \tilde{D} = D$,

$$\pi \circ \tilde{\sigma}_t = \sigma_t \circ \pi,$$

en el abierto $\mathcal{U}_t$, por tanto por un lado

$$\pi \circ \tilde{\sigma}_x = \sigma_y\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{V},$$

y podemos encoger si es necesario el ϵ para que $\sigma_y(-\epsilon,\epsilon) \subset V_y$; y por otro lado si $x \in F_y$, $\tilde{\sigma}_t(x) \in F_{\sigma_t(y)}$, es decir

$$\tilde{\sigma}_t(F_y) \subset F_{\sigma_t(y)},$$

y para $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, se da la igualdad pues $\tilde{\sigma}_t \colon \mathcal{U}_t \to \mathcal{U}_{-t}$ es un difeomorfismo y $F_{\sigma_t(y)} \subset \pi^{-1}(V_y) \subset \mathcal{U}_{-t}$ y aplicando σ_{-t}

$$F_y \subset \tilde{\sigma}_{-t}(F_{\sigma_t(y)}) \subset F_y,$$

por tanto las fibras $F_{\sigma_y(t)}$ son difeomorfas para $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ y por conexión para todo t en el dominio de σ_y. Ahora como lo anterior es cierto para todo campo, basta tomar un entorno coordenado de y y los campos traslación, tendríamos que las fibras del entorno son difeomorfas. Ahora si $\mathcal{V}$ es conexo basta considerar los puntos con fibras difeomorfas a F_y, que forman un abierto y su complementario también, por tanto es vacío. ∎

Teorema 1.19.9 *Sea $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ una subvariedad $\mathcal{G}$–invariante, para la que existe cociente conexo $\mathcal{Z}/\mathcal{G}$, entonces existe un $t \in \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}^t$.*

Demostración. Basta demostrar que para $z \in \mathcal{Z}$, los I_z son difeomorfos. Ahora por (1.15.4)

$$\phi \colon \mathcal{G} \times \mathcal{Z} \to R_{\mathcal{Z}} = R \cap (\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}), \quad \phi(g,x) = (gx,x),$$

es proyección regular, además es propia pues sus fibras son compactas, es más para cada compacto $K \subset R_{\mathcal{Z}}$, $\phi^{-1}(K)$ es compacto pues es un cerrado del compacto $\mathcal{G} \times \pi_2(K)$; y ϕ es cerrada, pues si $C \subset \mathcal{G} \times \mathcal{Z}$ es cerrado y $x \in \overline{\phi(C)}$, tomando un compacto K_x entorno de x, tendríamos que $K_x \cap \phi(C) \neq \emptyset$ y $\phi^{-1}(K_x)$ es compacto, por tanto también es compacto y por tanto cerrado la imagen del compacto

$$\phi[\phi^{-1}(K_x) \cap C] = K_x \cap \phi(C) = V^c,$$

y V es un abierto tal que $V \cap K_x \cap \phi(C) = \emptyset$, por tanto $x \notin V$ y $x \in \phi(C)$, por tanto $\phi(C)$ es cerrado.

Se sigue del lema anterior que dado $z \in \mathcal{Z}$ existe un entorno de $(z,z) \in R_{\mathcal{Z}}$, cuyos puntos tienen fibras difeomorfas, por tanto existe un entorno de z, $U_z \subset \mathcal{Z}$ tal que para $z' \in U_z$, $I_{z'} \times \{z'\} = \phi^{-1}(z',z')$ son difeomorfas. Por tanto el conjunto de los $z' \in \mathcal{Z}$ con grupo de isotropía difeomorfo a I_z es un abierto U y su complementario también y ambos se proyectan por π en sendos abiertos disjuntos, por tanto $\pi(U)$ es el total y todos los puntos de z tienen grupos de isotropía difeomorfos y por tanto el mismo tipo. ∎

1.19.3. El espacio topológico de tipos de isotropía.

En el espacio de tipos $\mathcal{T} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}^+$ hay una topología natural respecto de la que τ es continua. Seguimos considerando un grupo de Lie compacto $\mathcal{G}$ que actúa, $\theta\colon \mathcal{G}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, en la variedad $\mathcal{X}$.

Definición. En $\mathcal{T}$ consideramos el *orden entre tipos*

$$(m,n)<(m',n') \quad\Leftrightarrow\quad m<m' \quad \text{ó} \quad m=m',\ n<n',$$

y la *topología en el espacio de tipos* $\mathcal{T}$, tal que $A\subset\mathcal{T}$ es abierto si verifica

$$(m,n)\in A \quad\Rightarrow\quad \forall(a,b)<(m,n), \qquad (a,b)\in A.$$

Teorema de continuidad 1.19.10 *Con la topología anterior, la aplicación $\tau\colon\mathcal{X}\to\mathcal{T}$, es continua.*

Demostración. Consideremos un $x\in\mathcal{X}$, la órbita de ese punto $\mathcal{Y}=\mathcal{G}x$ y el $\mathcal{G}$–difeomorfismo $\phi\colon\mathcal{N}_\epsilon\to\mathcal{X}_\epsilon$ de (1.18.1). Entonces $\mathcal{X}_\epsilon$ es un entorno abierto de x y si $z\in\mathcal{X}_\epsilon$, con $z=\phi(D_y)$ e $y=hx\in\mathcal{Y}$,

$$I_z=I_{D_y}\subset I_y=I_{hx}\sim I_x,$$

lo cual implica que $\tau(z)\le\tau(x)$. Se sigue que si $V\subset\mathcal{T}$ es abierto —por tanto de la forma $\{s\in\mathcal{T}:s<t\}$—, $\tau^{-1}(V)$ también lo es, pues si $x\in\tau^{-1}(V)$, $\mathcal{X}_\epsilon\subset\tau^{-1}(V)$. ∎

Teorema 1.19.11 *Se tienen las propiedades siguientes:*

1) *Todo $x\in\mathcal{X}$ tiene un entorno U_x que tiene un número finito de tipos de isotropía ($\tau(U_x)$ es finito), por tanto si $\mathcal{X}$ es compacto, hay un número finito de tipos.*

2) *Si $\mathcal{X}=\mathcal{E}$ es un espacio vectorial y para cada $g\in\mathcal{G}$, $\theta_g\colon\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ es lineal, entonces hay un número finito de tipos de isotropía.*

Demostración. Haremos la demostración de los dos apartados a la vez por inducción en $n=\dim\mathcal{X}$. Para $n=0$ es obvio, pues en (2) $\mathcal{E}=\{0\}$ y en (1) cada punto tiene un entorno en el que sólo está él.

