Álgebra tensorial y diferencial

Giuseppe i Piero

20-2-2005

Índice general

1. Álgebra Lineal Tensorial **5**
- 1.1. Definiciones. Construcciones . . . 5
- 1.2. Espacios vectoriales. Espacio vectorial dual . . . 7
- 1.3. Producto tensorial . . . 12
- 1.4. Álgebra exterior n-ésima de un espacio vectorial . . . 15
- 1.5. Métricas . . . 20
- 1.6. Producto exterior y contracción interior . . . 24
- 1.7. Álgebra tensorial simétrica . . . 26
- 1.8. Módulo de diferenciales. Derivaciones . . . 28
- 1.9. Diferencial, contracción por un campo, derivada de Lie . . . 31
- 1.10. Cálculo valorado . . . 32
- 1.11. Módules de jets y operadores diferenciales . . . 35

2. Cálculo Tensorial en Geometría Diferencial **39**
- 2.1. Desarrollo de Taylor . . . 39
- 2.2. Espacio tangente en un punto . . . 41
- 2.3. Derivaciones. Módulo de diferenciales . . . 42
- 2.4. Variedades diferenciables. Haces . . . 44
- 2.5. Anillo de funciones diferenciables . . . 49
- 2.6. Localización en el álgebra tensorial diferencial . . . 50
- 2.7. Integración. Fórmula de Stokes . . . 52
- 2.8. Gradiente, divergencia y rotacional . . . 56
- 2.9. Apéndice 1. Normas . . . 57
- 2.10. Apéndice 2. Teorema de existencia y unicidad en sistemas de ecuaciones diferenciales . . . 58
- 2.11. Apéndice 3. Inmersión de variedades compactas . . . 63

3. Aplicaciones de la teoría **65**
- 3.1. Sistemas de ecuaciones lineales. Regla de Cramer . . . 65
- 3.2. Máximos y mínimos bajo condiciones . . . 66
- 3.3. Longitudes, áreas y volúmenes . . . 67
- 3.4. Ejemplos en Física . . . 71

Capítulo 1

Álgebra Lineal Tensorial

Estas notas son provisionales. El capítulo 2 todavía no es lógicamente consistente (y puede contener erratas).

El cálculo diferencial tensorial es una de las teorías más hermosas que aparecen en toda la Matemática. En ella conviven en perfecta armonía el Álgebra, el Análisis, la Geometría Diferencial y la Física.

El ochenta por ciento de lo que aquí se dice debiera constituir los conocimientos básicos (¡junto con otros!) de todo matemático. Alguna vez he caído en la tentación de detenerme en ciertas cuestiones algebraicas que me preocupaban y que al lector quizás no le interesen tanto. El que escribe es de formación algebraica y aunque pueda parecer lo contrario ha renunciado muchas veces a una profundización mayor (y compresión más clara) de los conceptos desarrollados. Por ejemplo, no he escrito las propiedades universales del álgebra exterior y simétrica de un espacio vectorial y no sé si perdonármelo. En los nuevos planes de estudios que se están perfilando no aparecen las palabras: producto tensorial, tensores, formas diferenciales, etc. Este hecho por sí solo califica a toda la comunidad matemática española.

1.1. Definiciones. Construcciones

1. Comentario: *El punto de partida de las Matemáticas son los números naturales, a partir de ellos vamos definiendo y construyendo toda la Matemática, "Dios nos dio los números naturales, el resto de las Matemáticas la hicimos los hombres" (creo que dijo Kronecker). La piedra clave de las definiciones y construcciones es la palabra "sea", y a los matemáticos nos parece bien (¡como en el Génesis!). Demos algunos ejemplos.*

1. Los matemáticos sabemos sustituir con todo rigor la palabra equivalente por la palabra igual, sabemos identificar una cosa con sus equivalentes. En efecto, consideremos una relación de equivalencia en un conjunto X. Un punto de X y todos sus equivalentes, los podemos identificar, hacerlos todos una misma cosa, diciendo simplemente: "Sea el subconjunto de X formado por un punto x y todos sus equivalentes. Denotemos este subconjunto por $\bar{x}$. Del mismo modo dado un punto $y \in X$ y todos sus equivalentes, sea el subconjunto de X formado por y y todos sus equivalentes y denotemos este subconjunto $\bar{y}$. Ahora tendremos que x es equivalente a y si y sólo si $\bar{x}$ es igual a $\bar{y}$. Llamemos $\bar{X}$ el conjunto que se obtiene al identificar en X cada elemento con sus equivalentes, es decir,

$$\bar{X} := \{\bar{x},\ x \in X,\ \textit{donde } \bar{x} = \bar{x}' \textit{ si y sólo si } x \textit{ es equivalente a } x'\}$$

Misión cumplida".

1.1 Si establecemos en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia $n \equiv m$ si y sólo si $n-m$ es múltiplo de 5, tendremos que $\bar{n} = \bar{m}$ si y sólo $n-m$ es múltiplo de 5. Si identificamos en $\mathbb{Z}$ cada entero con sus equivalentes, tenemos sólo cinco elementos distintos, es decir, $\bar{\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1} \ldots, \bar{4}\}$.

1.2 Sea A un anillo. Dado un ideal $I \subset A$, establezcamos la siguiente relación de equivalencia: $a \in A$ es equivalente a $a' \in A$ si y sólo si $a - a' \in I$, es decir, si y sólo si existe algún $i \in I$ de modo que $a = a' + i$. En este caso, $\bar{A} := \{\bar{a},\ a \in A,$ de modo que $\bar{a} = \bar{a}'$ si y sólo si $a - a' \in I\}$ se denota A/I. Resulta que A/I tiene una estructura natural de anillo, definiendo la suma y el producto como sigue

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$$

el elemento neutro para la suma es $\bar{0}$ y para el producto $\bar{1}$.

2. Dado el semianillo de números naturales $\mathbb{N}$, definamos o construyamos el anillo de los número enteros $\mathbb{Z}$. Para ello, en Matemáticas, no podremos hablar de grados bajo cero ni de deudas como se hace con los niños pequeños. Antes de empezar a construir $\mathbb{Z}$, cualquiera que sea su construcción o definición, sabríamos decir si $n - m$ es igual a $n' - m'$ (para $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$), sabríamos sumar, multiplicar etc. Basta con saber esto, es decir, en saber cómo se comporta $\mathbb{Z}$, para que un matemático sepa ya definirlos, gracias a la palabra sea: "Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de parejas de números naturales (n, m), que preferimos denotar $n-m$, donde diremos que $n-m$ es igual a $n'-m'$ si $n+m' = m+n'$ (observemos que con esta definición $n - m = n - m$, que si $n - m = n' - m'$ entonces $n' - m' = n - m$, y que si $n-m = n'-m'$ y $n'-m' = n''-m''$ entonces $n-m = n''-m''$). Definido queda $\mathbb{Z}$, ¿cómo definimos la suma? $(n - m) + (n' - m') := (n + n') - (m + m')$. Defina el lector el producto". Más ejemplos.

3. Hemos definido ya el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$, definamos el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$. En Matemáticas no podemos hablar de pasteles y porciones de pasteles, como a los niños. Pero antes de empezar a construir $\mathbb{Q}$, sabríamos decir cuándo $\frac{n}{m}$ es igual a $\frac{n'}{m'}$ $(n, m, n', m' \in \mathbb{Z})$ y sabemos sumar número racionales y multiplicarlos. No necesitamos nada más, salvo la palabra "sea": Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de parejas de números enteros (n, m), que preferimos denotar $\frac{n}{m}$, donde diremos que $\frac{n}{m}$ es igual a $\frac{n'}{m'}$ si existen $r, r' \neq 0$ tales que $\frac{rn}{rm}$ y $\frac{r'n'}{r'm'}$ tienen el mismo numerador y denominador (observemos que $\frac{n}{m} = \frac{n}{m}$, que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ entonces $\frac{n'}{m'} = \frac{n}{m}$, y que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ y $\frac{n'}{m'} = \frac{n''}{m''}$ entonces $\frac{n}{m} = \frac{n''}{m''}$). Definido queda $\mathbb{Q}$ ¿cómo definimos la suma? $\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} := \frac{m'n+mn'}{mm'}$. Defina el lector el producto. Más ejemplos.

3.1 Sea A un anillo y $S \subset A$, un subconjunto que cumpla $1 \in S$ y si $s, s' \in S$ entonces $s \cdot s' \in S$. Queremos definir el anillo (que denotaremos por A_S) formado por las fracciones a/s, $a \in A$, $s \in S$. Obviamente, queremos que se cumpla que $\frac{a}{s} = \frac{ta}{ts}$, para todo $t \in S$. No hay mayor problema, digamos que son equivalentes y a los equivalentes hagámoslos iguales:

$$\begin{aligned} A_S := \{ \frac{a}{s},\ \textit{con } a \in A \textit{ y } s \in S \mid \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \textit{ si existen } t, t' \in S \textit{ tales que las fracciones} \\ \frac{ta}{ts} \textit{ y } \frac{t'a'}{t's'} \textit{ tienen el mismo numerador y denominador } \} \end{aligned}$$

¿Cómo definimos la suma? $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}$ ¿Y el producto? $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$.

4. Hemos definido $\mathbb{Q}$, definamos ahora $\mathbb{R}$. Aquí a los niños se les habla de los números reales de un modo muy aproximado a lo que hacemos en Matemáticas (la construcción de número real en Matemáticas es la objetivación formal de la experiencia física de aproximación (interminable)). Se les dice algo así como: Vamos a ver cuánto mide media circunferencia. Mido y veo que es casi 3, pero si preciso más es $3,1$, si preciso más es $3,14$ y así sucesivamente nos va saliendo que mide

$3,141592...$ *con infinitas cifras infinitesimales. Así, nos decían que los números reales son los números con infinitas cifras decimales (después nos decían que* $0,999999999....$ *era el mismo número que* 1 *¡Identificábamos dos números equivalentes!). La construcción que damos en Matemáticas de los números reales es esencialmente la misma que la que damos para completar cualquier espacio métrico (como la construcción de* $\mathbb{Q}$ *a partir de* $\mathbb{Z}$*, es la misma esencialmente que la que damos para construir* A_S *a partir de* A *y* S*). Tenemos claro cuando una sucesión de números racionales se aproximan a algo* [1]*, es decir, definimos primero qué es una sucesión de Cauchy. Tenemos claro también, cuándo dos aproximaciones son iguales o equivalentes (cuando la diferencia de las dos sucesiones de Cauchy se aproximen a* 0*). Así pues, dar un número real equivale a dar las aproximaciones a él, siempre que identifiquemos estas aproximaciones. Nos basta con esto para definir* $\mathbb{R}$*, salvo la palabra sea: "Sea* $\mathbb{R}$ *el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy, donde diremos que dos sucesiones de Cauchy son iguales si son equivalentes". Definido queda* $\mathbb{R}$*.*

1.2. Espacios vectoriales. Espacio vectorial dual

"Un espacio vectorial es un conjunto en el que podemos sumar sus elementos y multiplicar cada elemento por un escalar, y estas operaciones cumplen propiedades muy naturales".

Sea k un cuerpo (ejemplos: $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

1. Definición: Un k-*espacio vectorial* es un conjunto, E, dotado de dos operaciones, una llamada suma $E \times E \to E$ y se escribe $(e, e') \mapsto e + e'$, y otra llamada producto por escalares $k \times E \to E$ y se escribe $(\lambda, e) \mapsto \lambda \cdot e$, verificando:

1. $(E, +)$ es un grupo abeliano, es decir,
   a) $e + (e' + e'') = (e + e') + e''$, para todo $e, e', e'' \in E$.
   b) Existe un elemento que denotamos por 0 tal que $0 + e = e + 0 = e$, para todo $e \in E$.
   c) Para cada $e \in E$ existe otro elemento que denotamos $-e$ tal que $e + (-e) = 0$.
   d) $e + e' = e' + e$, para todo $e, e' \in E$.
2. $\lambda \cdot (e + v) = \lambda \cdot e + \lambda \cdot v$, $\forall \lambda \in k$, $e, v \in E$
3. $(\lambda + \mu) \cdot e = \lambda \cdot e + \mu \cdot e$ $\forall \lambda, \mu \in k$, $e \in E$
4. $(\lambda \cdot \mu) \cdot e = \lambda \cdot (\mu \cdot e)$, $\forall \lambda, \mu \in k$, $e \in E$
5. $1 \cdot e = e$, $\forall e \in E$.

Los elementos de un espacio vectorial se denominan vectores y los de k escalares. Si k es un anillo y no un cuerpo (ejemplo: $k = \mathbb{Z}$) se dice que E es un k-módulo.

k^n, con la suma $(\lambda_i) + (\mu_i) := (\lambda_i + \mu_i)$ y el producto por escalares $\lambda \cdot (\lambda_i) := (\lambda \cdot \lambda_i)$ es un k-espacio vectorial. $\mathbb{R}^3$ que es el espacio en el que pensamos que vivimos es un ejemplo de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Sea X un conjunto y $C(X) = \operatorname{Aplic}(X, k)$. $C(X)$ con la suma estándar de funciones $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ y producto estándar por escalares $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ es un k-espacio vectorial.

Observemos que $0 \cdot e = (0 + 0) \cdot e = 0 \cdot e + 0 \cdot e$ y por tanto $0 \cdot e = 0$. Observemos que si $e + e' = 0$ sumando $-e$, obtenemos que $e' = -e$. Como $0 = (1 - 1) \cdot e = e + (-1) \cdot e$, tenemos que $(-1) \cdot e = -e$.

[1] Aunque ese algo no sea un número racional. En realidad, lo real, real de verdad son las aproximaciones, que éstas se aproximen a algo realmente existente es otra cuestión. Ese algo es una abstracción, sin embargo suele pensarse que este algo es muy real y la aproximación una abstracción matemática, pero esto es otro tema...

Las aplicaciones que conservan la estructura de espacio vectorial ("los morfismos de la categoría de k-espacios vectoriales") son las aplicaciones lineales. Con precisión: Sean E, E' dos k-espacios vectoriales,

2. Definición: Una aplicación $T : E \to E'$ es un *morfismo de k-espacios vectoriales* (o *aplicación k-lineal*) si

$$T(e+v) = T(e) + T(v) \quad \text{y} \quad T(\lambda \cdot e) = \lambda \cdot T(e)$$

para cualesquiera $e, v \in E$, $\lambda \in k$.

Es claro que la composición $T_1 \circ T_2 \colon E \to G$ de dos aplicaciones lineales $T_2 \colon E \to F$, $T_1 \colon F \to G$, es una aplicación lineal.

3. Definición: Una aplicación lineal $T : E \to E'$ es un *isomorfismo* si existe otra aplicación lineal $S : E' \to E$ tal que $T \circ S = Id_{E'}$, $S \circ T = Id_E$.

T es un isomorfismo de espacios vectoriales si y sólo si es una aplicación biyectiva (lineal).

4. Definición: Decimos que $F \subset E$ es un *subespacio vectorial* de E si $f + f' \in F$ y $\lambda \cdot f \in F$, para todo $f, f' \in F$ y $\lambda \in k$.

F con la suma y producto por escalares es un espacio vectorial y la inclusión $F \subset E$ es una aplicación k-lineal. Si F_i son subespacios vectoriales de E entonces $\cap_i F_i$ es un subespacio vectorial de E.

Sea E un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vectorial. Consideremos la relación de equivalencia que dice que dos vectores $e_1, e_2 \in E$ son equivalentes si y sólo si difieren en un vector de F (los vectores de F son equivalentes a 0). Si identificamos cada vector de E con sus equivalentes, obtenemos el conjunto que denotamos E/F, que es el siguiente

$$E/F := \{\bar{e} \mid e \in E, \text{ de modo que } \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \iff e_1 - e_2 \in F\}$$

Observemos que $\bar{e} = 0$ si y sólo si $e \in F$ y que $\bar{e} = \bar{v}$ si y sólo si existe un vector $e' \in F$ tal que $v = e + e'$.

E/F es de modo natural un espacio vectorial: $\bar{e} + \bar{v} := \overline{e+v}$ y $\lambda \cdot \bar{e} := \overline{\lambda \cdot e}$. El morfismo natural $\pi \colon E \to E/F$, $\pi(e) := \bar{e}$ es una aplicación lineal epiyectiva.

Dada una aplicación lineal $T \colon E \to E'$, se denomina núcleo de la aplicación lineal T, que denotamos por $\operatorname{Ker} T$, a

$$\operatorname{Ker} T := T^{-1}(0) := \{e \in E \mid T(e) = 0\}$$

Es fácil comprobar que $\operatorname{Ker} T$ es un subespacio vectorial de E. $T(e) = T(v)$ si y sólo si $T(e) - T(v) = T(e - v) = 0$, es decir, $e - v \in \operatorname{Ker} T$. Es decir, $T(e) = T(v)$ si y sólo si existe un $e' \in \operatorname{Ker} T$ tal que $v = e + e'$. Por tanto, T es inyectiva si y sólo si $\operatorname{Ker} T = 0$.