Supongamos que ambos resultados son ciertos para $n-1$ y veamos primero que (2) es válido para n. Consideremos un producto escalar en $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$–invariante (su construcción es como la de la lección (1.18.2), partiendo de un producto escalar cualquiera en $\mathcal{E}$), por tanto con las θ_g isomorfismos isométricos y la acción se restringe a la esfera unidad $\mathcal{S}$, $\theta\colon\mathcal{G}\times\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, que es una variedad $n-1$ dimensional y por inducción tiene un número finito de tipos. Ahora bien por linealidad de las θ_g, para cada $e \in \mathcal{S}$, $I_e = I_{\lambda e}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, de donde que $\tau(\mathcal{E}\backslash\{0\})$ es finito y por tanto $\tau(\mathcal{E})$. Veamos ahora que (1) también se tiene. Sea $x \in \mathcal{X}$ y consideremos el $\mathcal{G}$–difeomorfismo $\phi\colon \mathcal{N}_\epsilon \to \mathcal{X}_\epsilon$, de (1.18.1), para la órbita de x. Entonces basta ver que $\mathcal{N}_\epsilon$ tiene un número finito de tipos, para lo cual basta ver que todo el fibrado normal, en el que el grupo actúa por la acción

$$\overline{\theta}\colon \mathcal{G} \times \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}, \quad (g, D_y) \longrightarrow gD_y,$$

tiene un número finito de tipos. Ahora bien dado $D_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ existe $g \in \mathcal{G}$, tal que $gD_y \in T_x(\mathcal{Y})^\perp = \mathcal{E}$ y $\tau(D_y) = \tau(gD_y)$, por tanto basta demostrar que $\tau(\mathcal{E})$ es finito y aunque $\mathcal{G}$ no actúe en $\mathcal{E}$, I_x sí además linealmente y para cada $D_x \in \mathcal{E}$,

$$I_{D_x} = \{g \in \mathcal{G} : \ gD_x = D_x\} = \{g \in I_x : \ gD_x = D_x\},$$

y se sigue de (2) que $\tau(\mathcal{E})$ es finito. ∎

Teorema 1.19.12 *Existe* $t = \min \tau(\mathcal{X})$ *y* $\mathcal{X}^t$ *es abierto, además es denso si* $\mathcal{X}$ *es conexo.*

Demostración. Consideremos el $m = \min\{\dim I_x \in \mathbb{N} : x \in \mathcal{X}\}$, ahora para cada x con $\dim I_x = m$, sea $n(x)$ el número de componentes conexas de I_x y sea $n = \min\{n(x)\}$, entonces $t = (m, n) \leq \tau(x)$ para todo x. Ahora $\mathcal{X}^t$ es abierto, pues dado $x \in \mathcal{X}^t$, en el teorema de continuidad hemos visto que $\mathcal{X}_\epsilon$ es un entorno abierto de x, en el que $t \leq \tau(\mathcal{X}_\epsilon) \leq \tau(x) = t$, por tanto $\mathcal{X}_\epsilon \subset \mathcal{X}^t$.

Ahora veamos por inducción en la $\dim \mathcal{X} = n$, que es denso. Para $n = 0$, es obvio pues es un punto por ser conexo. Supongamos que es cierto para $n - 1$ y veámoslo para n.

Veamos primero que para cada x hay un entorno abierto U_x y un único tipo r, tal que $U_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}^r}$ es denso en U_x. Para ello consideremos para $\mathcal{Y} = \mathcal{G}x$, la subvariedad de dimensión $n - 1$, $\mathcal{S} = \{D_y \in \mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} : \|D_y\| = \epsilon/2\}$ y como es conexa (salvo para $\dim T_x(\mathcal{Y})^\perp = 1$, que tiene dos componentes conexas, pero para cada vector D_y de una, su opuesto $-D_y$ —que tiene el mismo tipo—, está en la otra), podemos aplicar la hipótesis y $\mathcal{S}$ tiene un estrato mínimo $\mathcal{S}^r$ que es abierto denso en $\mathcal{S}$, por tanto también lo es el abierto $\{\lambda D_y : \lambda \neq 0,\ D_y \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{N}^r$ en $\mathcal{N}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ y $\mathcal{N}_\epsilon \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}^r}$ es denso en $\mathcal{N}_\epsilon$ y en definitiva pasando por el difeomorfismo ϕ, $\mathcal{X}_\epsilon \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}^r}$ es denso en el abierto $U_x = \mathcal{X}_\epsilon$.

Además el r es único, pues si hay otro entorno abierto V_x y un tipo s, tales que $V_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s$ es denso en V_x, entonces como U_x es un entorno de $x \in V_x$, corta al abierto $V_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s$ y tomando un punto z de la intersección y un entorno de él $V_z \subset \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s$, debe cortar a $U_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^r$), lo cual es absurdo porque habría un punto con dos tipos. De modo análogo se tiene que cada punto x es adherente a un único $\overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^r$, pues si lo fuera a otro, $x \in \overline{\overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s}$, tendríamos que $U_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s \neq \emptyset$ y para un punto z de este abierto y un entorno abierto suyo $U_z \subset U_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s$, tendríamos que como $U_x \cap \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^r$ es denso en U_x y $z \in U_x$, tiene que tener algún punto de U_z, lo cual es absurdo pues ese punto tendría dos tipos. Por tanto las adherencias $\overline{\overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^s}$ son disjuntas y abiertas por lo demostrado al principio. Por tanto como $\mathcal{X}^t$ es abierto, tendremos por conexión que $\overline{\mathcal{X}^t} = \mathcal{X}$. ∎

1.20. Ejemplos de espacios de órbitas

Ejemplo 1.- Cociente de la variedad de cuádricas de $\mathbb{A}_1$, por el grupo de las traslaciones.

1. *La variedad de cuádricas.* Una cuádrica de la recta afín consiste en un par de puntos definidos, en coordenadas cartesianas, por las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2+2bx+c=0$, por tanto pueden ser distintos o dobles y reales, imaginarios o del infinito. Por tanto la variedad de cuádricas es un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, formado por las rectas $[a,b,c]$.

2. *La acción.* El grupo $\mathcal{G}$ de las traslaciones de la recta afín, isomorfo a $(\mathbb{R},+)$, opera de modo natural sobre la variedad de cuádricas $\mathbb{P}_2$, pues para cada punto x (real ó imaginario) y cada traslación t tenemos el nuevo punto $x+t$ —que es el mismo si x es el del infinito—, del siguiente modo

$$t[a,b,c] = [a, b-ta, c-2bt+at^2],$$

esto se comprueba fácilmente considerando que la traslación por t de la cuádrica $ax^2+2bx+c=0$ es $a(x-t)^2+2b(x-t)+c=0$. Es fácil probar que es una acción. Veremos a continuación que aunque el grupo no es compacto, esencialmente los teoremas estudiados siguen siendo válidos.

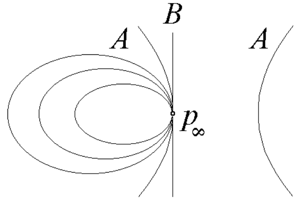

Figura 1.1. Los estratos A, B y C en el plano $c=1$

3. *Las órbitas.* La partición en las subvariedades $A=\{a\neq 0\}$ (en el que ambas raíces son finitas), $B=\{a=0,\ b\neq 0\}$ (en el que una es el infinito y la otra $-c/2b$), y $C=\{p_\infty=[0,0,c]\}$ (en el que ambas son el infinito), son $\mathcal{G}$–invariantes. C está formado por un único punto p_∞, por tanto tiene cociente al igual que B que es una recta (sin el punto p_∞) y el cociente también es un punto y en el abierto denso A podemos definir la función

$$\delta\colon A\to\mathbb{R},\qquad \delta([a,b,c])=\frac{b^2-ac}{a^2},$$

que es positiva si las raíces que define son reales, en cuyo caso es el cuadrado de la distancia entre las raíces. Esta función satisface que dos cuádricas $p=[a,b,c]$ y $p'=[a',b',c']$ están en la misma órbita si y sólo si $\delta(p)=\delta(p')$, pues para $t=b/a-b'/a'$, se tiene que

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{b'^2-a'c'}{a'^2}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{c'}{a'}=\frac{c}{a}-2\frac{b}{a}t+t^2,$$

por tanto las órbitas son las cónicas de $\mathbb{P}_2$ (sin el punto p_∞)

$$b^2-ac=\lambda a^2,\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

y existe el cociente $\delta\colon A\to A/\mathcal{G}=\mathbb{R}$, pues por una parte δ es proyección regular, ya que en coordenadas (b,c) (en $a=1$), $\delta(b,c)=b^2-c$ y $\delta_*(\partial_c)=-\partial_x$ y por otra las fibras son las órbitas.

4. *El espacio cociente.* Existe cociente en cada una de las tres subvariedades A,B y C y son los estratos, en el sentido de que toda subvariedad conexa $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{P}_2$, que sea $\mathcal{G}$–estable y su cociente $\mathcal{Z}/\mathcal{G}$ admita estructura de variedad diferenciable de modo que $\pi\colon\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}/\mathcal{G}$ sea proyección regular, está incluida en alguno de los tres.

Observemos en primer lugar que si $p_\infty\in\mathcal{Z}$, entonces $\mathcal{Z}=\{p_\infty\}$, pues si hay un $p\in A\cup B$ en $\mathcal{Z}$, la órbita de p sería cerrado —por ser la contraimagen $\pi^{-1}(\pi(p))$ de un punto de una variedad, por tanto cerrado— y no lo es pues p_∞ está en su adherencia y no en la órbita.

Ahora si $p_\infty \notin \mathcal{Z}$, entonces $\mathcal{Z} \subset A \cup B = \mathbb{P}_2 - p_\infty$ y el cociente es un subespacio topológico del espacio topológico cociente $(\mathbb{P}_2 - p_\infty)/\mathcal{G}$, que es

$$\pi\colon \mathbb{P}_2 - p_\infty \to (-\infty, \infty], \qquad [a,b,c] \to \begin{cases} \frac{b^2-ac}{a^2}, & \text{si } a \neq 0, \\ \infty, & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

pues π es continua —$\pi^{-1}(\lambda, \infty] = \{b^2 - ac > \lambda a^2\}$—, es sobre y abierta —pues si $U \subset \mathbb{P}_2 - p_\infty$ es abierto, $\pi(U \cap A) = \delta(U \cap A)$ es abierto y si $p \in U \cap B$ hay un entorno conexo de p, $V \subset U$, que corta a A y $\pi(V)$ es un conexo de $(-\infty, \infty]$, que contiene puntos finitos y a ∞, por tanto un intervalo entorno de ∞—; ahora se sigue de (1.1.13) que la topología es la cociente; y no es variedad topológica (a pesar de que los puntos de $\mathbb{P}_2 - p_\infty$ tienen el mismo tipo de isotropía). Se sigue que si $\infty \in \pi(\mathcal{Z})$, entonces $\mathcal{Z} = B$ y si no $\pi(\mathcal{Z}) \subset (-\infty, \infty)$ y $\mathcal{Z} \subset A$.

5. *Campo tangente asociado a la acción.* La acción puede interpretarse como un grupo uniparamétrico (que en $c = 1$ es)

$$\tau(t,a,b) = \left(\frac{a}{1 - 2bt + at^2}, \frac{b - at}{1 - 2bt + at^2} \right),$$

cuyo campo tangente asociado

$$2xy\frac{\partial}{\partial x} + (2y^2 - x)\frac{\partial}{\partial y},$$

tiene a $p_\infty = (0,0)$ como única singularidad y su linealización en este punto es el campo $-x\partial_y$, cuya matriz asociada es singular (lo que explica el carácter atípico de las trayectorias del campo en la vecindad de p_∞).

Ejemplo 2.- Clasificación euclídea de los triángulos

1. *La variedad de triángulos.* Un triángulo es una terna de puntos no ordenada ni alineada de $\mathbb{R}^2$. La variedad de ternas ordenadas es $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. La variedad de ternas ordenadas no alienadas es el abierto U de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ formada por los puntos (a_1, a_2, a_3) que, para $a_i = (x_i, y_i)$ verifican

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Tomando cociente por el grupo de las permutaciones $\mathcal{S}_3$ (que es finito luego compacto) se obtiene por (1.15.8) la variedad diferenciable (Hausdorff) de los triángulos $\mathcal{T} := U/\mathcal{S}_3$, y una proyección regular $U \to \mathcal{T}$ (que de hecho es un revestimiento), cuyas fibras tienen 6 elementos.

2. *Las funciones longitud de un lado.* Para cada triángulo $t \in \mathcal{T}$, consideremos las longitudes $d_1(t) \geq d_2(t) \geq d_3(t)$ de sus tres lados, ordenadas de mayor a menor, las cuales verifican:

– La función $d_i : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ es continua $(i = 1, 2, 3)$.

– La función $d_1 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el abierto de $\mathcal{T}$ tal que $d_1(t) \neq d_2(t)$.

– La función $d_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo $t \in \mathcal{T}$ escaleno.

– La función $d_3 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo $t \in \mathcal{T}$ tal que $d_3(t) \neq d_2(t)$.

Para probar lo anterior, consideramos las funciones $f_{ij} : U \to \mathbb{R}$,

$$f_{ij}(a_1, a_2, a_3) = d(a_i, a_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

para $d(a_i, a_j)$ la distancia entre los puntos a_i y a_j, las cuales son diferenciables en todo U. Ahora como el supremo, el ínfimo y la suma de funciones continuas son continuas, lo son las funciones

$$\begin{aligned} d_1 &= sup\{f_{12}, f_{13}, f_{23}\} : U \to \mathbb{R}, \\ d_3 &= inf\{f_{12}, f_{13}, f_{23}\} : U \to \mathbb{R}, \\ d_2 &= f_{12} + f_{13} + f_{23} - d_1 - d_3 : U \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

y son diferenciables en las regiones dadas, porque localmente coinciden con una de las funciones f_{ij} y como son constantes en las clases de equivalencia factorizan a través del cociente $U \to U/\mathcal{S}_3 = \mathcal{T}$.