La aplicación $\bar{T} \colon E/\operatorname{Ker} T \to E'$, $\bar{T}(\bar{e}) := T(e)$, está bien definida, pues si $\bar{e} = \bar{v}$ existe un $e' \in \operatorname{Ker} T$ tal que $v = e + e'$ y $T(v) = T(e) + T(e') = T(e)$ (luego $\bar{T}(\bar{v}) = \bar{T}(\bar{e})$, como ha ser si hablamos con sentido). Además, la aplicación $\bar{T} \colon E/\operatorname{Ker} T \to E'$ es inyectiva: $0 = \bar{T}(\bar{e}) = T(e)$ si y sólo si $e \in \operatorname{Ker} T$, es decir, si y sólo si $\bar{e} = 0$.

Definimos la imagen de T, que denotamos por $\operatorname{Im} T$ como

$$\operatorname{Im} T := T(E) := \{T(e) \in E', \ e \in E\}$$

Es fácil comprobar que $\operatorname{Im} T$ es un subespacio de E'.

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & E' & e \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(e) \\ E/\operatorname{Ker} T \arrow[r, "\bar{T}", "\sim"'] & \operatorname{Im} T \arrow[u, hook, "i"'] & \bar{e} \arrow[r, mapsto] & \bar{T}(\bar{e}) = T(e) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Donde la flecha horizontal inferior es isomorfismo porque es epiyectiva e inyectiva.

Si $C = \{c_i\}_{i\in I}$, con $c_i \in E$. Llamamos subespacio vectorial de E generado por C al mínimo subespacio vectorial de E que contiene a C, y lo denotamos $\langle C\rangle$. Es fácil probar que

$$\langle C\rangle = \{e \in E \mid e = \lambda_1 \cdot c_1 + \cdots + \lambda_n c_n,\ c_i \in C,\, \lambda_i \in k,\, n \in \mathbb{N}\}$$

Si $C = \{e_1, \dots, e_r\}$ entonces denotamos $\langle e_1, \dots, e_r\rangle = \langle C\rangle$ y se cumple que $\langle e_1, \dots, e_r\rangle = \{\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_r e_r,\ \lambda_i \in k\}$.

Se dice que los vectores de C son un sistema generador de E si $\langle C\rangle = E$. Decimos que un espacio vectorial E es finito generado si existen $e_1, \dots, e_r \in E$ de modo que $\langle e_1, \dots, e_r\rangle = E$. Se dice que los vectores de C son linealmente independientes si $\lambda_1 \cdot c_1 + \cdots + \lambda_n \cdot c_n \neq 0$ si algún $\lambda_i \neq 0$, para todo n y $\{c_1, \dots, c_n\} \subset C$. Se dice que los vectores de C forman una base de E si son un sistema generador de E y son linealmente independientes.

Los vectores $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0. \dots, 1)$ forman una base de k^n, denominada "base estándar" de k^n.

5. Teorema de la base: *Todo espacio vectorial $E \neq 0$ contiene alguna base. Todas las bases de E tienen el mismo número de vectores, tal número se dice que es la dimensión de E y se denota* $\dim_k E$.

Demostración. Voy a suponer que E es finito generado, para no embarullar al lector con la teoría de cardinales, lema de Zorn, etc.

Supongamos, pues, que $E = \langle e_1, \dots, e_n\rangle$. Sea $I \subset \{1, \dots, n\}$ un subconjunto máximo con la condición de que los vectores $\{e_i\}_{i\in I}$ sean linealmente independientes. Obviamente $I \neq \emptyset$, pues si $I = \emptyset$ entonces $e_i = 0$ para todo i y $E = 0$. Veamos que los vectores $\{e_i\}_{i\in I}$ forman una base de E. Tenemos que probar que $\langle e_i\rangle_{i\in I} = E$. Dado e_j, $1 \leq j \leq n$, si $e_j \notin \langle e_i\rangle_{i\in I}$ entonces $\{e_j, e_i\}_{i\in I}$ serían linealmente independientes, pues si $\lambda_j \cdot e_j + \sum_i \lambda_i e_i = 0$ entonces: 1. Si $\lambda_j \neq 0$ tendremos que $e_j = -\sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot e_i$ y $e_j \in \langle e_i\rangle_{i\in I}$, contradicción. 2. Si $\lambda_j = 0$, entonces $\sum_i \lambda_i e_i = 0$ y entonces $\lambda_i = 0$, para todo $i \in I$, pues los vectores $\{e_i\}_{i\in I}$ son linealmente independientes. En conclusión, $\lambda_j = \lambda_i = 0$ para todo i, luego $\{e_j, e_i\}_{i\in I}$ son linealmente independientes. Ahora bien, por la maximalidad de I, esto es contradictorio. En conclusión, $e_j \in \langle e_i\rangle_{i\in I}$, para todo $1 \leq j \leq n$. Por tanto, $E = \langle e_1, \dots, e_n\rangle \subseteq \langle e_i\rangle_{i\in I}$ y $E = \langle e_i\rangle_{i\in I}$.

Veamos que todas las bases tienen el mismo número de vectores. Sea n el número de vectores de una base (hay muchas) con el mínimo número de vectores. Voy a proceder por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces $E = \langle e\rangle$ para cierto vector no nulo e. Dados dos vectores no nulos cualesquiera e'_1, e'_2 tendremos que $e'_1 = \lambda_1 \cdot e$ y $e'_2 = \lambda_2 \cdot e$, con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, entonces $\frac{1}{\lambda_1} \cdot e_1 + \frac{-1}{\lambda_2} \cdot e_2 = e - e = 0$, luego e'_1 y e'_2 no son linealmente independientes. En conclusión, las bases de E han de estar formadas todas por un único vector.

Supongamos que el teorema es cierto hasta $n - 1 \leq 1$, veamos que es cierto para n. Sea ahora $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ dos bases de E. Tenemos que $e_1 = \sum_i \lambda_i e'_i$, reordenando la base $\{e'_1, \dots, e'_m\}$, podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Pruebe el lector que $\{\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ y $\{\bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_m\}$ son bases de $E/\langle e_1\rangle$ (le costará un poco más ver que la segunda lo es). Obviamente, el número de vectores de una base de $E/\langle e_1\rangle$ con el número mínimo de vectores es menor que n. Por inducción sobre n, tendremos que $n-1=m-1$, luego $n=m$.

□

Si k es un anillo (y no un cuerpo) no es cierto en general que los k-módulos tengan bases. Por ejemplo el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ no tiene bases, pues para todo $\bar{n}\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $5\cdot\bar{n}=0$. Los k-módulos que tienen bases se denominan k-módulos libres. k^n es un k-módulo libre y una base de él es la base estándar.

Si $\{e_i\}_{i\in I}$ son linealmente independientes y $\{\bar{e}_j\}_{j\in J}$ es una base de $E/\langle e_i\rangle_{i\in I}$ entonces $\{e_i,e_j\}_{i\in I,j\in J}$ es una base de E: Son linealmente independientes, pues si $\sum_i\lambda_ie_i+\sum_j\lambda_je_j=0$ entonces $0=\overline{\sum_i\lambda_ie_i+\sum_j\lambda_je_j}=\sum_j\lambda_j\bar{e}_j$, luego $\lambda_j=0$, para todo j, luego $\sum_i\lambda_ie_i=0$ y $\lambda_i=0$ para todo i. Generan, pues dado $e\in E$, tendremos que $\bar{e}=\sum_j\lambda_j\bar{e}_j$, luego $e=\sum_j\lambda_je_j+e'$, con $e'\in\langle e_i\rangle_{i\in I}$, es decir, $e'=\sum_i\lambda_ie_i$ y $e=\sum_j\lambda_je_j+\sum_i\lambda_ie_i$.

Como consecuencias tenemos que si F es un subespacio vectorial de E entonces $\dim E=\dim F+\dim E/F$, y todo sistema de vectores linealmente independiente se puede ampliar a un sistema de vectores que formen base.

Dado un conjunto de espacios vectoriales $\{E_i\}_{i\in I}$, el conjunto $\prod_{i\in I}E_i$ es de modo natural un espacio vectorial:

$$(e_i)_{i\in I}+(e_i')_{i\in I}:=(e_i+e_i')_{i\in I}\quad \lambda\cdot(e_i)_{i\in I}:=(\lambda\cdot e_i)_{i\in I}$$

Diremos que $\prod_i E_i$ es el producto directo de los espacios vectoriales E_i.

Definimos la suma directa de los espacios vectoriales E_i, que denotamos $\oplus_{i\in I}E_i$, como

$$\oplus_{i\in I}E_i=\{(e_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}E_i\colon\ \text{todos los } e_i \text{ salvo un número finito son nulos}\}$$

$\{e_i\}_{i\in I}$ es un sistema generador de E si y sólo si el morfismo

$$\oplus_{i\in I}k\to E,\ (\lambda_i)_{i\in I}\mapsto\sum_i\lambda_i\cdot e_i$$

es epiyectivo; son linealmente independientes si y sólo si es inyectivo, y son una base si y sólo si es un isomorfismo. Por tanto, todo espacio vectorial es isomorfo a un $\oplus_{i\in I}k$, pues siempre existen bases.

Observemos que si $\#I<\infty$ entonces $\oplus_{i\in I}E_i=\prod_{i\in I}E_i$.

Si F,F' son dos subespacios vectoriales de E se denota $F+F'$ como el mínimo subespacio vectorial que contiene a F y F'. Es fácil probar que

$$F+F'=\{f+f'\in E,\ f\in F,\ f'\in F'\}$$

El morfismo natural $F\oplus F'\to F+F'$, $(f,f')\mapsto f+f'$ es epiyectivo y es inyectivo si y sólo si $F\cap F'=0$. Se dice que E es la suma directa de dos subespacios F,F' si y sólo si $F\cap F'=0$ y $F+F'=E$, es decir, el morfismo $F\oplus F'\to E$, $(f,f')\mapsto f+f'$ es un isomorfismo, es decir, todo vector $e\in E$ se escribe de modo único como suma de un vector $f\in F$ y otro vector $f'\in F'$.

Sea $\mathrm{Hom}_k(E,E')$ el conjunto de aplicaciones lineales de E en E', que es un espacio vectorial de modo natural, con la suma y producto por escalares siguientes:

$$(T+T')(e):=T(e)+T'(e)\quad\text{y}\quad(\lambda\cdot T)(e):=\lambda\cdot T(e)$$

Se cumple que el morfismo

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_k(E,E_i')\to\mathrm{Hom}_k(E,\prod_i E_i'),\ (T_i)_{i\in I}\mapsto T,\ T(e):=(T_i(e))_{i\in I}$$

es un isomorfismo de morfismo inverso $T \mapsto (\pi_i \circ T)_{i\in I}$, con $\pi_i \colon \prod_j E'_j \to E'_i$, $\pi_i((e'_j)_{j\in I}) := e'_i$.

Se cumple que el morfismo

$$\prod_i \operatorname{Hom}_k(E_i, E') \to \operatorname{Hom}_k(\oplus_{i\in I} E_i, E'),\ (T_i)_{i\in I} \mapsto T,\ T((e_i)_{i\in I}) := \sum_i T_i(e_i)$$

es isomorfismo de morfismo inverso $T \mapsto (T_i)_{i\in I}$, $T_i(e_i) := T((0, \dots, \overset{i}{e_i}, \dots, 0))$.

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de E. Toda aplicación lineal $T\colon E \to E'$, está determinada por los valores $T(e_i)$, $i \in I$, pues dado $e \in E$ entonces $e = \sum_i \lambda_i e_i$ y $T(e) = \sum_i \lambda_i T(e_i)$. Recíprocamente, dados $v_i \in E'$, $i \in I$, la aplicación lineal $S\colon E \to E'$ definida por $S(e) := \sum_i \lambda_i v_i$, para $e = \sum_i \lambda_i e_i$, cumple que $S(e_i) = v_i$. Formalmente,

$$\operatorname{Hom}_k(E, E') = \operatorname{Hom}_k(\oplus_{i\in I} k, E') = \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_k(k, E') = \prod_{i\in I} E', \quad T \mapsto (T(e_i))_{i\in I}$$

Si $\{e'_j\}$ es una base de E', entonces $T(e_i) = \sum_j \lambda_{ji} e'_j$, para ciertos $\lambda_{ij} \in k$ (fijado i, todos los λ_{ji} son nulos salvo un número finito) y existe una correspondencia biunívoca entre T y las uplas de escalares $(\lambda_{ji})_{(i,j)\in I\times J}$, "caja" de números que es denominada matriz asociada a T en las bases $\{e_i\}$ y $\{e'_j\}$ de E y E' respectivamente.

"Así pues, T, que es una transformación de un espacio en otro que supera fácilmente nuestra capacidad de ideación geométrica, está determinada por unos cuantos escalares $\lambda_{ij} \in k$, que pueden ser mecánicamente tratados".

Fijada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ (por sencillez digamos que $n < \infty$) de un espacio vectorial E, dado un vector $e = \sum_i \lambda_i e_i$ suele escribirse de modo abreviado $e = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (es decir, tenemos un isomorfismo $E = k^n$). Igualmente, dada una base $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E', escribiremos $T(e) = e' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$, ahora bien, $T(e) = T(\sum_i \lambda_i e_i) = \sum_i \lambda_i T(e_i) = \sum_i \lambda_i (\sum_j \lambda_{ji} e'_j) = \sum_j (\sum_i \lambda_{ji}\lambda_i) e'_j$, luego $\lambda'_j = \sum_i \lambda_{ji}\lambda_i$, para todo j. Ecuaciones que escribimos de modo abreviado

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

o de modo mucho más abreviado $e' = T(e)$.

Si $T\colon E \to E'$ es una aplicación lineal de matriz asociada (λ_{ji}), entonces la matriz asociada a $\lambda \cdot T$ es $(\lambda \cdot \lambda_{ji})$. Escribiremos

$$\lambda \cdot (\lambda_{ji}) = (\lambda \cdot \lambda_{ji})$$

y diremos que es el producto de una matriz por un escalar.

Si $T, T'\colon E \to E'$ son dos aplicaciones lineales de matrices asociadas (λ_{ji}) y (λ'_{ji}) entonces la matriz asociada a $T + T'$ es $(\lambda_{ji} + \lambda'_{ji})$. Escribiremos

$$(\lambda_{ji}) + (\lambda'_{ji}) = (\lambda_{ji} + \lambda'_{ji})$$

y diremos que es la suma de matrices.

Sea $T\colon E \to E'$ y $S\colon E' \to E''$ dos aplicaciones lineales. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$, $\{e'_j\}_{j\in J}$ y $\{e''_k\}_{k\in K}$ bases de E, E' y E'' respectivamente. Sea (λ_{ji}) y (μ_{kj}) las matrices respectivas de T y S. Calculemos la matriz (c_{ki}) de $S \circ T$: $(S \circ T)(e_i) = S(\sum_j \lambda_{ji} e'_j) = \sum_j \lambda_{ji} S(e'_j) = \sum_j \lambda_{ji} \cdot (\sum_k \mu_{kj} e''_k) = \sum_k (\sum_j \mu_{kj} \cdot \lambda_{ji}) \cdot e''_k$. En conclusión, $c_{ki} = \sum_j \mu_{kj} \cdot \lambda_{ji}$. Seguiremos la notación,

$$(\mu_{kj}) \circ (\lambda_{ji}) = (c_{ki})$$

y diremos que (c_{ki}) es el producto de las matrices (μ_{kj}) y (λ_{ji}).

6. Proposición: *Una aplicación lineal $T\colon E \to E'$ es inyectiva si y sólo si aplica una (o toda) base en un sistema de vectores linealmente independientes. T es epiyectiva si y sólo si aplica una base (o toda) en un sistema generador. T es un isomorfismo si y sólo si aplica una base (o toda) en una base.*

7. Definición: El espacio vectorial formado por el conjunto de aplicaciones lineales de un k-espacio vectorial E en k se denomina espacio vectorial dual de E y se denota E^*, es decir,

$$E^* := \mathrm{Hom}_k(E, k)$$

Los vectores $w \in E^*$ se denominan formas lineales.

8. Proposición: *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, de base $\{e_1, \dots, e_n\}$ entonces las formas lineales $\{w_1, \dots, w_n\}$, determinadas por $w_i(e_j) = \delta_{ij}$ forman una base de E^*. Se dice que $\{w_1, \dots, w_n\}$ es la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$.*

Demostración. Dada $w \in E^*$ se tiene que $w = w(e_1)\cdot w_1 + \ldots + w(e_n)\cdot w_n$, porque ambas formas lineales coinciden sobre los vectores e_i de la base de E. Si $\sum_i \lambda_i w_i = 0$ entonces $0 = (\sum_i \lambda_i w_i)(e_j) = \lambda_j$, para todo j. En conclusión, $\{w_1, \dots, w_n\}$ son un sistema generador de E^* y son linealmente independientes, es decir, son una base. □

9. Teorema de reflexividad: *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. La aplicación lineal canónica*

$$E \to (E^*)^*, \;\; e \mapsto \tilde{e}, \;\; \tilde{e}(w) := w(e)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $\{w_1, \dots, w_n\}$ la base dual. Es inmediato que $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ es la base dual de $\{w_1, \dots, w_n\}$. La aplicación canónica aplica la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en la base $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ y es un isomorfismo. □

Será usual escribir $E = (E^*)^*$ y $e = \tilde{e}$.