3. *El grupo de los movimientos del plano.* Sea $\mathcal{G}$ el grupo de los movimientos rígidos (ver (1.12.6)) del plano euclídeo, es decir biyecciones que conservan la distancia

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x) = \mathbf{A}x + b,$$

con $\mathbf{A} \in \mathcal{O}_2$ y $b \in \mathbb{R}^2$, el cual es un subgrupo de Lie cerrado del grupo de las afinidades del plano.

Podemos definir en la variedad de triángulo $\mathcal{T}$ la acción natural

$$\mathcal{G} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}, \quad (F, \{a_1, a_2, a_3\}] \to \{F(a_1), F(a_2), F(a_3)\}.$$

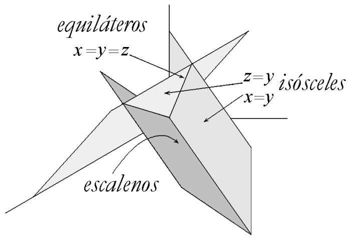

Figura 1.2. El conjunto $\mathcal{Z}$

4. *Construcción del espacio cociente.* Consideremos la aplicación continua $\varphi = (d_1, d_2, d_3) : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathcal{Z} := Im\, \varphi = \{(x, y, z) : \ y + z > x \geq y \geq z \geq 0\},$$

es el espacio topológico cociente $\mathcal{T}/G = Z$, pues dos triángulos tienen lados correspondientes de igual longitud si y sólo si existe un movimiento que transforma uno en otro (es decir están en la misma órbita) y podemos construir una sección continua a la aplicación $\varphi : \mathcal{T} \to Z$, de la siguiente manera dadas las tres distancias d_1, d_2, d_3, consideramos el triángulo con vértices $a = (0, 0)$, $b = (0, d_1)$ y c el único con ordenada positiva que satisface $d(a, c) = d_3$ y $d(b, c) = d_2$. Sin embargo no es variedad topológica, por tanto no hay cociente geométrico en todos los triángulos.

Debemos por tanto estratificar, pero como el grupo de los movimientos no es compacto, simplificamos el problema considerando el subconjunto $\mathcal{T}_0$ de $\mathcal{T}$ de los triángulos cuyo baricentro es el origen, el cual es una subvariedad cerrada de $\mathcal{T}$, para la que existe un difeomorfismo canónico $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^2$, que lleva cada triángulo t con baricentro $b(t)$ a $(t - b(t), b(t))$ y para $\mathcal{H}$ el subgrupo de $\mathcal{G}$ de las traslaciones existe el cociente $\mathcal{T}/\mathcal{H} = \mathcal{T}_0$ y es

$$\pi_1 \colon \mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^2 \to \mathcal{T}_0.$$

Ahora se verifica que una subvariedad $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{T}$ es $\mathcal{G}$–estable si y sólo si $\mathcal{Y} = \pi_1^{-1}(\bar{\mathcal{Y}})$, con $\bar{\mathcal{Y}}$ subvariedad de $\mathcal{T}_0$ $\mathcal{O}_2$–estable, pues por una parte como tenemos la proyección $\phi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{O}_2$, $(\mathbf{A}, b) \to \mathbf{A}$ y el correspondiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} \times \mathcal{T} & \to & \mathcal{T} & \qquad & (T, t) & \longrightarrow & T(t) \\
{\scriptstyle (\phi,\pi_1)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathcal{O}_2 \times \mathcal{T}_0 & \to & \mathcal{T}_0 & & (\mathbf{A}, t - b(t)) & \longrightarrow & \mathbf{A}(t - b(t)),
\end{array}$$

pues $\mathbf{A}(t - b(t)) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(b(t)) = \mathbf{A}(t) + b - \mathbf{A}(b(t)) - b = T(t) - T[b(t)] = T(t) - b[T(t)]$, se tiene la implicación “ $\Leftarrow$ ” y para ver “ $\Rightarrow$ ”

sea $\bar{\mathcal{Y}} = \pi_1(\mathcal{Y})$, que por el diagrama es $\mathcal{O}_2$–estable y para ver que es subvariedad basta demostrar por (1.1.14) que $\mathcal{Y} = \pi_1^{-1}(\bar{\mathcal{Y}})$ y para ver esto sea t un triángulo tal que $\pi_1(t) = \pi_1(t')$, con $t' \in \mathcal{Y}$, por tanto $t' - b(t') = t - b(t)$ y t es una traslación de t' y como $\mathcal{Y}$ es invariante por traslaciones, $t \in \mathcal{Y}$.

Además hay un homeomorfismo $\mathcal{Y}/\mathcal{G} = \bar{\mathcal{Y}}/\mathcal{O}_2$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Y}/\mathcal{G} \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow \\ \bar{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{\mathcal{Y}}/\mathcal{O}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & [t] \\ \downarrow & & \downarrow \\ t - b(t) & \longrightarrow & [t - b(t)], \end{array}$$

que está bien definido es sobre y es continua por la propiedad universal del cociente y ser $\bar{\pi}\circ\pi_1$ continua y constante en las clases de equivalencia, ya que para $T = (\mathbf{A}, b)$,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\pi_1[T(t)]) &= \bar{\pi}[T(t) - b(T(t))] = \bar{\pi}[\mathbf{A}(t) + b - b(\mathbf{A}(t) + b)] \\ &= \bar{\pi}[\mathbf{A}(t) - b(\mathbf{A}(t))] = \bar{\pi}[\pi(t)], \end{aligned}$$

y es inyectiva pues si

$$\begin{aligned} [t - b(t)] = [t' - b(t')] \quad &\Rightarrow \quad \exists \mathbf{A} \in \mathcal{O}_2 : \; t - b(t) = \mathbf{A}(t' - b(t')) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \mathbf{A}(t') - \mathbf{A}(b(t')) \\ &\Rightarrow \quad t = T(t') \quad \Rightarrow \quad [t] = [t'], \end{aligned}$$

para $T = (\mathbf{A}, b(t) - \mathbf{A}(b(t')))$ y también es abierta. Se sigue que $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}/\mathcal{G}$ es una proyección regular si y sólo si $\bar{\mathcal{Y}} \to \bar{\mathcal{Y}}/\mathcal{O}_2$ es una proyección regular.

Por tanto la cuestión se reduce a estratificar $\mathcal{T}_0$ respecto de la acción del grupo compacto O_2 y esto nos lo da la teoría estudiada. Veamos los tipos de isotropía de cada triángulo t con baricentro en el origen. Si el triángulo es equilátero, I_t tiene 6 elementos: la identidad, los giros de 120 y 240 grados y las tres simetrías respecto de las tres alturas; si es isósceles tiene 2 elementos: la identidad y la simetría estándar y si es escaleno sólo la identidad. Por tanto hay tres estratos, de los cuales el segundo tiene dos componentes conexas según sea la base menor o mayor que los lados iguales.

Se sigue que $\mathcal{T}$ descompone de modo único en unión disjunta de las siguientes cuatro subvariedades a las que llamamos estratos y en las que hay cociente:

— El estrato abierto $\mathcal{T}_{es}$ de los triángulos escalenos.

— El estrato $\mathcal{T}_{is-}$ de los triángulos isósceles cuyo lado desigual es de menor longitud que la de los otros dos lados.

— El estrato $\mathcal{T}_{is+}$ de los triángulos isósceles cuyo lado desigual es de mayor longitud que la de los otros dos lados.

— El estrato cerrado $\mathcal{T}_{eq}$ de los triángulos equiláteros;
y los cocientes de estos estratos son

$$\begin{gathered}
(d_1, d_2, d_3) : \mathcal{T}_{es} \longrightarrow \{0 < z < y < x < y + z\} \subset \mathbb{R}^3, \\
(d_1, d_3) : \mathcal{T}_{is-} \longrightarrow \{0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2, \\
(d_1, d_3) : \mathcal{T}_{is+} \longrightarrow \{0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2 \\
d_1 : \mathcal{T}_{eq} \longrightarrow \mathbb{R}^+.
\end{gathered}$$

pues son proyecciones regulares y sus fibras son las clases de equivalencia y verifican que toda subvariedad conexa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{T}$, que sea $\mathcal{G}$–estable y su cociente $\mathcal{Y}/\mathcal{G}$ admita estructura de variedad diferenciable de modo que $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}/\mathcal{G}$ sea proyección regular, está incluida en algún estrato.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1.9.- Sea Δ una distribución involutiva en $\mathcal{X}$ y V un abierto coordenado como en el teorema de Frobenius. Demostrar que si $\mathcal{H} \subset V$ es una variedad integral (conexa), entonces está en una franja, es decir existen $a_{r+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tales que

$$\mathcal{H} \subset \{x \in V : \; u_{r+1} = a_{r+1}, \ldots, u_n = a_n\}.$$

Demostración. Basta demostrar que $x_i = i^* u_i$ son constantes en $\mathcal{H}$. Sea $D_x \in T_x(\mathcal{H})$, entonces

$$i_* D_x \in \Delta_x =< \frac{\partial}{\partial u_1}_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_r}_x > \quad \Rightarrow \quad D_x x_i = i_* D_x u_i = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.2.5.- Demostrar que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ con el producto como operación es un grupo de Lie.

Indicación. Probar que con el sistema de coordenadas dado por la identificación natural de $\mathbb{C}^*$ con $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, $x + iy = (x, y)$, se tiene que las operaciones del grupo son

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$
$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.2.6.- El cuerpo de los cuaterniones es el primer ejemplo (históricamente) de un cuerpo no conmutativo y consiste en un espacio vectorial real de dimensión 4, con una base $(1, i, j, k)$, cuyos elementos son de la forma $a + bi + cj + dk$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, que se suman componente a componente y su producto satisface $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ y $ki = -ik = j$. Demostrar que los cuaterniones no nulos $\mathbb{H}_4$, con el producto anterior y la estructura de variedad diferenciable dada por su biyección con $\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$, es un grupo de Lie.

(**Ind.-**) El producto y el paso al inverso son diferenciables pues

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k)(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) &= \\ = y_1 x_1 - y_2 x_2 - y_3 x_3 - y_4 x_4 &+ \\ + (y_1 x_2 + y_2 x_1 + y_3 x_4 - y_4 x_3) i &+ \\ + (y_1 x_3 - y_2 x_4 + y_3 x_1 + y_4 x_2) j &+ \\ + (y_1 x_4 + y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_4 x_1) k&.\end{aligned}$$

$$(x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)^{-1} = \frac{x_1 - x_2i - x_3j - x_4k}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}. \quad \blacksquare$$

Observemos que también podemos identificar $\mathbb{H}_4$ con las matrices complejas no nulas de orden 2 del tipo

$$\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$$

con el producto de matrices y esta aplicación es morfismo de grupos, por tanto el inverso es la matriz inversa.

Ejercicio 1.3.7.- Demostrar que el grupo de las afinidades de un espacio afín n–dimensional $\mathbb{A}_n$, sobre $\mathbb{R}$, es un grupo de Lie.

Demostración. Un espacio afín $\mathbb{A}_n$ sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto sobre el que opera un $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathcal{E}$ n–dimensional, mediante una aplicación $\chi\colon \mathbb{A}_n \times \mathcal{E} \to \mathbb{A}_n$, $\chi(p, v) = p + v$, tal que: (1) $(p + v) + v' = p + (v + v')$, (2) $p + v = p$ sii $v = 0$ y (3) dados dos puntos $x, y \in \mathbb{A}_n$ existe un único $v \in \mathcal{E}$ tal que $y = x + v$. Una afinidad es una aplicación $\varphi\colon \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$, para la que existe un isomorfismo $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, tal que si $y = x + v$, $\varphi(y) = \varphi(x) + \phi(v)$. Fijando un punto $p \in \mathbb{A}_n$ y una base $v_1, \ldots, v_n$ del espacio vectorial asociado al espacio afín, podemos considerar coordenadas x_i en el espacio afín, de tal modo que una afinidad $\varphi\colon \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ en términos de coordenadas se expresa de la forma $\varphi(x) = \mathbf{A}x + b$, con $\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Además el espacio afín podemos considerarlo como un hiperplano $x_{n+1} = 1$ de un $\mathbb{R}^{n+1}$, en cuyo caso las afinidades son

$$\{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}(n+1, \mathbb{R}) : \; x_{n+1,j} = 0, x_{n+1,n+1} = 1\}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.3.8.- Demostrar que el grupo de las proyectividades de un espacio proyectivo n–dimensional es un grupo de Lie.