Dada una aplicación lineal $T\colon E \to E'$ sea $T^*\colon E'^* \to E^*$ la aplicación lineal definida por $T^*(w') := w' \circ T$. Se dice que T^* es el morfismo transpuesto de T.

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ son bases de E y E' y (λ_{ji}) es la matriz asociada a T en estas bases, calculemos la matriz (λ^*_{ij}) de T^*, en las bases duales $\{w_1, \dots, w_n\}$, $\{w'_1, \dots, w'_m\}$: $T^*(w'_j) = \sum_i \lambda^*_{ij} w_i$. Entonces,

$$\lambda^*_{ij} = T^*(w'_j)(e_i) = w'_j(T(e_i)) = w'_j(\sum_k \lambda_{ki} e'_k) = \lambda_{ji}$$

que se expresa diciendo que la matriz de T^* es la transpuesta de la matriz de T.

1.3. Producto tensorial

Queremos definir o construir el producto tensorial de dos espacios vectoriales E, E'. Veamos qué cosas queremos y cómo queremos que operen.

Quiero un "producto" que denotaré $\otimes$, entre los vectores de E (que escribiré en primer lugar) y los de E' (en segundo lugar). Dados $e \in E$ y $e' \in E'$, quiero construir $e \otimes e'$. Quiero sumar cosas de éstas, quiero cosas de la forma $e_1 \otimes e'_1 + \cdots + e_n \otimes e'_n$, con $e_i \in E$ y $e'_i \in E'$. Por último quiero que el producto verifique las siguientes propiedades (lineales):

$$\begin{aligned}&(e_1+e_2)\otimes e' = e_1\otimes e' + e_2\otimes e'\\&\lambda e\otimes e' = e\otimes \lambda e'\\&e\otimes (e'_1+e'_2) = e\otimes e'_1 + e\otimes e'_2\end{aligned}$$

y no quiero imponer ninguna condición más (salvo las que se deriven de estas condiciones). Esto es muy fácil, con la palabra sea.

Hablemos con todo rigor.

Sean E y E' dos k-espacios vectoriales. Sea M el $\mathbb{Z}$-módulo libre de base $\{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}\}_{e\in E, e'\in E'}$. Es decir,

$$M := \underset{e\in E, e'\in E'}{\oplus} \mathbb{Z}\cdot \mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}$$

"lo escrito en negrita es mera notación, que conviene". M es un k-espacio vectorial: $\lambda\cdot\sum_i n_i\cdot \mathbf{e_i}\otimes\mathbf{e'_i} := \sum_i n_i(\lambda\mathbf{e_i}\otimes\mathbf{e'_i})$.

"Queremos identificar $(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e'}$ con $\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e'}+\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e'}$; $\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}$ con $\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e'}$; y $\mathbf{e}\otimes(\mathbf{e'_1}+\mathbf{e'_2})$ con $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_1}+\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_2}$."

Sea N el subespacio vectorial de M, generado por los elementos, $(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e'}-\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e'}-\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e'}$, $\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}-\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e'}$, y $\mathbf{e}\otimes(\mathbf{e'_1}+\mathbf{e'_2})-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_1}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_2}$, es decir,

$$N := \left\langle \begin{array}{l}(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e'}-\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e'}-\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e'}\\ \mathbf{e}\otimes(\mathbf{e'_1}+\mathbf{e'_2})-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_1}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_2}\\ \lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}-\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e'}\end{array}\right\rangle_{e,e_1,e_2\in E, e',e'_1e'_2\in E', \lambda\in k} \qquad (*)$$

1. Definición: Llamaremos producto tensorial de E por E', que denotaremos por $E\otimes_k E'$, a

$$E\otimes_k E' := M/N$$

2. Notación: *Dado $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}\in M$, denotaremos $\overline{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}}\in M/N = E\otimes E'$ por $e\otimes e'$.*

Pues bien, $E\otimes E'$ es un espacio vectorial y está generado por los vectores $e\otimes e'$, variando $e\in E$ y $e'\in E'$ (porque los vectores $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}$ generan M y $E\otimes E' = M/N$). Tomando clases en $(*)$ se tienen las igualdades

$$\begin{aligned}&(e_1+e_2)\otimes e' = e_1\otimes e' + e_2\otimes e'\\&e\otimes (e'_1+e'_2) = e\otimes e'_1 + e\otimes e'_2\\&\lambda e\otimes e' = e\otimes \lambda e'\end{aligned} \qquad (*)$$

Calculemos las aplicaciones lineales de $E\otimes E'$ en otro espacio vectorial V. Como $E\otimes E' = M/N$, dar una aplicación lineal $\varphi\colon E\otimes E'\to V$ equivale a dar una aplicación lineal $\phi\colon M\to V$ que se anule en N (de modo que $\varphi(e\otimes e') = \phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'})$). Ahora bien, M es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de base $\{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}\}_{e\in E, e'\in E'}$, así pues, ϕ está determinado por $\phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'})$ (variando $e\in E, e'\in E'$) y se anula en N si y sólo si

$$\begin{aligned}&\phi((\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e'}) = \phi(\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e'})+\phi(\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e'})\\&\phi(\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}) = \phi(\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e'}))\\&\phi(\mathbf{e}\otimes(\mathbf{e'_1}+\mathbf{e'_2})) = \phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_1})+\phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'_2})\end{aligned}$$

Además, φ es k-lineal si y sólo si $\phi(\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'}) = \lambda\phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e'})$.

En conclusión, dar una aplicación k-lineal $\varphi\colon E\otimes_k E'\to V$, equivale a definir $\varphi(e\otimes e')$ (para todo $e\in E, e'\in E'$) de modo que se cumpla

$$\begin{aligned}&\varphi((e_1+e_2)\otimes e') = \varphi(e_1\otimes e')+\varphi(e_2\otimes e')\\&\varphi(\lambda e\otimes e') = \varphi(e\otimes\lambda e') = \lambda\varphi(e\otimes e')\\&\varphi(e\otimes(e'_1+e'_2)) = \varphi(e\otimes e'_1)+\varphi(e\otimes e'_2)\end{aligned}$$

(De un modo más elegante, esta conclusión se expresa en los textos diciendo que se tiene la igualdad $\mathrm{Hom}_k(E\otimes_k E', V) = \mathrm{Bil}_k(E, E'; V)$).

Dadas dos aplicaciones lineales $T\colon E \to V$, $T'\colon E' \to V'$ podemos definir el morfismo $E\otimes E' \to V\otimes V'$, $e\otimes e' \mapsto T(e)\otimes T'(e')$, morfismo que lo denotaremos por $T\otimes T'$.

3. Proposición : *1.* $E\otimes_k E' = E'\otimes_k E$.

2. $(E\oplus E')\otimes_k V = (E\otimes_k V)\oplus(E'\otimes_k V)$.

3. $(\underset{i\in I}{\oplus} E_i)\otimes_k V = \underset{i}{\oplus}(E_i\otimes V)$.

4. $k\otimes_k E = E$.

Demostración. 1. Tenemos el morfismo $E\otimes E' \to E'\otimes E$, $e\otimes e' \mapsto e'\otimes e$ y su inverso $E'\otimes E \to E\otimes E'$, $e'\otimes e \mapsto e\otimes e'$.

2. Tenemos el morfismo $(E\oplus E')\otimes V \to (E\otimes V)\oplus(E'\otimes V)$, $(e,e')\otimes v \mapsto (e\otimes v, e'\otimes v)$ y el inverso $(E\otimes V)\oplus(E'\otimes V) \to (E\oplus E')\otimes V$, $(e\otimes v, e'\otimes v') \mapsto (e,0)\otimes v + (0,e')\otimes v'$.

3. Idem que 2.

4. Tenemos el morfismo $k\otimes E \to E$, $\lambda\otimes e \mapsto \lambda e$ y el inverso $E \to k\otimes E$, $e \mapsto 1\otimes e$.

□

4. Teorema : *Si E es un espacio vectorial de base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y E' es un espacio vectorial de base $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ entonces $E\otimes_k E'$ es un espacio vectorial de base $\{e_i\otimes e'_j\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$.*

Demostración. $E\otimes_k E' = \langle e\otimes e'\rangle_{e\in E, e'\in E'}$. Dados $e\in E$ y $e'\in E'$ entonces $e = \sum_i \lambda_i e_i$ y $e' = \sum_j \lambda'_j e'_j$ y

$$e\otimes e' = (\sum_i \lambda_i e_i)\otimes(\sum_j \lambda_j e'_j) = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda'_j\cdot e_i\otimes e'_j$$

Por tanto, $E\otimes E' = \langle e_i\otimes e'_j\rangle_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$.

Además, $E\otimes E' = k^n\otimes k^m = (k\otimes k^m)\oplus\overset{m}{\cdots}\otimes(k\otimes k^m) = k^m\oplus\overset{m}{\cdots}\oplus k^m = k^{nm}$, luego $E\otimes E'$ es un espacio vectorial de dimensión nm, de base $\{e_i\otimes e'_j\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ (de hecho puede comprobar el lector que esta base se aplica vía las igualdades en la base estándar de k^{nm}).

□

Del mismo modo que hemos definido el producto tensorial de dos espacios vectoriales podríamos haber definido el producto tensorial de tres espacios vectoriales, e igualmente dar una aplicación lineal $\phi\colon E_1\otimes_k E_2\otimes_k E_3 \to V$ equivale a definir los $\phi(e_1\otimes e_2\otimes e_3)$, para todo $e_1\in E_1, e_2\in E_2, e_3\in E_3$, de modo que sea k-lineal en cada uno de los tres factores, es decir, $\mathrm{Hom}_k(E_1\otimes_k E_2\otimes_k E_3, V) = \mathrm{Multilin}(E_1\times E_2\times E_3, V)$. Igualmente podemos definir el producto tensorial de n-espacios vectoriales.

5. Proposición : $\mathrm{Hom}_k(E\otimes_k E', E'') = \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(E', E''))$.

Demostración. Asignamos a $\phi\in\mathrm{Hom}_k(E\otimes_k E', E'')$, $\tilde\phi\in\mathrm{Hom}_k(E,\mathrm{Hom}_k(E',E''))$, definido por $\tilde\phi(e) := \phi(e\otimes -)$, donde $\phi(e\otimes -)(e') := \phi(e\otimes e')$. Recíprocamente, asignamos al morfismo $\varphi\in\mathrm{Hom}_k(E,\mathrm{Hom}_k(E',E''))$, $\tilde\varphi\in\mathrm{Hom}_k(E\otimes_k E', E'')$, definido por $\tilde\varphi(e\otimes e') := (\varphi(e))(e')$. □

6. Proposición : $(E_1\otimes_k\cdots\otimes_k E_n)\otimes_k(E'_1\otimes_k\cdots\otimes_k E'_m) = E_1\otimes_k\cdots\otimes_k E_n\otimes_k E'_1\otimes_k\cdots\otimes_k E'_m$.

Demostración. Sea

$$\phi \in \operatorname{Hom}_k(E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n,\ \operatorname{Hom}_k(E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m,\ E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m))$$

definido por $\phi(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n)(e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$. Por la proposición anterior tenemos el morfismo $(E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n) \otimes_k (E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m) \to E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m$, definido por $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \otimes (e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m) \mapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$.

El morfismo $E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m \to (E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n) \otimes_k (E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m)$, $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m \mapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \otimes (e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m)$ es el morfismo inverso.

□

Hemos demostrado, además, la propiedad asociativa del producto tensorial, pues fácilmente tenemos que

$$E_1 \otimes_k (E_2 \otimes_k E_3) = E_1 \otimes_k E_2 \otimes_k E_3 = (E_1 \otimes_k E_2) \otimes_k E_3$$

7. Teorema: *Sean E_i k-espacios vectoriales de dimensión finita. La aplicación lineal*

$$\begin{array}{ccc} E_1^* \otimes_k \ldots \otimes_k E_n^* & \stackrel{\phi}{\to} & (E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n)^* = \mathit{Multilin}_k(E_1 \times \cdots \times E_n, k) \\ w_1 \otimes \cdots \otimes w_n & \mapsto & w_1 \tilde{\otimes \cdots \otimes} w_n \end{array}$$

con $w_1 \tilde{\otimes \cdots \otimes} w_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := w_1(e_1) \cdots w_n(e_n)$, es un isomorfismo lineal.

Demostración. Sea $\{e_{ij}\}_i$ una base de E_j y $\{w_{ij}\}_i$ la base dual. Por tanto, una base de $E_1^* \otimes_k \cdots \otimes_k E_n^*$ es $\{w_{i_1 1} \otimes \cdots \otimes w_{i_n n}\}_{i_1,\ldots,i_n}$, que resulta ser vía ϕ la base dual de la base $\{e_{i_1 1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n n}\}_{i_1,\ldots,i_n}$ de $E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n$.

□

8. Notación: *Por abuso de notación suele denotarse $w_1 \tilde{\otimes \cdots \otimes} w_n$ por $w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$. Recíprocamente, $w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$ suele pensarse como la aplicación multilineal $w_1 \tilde{\otimes \cdots \otimes} w_n$.*

Otra fórmula importante es:

9. Proposición: *Sea E' un k-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$E'^* \otimes_k E = \operatorname{Hom}_k(E', E)$$

Demostración. Si $E' = k$ es obvio. En general, $E' = k^n$. Como $\operatorname{Hom}_k(-, E)$ y $- \otimes_k E$ conmutan con sumas directas finitas, hemos concluido.

Explícitamente, el morfismo $E'^* \otimes_k E \to \operatorname{Hom}_k(E', E)$, $w \otimes e \mapsto w \tilde{\otimes} e$, donde $w \tilde{\otimes} e(e') := w(e') \cdot e$, es un isomorfismo canónico.

□

1.4. Álgebra exterior n-ésima de un espacio vectorial

"Queremos definir ahora un producto $\wedge$, con las propiedades multilineales de $\otimes$ y de modo que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ sea cero si y sólo $v_1, \ldots, v_n \in E$ no son linealmente dependientes. Basta imponer sólo que $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ es nulo si dos de los v_i son iguales".

Sea V el k-subespacio vectorial de $E \otimes_k \stackrel{n}{\cdots} \otimes_k E$, generado por los vectores

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_{j-1} \otimes e \otimes \cdots \otimes e_{k-1} \otimes e \otimes \cdots \otimes e_n$$

variando e_i, e, j, k.

1. Definición : Llamaremos álgebra exterior n de E, que denotaremos por $\Lambda^n E$, a

$$\Lambda^n E := (E \otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k E)/V$$

2. Notación: *Denotaremos* $\overline{e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n} \in (E \otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k E)/V = \Lambda^n E$ *por* $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$.

Observemos que $\wedge$ además de las propiedades de multilinealidad heredadas de $\otimes$, cumple que $e_1 \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e_n = 0$. Si e_i es combinación lineal de los $\{e_j\}_{j\neq i}$, entonces $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_i \wedge \cdots \wedge e_n = 0$: $e_i = \sum\limits_{j\neq i} \lambda_j e_j$, luego

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n &= e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge (\sum_{j\neq i} \lambda_j e_j) \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_{j\neq i} \lambda_j e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_j \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n = 0 \end{aligned}$$

Como $0 = e_1 \wedge \cdots \wedge (e+e') \wedge \cdots \wedge (e+e') \wedge \cdots \wedge e_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge (e+e') \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge (e+e') \wedge \cdots \wedge e_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge e_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge \cdots \wedge e' \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e_n$ obtenemos que

$$e_1 \wedge \cdots \wedge \underset{j}{e} \wedge \cdots \wedge \underset{k}{e'} \wedge \cdots \wedge e_n = -e_1 \wedge \cdots \wedge \underset{j}{e'} \wedge \cdots \wedge \underset{k}{e} \wedge \cdots \wedge e_n$$

Recordemos que toda permutación es producto de transposiciones y que el signo de la permutación es igual a -1 elevado al número de las transposiciones. Por tanto, dada una permutación σ, de $\{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} = \text{signo}(\sigma) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

3. Como $\Lambda^n E = (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)/V$, dar un morfismo lineal $\phi\colon \Lambda^n E \to F$ equivale a dar un morfismo $E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to F$, que se anule en V, es decir, equivale a definir $\phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$ (para todo $e_1, \dots, e_n \in E$) que sea k-lineal en cada factor y de modo que $\phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e \wedge \cdots \wedge e_n) = 0$.

Dada una aplicación lineal $T\colon E \to E'$ induce el morfismo $\Lambda^n T\colon \Lambda^n E \to \Lambda^n E'$, definido por $\Lambda^n T(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) := T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n)$.

4. Notación: *Diremos que* $\Lambda^0 E = k$ *y que* $\Lambda^1 E = E$.

5. Teorema: *Sea E un espacio vectorial de base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\}_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n}$ es una base de $\Lambda^r E$.*

Demostración. Sabemos que $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}\}_{1\leq i_j \leq n}$ es una base de $E \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes E$. Por tanto, tomando clases tenemos que $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\}_{1\leq i_j \leq n}$ es un sistema generador de $\Lambda^r E$. Si en el producto exterior de r-vectores aparecen vectores repetidos entonces es nulo. Además

$$e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)} = \text{signo}(\sigma) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r$$

Por tanto, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\}_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n}$ es un sistema generador de $\Lambda^r E$.

Supongamos que existe una combinación lineal $\sum\limits_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \lambda_{i_1, i_2, \cdots, i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = 0$, con algún $\lambda_{i_1, i_2, \cdots, i_r} \neq 0$. Reordenando la base, podemos suponer que $\lambda_{1,2,\cdots,r} \neq 0$.

Sea $\{w_i\}$ la base dual de $\{e_i\}$. Consideremos la aplicación lineal

$$w\colon \Lambda^r E \to k,\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \mapsto \sum_\sigma \text{signo}(\sigma) \cdot w_1(v_{\sigma(1)}) \cdots w_r(v_{\sigma(r)})$$

Se cumple que $0 = w(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} \lambda_{i_1,i_2,\cdots,i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = \lambda_{1,2,\cdots,r}$.

□

6. Corolario : *$v_1, \ldots, v_n \in E$ son linealmente independientes si y sólo si $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0$.*

Demostración. Si $v_1, \ldots, v_n \in E$ son linealmente independientes entonces forman parte de una base, luego $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ forma parte de una base de $\Lambda^n E$ y es distinto de cero. □

Si E es un espacio vectorial de dimensión n y base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ entonces $\Lambda^n E$ es un espacio vectorial de dimensión 1 de base $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Dados $v_1, \cdots, v_n \in E$, con $v_i = \sum_j \lambda_{ij} e_j$, tendremos que

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = (\lambda_{11}e_1 + \cdots + \lambda_{1n}e_n) \wedge \cdots \wedge (\lambda_{n1}e_1 + \cdots + \lambda_{nn}e_n) = \sum_{i_1 \neq \cdots \neq i_n} \lambda_{1i_1} \cdots \lambda_{ni_n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)} \cdot e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} = (\sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma) \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

7. Definición : Sea E un espacio vectorial de dimensión n y $T\colon E \to E$ un endomorfismo lineal. Entonces $\Lambda^n E = k$ y $\Lambda^n T\colon \Lambda^n E \to \Lambda^n E$ es la homotecia por cierto escalar de k, que llamaremos determinante de T y denotaremos $\det(T)$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E y la matriz de T en esa base es (λ_{ij}), entonces $T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n) = (\sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma) \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, luego $\det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma) \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}$.

8. Proposición : *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. $T\colon E \to E$ es un isomorfismo si y sólo si* $\det(T) \neq 0$.

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. T es un isomorfismo $\iff$ $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ son linealmente independientes $\iff$ $T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n) \neq 0 \iff \det(T) \neq 0$. □

9. Teorema : $\det(T \circ T') = \det(T) \cdot \det(T')$.

Demostración. Se verifica que $\Lambda^n(T) \circ \Lambda^n(T') = \Lambda^n(T \circ T')$: $(\Lambda^n(T) \circ \Lambda^n(T'))(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \Lambda^n(T)(T'(e_1) \wedge \cdots \wedge T'(e_n)) = (T \circ T')(e_1) \wedge \cdots \wedge (T \circ T')(e_n) = \Lambda^n(T \circ T')(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$.

Por tanto, multiplicar (en $\Lambda^n E = k$) por $\det(T')$ y después multiplicar por $\det(T)$ es igual a multiplicar por $\det(T \circ T')$. Es decir, $\det(T \circ T') = \det(T) \cdot \det(T')$. □

10. Definición : Dada una matriz $A = (a_{ij})$ llamaremos menor pq de la matriz, que denotaremos por A_p^q, al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en (a_{ij}) la columna p y la fila q.

11. Proposición : $\det(a_{ij}) = \sum_q (-1)^q a_{1q} A_1^q$.

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una base. Entonces

$$\begin{aligned}
\det(a_{ij}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n &= (\sum_j a_{1j} e_j) \wedge \cdots \wedge (\sum_j a_{nj} e_j) = \sum_k \quad a_{1k} e_k \wedge (\sum_j a_{2j} e_j) \wedge \cdots \wedge (\sum_j a_{nj} e_j) \\
&= a_{11} e_1 \wedge (\sum_{j\neq 1} a_{2j} e_j) \wedge \cdots \wedge (\sum_{j\neq 1} a_{nj} e_j) + \cdots + a_{1n} e_n \wedge (\sum_{j\neq n} a_{2j} e_j) \wedge \cdots \wedge (\sum_{j\neq n} a_{nj} e_j) \\
&= a_{11} A_1^1 \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \cdots + a_{1n} A_1^n \cdot e_n \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \\
&= (\sum_j (-1)^j a_{1j} A_1^j) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned}$$

y hemos concluido. □

Sea $T\colon E \to E$ un isomorfismo lineal y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de T en una base $\{e_j\}$ de E. Calculemos la matriz $B = (b_{ij})$ de T^{-1}: $T^{-1}(e_i) = \sum_j b_{ij} e_j$, luego

$$T^{-1}(e_i) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_n = b_{ij} e_j \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_n = (-1)^j b_{ij} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

Aplicando $\Lambda^n T$, obtenemos

$$e_i \wedge T(e_1) \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge T(e_n) = b_{ij} (-1)^j \det(T) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

Como $e_i \wedge T(e_1) \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge T(e_n) = A_j^i \cdot (-1)^i e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, entonces

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{A_j^i}{\det(a_{ij})}$$

Hablemos, primero sin rigor, de orientación de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, para ligar la intuición vaga que tenemos de orientación con la definición matemática de orientación que daremos más adelante.

"Decimos que un espacio vectorial E de dimensión 1 (una recta) lo tenemos orientado, si sabemos decir qué está a la derecha del cero y qué está a la izquierda del cero. Para esto es necesario y suficiente con que tengamos un vector no nulo $e \in E$, de modo que diremos que un punto $e' \in E$ distinto de 0, está a la derecha de 0 si $e' = \lambda \cdot e$, con $\lambda > 0$, diremos que está a la izquierda si $\lambda < 0$. Otro vector, v define la misma orientación que e si y sólo si $v = \mu e$, con $\mu > 0$. En conclusión, dar una orientación en E, equivale a dar un $e \in E$ (o cualquier otro λe, con $\lambda > 0$).

Sea ahora E un plano. Decimos que en el plano E estamos orientados, si siempre que tengamos una recta (pongamos que pasa por el origen) orientada sabemos decir qué está a la derecha de la recta o qué está a la izquierda de la recta. Así si tenemos una recta orientada $r = \langle e \rangle \subset E$ (donde e orienta la recta), dado e' (que no yazca en la recta) sabemos decir si está a la derecha o a la izquierda de la recta. Además, si e' está a la derecha de la recta, entonces los puntos de la derecha son de la forma $\lambda e + \mu e'$, con $\mu > 0$. Así si fijamos la recta orientada $r = \langle e \rangle$ y decimos que e' está a la derecha de r, definamos $e \wedge e'$ que es una base de $\Lambda^2 E$, entonces $v = \alpha e + \beta e'$ está a la derecha de r, si y sólo si $e \wedge v = \beta \cdot e \wedge e'$ con $\beta > 0$. En conclusión, dada una dos coforma $c_2 \in \Lambda^2 E$, tenemos una orientación en E: Dada una recta orientada $r = \langle e \rangle$ (donde e, o λe con $\lambda > 0$, orienta la recta) diremos que e' está a la derecha de la recta r, si $e \wedge e' = \beta \cdot c_2$, con $\beta > 0$. Así pues, dar una orientación en E, es dar una $c_2 \in \Lambda^2 E$ (o cualquier otra $\lambda \cdot c_2$, con $\lambda > 0$).

Sea ahora E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3. Decimos que estamos orientados en E, si dado un plano orientado sabemos decir qué está a su derecha y qué está a su izquierda. Dar un plano $V \subset E$ orientado, es dar una dos coforma $c_2 \in \Lambda^2 V$ (o cualquier otra λc_2, con $\lambda > 0$). Así si tengo, una tres coforma $c_3 \in \Lambda^3 E$ (o cualquier otra $\lambda \cdot c_3$, con $\lambda > 0$), dado $e' \in E$, diré que está a la derecha de V

si $c_2 \wedge e' = \alpha \cdot c_3$, con $\alpha > 0$. Observemos, que si $e'' = \mu e' + v$, con $\mu > 0$ y con $v \in V$, entonces $c_2 \wedge e'' = \mu \cdot c_2 \wedge e' = \mu\lambda c_3$. En conclusión, dar una orientación en E, es dar una $c_3 \in \Lambda^3 E$ (o cualquier otra $\lambda \cdot c_3$, con $\lambda > 0$)".

12. Definición : Dar una orientación en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión n, es dar una n-coforma no nula $c_n \in \Lambda^n E$. Decimos que dos orientaciones c_n y c'_n son iguales si $c_n = \lambda \cdot c'_n$, con $\lambda > 0$.

Como $\Lambda^n E \simeq \mathbb{R}$, en E sólo podemos dar dos orientaciones, "una y su opuesta".

Dada una orientación $c_n \in \Lambda^n E$ existe una única $w_n \in \Lambda^n E^*$, salvo un factor multiplicativo positivo, de modo que $w_n(c_n) \geq 0$. Equivalentemente, dada una n-forma w_n, salvo un factor multiplicativo positivo, tenemos definida una orientación.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n orientado, y $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in \Lambda^n E$ una n-coforma que orienta E (o equivalentemente una n-forma w_n que orienta E).

13. Definición : Diremos que una base ordenada $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ está positivamente ordenada si $e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n = \lambda \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, con $\lambda > 0$ (o equivalentemente si $w_n(e'_1, \ldots, e'_n) > 0$).

14. Proposición : *Sea* $e'_i = \sum_j \lambda_{ij} e_j$. *Entonces* $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *está positivamente ordenada si y sólo si* $\det(\lambda_{ij}) > 0$.

Demostración. $e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n = \det(\lambda_{ij}) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. □

15. Definición : Una aplicación multilineal $H \colon E \times \ldots \times E \to V$ es una aplicación hemisimétrica si $H(e_1, \cdots, e_n) = 0$ si $e_i = e_j$, para un $i \neq j$.

Observemos que si e_i es combinación lineal de los demás e_j, por la multilinealidad y hemisimetría de H, se cumple que $H(e_1, \ldots, e_n) = 0$. Por otra parte,

$$0 = H(e_1, \cdots, e+v, \cdots, e+v, \cdots, e_n) = H(e_1, \cdots, e, \cdots, v, \cdots, e_n) + H(e_1, \cdots, v, \cdots, e, \cdots, e_n)$$

Luego $H(e_1, \cdots, e, \cdots, v, \cdots, e_n) = -H(e_1, \cdots, v, \cdots, e, \cdots, e_n)$ y en general

$$H(e_1, \cdots, \cdots, e_n) = \text{signo}(\sigma) \cdot H(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$$

Denotemos $Hem_k(E \times \cdots \times E, V)$, el conjunto de aplicaciones hemisimétricas de $E \times \cdots \times E$ en V.

16. Proposición : $Hem_k(E \times \overset{m}{\cdots} \times E, k) = (\Lambda^m E)^*$.

Demostración. Estamos repitiendo 1.4.3. Toda aplicación hemisimétrica $H \colon E \times \overset{m}{\cdots} \times E \to k$, define la aplicación $\tilde{H} \colon E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E \to k$, $\tilde{H}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_m) = H(e_1, \ldots, e_m)$, que factoriza vía $\Lambda^m E \to k$, $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \mapsto H(e_1, \ldots, e_m)$. Recíprocamente, dada una aplicación lineal, $\Lambda^m E \to k$, la composición $E \times \overset{m}{\cdots} \times E \to \Lambda^m E \to k$ es hemisimétrica. □

17. Proposición : *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces,*

$$\Lambda^m E^* = (\Lambda^m E)^*$$

Demostración. La aplicación, $\Lambda^m E^* \xrightarrow{\phi} (\Lambda^m E)^*$, $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m \mapsto \omega_1 \wedge \overset{\sim}{\cdots} \wedge \omega_m$, donde

$$\omega_1 \wedge \overset{\sim}{\cdots} \wedge \omega_m(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) := \sum_{\sigma \in S_m} \text{signo}(\sigma) \cdot \omega_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega_m(v_{\sigma(m)})$$

es un isomorfismo. Porque si $e_1,\dots,e_n$ es una base de E y $w_1,\dots,w_n$ la base dual, entonces ϕ aplica la base $\{w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_m}\}_{i_1<\cdots<i_m}$ de $\Lambda^m E^*$ en la base dual de la base $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_m}\}_{i_1<\cdots<i_m}$ de $\Lambda^m E$. □

Con las dos proposiciones anteriores obtenemos la siguiente proposición.

18. Proposición: *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$\Lambda^m E^* = Hem_k(E\times\overset{m}{\cdots}\times E,k)$$

Explícitamente, $\Lambda^m E^*\to Hem_k(E\times\cdots\times E,k)$, $w_1\wedge\cdots\wedge w_m\mapsto w_1\wedge\tilde{\cdots}\wedge w_m$, donde

$$w_1\wedge\tilde{\cdots}\wedge w_m(e_1,\dots,e_m):=w_1\wedge\tilde{\cdots}\wedge w_m(e_1\wedge\ldots\wedge e_m)=\sum_{\sigma\in S_m}\operatorname{signo}(\sigma)\cdot w_1(e_{\sigma(1)})\cdots w_m(e_{\sigma(m)})$$

es un isomorfismo lineal.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, con una orientación. La función $F\colon E\times\cdots\times E\to\mathbb{R}$ que asigna a n-vectores el volumen del parelelepípedo definido por los n-vectores, multiplicado por (-1) si los n vectores no están positivamente orientados, es una función hemisimétrica. Por tanto, podemos definir $F\colon\Lambda^n E\to\mathbb{R}$, que asigna a $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ el volumen del paralelepípedo definido por $e_1,\dots,e_n$ (multiplicado por (-1) si los n vectores no están positivamente orientados). Si $e'_i=\sum_j\lambda_{ij}e_j$, como $e'_1\wedge\cdots\wedge e'_n=\det(\lambda_{ij})\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n$, tendremos que

$$F(e'_1\wedge\cdots\wedge e'_n)=F(\det(\lambda_{ij})\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=\det(\lambda_{ij})F(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)$$

En conclusión, el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $e'_1,\cdots,e'_n$ es $|\det(\lambda_{ij})|$ por el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $e_1,\dots,e_n$.

$\Lambda^n E^*=\langle F\rangle$. Al hablar de volumen hemos cometido un error. Debemos fijar una unidad de volumen. Debemos decir que cierto paralelepípedo tiene volumen 1. Debemos fijar un generador de $\Lambda^n E^*$. A los vectores de $\Lambda^n E^*$ se les llama formas de volumen.

1.5. Métricas

Uno de los conceptos difíciles de definir en la enseñanza básica es la noción de ángulo. Se dice algo así como que el ángulo entre dos semirectas concurrentes es (el área de) la región que hay entre las dos rectas. ¿Qué es la región? Como se dice que una región es mayor que otra ¿es un número? ¡Pero la región es muy grande! Intentemos asignar a cada par de semirectas concurrentes un número: “Consideremos un vector de módulo uno sobre cada semirecta. Midamos la longitud de la proyección ortonormal de un vector de una recta en la otra. Esta medida, éste número, nos dará una idea exacta del ángulo. Esta asignación de un número a cada par de semirectas concurrentes, puede extenderse a una asignación de un número a cada par de vectores. En efecto, dados dos vectores e_1,e_2 sean $|e_1|$ y $|e_2|$ sus módulos y consideremos $e'_1=\frac{e_1}{|e_1|}$ y $e'_2=\frac{e_2}{|e_2|}$. Sea $N(e_1,e_2)$ el número que se obtiene de multiplicar la longitud de la proyección de e'_1 sobre e'_2 por $|e_1|$ y $|e_2|$”. Resulta que $N\colon E\times E\to\mathbb{R}$, $(e_1,e_2)\mapsto N(e_1,e_2)$ es una aplicación bilineal. En conclusión, la noción de ángulo en un espacio euclídeo está estrechamente relacionada con la noción de aplicación bilineal. Veamos como a partir de una aplicación bilineal definimos lo que es espacio euclídeo, ángulo y módulo.

Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $e_1, \dots, e_n$ una base de E y $w_1, \dots, w_n \in E^*$ la base dual. Sabemos que

$$Bil_k(E \times E, k) = E^* \otimes_k E^*$$

Una base de $E^* \otimes_k E^*$ es $\{w_i \otimes w_j\}$. Así pues, dada una aplicación bilineal $T_2 \in Bil_k(E \times E, k)$, tendremos que $T_2 = \sum\limits_{i,j} \lambda_{ij} w_i \otimes w_j$ y

$$T_2(e, e') = \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_i(e) \cdot w_j(e')$$

En particular, $T_2(e_i, e_j) = \lambda_{ij}$.

Por otra parte, $E^* \otimes E^* = \operatorname{Hom}_k(E, E^*)$. Explícitamente, dada $T_2 = \sum\limits_{i,j} \lambda_{ij} w_i \otimes w_j$ tenemos un morfismo, denominado la polaridad asociada a T_2 y que denotamos también T_2, $T_2 \colon E \to E^*$ definido por

$$T_2(e) := \sum_{ij} \lambda_{ij} \cdot w_i(e) \cdot w_j$$

En particular, $T_2(e_i) = \sum\limits_{j} \lambda_{ij} w_j$, luego la matriz de T_2 es (λ_{ij}). Observemos que $T_2(e)(e') = T_2(e, e')$.

Recíprocamente, dado una aplicación lineal $T_2 \colon E \to E^*$, podemos definir una aplicación bilineal que seguimos denotando T_2, $T_2(e, e') := T_2(e)(e')$.

1. Definición: Se dice que T_2 es no singular si $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$, es decir, $T_2 \colon E \to E^*$ es un isomorfismo.

Si $T_2 \colon E \to E^*$ es un isomorfismo, entonces $T^2 := (T_2)^{-1} \colon E^* \to E$ es un isomorfismo. Por tanto, T^2 define una aplicación bilineal en E^* (pues $E = (E^*)^*$). Si la matriz de T_2 es (λ_{ij}) la matriz de T^2 es $(\lambda^{ij}) := (\lambda_{ij})^{-1}$. Si $T_2 = \sum_{ij} \lambda_{ij} w_i \otimes w_j$, entonces $T^2 = \lambda^{ij} e_i \otimes e_j$. Por último observemos que si $w = T_2(e)$ y $w' = T_2(e')$ entonces

$$T^2(w, w') = T^2(w)(w') = T^2(T_2(e))(T_2(e')) = e(T_2(e')) = T_2(e')(e) = T_2(e', e)$$

2. Definición: Se dice que T_2 es una métrica simétrica si $T_2(e, e') = T_2(e', e)$, para todo $e, e' \in E$.

Si T_2 es simétrica entonces $\lambda_{ij} = T_2(e_i, e_j) = T_2(e_j, e_i) = \lambda_{ji}$. Recíprocamente, si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, para todo i, j, entonces $T_2(e, e') = T_2(e', e)$ para todo $e, e' \in E$. Es decir, T_2 es simétrica si y sólo si la polaridad T_2 coincide con su morfismo transpuesto T_2^*.

Supongamos a partir de ahora que T_2 es simétrica. Se dice que e es ortogonal a e' (respecto de T_2) si $T_2(e, e') = 0$. Se dice que dos subespacios E', E'' de E son ortogonales si $T_2(e', e'') = 0$ para todo $e' \in E'$ y $e'' \in E''$. Se dice que E es la suma ortogonal de dos subespacios E' y E'' si son ortogonales y E es la suma directa de los dos subespacios. En este caso escribiremos $E = E' \perp E''$. Observemos que

$$T_2(e_1' + e_1'', e_2' + e_2'') = T_2(e_1', e_2') + T_2(e_1'', e_2'')$$

para todo $e_1', e_2' \in E'$ y $e_1'', e_2'' \in E''$.

Si E' y E'' son dos espacios vectoriales con sendas métricas T_2' y T_2'' entonces podemos definir en $E = E' \oplus E''$ la métrica

$$T_2(e' + e'', v' + v'') := T_2'(e', v') + T_2''(e'', v'')$$

Obviamente, E es la suma ortogonal de E' y E''.

3. Definición : Se denomina radical de T_2, que denotaremos $\operatorname{Rad} T_2$, al núcleo de la polaridad T_2, es decir,

$$\operatorname{Rad} T_2 := \{e \in E \mid T_2(e, e') = 0 \text{ para todo } e' \in E\}$$

Si E' es cualquier subespacio suplementario de $\operatorname{Rad} T_2$ entonces $E = \operatorname{Rad} T_2 \perp E'$. La restricción de T_2 a $\operatorname{Rad} T_2$ es la métrica nula. La restricción de la métrica T_2 a E' es no singular, porque dado $e' \in E'$ si $T_2(e', v) = 0$ para todo $v \in E'$, entonces $T_2(e', e) = 0$ para todo $e \in E$ y tendríamos que $e' \in \operatorname{Rad} T_2$ y por tanto $e' = 0$. En general, si $E = E' \perp E''$ entonces $\operatorname{Rad} T_2 = \operatorname{Rad} T_{2|E'} \oplus \operatorname{Rad} T_{2|E''}$.

Dado un subespacio $V \subseteq E$ diremos que $V^\perp := \{e \in E \mid T_2(v, e) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$ es el espacio ortogonal de V.

Dado un subespacio vectorial $V \subseteq E$ diremos que $V^0 := \{w \in E^* \mid w(v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$ es el subespacio (de E^*) incidente de V. Si tomamos una base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de V y la ampliamos a una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y consideramos la base de E^* dual $\{w_1, \dots, w_n\}$ entonces $\{w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es una base de V^0. Por tanto, $\dim V^0 = \dim E - \dim V$.

Vía el teorema de reflexividad, dado $W \subset E^*$ se tiene que $W^0 = \{e \in E \mid w(e) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$. Dado $V \subseteq E$ se tiene que

$$V^\perp = \{e \in E \mid 0 = T_2(v, e) = T_2(v)(e) \text{ para todo } v \in V\} = T_2(V)^0$$

"Si dado un subespacio $W \subset E^*$ pensamos de modo inmediato en W^0, entonces podremos decir que la polaridad T_2 aplica cada subespacio vectorial de E en su ortogonal´´

4. Proposición : *Si T_2 es una métrica simétrica no singular de un espacio vectorial de dimensión finita E y $V \subseteq E$ es un subespacio vectorial entonces* $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$. *Además,* $(V^\perp)^\perp = V$.

Demostración. $\dim V^\perp = \dim T_2(V)^0 = \dim E^* - \dim T_2(V) = \dim E - \dim V$.

$(V^\perp)^\perp = V$. Si $v' \in V^\perp$ entonces $T_2(v', v) = 0$ para todo $v \in V$. Por tanto, $V \subseteq (V^\perp)^\perp$. Por otra parte, $\dim (V^\perp)^\perp = \dim E - \dim V^\perp = \dim E - (\dim E - \dim V) = \dim V$. Por dimensiones, $(V^\perp)^\perp = V$. □

5. Definición : Se dice que una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E es ortonormal si $T_2(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ y $T_2(e_i, e_i) = \pm 1$.

6. Teorema : *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y T_2 una métrica simétrica no singular en E. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, luego matriz asociada a T_2 en esta base es*

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Veamos en primer lugar que si $T_2(e, e) = 0$ para todo $e \in E$ entonces $T_2 = 0$: Sean $e, e' \in E$, $0 = T_2(e + e', e + e') = T_2(e, e) + T_2(e, e') + T_2(e', e) + T_2(e, e') = 2T_2(e, e')$, luego $T_2 = 0$.

Sea, pues, $e \in E$ tal que $T_2(e, e) \neq 0$. Sea $E' = \langle e \rangle^\perp$. Se tiene que $\langle e \rangle \cap E' = 0$, por tanto, por dimensiones, $E = \langle e \rangle \perp E'$. La restricción de T_2 a E' es no singular, pues $0 = \operatorname{Rad} T_2 = \operatorname{Rad} T_{2|\langle e \rangle} \oplus \operatorname{Rad} T_{2|E'}$. Por inducción sobre la dimensión, existe una base ortonormal $\{e_2, \dots, e_n\}$ en E'. Si consideramos $e_1 = \frac{1}{\sqrt{|T_2(e,e)|}} \cdot e$ tenemos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de E.

□

7. Definición : Se dice que E con la métrica simétrica T_2 es un espacio euclídeo si $T_2(e, e) > 0$ para todo vector no nulo de E.

En particular, en los espacios euclídeos, T_2 es no singular.

Reordenando la base, podemos suponer en el teorema anterior que

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{r}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos que el número r no depende de la base escogida: para todo $e \in E' = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, no nulo, se tiene que $T_2(e,e) > 0$; del mismo modo para todo $e \in E'' = \langle e_{r+1}, \dots e_n \rangle$ no nulo se cumple que $T_2(e,e) < 0$. Supongamos que existe un subespacio vectorial V tal que para todo $v \in V$ no nulo $T_2(v,v) > 0$. Obviamente $V \cap E'' = 0$, luego $\dim V \leq \dim E - \dim E'' = \dim E' = r$. En conclusión, r es la dimensión máxima de los subespacios euclídeos de E.

8. Definición : Se define el módulo de un vector e como $\sqrt{|T_2(e,e)|}$. Supongamos que E es euclídeo, se define el ángulo entre dos vectores no nulos e, e' como el número $0 \leq \alpha < \pi$ tal que $cos\alpha = T_2(e,e')$.

Por ejemplo, dos vectores (no nulos) son perpendiculares si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

Toda métrica en E extiende de modo natural a $\Lambda^m E$: Dar una métrica T_2 en E, equivale a definir "la polaridad" $T_2 \colon E \to E^*$, $T_2(e)(e') := T_2(e,e')$. La polaridad T_2 define el morfismo, $\Lambda^m T_2 \colon \Lambda^m E \to \Lambda^m E^*$, $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \mapsto T_2(e_1) \wedge \cdots \wedge T_2(e_m)$. Ahora bien, $\Lambda^m E^* = (\Lambda^m E)^*$, luego tengo un morfismo $\Lambda^m E \to (\Lambda^m E)^*$, luego una métrica $\Lambda^m T_2$ en $\Lambda^m E$ definida por

$$\begin{aligned} \Lambda^m T_2(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m, e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m) &= (T_2(e_1) \wedge \cdots \wedge T_2(e_m))(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m) \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{signo}(\sigma) \cdot T_2(e_1)(e'_{\sigma(1)}) \cdots T_2(e_m)(e'_{\sigma(m)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{signo}(\sigma) \cdot T_2(e_1, e'_{\sigma(1)}) \cdots T_2(e_m, e'_{\sigma(m)}) \end{aligned}$$

Si T_2 es una métrica simétrica en E, entonces $\Lambda^m T_2$ también lo es, porque $(\Lambda^m T_2)^* = \Lambda^m T_2^* = \Lambda^m T_2$.

Si $e_1, \dots, e_n$ es una base ortonormal de E entonces $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}\}_{i_1 < \cdots < i_m}$ es una base ortonormal de $\Lambda^m E$. Si $S \colon E \to E$ es una isometría, entonces $\det(S) = \pm 1$: $S(e_1), \dots, S(e_n)$ es una base ortonormal de E y $S(e_1) \wedge \cdots \wedge S(e_n) = \det(S) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ tiene módulo 1, luego $\det(S) = \pm 1$.

Si E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, entonces $\Lambda^n E$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1. Si T_2 es una métrica simétrica no singular de E, existe salvo signo una única forma de volumen de módulo 1. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $T_2 \equiv (\lambda_{ij})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Lambda^n T_2(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= (T_2(e_1) \wedge \cdots \wedge T_2(e_n))(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \det(\lambda_{ij}) \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \det(\lambda_{ij}) \end{aligned}$$

Así pues, la coforma de volumen es $\frac{1}{\sqrt{|\det(\lambda_{ij})|}} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Igualmente, la forma de volumen es

$$w_E = \frac{1}{\sqrt{|\det(\lambda^{ij})|}} \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \sqrt{|\det(\lambda_{ij})|} \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$$

Observemos que si $e_1, \dots, e_n$ es una base ortonormal de E entonces $w_E = \pm \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$ y $w_E(e_1, \dots, e_n) = \pm 1$.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado. Sea $w_3 \in \Lambda^3 E^*$ la única 3-forma que sobre una base ortonormal e_1, e_2, e_3 positivamente orientada, vale $w_3(e_1, e_2, e_3) = 1$. Es decir, si w_1, w_2, w_3 es la base dual de e_1, e_2, e_3 entonces $w_3 = w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$ (que con la métrica inducida por la métrica de E^*, w_3 es de módulo 1 y w_3 define la orientación dada en E).

Dados dos vectores $v_1, v_2 \in E$, llamamos producto vectorial de v_1 por v_2, que denotamos por $v_1 \times v_2$, al vector determinado por

$$T_2(v_1 \times v_2, e) = w_3(v_1, v_2, e)$$

Observemos que $v_1 \times v_2$ es ortogonal a v_1 y v_2. El producto vectorial, $\times$, es multilineal hemisimétrico. Si v_1 y v_2 son linealmente independientes entonces $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ es una base positivamente orientada, pues $0 < \lambda = T_2(v_1 \times v_2, v_1 \times v_2) = w_3(v_1, v_2, v_1 \times v_2)$. Si v_1 y v_2 son ortogonales, entonces $v_1 \times v_2$ es el vector ortonormal a v_1 y v_2, de módulo el producto de los módulos de v_1 y v_2, de modo que $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ están positivamente orientados: por la multilinealidad del producto vectorial podemos suponer que v_1 y v_2 son de módulo 1. Sea v_3, tal que v_1, v_2, v_3 sea una base ortonormal positivamente orientada. Entonces, $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ y $T_2(v_1 \times v_2, v_3) = w_3(v_1, v_2, v_3) = w_3(e_1, e_2, e_3) = 1$. Por tanto, $v_1 \times v_2 = v_3$ y hemos terminado.

Observemos que si $v_i = \sum\limits_j \lambda_{ij} e_j$, entonces $T_2(v_1 \times v_2, v_3) = \det(\lambda_{ij})$, pues $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = \det(\lambda_{ij}) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ y $T_2(v_1 \times v_2, v_3) = w_3(v_1, v_2, v_3) = \det(\lambda_{ij})$.

1.6. Producto exterior y contracción interior

Si un morfismo $\phi\colon E \otimes E' \to E''$ se anula sobre los elementos $e \otimes e'$ para todo $e \in V \subset E$ y $e' \in E'$ entonces factoriza vía el morfismo $\bar\phi\colon (E/V) \otimes E' \to E''$, $\bar\phi(\bar e \otimes e') := \phi(e \otimes e')$.

El morfismo composición

$$\begin{aligned}(E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E) \otimes (E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E) = E \otimes \overset{n+m}{\cdots} \otimes E &\to \Lambda^{n+m} E \\ (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \otimes (e_{n+1} \otimes \cdots \otimes e_{n+m}) &\mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+m}\end{aligned}$$

factoriza vía el morfismo, que llamaremos producto exterior de formas, $\Lambda^n E \otimes \Lambda^m E \to \Lambda^{n+m} E$, $(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes (e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{n+m}) \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+m}$.

1. Proposición : *El producto exterior de formas es asociativo:* $(\Omega_n \wedge \Omega_m) \wedge \Omega_r = \Omega_n \wedge (\Omega_m \wedge \Omega_r)$, *con* $\Omega_i \in \Lambda^i E$.

El producto exterior de formas es anticonmutativo: $\Omega_n \wedge \Omega_m = (-1)^{n \cdot m} \Omega_m \wedge \Omega_n$, *para toda* $\Omega_n \in \Lambda^n E$ *y* $\Omega_m \in \Lambda^m E$.

Demostración. La asociatividad es clara, en cuanto a la anticonmutatividad digamos sólo que

$$(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \wedge (e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{n+m}) = (-1)^{n \cdot m} (e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{n+m}) \wedge (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$$

□

Dado $w \in E^*$ y $E \otimes E'$ consideremos el morfismo "de contracción interior por w en el primer factor" $i_w^1\colon E \otimes E' \to E'$, $i_w^1(e \otimes e') := w(e) \cdot e'$. Por otra parte, sea en $E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E$

$$\hat{i}_w\colon E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to E \otimes \overset{n-1}{\cdots} \otimes E,\ \hat{i}_w(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := \sum_i (-1)^{i-1} \cdot w(e_i) \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes \hat{e}_i \otimes \cdots \otimes e_n$$

que llamaremos contracción interior hemisimétrica, que es la suma de la contracción interior por w en cada factor afectada de un signo.

$TE := k \oplus E \oplus (E \otimes E) \oplus \cdots \oplus (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E) \otimes \ldots$, con la suma, $+$, y con el producto, $\otimes$, se dice que es el álgebra tensorial asociada a E. $\Lambda E := k \oplus E \oplus (\Lambda^2 E) \oplus \cdots \oplus (\Lambda^n E) \otimes \ldots$, con la suma, $+$, y con el producto, $\wedge$, se dice que es el álgebra exterior asociada a E. El epimorfismo $TE \to \Lambda E$, $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es un morfismo de álgebras (= de anillos).