Demostración. El espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ son las rectas pasando por el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$, con la estructura de variedad diferenciable para la que es proyección regular la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} & \to & \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ x & \to & < x > \end{array}$$

Ahora todo automorfismo lineal $T\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ lleva rectas en rectas y por tanto define una aplicación $\tilde{T}\colon \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, para la que es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_n & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathbb{P}_n \end{array}$$

El grupo de las proyectividades de $\mathbb{P}_n$ es

$$\mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n) = \{\overline{T} : \ T \in \mathrm{Gl}_{n+1}\},$$

con la composición, por tanto tenemos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}_{n+1} & \to & \mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n) \\ T & \to & \overline{T} \end{array}$$

que es homomorfismo de grupos por el diagrama anterior y para la que

$$\overline{T_1} = \overline{T_2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\lambda \neq 0, \ T_1 = \lambda T_2 \quad \Leftrightarrow \quad < T_1 >=< T_2 >,$$

siendo todas las implicaciones obvias salvo la primera "$\Rightarrow$"

$$\overline{T_1} = \overline{T_2} \quad \Rightarrow \quad < T_1(x) >=< T_2(x) > \quad \Rightarrow \quad T_1(x) = \lambda(x) T_2(x),$$

y $\lambda(x)$ es constante pues tomando x e y independientes, también lo son $T_2(x)$ y $T_2(y)$ y

$$\begin{aligned} \lambda(x+y)T_2(x) + \lambda(x+y)T_2(y) &= \lambda(x+y)T_2(x+y) = T_1(x+y) \\ &= T_1(x) + T_1(y) = \lambda(x)T_2(x) + \lambda(y)T_2(y). \end{aligned}$$

Si ahora consideramos el espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_{n+1}$ y su espacio proyectivo correspondiente $m = (n+1)^2 - 1$ dimensional, tendremos la nueva proyección regular

$$\pi\colon \mathcal{M}_{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}_m(\mathcal{M}_{n+1}),$$

y como Gl_{n+1} es un subespacio abierto de $\mathcal{M}_{n+1}\backslash\{0\}$, su proyección por π es un abierto $A \subset \mathbb{P}_m(\mathcal{M}_{n+1})$ —pues para el espacio proyectivo, $A \subset \mathbb{P}_m(\mathcal{M}_{n+1})$ es abierto si $\pi^{-1}(A)$ es abierto, que en nuestro caso es Gl_{n+1}—, y A se identifica con $\mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n)$ por la biyección $\phi(< T >) = \tilde{T}$, que está bien definida y es inyectiva por las equivalencias anteriores, y obviamente es sobre. Con esta identificación tiene estructura de variedad diferenciable y

$$\pi\colon \ \mathrm{Gl}_{n+1} \to A \simeq \mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n),$$

es proyección regular y es homomorfismo de grupos. Ahora que la operación $(T, Q) \to TQ^{-1}$ sea diferenciable se sigue de la existencia de secciones locales y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}_{n+1} \times \mathrm{Gl}_{n+1} & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Gl}_{n+1} \\ {\scriptstyle (\pi,\pi)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n) \times \mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n) & \to & \mathrm{PGl}(\mathbb{P}_n) \end{array} \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.3.9.- Demostrar que $\mathcal{S}_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|_2 = 1\}$, con el producto del grupo $\mathbb{H}_4$ (de los cuaterniones no nulos) es grupo de Lie.

Ind.- Podemos definir el conjugado de un cuaternión $z = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{H}_4$ como $\overline{z} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$, que corresponde en términos de matrices (ver el ejercicio (1.2.6)) a la matriz conjugada, y tiene la propiedad

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1},$$

pues $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$ y como consecuencia es bilineal la aplicación

$$\Phi(z_1, z_2) = \overline{z_1 \cdot z_2} - \overline{z_2} \cdot \overline{z_1},$$

y además se anula en los vectores de la base. Ahora se tiene que para $\|z\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \sqrt{z\overline{z}}$, si $z \in \mathcal{S}_3$, $z^{-1} = \overline{z} \in \mathcal{S}_3$ y si $z_1, z_2 \in \mathcal{S}_3$, entonces $z_1 z_2 \in \mathcal{S}_3$, pues

$$z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_2} \cdot \overline{z_1} = 1,$$

y $\mathcal{S}_3$ es subgrupo y subvariedad de $\mathbb{H}_4$ por tanto grupo de Lie. ∎

Ejercicio 1.3.10.- Demostrar que el *grupo ortogonal*

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \ \mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}\}$$

es un grupo de Lie.

Solución. Consideremos la aplicación diferenciable

$$F \colon \mathbf{X} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{X}^t\mathbf{X} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}),$$

entonces para cualesquiera $\mathbf{A}, \mathbf{X} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} F \circ R_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) &= F(\mathbf{X}\mathbf{A}) \\ &= \mathbf{A}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X}\mathbf{A} \\ &= R_{\mathbf{A}} \circ L_{\mathbf{A}^t} \circ F(\mathbf{X}), \quad \Rightarrow \quad F \circ R_{\mathbf{A}} = R_{\mathbf{A}} \circ L_{\mathbf{A}^t} \circ F, \end{aligned}$$

por lo tanto el rango de F_* en $\mathbf{I}$ y en $\mathbf{A}$ coinciden, por tanto es constante. Como $\mathcal{O}_n$ es subgrupo se sigue de (1.3.2) que es grupo de Lie. ∎

Ejercicio 1.3.11.- Demostrar que el *grupo ortogonal de signatura m, k*

$$\mathcal{O}_{m,k}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_{m+k}(\mathbb{R}) : \ \mathbf{A}^t\mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{E}\}$$

es un grupo de Lie, para I_n la identidad de $\mathbb{R}^n$ y

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}.$$

Solución. Consideremos la aplicación diferenciable

$$F \colon \mathbf{X} \in \mathrm{Gl}_{m+k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{X}^t\mathbf{E}\mathbf{X} \in \mathrm{Gl}_{m+k}(\mathbb{R}),$$

entonces para cualquier $\mathbf{B} \in \mathrm{Gl}_{m+k}(\mathbb{R})$

$$F \circ R_{\mathbf{B}} = R_{\mathbf{B}} \circ L_{\mathbf{B}^t} \circ F,$$

por lo tanto el rango de F_* en $\mathbf{I}$ y en $\mathbf{B}$ coinciden, por tanto es constante. Como $\mathrm{Sp}_{m,k}(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(\mathbf{E})$ es subgrupo se sigue de (1.3.2) que es grupo de Lie. ∎

Ejercicio 1.3.12.- Demostrar que el *grupo simplético*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R}) : \ \mathbf{A}^t\mathbf{J}\mathbf{A} = \mathbf{J}\}$$

es un grupo de Lie, para

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Consideremos la variedad diferenciable $\mathcal{V}_{2n}$ de las matrices reales de orden $2n$ hemisimétricas, es decir tales que $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$, y la aplicación diferenciable

$$F\colon \mathbf{X} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{X}^t\mathbf{J}\mathbf{X} \in \mathcal{V}_{2n},$$

entonces para cualquier $\mathbf{B} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

$$F \circ R_{\mathbf{B}} = R_{\mathbf{B}} \circ L_{\mathbf{B}^t} \circ F,$$

por lo tanto el rango de F_* en $\mathbf{I}$ y en $\mathbf{B}$ coinciden, por tanto es constante. Como $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = F^{-1}(\mathbf{J})$ es subgrupo se sigue de (1.3.2) que es grupo de Lie. ∎

Ejercicio 1.3.13.- Demostrar que *el grupo lineal especial*

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) : \ \det \mathbf{A} = 1\}$$

es un grupo de Lie.