2. Proposición : *La contracción interior hemisimétrica es una antiderivación del álgebra tensorial, es decir, dadas $T_n \in (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)$ y $T_m \in (E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E)$, entonces*

$$\hat{i}_w(T_n \otimes T_m) = (\hat{i}_w T_n) \otimes T_m + (-1)^n T_n \otimes (\hat{i}_w T_m)$$

Demostración. Basta demostrar la proposición para $T_n = e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$ y $T_m = e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$. Ahora bien, la suma de las contracciones interiores por w en cada factor (afectado por un signo) es contraer primero en los n-primeros factores más contraer después en los últimos m factores. La cuestión del signo se la dejamos al lector. □

La contracción interior hemisimétrica en el álgebra tensorial define por paso al cociente un aplicación lineal que denominaremos "la contracción interior" en el álgebra exterior. En efecto, si $v_i = v_j$ $(i < j)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\overline{\hat{i}_w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)} = \\
&= (-1)^{i-1} w(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_r + (-1)^{j-1} w(v_j) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_r \\
&= ((-1)^{i-1} + (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{j-i-1}) w(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_r = 0
\end{aligned}$$

Tenemos pues el morfismo

$$i_w \colon \Lambda^r E \to \Lambda^{r-1} E, \quad i_w(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) := \overline{\hat{i}_w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)} = \sum_i (-1)^{i-1} w(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_r$$

3. Corolario : *La contracción interior es una antiderivación del álgebra exterior, es decir, dadas $\Omega_n \in \Lambda^n E$ y $\Omega_m \in \Lambda^m E$, entonces*

$$i_w(\Omega_n \wedge \Omega_m) = (i_w \Omega_n) \wedge \Omega_m + (-1)^n \Omega_n \wedge (i_w \Omega_m)$$

Las n-formas se identifican con las aplicaciones hemisimétricas de orden n. Veamos qué es la contracción interior por un vector de una aplicación hemisimétrica: Sea $e \in E$ y $\Omega_n = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n \in \Lambda^n E^* = Hem_k(E \times \overset{n}{\ldots} \times E, k)$ entonces

$$\begin{aligned}
(i_{e_1} \Omega_n)(e_2, \ldots, e_n) &= (i_e(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n))(e_2, \ldots, e_n) \\
&= (\sum_i (-1)^{i-1} w_i(e_1) w_1 \wedge \cdots \wedge \hat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_n))(e_2, \ldots, e_n) \\
&\overset{1}{=} \sum_i \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^{i-1} \text{signo}(\sigma) w_1(e_{\sigma(2)}) \cdots w_i(e_1) \cdots w_n(e_{\sigma(n)}) \\
&\overset{2}{=} w_1 \wedge \cdots \wedge w_n(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \Omega_n(e_1, e_2, \ldots, e_n)
\end{aligned}$$

$\overset{1}{=}$ Consideramos S_{n-1} como el subgrupo de S_n formado por las permutaciones que dejan el 1 fijo.

$\overset{2}{=}$ Si definimos $\tau_i \in S_n$, la permutación que transforma $\{1,\dots,n\}$ en $\{2,\dots,i-1,1,i,\dots,n\}$, entonces signo$(\tau) = (-1)^{i-1}$ y $S_n = S_{n-1}\cdot\tau_1 \coprod\cdots\coprod S_{n-1}\cdot\tau_n$ (porque $S_{n-1}\cdot\tau_i$ son las permutaciones que transforman el 1 en el i).

Para los ejercicios que siguen observemos que dado un subespacio vectorial $V\subseteq E$, tomando duales tenemos el morfismo "de restricción" $E^*\to V^*$, $w\mapsto w_{|V}$ $(w_{|V}(v) := w(v)$, para toda $v\in V)$, tenemos pues morfismos $\Lambda^i E^*\to\Lambda^i V^*$, $w_1\wedge\cdots\wedge w_i \mapsto (w_1\wedge\cdots\wedge w_i)_{|V} := w_{1|V}\wedge\cdots\wedge w_{i|V}$.

4. Ejercicio : Sea E un espacio euclídeo orientado de dimensión n y $E'\subseteq E$ un hiperplano. Sea N un vector normal a E' de módulo 1. Sea w_E la forma de volumen de E.

1. Probar que $i_N w_E$ restringida a E' es igual a la forma de volumen $w_{E'}$ de E' que lo orienta, de modo que si $e_2,\dots,e_n$ es una base positivamente orientada de E' entonces $N, e_2,\dots,e_n$ es una base positivamente orientada de E.

2. Dado $e\in E$, $(i_e w_E)_{|E'} = T_2(e,N)\cdot w_{E'}$.

5. Ejercicio : Sea (E,T_2) un espacio vectorial euclídeo y $R\subset E$ un subespacio vectorial de dimensión 1. Sea r un vector de R de módulo 1 que oriente a R y sea w_R la forma de "longitud" de R. Dado $e\in E$ probar que $(i_e T_2)_{|R} = T_2(e,r)\cdot w_R$.

1.7. Álgebra tensorial simétrica

"Queremos definir ahora un producto conmutativo, con las propiedades multilineales de $\otimes$".

Sea V el k-subespacio vectorial de $E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E$, generado por los vectores

$$e_1\otimes\overset{j}{\cdots}\otimes e_j\otimes\cdots\otimes e_k\otimes\cdots\otimes e_n - e_1\otimes\overset{j}{\cdots}\otimes e_k\otimes\cdots\otimes e_j\otimes\cdots\otimes e_n$$

variando e_i, j, k.

1. Definición : Llamaremos álgebra exterior n de E, que denotaremos por S^nE, a

$$S^nE := (E\otimes_k\overset{n}{\cdots}\otimes E)/V$$

2. Notación: *Denotaremos* $\overline{e_1\otimes\cdots\otimes e_n}\in(E\otimes_k\overset{n}{\cdots}\otimes E)/V = S^nE$ *por* $e_1\cdots e_n$.

Observemos que $\cdot$ además de las propiedades multilineales heredadas de $\otimes$, cumple que

$$e_1\cdots e_n = e_{\sigma(1)}\cdots e_{\sigma(n)}$$

para todo $\sigma\in S_n$.

3. Como $S^nE = (E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E)/V$, dar un morfismo lineal $\phi\colon S^nE\to F$ equivale a dar un morfismo $E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E\to F$ que se anule en V, es decir, equivale a definir $\phi(e_1\cdots e_n)$ (para todo $e_1,\dots,e_n\in E$) que sea k-lineal en cada factor y de modo que $\phi(e_1\cdots e_n) = \phi(e_{\sigma(1)}\cdots e_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma\in S_n$. Es decir,

$$\begin{aligned} Hom_k(S^nE,F) &= \{T\in Mult_k(E\times\overset{n}{\cdots}\times E,F)\mid T(e_1,\cdots,e_n) = T(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}),\forall\sigma\in S_n\}\\ &= \text{Aplic. n-mult. simétricas de } E \text{ en } F =: Sim_k(E\times\overset{n}{\cdots}\times E,F)\end{aligned}$$

4. Teorema : *Sea* E *un espacio de base* $\{e_1,\dots,e_n\}$. *Entonces* $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{1\le i_1\le\cdots\le i_r\le n}$ *es una base de* S^rE.

Demostración. Sabemos que $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\}_{1\leq i_j\leq n}$ es una base de $E\otimes\overset{r}{\cdots}\otimes E$. Por tanto, tomando clases tenemos que $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{1\leq i_j\leq n}$ es un sistema generador de S^rE. Como $e_{i_1}\cdots e_{i_r}=e_{i_{\sigma(1)}}\cdots e_{i_{\sigma(r)}}$ para todo $\sigma\in S_r$, tendremos que $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_r\leq n}$ es un sistema generador de S^rE.

Nos falta probar que son linealmente independientes. Sea $t=\sum\limits_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_r\leq n}\lambda_{i_1,\ldots,i_r}e_{i_1}\cdots e_{i_r}=0$. Sea $\{w_1,\ldots,w_n\}$ la base dual de $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Dado $i_1\leq\cdots\leq i_r$ sea J el conjunto de todas las combinaciones con repetición de este conjunto y $w=\sum\limits_{\{j_1,\ldots,j_r\}\in J}w_{j_1}\otimes\cdots\otimes w_{j_r}\in\operatorname{Hom}_k(S^rE,k)$. Entonces,

$$\lambda_{i_1,\ldots,i_r}=w(t)=0$$

□

S_n opera de modo natural en $E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E$ permutando los factores: dada $\sigma\in S_n$ y $e_1\otimes\cdots\otimes e_n$, $\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_n):=e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(n)}$. Sea

$$(E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E)^{S_n}:=\{T\in E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E\mid\sigma(T)=T\text{ para todo }\sigma\in S_n\}$$

El morfismo composición

$$\begin{aligned}(E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E)\otimes(E\otimes\overset{m}{\cdots}\otimes E)=E\otimes\overset{n+m}{\cdots}\otimes E&\to S^{n+m}E\\(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)\otimes(e_{n+1}\otimes\cdots\otimes e_{n+m})&\mapsto e_1\cdots e_{n+m}\end{aligned}$$

factoriza vía el morfismo, que llamaremos producto simétrico de tensores simétricos, $S^nE\otimes S^mE\to S^{n+m}E$, $(e_1\cdots e_n)\otimes(e_{n+1}\cdots e_{n+m})\mapsto e_1\cdots e_{n+m}=:(e_1\cdots e_n)\cdot(e_{n+1}\cdots e_{n+m})$.

5. Proposición: *El producto simétrico de tensores simétricos es asociativo:* $(T_n\cdot T_m)\cdot T_r=T_n\cdot(T_m\cdot T_r)$, *con* $T_i\in S^iE$.

El producto simétrico de tensores simétricos es conmutativo: $T_n\cdot T_m=T_m\cdot T_n$, *para toda* $T_n\in S^nE$ *y* $T_m\in S^mE$.

$S^{\cdot}E:=k\oplus E\oplus(S^2E)\oplus\cdots\oplus(S^nE)\otimes\ldots$, con la suma, $+$, y con el producto, $\cdot$, se dice que es el álgebra simétrica asociada a E. El epimorfismo $TE\to S^{\cdot}E$, $e_1\otimes\cdots\otimes e_n\mapsto e_1\cdots e_n$ es un morfismo de álgebras (= de anillos). Denotaremos $S^0E=k$ y $S^1E=E$.

Sea $w\in E^*$, llamaremos al morfismo

$$\tilde{i}_w\colon E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E\to E\otimes\overset{n-1}{\cdots}\otimes E,\ \tilde{i}_w(e_1\otimes\cdots\otimes e_n):=\sum_i w(e_i)\cdot e_1\otimes\cdots\otimes\hat{e}_i\otimes\cdots\otimes e_n$$

contracción interior simétrica, que es la suma de la contracción interior por w en cada factor.

6. Proposición: *La contracción interior simétrica es una derivación del álgebra tensorial, es decir, dadas* $T_n\in(E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E)$ *y* $T_m\in(E\otimes\overset{m}{\cdots}\otimes E)$, *entonces*

$$\tilde{i}_w(T_n\otimes T_m)=(\tilde{i}_wT_n)\otimes T_m+T_n\otimes(\tilde{i}_wT_m)$$

Demostración. Basta demostrar la proposición para $T_n=e_1\otimes\cdots\otimes e_n$ y $T_m=e'_1\otimes\cdots\otimes e'_m$. Ahora bien, la suma de las contracciones interiores por w en cada factor es contraer primero en los n-primeros factores más contraer después en los últimos m factores. □

La contracción interior simétrica en el álgebra tensorial define por paso al cociente un aplicación lineal que denominaremos "la contracción interior" en el álgebra simétrica. En efecto, el morfismo

$$i_w \colon S^r E \to S^{r-1}E, \quad i_w(v_1 \cdots v_r) := \sum_i w(v_i) \cdot v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_r$$

está bien definido.

7. Corolario : *La contracción interior es una derivación del álgebra simétrica, es decir, dadas $T_n \in S^n E$ y $T_m \in S^m E$, entonces*

$$i_w(T_n \cdot T_m) = (i_w T_n) \cdot T_m + T_n \cdot (i_w T_m)$$

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Vía el isomorfismo lineal $E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \simeq Mult_k(E^* \times \overset{n}{\cdots} \times E^*, k)$, tenemos que $(E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)^{S_n} = Sim_k(E^* \times \overset{n}{\cdots} \times E^*, k)$.

8. Proposición : *Supongamos que la característica de k es primo con $n!$. El morfismo $S \colon S^n E \to E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E$, $S(e_1 \cdots e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(n)}$ establece un isomorfismo entre $S^n E$ y $(E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)^{S_n}$ (cuyo morfismo inverso es precisamente $\frac{1}{n!} \cdot \pi$, donde $\pi \colon E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to S^n E$ es el morfismo natural de paso a cociente).*

Demostración. Es una comprobación inmediata. □

En característica cero, los tensores simétricos de orden n se identifican con las aplicaciones simétricas de orden n. Veamos qué es la contracción interior por un vector de una aplicación simétrica: Sea $e \in E$ y $T_n = w_1 \cdots w_n \in S^n E^* = Sim_k(E \times \overset{n}{\cdots} \times E, k)$ entonces

$$\begin{aligned}
(i_{e_1} T_n)(e_2, \dots, e_n) &= (i_e(w_1 \cdots w_n))(e_2, \dots, e_n) \\
&= (\sum_i w_i(e_1) \cdot w_1 \cdots \hat{w}_i \cdots w_n)(e_2, \dots, e_n) \\
&\overset{1}{=} \sum_i \sum_{\sigma \in S_{n-1}} w_1(e_{\sigma(2)}) \cdots w_i(e_1) \cdots w_n(e_{\sigma(n)}) \\
&\overset{2}{=} w_1 \cdots w_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = T_n(e_1, e_2, \dots, e_n)
\end{aligned}$$

$\overset{1}{=}$ Consideramos S_{n-1} como el subgrupo de S_n formado por las permutaciones que dejan el 1 fijo.

$\overset{2}{=}$ Si definimos $\tau_i \in S_n$, la permutación que transforma $\{1, \dots, n\}$ en $\{2, \dots, i-1, 1, i, \dots, n\}$, entonces $S_n = S_{n-1} \cdot \tau_1 \coprod \cdots \coprod S_{n-1} \cdot \tau_n$ (porque $S_{n-1} \cdot \tau_i$ son las permutaciones que transforman el 1 en el i).

1.8. Módulo de diferenciales. Derivaciones

Sea k un cuerpo, A un anillo y $k \hookrightarrow A$ un morfismo de anillos (en este caso se dice que A es una k-álgebra y escribiremos $\lambda \mapsto \lambda$). Sea E el A-módulo libre de base $\{\mathbf{db}$, para todo $b \in A\}$, es decir, E es el A-módulo formado por las sumas formales finitas $\sum\limits_{b \in A} a_b \mathbf{db}$ ($a_b \in A$ y casi todos nulos). Sea E' el A-submódulo de E generado por los elementos $\mathbf{d(b+b')} - \mathbf{db} - \mathbf{db'}$, $\mathbf{d}(\lambda\mathbf{b}) - \lambda\mathbf{db}$ y $\mathbf{d(bb')} - b'\mathbf{db} - b\mathbf{db'}$ (para todo $b, b' \in A$ y $\lambda \in k$).

1. Definición : Llamaremos A-módulo de diferenciales de Kahler de A sobre k, que denotaremos por $\Omega_{A/k}$, a

$$\Omega_{A/k} := E/E'$$

2. Notación:: *Denotaremos* $\overline{a\mathbf{db}}$ *por adb.*

Observemos que $d(b+b') = db + db'$, $d\lambda b = \lambda db$ y $d(bb') = b'db + bdb'$.

Dar un morfismo de A-módulos $\phi\colon \Omega_{A/k} \to M$, equivale a dar un morfismo de A-módulos $E \to M$, que se anule sobre E', es decir, equivale a dar $\phi(db)$, para todo $b \in A$, de modo que $\phi(d(b+b')) = \phi(db) + \phi(db')$, $\phi(d\lambda b)) = \lambda\phi(db)$ y $\phi(dbb') = b'\phi(db) + b\phi(db')$.

3. Definición : Sea A una k-álgebra y M un A-módulo. Diremos que una aplicación $D\colon A \to M$ es una k-derivación si verifica las siguientes condiciones:

1. D es un morfismo de k-módulos.
2. $D(ab) = bD(a) + aD(b)$ para todo $a, b \in B$.

Observemos que $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1D(1) + 1D(1) = 2D(1)$, luego $D(1) = 0$. Además, dado $\lambda \in k$, $D(\lambda) = \lambda D(1) = 0$.

El conjunto de todas las k-derivaciones de A en M se denota por $Der_k(A, M)$. Si definimos

$$(D + D')(a) := D(a) + D'(a) \qquad (aD)(b) := aDb$$

tenemos que el conjunto de todas las k-derivaciones de A en M tiene estructura de A-módulo.