Solución. Que es grupo de Lie se sigue de (1.3.3), pues la aplicación determinante

$$F\colon \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad F(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A},$$

es un morfismo de grupos, ya que $\det \mathbf{I} = 1$ y

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \quad ∎$$

Ejercicio 1.3.14.- Demostrar que *el grupo lineal especial ortogonal*

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{O}_n : \ \det \mathbf{A} = 1\}$$

es un grupo de Lie, que es $(\mathcal{O}_n)_e$.

Solución. Para ver que es $(\mathcal{O}_n)_e$ basta demostrar que es conexo pues es abierto y cerrado. Y es conexo porque todo elemento puede unirse por una curva continua a la matriz identidad. ∎

Ejercicio 1.5.13.- Demostrar que el álgebra de Lie del grupo de los cuaterniones no nulos está generada por los campos

$$\begin{aligned} D_1 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D_2 &= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D_3 &= -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4}, \\ D_4 &= -x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned}$$

para los que $[D_1, D_i] = 0$, $[D_2, D_3] = 2D_4$, $[D_3, D_4] = 2D_2$ y $[D_4, D_2] = 2D_3$.

(**Ind.-**) Tomemos la base del tangente $D_{ie} = \partial x_i$ y como $D_{iy} = L_{y*}D_{ie}$, basta calcular $D_{iy}x_j = \partial(x_j \circ L_y)/\partial x_i$. El resultado se sigue del ejercicio (1.2.6). ∎

Ejercicio 1.5.14.- Demostrar que el álgebra de Lie de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ es $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con el corchete de matrices.

Demostración. Consideremos en las matrices el sistema de coordenadas habitual $x_{ij}(\mathbf{A}) = a_{ij}$, para $\mathbf{A} = (a_{ij})$, es decir la base dual de la base de matrices $\mathbf{e}_{ij}$ que tienen todas las componentes nulas salvo la de lugar ij, que vale 1. Sean $D_{ij} \in \mathcal{D}_\mathcal{G}$ los campos correspondientes a las $(\partial x_{ij})_e \in T_e(\mathcal{G})$, por el isomorfismo $T_e(\mathcal{G}) \to \mathcal{D}_\mathcal{G}$, donde $e = \mathbf{I}$ es la matriz identidad. Ahora bien como por otra parte $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es un abierto, se tienen la composición H de isomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & T_e[\mathcal{M}_n(\mathbb{R})] = T_e(\mathcal{G}) & \to & \mathcal{D}_\mathcal{G} \\ \mathbf{A} & \to & \sum a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_e & \to & \sum a_{ij}D_{ij} = D_\mathbf{A} \end{array}$$

Calculemos D_{ij} y veamos que el isomorfismo lineal $H\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}_\mathcal{G}$ es de álgebras de Lie. Como $x_{kr}L_\mathbf{A} = \sum_s a_{ks}x_{sr}$, tendremos que

$$\begin{aligned} D_{ij}x_{kr}(\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}}(x_{kr}L_\mathbf{A})(e) = a_{ki}\delta_{jr} \quad \Rightarrow \\ D_{ij}x_{kr} &= x_{ki}\delta_{jr} \quad \Rightarrow \\ D_{ij} &= \sum_{kr} x_{ki}\delta_{jr}\frac{\partial}{\partial x_{kr}} \quad \Rightarrow \\ D_\mathbf{A} &= \sum_{ij} a_{ij}D_{ij} = \sum_{kr}(\sum_i x_{ki}a_{ir})\frac{\partial}{\partial x_{kr}} \end{aligned}$$

Veamos ahora que $[D_{\mathbf{A}}, D_{\mathbf{B}}] = D_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$

$$\begin{aligned}
[D_{\mathbf{A}}, D_{\mathbf{B}}]x_{kr} &= D_{\mathbf{A}}(D_{\mathbf{B}}x_{kr}) - D_{\mathbf{B}}(D_{\mathbf{A}}x_{kr}) \\
&= D_{\mathbf{A}}(\sum_i x_{ki}b_{ir}) - D_{\mathbf{B}}(\sum_i x_{ki}a_{ir}) \\
&= \sum_i(\sum_s x_{ks}a_{si})b_{ir} - \sum_i(\sum_s x_{ks}b_{si})a_{ir} \\
&= \sum_s x_{ks}(\sum_i(a_{si}b_{ir} - b_{si}a_{ir})) \\
&= \sum_s x_{ks}([\mathbf{A},\mathbf{B}])_{sr} = D_{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}x_{kr}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.7.- En los términos del ejercicio (1.5.13), demostrar que el espacio vectorial generado por los campos D_2, D_3, D_4, es una subálgebra del álgebra de Lie del grupo de los cuaterniones $\mathbb{H}_4$. Demostrar usando los resultados de esta lección que $\mathcal{S}_3$ es un grupo de Lie y que su álgebra de Lie es $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.

Demostración. Se sigue de las propiedades de estos campos, vistas en el ejercicio (1.5.13) que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial, considerando la base $e_1 = D_2/2$, $e_2 = D_3/2$ y $e_3 = D_4/2$. Ahora la distribución $\Delta =< D_2, D_3, D_4 >$ tiene por 1–forma incidente $\sum x_i dx_i$, por tanto las esferas son las subvariedades tangentes y por la demostración de (1.6.4), la variedad integral máxima pasando por $e = (1, 0, 0, 0)$ es subgrupo, pero $\mathcal{S}_3$ es subvariedad, por tanto subgrupo de Lie. $\blacksquare$

Ejercicio 1.7.10.- Demostrar que $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n$ es un subgrupo uniparamétrico si y sólo si $\sigma(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, con $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$. Y que el álgebra de Lie de $\mathcal{O}_3$ es $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial

$$(x, y, z)(x', y', z') = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

Demostración. Ind. Aplicar (1.7.9) y (1.7.8).

Ejercicio 1.5.7.- Demostrar que $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ (ver ejercicio (1.3.12)), es un subgrupo uniparamétrico sii $\sigma(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$, con $\mathbf{A}^t\mathbf{J}+\mathbf{J}\mathbf{A} = 0$. Demostrar que el álgebra de Lie de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ del tipo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{A}^t \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ simétricas; con el corchete de matrices.

Demostración. Para todo $r \in \mathbb{R}$,

$$\sigma(r) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{r\mathbf{A}^t}\mathbf{J} = \mathbf{J}\,\mathrm{e}^{-r\mathbf{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^t\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A} = 0,$$

pues $\Rightarrow$ se sigue derivando en $r = 0$ y $\Leftarrow$ de la expresión en serie de la exponencial, pues se sigue por inducción que para todo n,

$$(\mathbf{A}^t)^n \mathbf{J} = \mathbf{J}(-\mathbf{A})^n.$$

Ahora es fácil ver que las matrices $\mathbf{A}$ que satisfacen

$$\mathbf{A}^t \mathbf{J} = -\mathbf{J}\mathbf{A},$$

son las del ununciado. ∎

Ejercicio 1.14.1.- Demostrar que si existe tal variedad es única salvo difeomorfismos, que π es sobre y constante en las clases de equivalencia.

Ind. Si no fuese sobre existiría un $p \in \mathcal{Y}$, tal que $\operatorname{Im}\pi \subset U = \mathcal{Y} - \{p\}$ y como los puntos son cerrados en las variedades, U es abierto y $F = \pi\colon \mathcal{X} \to U$ diferenciable y constante en las clases de equivalencia, por tanto existe $G\colon \mathcal{Y} \to U$ diferenciable, tal que $F = G \circ \pi$ y para $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ tendríamos dos aplicaciones diferenciables distintas $id, G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{T}$, que corresponden a la misma $F = \pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{T}$. ∎

Bibliografía y comentarios

La realización de estos apuntes ha sido posible gracias a las constantes enseñanzas, explicaciones y ayuda de mis compañeros JUAN ANTONIO NAVARRO y JUAN SANCHO DE SALAS que me introdujeron en el maravilloso mundo de los grupos de Lie (amén de otras teorías). De ellos recibí todos los resultados fundamentales y los ejemplos más importantes de estas notas, fundamentalmente los relativos al espacio cociente. A ellos mi más profundo agradecimiento.

Muy en segundo lugar hemos utilizado los siguientes libros en la confección de estos apuntes:

BOOTHBY, W,M.: "*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*". Ac Press, 1975.

BOURBAKI, N.: "*Groupes et Algèbres de Lie*". Masson, Paris 1982.

BRICKELL, F. AND CLARK,R.S.: "*Differentiable manifolds*". Van Nostrand Reinhold, 1970.

BRYANT, R.L.: "*An introduction to Lie groups and symplectic geometry*", pág. 1–180 del libro "*Geometry and Quantum Field Theory*", Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck Editors, IAS Park City Mahematical Series, Volume 1, 1995.

HELGASON, S.: "*Differential geometry, Lie groups and Symmetric Spaces*". Ac.Press., 1978.

JACOBSON, N.: "*Lie algebras*". New York. John Wiley, 1962.

NAVARRO GONZÁLEZ, J.A.: "*Álgebra conmutativa básica*". Manuales Unex, NÝ19, 1996.

OLVER, P.J.: "*Equivalence, Invariants and Symmetry*". Cambridge Univ. Press, 1995.

ONISHCHIK, A.L. AND VINBERG, E.B.: "*Lie Groups and Lie Algebras I (Foundations of Lie Theory)*". Encyclopaedia of Math. Sciences, Vol.20. Springer–Verlag, 1993.

SPIVAK, M.: "*A comprehensive Introduction to Differential Geometry*". 5 Vol. Publish or Perish, 1975.

VARADARAJAN, V.S.: "*Lie groups, Lie algebras, and Their representations*". Springer–Verlag, 1984.

WARNER, FRANK W.: "*Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*". Scott, Foresman and Company, 1971.

Los grupos de Lie fueron intensamente estudiados por el noruego SOPHUS LIE (*1842–1899*). Su interés por los grupos nace de las conversaciones que mantuvo en Paris con CAMILLE JORDAN (*1832–1922*) y OSCAR KLEIN (*1849–1925*). JORDAN estaba convencido de que la teoría de grupos estaba destinada a jugar un papel fundamental en el desarrollo futuro de las matemáticas y compartió esta convicción con Lie y Klein.

Jordan estableció una clara distinción entre los grupos continuos (como el de los giros del plano) y los discretos (como el de las simetrías de un cuadrado), grupos estos que algunos autores llaman cristalográficos, pues los grupos de simetría de los cristales son de este tipo. Por su parte los grupos continuos son conocidos como grupos de Lie —aunque Lie los consideraba como variedades diferenciables y el primero en considerarlos como variedades topológicas fue L.E.J.Brouwer, en un trabajo de 1909—. Remitimos al lector al trabajo de

Cartan, E.: "*La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs*". Mem. Sc. Math. 42. 1930.: "*La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs*": Mem. Sc. Math. 42. 1930.

donde se caracterizan los subgrupos de Lie de un grupo de Lie como los subgrupos cerrados y en general al lector interesado en los grupos topológicos al libro

Pontriaguin, L.S.: "*Grupos continuos*": Ed. Mir, Moscú, 1978.

En la p.326 de este libro se encuentra el resultado fundamental de que un grupo tiene una única estructura diferenciable que lo haga de Lie, del que se sigue que con las estructuras exóticas, $\mathbb{R}^4$ no tiene estructura de grupo de Lie.

El principal estimulo de Lie en la creación de esta teoría fue su deseo de desarrollar un método que resolviera ecuaciones diferenciales por cuadraturas —es decir en términos de funciones elementales e integrales—, análogo a la *Teoría de Galois*, que resolvía ecuaciones algebraicas por radicales. Sin embargo aunque Lie asoció a cada ecuación diferencial su grupo uniparamétrico, su método —que le permitía resolver una ecuación diferencial por cuadraturas—, partía de un grupo, para el que encontraba todas las ecuaciones diferenciables que "se resolvían con el grupo", al contrario de lo que se hace en *Teoría de Galois* donde se parte de la ecuación algebraica y a ella se le asocia un grupo.

No obstante hay una *Teoría de Galois*, que se conoce como *Teoría de Picard–Vessiot*, para las ecuaciones diferenciales lineales de orden n complejas con coeficientes funciones meromorfas. A estas ecuaciones se las asocia un grupo y se demuestra que la ecuación diferencial tiene solución que se puede obtener por cuadraturas si y sólo si el grupo es resoluble. Remitimos al lector interesado a la p.181 del libro

SHAFAREVICH, I.R.: "*Algebra I*". Springer–Verlag, 1986.

en el que también se pueden encontrar resultados relativos a los grupos de los cristales.

Lie publicó su teoría fundamentalmente en los dos artículos ("*Teoría de grupos de transformaciones*.e"*Investigaciones generales sobre ecuaciones diferenciales que determinan un grupo finito continuo*", ver ROSENFELD, p.348)

LIE, S.: "*Theorie der transformationsgruppen*". Leipzig, 1886.

LIE, S.: "*Allgemeine untersuchungen uber differentialgleichungen die eine continuierliche endliche gruppe gestalten*". Leipzig, 1885.

Uno de los principales resultados en los estudios de LIE consiste en asignar a cada grupo de Lie (por tanto de naturaleza continuo—diferenciable), un objeto de naturaleza algebraica más sencillo: su álgebra de Lie. Lie trabajó también en la construcción recíproca que permite asignar a cada álgebra de Lie un grupo de Lie y estudió con detalle la relación entre ambos conceptos, lo que le permitió trasladar a la teoría de álgebras de Lie todas las nociones específicas de la teoría de grupos.

Índice alfabético