4. Proposición : *Sea A una k-álgebra y M un A-módulo. Se cumple que*

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) = \mathrm{Der}_k(A, M)$$

Demostración. Dado un morfismo de A-módulos $T\colon \Omega_{A/k} \to M$ consideremos la derivación $D_T\colon A \to M$, $D_T(a) := T(da)$. Recíprocamente, dada una derivación $D\colon A \to M$, consideremos el morfismo de A-módulos $T_D\colon \Omega_{A/k} \to M$, $T_D(db) = Db$. Las asignaciones $D \rightsquigarrow T_D$, $T \rightsquigarrow D_T$ son inversas entre sí. $\square$

El morfismo natural $d\colon A \to \Omega_{A/k}$, $a \mapsto da$, es una derivación, es decir, verifica que $d(a + a') = da + da'$, $d(ab) = adb + bda$. Además d se anula sobre k.

Sea $A = k[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios y M un A-módulo. Si una k-derivación

$$D\colon k[x_1, \dots, x_n] \to M$$

se anula sobre los x_i entonces $D = 0$: Por linealidad basta probar que es nula sobre los monomios x^α y para ello procedamos por inducción sobre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Supongamos $\alpha_1 \neq 0$, sea β, tal que $\beta_1 = \alpha_1 - 1$ y $\beta_i = \alpha_i$, para $i > 1$ (luego $|\beta| < |\alpha|$), entonces $D(x^\alpha) = D(x_1 \cdot x^\beta) = x^\beta \cdot Dx_1 + x_1 \cdot Dx^\beta = 0 + 0 = 0$.

Dado $m \in M$, sea $m\frac{\partial}{\partial x_i}$ la derivación definida por $m\frac{\partial}{\partial x_i}(p(x)) := \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot m$. Dada una derivación D entonces $D = \sum\limits_i (Dx_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, pues la diferencia entre los dos términos de la igualdad es una derivación que se anula en todos los x_i. Ahora ya es claro el teorema siguiente.

5. Teorema : $\mathrm{Der}_k(k[x_1, \dots, x_n], M) = M\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus M\frac{\partial}{\partial x_n}$.

6. Corolario : $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k} = k[x_1, \dots, x_n]dx_1 \oplus \cdots \oplus k[x_1, \dots, x_n]dx_n$.

Demostración. La diferencial $d\colon k[x_1,\dots,x_n]\to\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$ es una derivación, luego $d=\sum_i dx_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}$ por el teorema anterior y $dp(x)=\sum\limits_i\frac{\partial p(x)}{\partial x_i}\cdot dx_i$. Por tanto, $dx_1,\dots dx_n$ es un sistema generador de $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$. Por otra parte, el morfismo $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}\to k[x_1,\dots,x_n]dx_1\oplus\cdots\oplus k[x_1,\dots,x_n]dx_n$, $dp(x)\mapsto\sum\limits_i\frac{\partial p(x)}{\partial x_i}\cdot dx_i$, está bien definido, lo que muestra que $dx_1,\dots dx_n$ es una base.

Otro método de demostración estándar en Matemáticas, que esencialmente hemos seguido, dice: de la igualdad (funtorial) para todo M, de los dos extremos de las igualdades,

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{k[x_1,\dots,x_n]}(\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k},M)&=\operatorname{Der}_{k[x_1,\dots,x_n]}(k[x_1,\dots,x_n],M)=M\frac{\partial}{\partial x_1}\oplus\cdots\oplus M\frac{\partial}{\partial x_n}\\&=\operatorname{Hom}_{k[x_1,\dots,x_n]}(k[x_1,\dots,x_n]dx_1\oplus\cdots\oplus k[x_1,\dots,x_n]dx_n,M)\end{aligned}$$

se deduce que $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}=k[x_1,\dots,x_n]dx_1\oplus\cdots\oplus k[x_1,\dots,x_n]dx_n$. □

Sea $\mathfrak{m}_\alpha\subset A$ un ideal maximal tal que $A/\mathfrak{m}_\alpha=k$ como k-álgebras. Dado $a\in A$, denotemos $a(\alpha)=\bar a\in k=A/\mathfrak{m}_\alpha$. La aplicación

$$d_\alpha\colon A\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2,\quad d_\alpha a:=\overline{a-a(\alpha)}$$

es una k-derivación: Observemos que $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es un A-módulo, $a\cdot\bar m:=\overline{am}=a(\alpha)\cdot\bar m$ (porque $(a-a(\alpha))\cdot m\in\mathfrak{m}_\alpha^2$). Ahora ya,

$$d_\alpha(a\cdot b)=\overline{a\cdot b-a(\alpha)\cdot b(\alpha)}=\overline{a\cdot(b-b(\alpha))+b(\alpha)\cdot(a-a(\alpha))}=a(\alpha)\cdot d_\alpha b+b(\alpha)\cdot d_\alpha a$$

Dado un A-módulo M, denotemos $M(\alpha)=M/\mathfrak{m}_\alpha\cdot M$.

7. Teorema: $\Omega_{A/k}(\alpha)=\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$.

Demostración. El morfismo $\Omega_{A/k}(\alpha)\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, $\overline{adb}\mapsto a(\alpha)d_\alpha b$ está bien definido y el morfismo inverso es $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2\to\Omega_{A/k}(\alpha)$, $\bar b\mapsto\overline{db}$. □

Dado $\alpha\in k^n$, el núcleo del morfismo $k[x_1,\dots,x_n]\to k$, $p(x_1,\dots,x_n)\mapsto p(\alpha)$, es el ideal maximal $\mathfrak{m}_\alpha=(x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$. El morfismo natural, $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}(\alpha)=\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, asigna $dp\mapsto d_\alpha p=\overline{p(x)-p(\alpha)}$. Como $dp=\sum_i\frac{\partial p}{\partial x_i}dx_i$ entonces $d_\alpha p=\sum_i\frac{\partial p}{\partial x_i}(\alpha)\cdot d_\alpha x_i$.

Si M es un A-módulo e $I\subset A$ un ideal entonces $\Lambda_A^r M/I\cdot\Lambda_A^r M=\Lambda_{A/I}(M/I\cdot M)$, pues los morfismos $\overline{m_1\wedge\cdots\wedge m_r}\mapsto\bar m_1\wedge\cdots\wedge\bar m_r$, $\bar m_1\wedge\cdots\wedge\bar m_r\mapsto\overline{m_1\wedge\cdots\wedge m_r}$ son inversos entre sí. Por lo tanto,

$$(\Lambda_A^r\Omega_{A/k})(\alpha)=\Lambda_k^r\ \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$$

Si N es un A-módulo anulado por un ideal I, en particular es un A/I-módulo, $\bar a\cdot n:=a\cdot n$. Recíprocamente, si N es un A/I-módulo es en particular un A-módulo $a\cdot n:=\bar{a}n$. Si N' es otro A/I-módulo entonces $\operatorname{Hom}_A(N,N')=\operatorname{Hom}_{A/I}(N,N')$. Si M y N son A-módulos y N es un A-módulo anulado por un ideal I, entonces todo morfismo de A-módulos $f\colon M\to N$ se anula en $I\cdot M$, luego podemos definir $\bar f\colon M/I\cdot M\to N$, $\bar m\mapsto f(m)$ y $f=\bar f\circ\pi$, donde $\pi\colon M\to M/I\cdot M$, $\pi(m):=\bar m$. Tenemos $\operatorname{Hom}_A(M,N)=\operatorname{Hom}_A(M/I\cdot M,N)$, $f\mapsto\bar f$.

8. Teorema: *Sea N un A-módulo anulado por $\mathfrak{m}_\alpha$ (es decir, un $A/\mathfrak{m}_\alpha$-módulo). Entonces,*

$$\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2,N)=\operatorname{Der}_k(A,N)$$

Demostración. $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, N) = \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, N) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}(\alpha), N) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, N) = \mathrm{Der}_k(A, N)$. □

Explícitamente, dado $f\colon \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \to N$ tenemos $f \circ d_\alpha\colon A \to N$; dado $D\colon A \to N$, tenemos $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \to N$, $d_\alpha b \mapsto Db$.

1.9. Diferencial, contracción por un campo, derivada de Lie

1. Teorema: *El morfismo natural $d\colon A \to \Omega_{A/k}$ extiende de modo único a una antiderivación de grado 1 del álgebra exterior de $\Omega_{A/k}$ de cuadrado nulo, es decir, existen morfismos únicos $d_i\colon \Lambda^i\Omega_{A/k} \to \Lambda^{i+1}\Omega_{A/k}$, de modo que $d_0 = d$, $d_{i+1} \circ d_i = 0$ y*

$$d_{n+m}(\Omega_n \wedge \Omega_m) = (d_n\Omega_n) \wedge \Omega_m + (-1)^n \Omega_n \wedge (d_m\Omega_m)$$

Demostración. Estamos obligados a definir $d_1 : \Omega_{A/k} \to \Lambda^2\Omega_{A/k}$, $adb \mapsto da\wedge db$ (que está bien definida) y en general $d_n(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) := \sum\limits_i (-1)^{i-1} \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge d_1(w_i) \wedge \cdots w_n$.

Obsérvese que $d_n(adb_1 \wedge \cdots \wedge db_n) = da \wedge db_1 \wedge \cdots \wedge db_n$, luego $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

□

2. Notación: *Denotaremos $d_n = d$, si no induce a equivocación, $\Omega^i = \Lambda^i\Omega_{A/k}$, siendo $\Omega^0 = A$. Denotaremos $\Omega^{\cdot} = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \Omega^i$. $\Omega^{\cdot}$, con el producto exterior es un álgebra "anticonmutativa".*

3. Proposición : *Sea $D \in \mathrm{Der}_k(A, A) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, A)$. Entonces $D^L := i_D \circ d + d \circ i_D$ es una derivación de grado cero de $\Omega^{\cdot}$, que sobre A es D (sobrentendemos que i_D sobre A es nulo).*

Demostración. Por ser i_D y d antiderivaciones de grado -1 y 1 respectivamente entonces D^L es una derivación de grado cero (compruébese). □

4. Proposición : $\boxed{D^L \circ d = d \circ D^L}$.

Demostración. $D^L \circ d = (i_D \circ d + d \circ i_D) \circ d = d \circ i_D \circ d$. $d \circ D^L = d \circ (i_D \circ d + d \circ i_D) = d \circ i_D \circ d$. □

Por tanto, $D^L(adb_1 \wedge \cdots \wedge db_n) = Da \cdot db_1 \wedge \cdots \wedge db_n + \sum\limits_i adb_1 \wedge \cdots \wedge d(Db_i) \wedge \cdots \wedge db_n$.

Dadas $D, D' \in \mathrm{Der}_k(A, A)$, definamos $[D, D'] := D \circ D' - D' \circ D$ que resulta ser una derivación de A. Por otra parte, la derivación D^L sobre $\Omega_{A/k}$ induce de modo natural una derivación, denotémosla también D^L, sobre $\mathrm{Der}_k(A, A) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, A)$: Dada D' definimos $D^L D$ como sigue, $(D^L D')(w) \overset{*}{:=} D(w(D')) - (D^L w)(D')$, para cada $w \in \Omega_{A/k}$. Se cumple que $D^L D' = [D, D']$: basta comprobar la igualdad para $w = db$,

$$[D, D'](db) = (D \circ D' - D' \circ D)(b)$$
$$(D^L D')(db) = D(db(D')) - (D^L(db))(D') = D(D'b) - (dDb)(D') = D(D'b) - D'(Db)$$

De hecho, podríamos haber definido $D^L D' := [D, D']$, después podríamos haber definido $D^L w$, para toda $w \in \Omega_{A/k}$ (suponiendo que $\Omega_{A/k} = \mathrm{Der}_k(A, A)^*$) y después podríamos haber extendido D^L como antiderivación sobre el álgebra exterior de $\Omega_{A/k}$. Por último, nos quedaría probar que $D^L = i_D \circ d + d \circ i_D$.

5. Proposición: *Sean $D, D' \in \mathrm{Der}_k(A,A)$ dos derivaciones. Entonces*

$$\boxed{D^L \circ i_{D'} - i_{D'} \circ D^L = i_{[D,D']}}$$

Demostración. Por ser D^L una derivación de grado cero y $i_{D'}$ una antiderivación de grado -1. entonces $D^L \circ i_{D'} - i_{D'} \circ D^L$ es una antiderivación de grado -1, que estará determinada por lo que vale sobre $\Omega_{A/k}$, que es $i_{[D,D']}$, por $\overset{*}{=}$. □

6. Fórmula de Cartan: *Dada $w \in \Omega_{A/k}$ entonces*

$$\boxed{dw(D,D') = D(w(D')) - D'(w(D)) - w([D,D'])}$$

Demostración. $dw(D,D') = i_{D'}(i_D dw) = i_{D'}((D^L - d \circ i_D)(w)) = (D^L \circ i_{D'} - i_{[D,D']})w - D'w(D) = D(w(D')) - w([D,D']) - D'w(D)$. □

1.10. Cálculo valorado

1. Definición: Una aplicación $d\colon M \to M \otimes_A \Omega_{A/k}$ diremos que es una diferencial en M, si

1. $d(m+m') = dm + dm'$.
2. $d(am) = adm + m \otimes da$.

La diferencial $d\colon M \to M \otimes \Omega_{A/k}$ extiende a $M \otimes \Omega^{\cdot}_{A/k}$: $d(m \otimes \Omega_i) := dm \wedge \Omega_i + m \otimes d\Omega_i$ (observemos que $dm = \sum_j m_j \otimes w_j$, con $w_j \in \Omega_{A/k}$ y denotamos $dm \wedge \omega_i = \sum_j m_j \otimes w_j \wedge \Omega_i$). Los elementos de $M \otimes \Omega^i$ los llamaremos i-formas valoradas en M.

Dada otra diferencial $d\colon M' \to M' \otimes \Omega_{A/k}$, tenemos la diferencial $d\colon M \otimes_A M' \to M \otimes_A M' \otimes_A \Omega_{A/k}$, $d(m \otimes m') := dm \otimes m' + m \otimes dm'$ (reordenando en el primer sumando los factores del producto tensorial para que todo tenga sentido).

Dadas $m \otimes \Omega_i \in M \otimes \Omega^i$ y $m' \otimes \Omega_j$ denotemos $(m \otimes \Omega_i) \wedge (m' \otimes \Omega_j) := m \otimes m' \otimes \Omega_i \wedge \Omega_j \in M \otimes M' \otimes \Omega^{i+j}$. Tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes \Omega^{\cdot}) \otimes (M' \otimes \Omega^{\cdot}) & \overset{\wedge}{\to} & M \otimes M' \otimes \Omega^{\cdot} \\ w_i \otimes w_j & \mapsto & w_i \wedge w_j \end{array}$$

Se cumple que $\boxed{d(w_i \wedge w_j) = dw_i \wedge w_j + (-1)^i w_i \wedge dw_j}$. Dado $D \in \mathrm{Der}_k(A,A)$, sea $i_D\colon M \otimes \Omega^{\cdot} \to M \otimes \Omega^{\cdot}$, $i_D(m \otimes \Omega_i) = m \otimes i_D \Omega_i$. Obviamente, $\boxed{i_D(w_i \wedge w_j) = i_D w_i \wedge w_j + (-1)^i w_i \wedge i_D w_j}$. Definamos $D^L := i_D \circ d + d \circ i_D$, que resulta ser una derivación, es decir

$$\boxed{D^L(w_i \wedge w_j) = D^L w_i \wedge w_j + w_i \wedge D^L w_j}$$

Denotaremos $D^L m = i_D dm =: D^{\nabla} m$. Es sencillo comprobar que

$$\boxed{D^L \circ i_{D'} - i_{D'} \circ D^L = i_{[D,D']}}$$

Dada una 1-forma valorada $w \in M \otimes \Omega$, tenemos que

$$dw(D_1, D_2) = i_{D_2}(i_{D_1} dw) = i_{D_2}(-d(w(D_1)) + D_1^L w) = -D_2^{\nabla}(w(D_1)) + D_1^{\nabla}(w(D_2)) - w([D_1, D_2])$$

2. Definición : Una conexión ∇ en un A-módulo M es una aplicación $\mathrm{Der}_k(A,A)\times M\to M$, donde seguimos la notación $(D,m)\mapsto D^\nabla m$, cumpliendo

1. $(D+D')^\nabla m=(D^\nabla m)+(D'^\nabla m)$.
2. $(aD)^\nabla m=a(D^\nabla m)$.
3. $D^\nabla(am)=(Da)\cdot m+aD^\nabla m$.
4. $D^\nabla(m+m')=D^\nabla m+D^\nabla m'$.

   Para todo $a\in A$, $m,m'\in M$, $D,D'\in \mathrm{Der}_k(A,A)$.

Toda diferencial $d\colon M\to M\otimes_A\Omega_{A/k}$, define la conexión ∇ dada por $D^\nabla m:=i_D(dm)$, que cumple que $D^\nabla(am)=i_D(d(am))=i_D(m\otimes da+adm)=(Da)m+ai_Ddm=(Da)m+aD^\nabla m$ y las demás propiedades exigidas a las conexiones.

A partir de ahora supondremos que $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo libre finito generado

$\mathrm{Der}_k(A,A)$ es un A-módulo libre finito generado y $\Omega_{A/k}$ y $\mathrm{Der}_k(A,A)$ son duales entre sí. Además, $M\otimes_A\Omega_{A/k}=\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_k(A,A),M)$, $m\otimes w$ pensado en $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}_k(A,A),M)$ es la aplicación lineal $(m\otimes w)(D):=w(D)m$.

3. Proposición : *Supongamos que $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo libre finito generado. Existe una correspondencia biunívoca entre conexiones en M y diferenciales de M.*

Demostración. A cada diferencial le hemos asignado ya una conexión lineal. Recíprocamente, dada la conexión ∇ sea $d(m)$, tal que $dm(D)=D^\nabla m$.

□

Si tenemos dos módulos M,N con sendas diferenciales, podemos definir una diferencial en $\mathrm{Hom}_A(M,N)$:

$$d\colon \mathrm{Hom}_A(M,N)\to \mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes\Omega_{A/k}=\mathrm{Hom}_A(M,N\otimes\Omega_{A/k})$$

$d(T)(m):=d(T(m))-(T\otimes 1)(dm)$. Como sabemos esta diferencial extiende a $\mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes\Omega^{\cdot}$. Se cumple que dado $T\in\mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes\Omega^n=\mathrm{Hom}_A(M,N\otimes\Omega^n)$ su diferencial como elemento de $\mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes\Omega^{\cdot}$ coincide con la diferencial de T pensado como elemento de $\mathrm{Hom}_A(M,N\otimes\Omega^n)$.

Un morfismo $T\colon M\to N$ de A-módulos diremos que es diferencial si $dT=0$, es decir, $d\circ T=T\circ d$. Si el morfismo T es diferencial, entonces $T\colon M\otimes\Omega^{\cdot}\to M'\otimes\Omega^{\cdot}$ conmuta con d, i_D, D^L y $(T\otimes T)(w\wedge w')=T(w)\wedge T(w')$. El morfismo $\mathrm{Hom}_A(M,N)\otimes M\to N$, $\phi\otimes m\mapsto\phi(m)$, resulta ser diferencial. Cuando tengamos una n-forma w_n valorada en $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ y otra m-forma w_m valorada en N, entendemos vía este morfismo que $w_n\wedge w_m$ es una $n+m$-forma valorada en N.

4. Definición : El morfismo A-lineal $d^2\colon M\to M\otimes\Omega^2$ diremos que es el tensor de curvatura.

5. Proposición : $d^2(m)(D_1,D_2)=D_1^\nabla D_2^\nabla m-D_2^\nabla D_1^\nabla m-[D_1,D_2]^\nabla m$.

Demostración. $i_{D_2}(i_{D_1}d^2m)=i_{D_2}(D_1^Ldm-di_{D_1}dm)=D_1^L(i_{D_2}(dm))-dm([D_1,D_2])-(dD_1^\nabla m)(D_2)=D_1^\nabla D_2^\nabla m-D_2^\nabla D_1^\nabla m-[D_1,D_2]^\nabla m$. □

Si $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo libre finito generado, entonces $\mathrm{Hom}_A(M,M\otimes\Omega^2)=\mathrm{End}_A M\otimes\Omega^2$. Denotaré por $R\in\mathrm{End}_A(M)\otimes\Omega^2$ al tensor correspondiente a d^2. Observemos que $R(D_1,D_2,m)=D_1^\nabla D_2^\nabla m-D_2^\nabla D_1^\nabla m-[D_1,D_2]^\nabla m$.

6. Proposición : *Dada $w\in M\otimes\Omega^i$, entonces*

$$\boxed{d^2w=R\wedge w}$$

Demostración. Escribamos $w = m\otimes\Omega_i$. Entonces, $d^2(m\otimes\Omega_i) = d(dm\otimes\Omega_i + m\otimes d\Omega_i) = d^2m\otimes\Omega_i - dm\otimes d\Omega_i + dm\otimes d\Omega_i + m\otimes d^2\Omega_i) = d^2m\otimes\Omega_i = R\wedge w$. □

7. Identidad diferencial de Bianchi: $dR = 0$.

Demostración. La diferencial del morfismo $M \overset{d^2}{\to} M\otimes\Omega^2$ es nula ya que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "d"] & M\otimes\Omega^2 \arrow[d, "d"] \\ M\otimes\Omega \arrow[r, "d^2"] & M\otimes\Omega^3 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

8. Definición: Una conexión sobre $M = \mathrm{Der}_k(A, A)$ se llama conexión lineal.

Supongamos que $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo libre finito generado y que tenemos una conexión lineal. Pensemos $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, \Omega_{A/k}) = \mathrm{Der}_k(A, A)\otimes\Omega$ como una 1-forma valorada (no como endomorfismo). Denotemos $d\,\mathrm{Id} = \mathrm{Tor}_\nabla \in \mathrm{Der}_k(A, A)\otimes\Omega^2$ y calculemos

$$\mathrm{Tor}_\nabla(D_1, D_2) = D_1^\nabla(\mathrm{Id}(D_2)) - D_2(\mathrm{Id}(D_1)) - \mathrm{Id}([D_1, D_2]) = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1, D_2]$$

Supongamos que ∇ es una conexión lineal simétrica, es decir, $\mathrm{Tor}_\nabla = 0$. Entonces, $0 = d^2(\mathrm{Id}) = R\wedge\mathrm{Id}$.

9. Identidad lineal de Bianchi: *Si ∇ es una conexión lineal simétrica entonces*

$$R\wedge\mathrm{Id} = 0$$

Interpretemos esta igualdad: $0 = R\wedge\mathrm{Id}(D_1, D_2, D_3) = (i_{D_1}(R\wedge\mathrm{Id}))(D_2, D_3) = (i_{D_1}R)\wedge\mathrm{Id} + R\wedge i_{D_1}\mathrm{Id})(D_2, D_3) = R(D_1, D_2)(\mathrm{Id}(D_3)) - R(D_1, D_3)(\mathrm{Id}(D_2)) + R(D_2, D_3)(\mathrm{Id}(D_1))$. Luego,

$$\boxed{R(D_1, D_2)(D_3) + R(D_3, D_1)(D_2) + R(D_2, D_3)(D_1) = 0}$$

10. Proposición: *Sea ∇ una conexión lineal, $d\colon \Omega\to\Omega\otimes\Omega$ la diferencial definida por ∇ y $\pi\colon \Omega\otimes\Omega\to\Omega^2$ el morfismo natural de paso al cociente. Sea d_C la diferencial de Cartan. Se cumple que*

$$\pi\circ d - d_C = \mathrm{Tor}_\nabla \in \mathrm{Der}_k(A, A)\otimes\Omega^2$$

Una conexión lineal es simétrica si y sólo si $\pi\circ d = d_C$

Demostración. $\pi(d(w))(D_1, D_2) = D_1^\nabla w(D_2) - D_2^\nabla w(D_1) = D_1(w(D_2)) - w(D_1^\nabla D_2) - D_2(w(D_1)) + w(D_2^\nabla D_1)$. Por la fórmula de Cartan, $d_C(w)(D_1, D_2) = D_1(w(D_2)) - D_2(w(D_1)) - w([D_1, D_2])$. Por tanto, $(\pi\circ d - d_C)(w, D_1, D_2) = \mathrm{Tor}_\nabla(w, D_1, D_2)$. □

Si definimos $D^{\nabla'}D' = D^\nabla D - \frac{1}{2}\mathrm{Tor}_\nabla(D, D')$, se tiene que ∇' es simétrica.

Consideremos los morfismos canónicos $\pi_1\colon \Omega\otimes\Omega\to\Omega^2$, $\pi_2\colon \Omega\otimes\Omega\to S^2\Omega$. Consideremos el isomorfismo $\phi\colon \Omega\otimes\Omega = \Lambda^2\Omega\oplus S^2\Omega$, $\phi(w) = (\pi_1(w), \pi_2(w))$. Dada una conexión lineal simétrica y el morfismo diferencial $d\colon \Omega\to\Omega\otimes\Omega$, tenemos que $\pi_1\circ d = d_C$ y $\pi_2\circ d = d_s$, con $d_s(w)(D_1, D_2) = (D_1^\nabla w)(D_2) + (D_2^\nabla w)(D_1)$. Se cumple que d_s es k-lineal y $d_s(f\cdot w) = (df)\cdot w + f\cdot d_s w$ y diremos que d_s es una diferencial simétrica.

Dar la conexión lineal simétrica ∇ equivale a dar la diferencial simétrica $d_s\colon \Omega\to S^2\Omega$.

Sea $d_s\colon S^m\Omega\to S^{m+1}\Omega$, $d_s(w_1\cdots w_m) := \sum_i w_1\cdots w_{i-1}\cdot d_s w_i\cdots w_m$. Para $m = 0$ definimos $d_s = d$.

1.11. Módules de jets y operadores diferenciales

Sean M y N dos A-módulos. Se dice que $F\colon N \to M$ es un operador diferencial de orden 0 si $F(an) = a \cdot F(n)$, para todo $a \in A$ y $n \in N$, es decir, si F es un morfismo de A-módulos.

1. Definición: Una aplicación k-lineal $F\colon N \to M$ se dice que es un operador diferencial de orden $n-1$ si

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_r\}\cup\{j_1,\dots,j_{n-r}\}=\{1,\dots,n\}} (-1)^r a_{i_1}\cdots a_{i_r} \cdot F(a_{j_1}\cdots a_{j_{n-r}} \cdot n) = 0$$

para todo $a_1, \dots, a_n \in A$ y $n \in N$.

Las derivaciones son operadores diferenciales de orden 1.

2. Proposición : *$F\colon N \to M$ es un operador diferencial de orden $n > 0$ si y sólo si $[F, a] := F \circ a \cdot - a \cdot F$ es un operador diferencial de orden $n-1$ para todo $a \in A$.*

3. Proposición : *La composición de un operador diferencial de orden r con uno de orden s es un operador diferencial de orden $r+s$.*

Demostración. Sea $F\colon N \to M$ un operador diferencial de orden r y $G\colon M \to M'$ un operador diferencial de orden s. Procedamos por inducción sobre $r+s$. Por hipótesis de inducción

$$[a, G\circ F] = a\cdot G\circ F - G\circ F\circ a\cdot = (a\circ G\circ F - G\circ a\cdot\circ F) + (G\circ a\cdot\circ F - G\circ a\cdot\circ F) = [a,G]\circ F + G\circ[a,F]$$

es un operador diferencial de orden $r+s-1$, luego $G \circ F$ es un operador diferencial de orden $r+s$.

□

4. Notación: $\mathrm{Diff}_k^n(N, M)$ denota el conjunto de opradores diferenciales de N en M de orden N.

5. Proposición : *Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal tal que $A/\mathfrak{m} = k$. Supongamos que M es un $A/\mathfrak{m}$-módulo. Entonces,*

$$\mathrm{Diff}_k^n(N, M) = \mathrm{Hom}_k(N/\mathfrak{m}^{n+1} \cdot N, M)$$

Demostración. Todo aplicación k-lineal $F\colon N/\mathfrak{m}^{n+1} \cdot N \to M$ es un operador diferencial de orden n: Si $a \in \mathfrak{m}$ entonces $[F, a]$ se anula en $\mathfrak{m}^n \cdot \bar{N} \subset N/\mathfrak{m}^{n+1}$, es decir, tenemos $[F, a]\colon N/\mathfrak{m}^n \cdot N \to M$, que es un operador diferencial de orden $n-1$, por hipótesis de inducción. Si $a \in k$ entonces $[F, a] = 0$. En conclusión, $[F, a]$ es un operador diferencial de orden $n-1$ y F es un operador diferencial de orden n. Por tanto, si $\pi\colon N \to N/\mathfrak{m}^{n+1} \cdot N$ es el morfismo de paso al cociente $F \circ \pi\colon N \to M$ es un operador diferencial de orden n.

Todo operador diferencial $F\colon N \to M$ de orden n se anula en $\mathfrak{m}^{n+1} \cdot N$ (recordemos que $\mathfrak{m} \cdot M = 0$), por la definición de operador diferencial de orden n. Por tanto, F factoriza vía $N/\mathfrak{m}^{n+1} \cdot N$.

□

6. Definición: Sea M un A-módulo. Diremos que $J_k^n M := (A \otimes_k A/\Delta^{n+1}) \otimes_A M$ es el módulo de r-jets de N.

7. Proposición: $\mathrm{Hom}_A(J_k^n N, M) = \mathrm{Diff}_k^n(N, M)$. *En particular,* $\mathrm{Hom}_A(J_{A/k}^n, A) = \mathrm{Diff}_k^n(A, A)$.

Demostración. Consideremos $A \otimes_k N$ como $A \otimes A$-módulo, $A \otimes_k A$ como A-álgebra, $A \to A \otimes_k A$, $a \mapsto a \otimes 1$ y M es un $A \otimes_k A/\Delta$-módulo. $\mathrm{Diff}_k^n(N, M) = \mathrm{Diff}_A^n(A \otimes_k N, M)$, $D \mapsto \mathrm{Id} \otimes D$, luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}_k^n(N, M) &= \mathrm{Diff}_A^n(A \otimes_k N, M) = \mathrm{Hom}_A((A \otimes_k N)/(\Delta^{n+1} \cdot (A \otimes_k N)), M)\\ &= \mathrm{Hom}_A((A \otimes_k A/\Delta^{n+1}) \otimes_A N, M) = \mathrm{Hom}_A(J_k^n N, M)\end{aligned}$$

□

8. Proposición: *Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal tal que $A/\mathfrak{m} = k$ y sea M un A-módulo. Entonces*

$$(J_k^n M) \otimes_A A/\mathfrak{m} = M/\mathfrak{m}^n \cdot M$$

9. Observación:

$$\mathrm{Diff}_k^n(N, M) = \mathrm{Hom}_A(J_{N/k}^n, M) = \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(J_{A/k}^n, M)) = \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Diff}_k^n(A, M))$$

Explícitamente, a $D \in \mathrm{Diff}_k^n(N, M)$ le asignamos $\tilde{D} \in \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Diff}_k^n(A, M))$, definido por $\tilde{D}(n)(a) := D(an)$ ($\mathrm{Diff}_k^n(A, M)$ lo consideramos A-módulo por la "derecha" $D \cdot a = D \circ a\cdot$).

Dado el morfismo $\mathrm{Id}\colon J_{N/k}^n \to J_{N/k}^n$, tendremos que $j\colon N \to J_{N/k}^n$, $n \mapsto 1 \otimes n$ es un operador diferencial de orden n y todo operador diferencial de orden n, $F\colon N \to N'$, es igual a la composición de j y un morfismo de A-módulos $f\colon J_{N/k}^n \to N'$.

La composición,

$$N \overset{j_N}{\to} J_{N/k}^r \overset{j_{J_{N/k}^r}}{\to} J_{J_{N/k}^r}^s = J_{A/k}^s \otimes_A J_{A/k}^r \otimes_A N$$

es un operador diferencial de orden $r+s$, luego tenemos un morfismo natural $J_{N/k}^{r+s} \to J_{A/k}^s \otimes_A J_{N/k}^r$, que dualmente es el morfismo natural $\mathrm{Diff}_k^s(N, \mathrm{Diff}_k^r(A, M)) \to \mathrm{Diff}_k^{r+s}(N, M)$, $D \mapsto \tilde{D}$, $\tilde{D}(n) := D(n)(1)$.

Tenemos la cadena de inclusiones (en $\mathrm{Hom}_k(A, A)$)

$$\mathrm{Diff}_k^1(A, A) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_k^2(A, A) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{Diff}_k^n(A, A) \hookrightarrow \cdots$$

El dual de la sucesión exacta $0 \to S^n\Omega \to (A \otimes A)/\Delta^{n+1} \to (A \otimes A)/\Delta^n \to 0$ es

$$0 \to \mathrm{Diff}_k^{n-1}(A, A) \to \mathrm{Diff}_k^n(A, A) \overset{\mathrm{simb}_n}{\to} S^n \,\mathrm{Der}_k(A, A) \to 0$$

Se dice que $\mathrm{simb}_n(F)$ es el símbolo del operador F.

10. Definición: $\mathrm{Diff}_k(A, A) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{Diff}_k^i(A, A)$.

Supongamos que A es una k-álgebra lisa, es decir, el morfismo natural $S^n\Omega \to \Delta^n/\Delta^{n+1}$ es un isomorfismo, para todo n.

11. Teorema: *Sea d_s la diferencial simétrica asociada a una conexión lineal simétrica. Los morfismos*

$$(A \otimes A)/\Delta^{n+1} \overset{\phi_n}{\to} A \oplus \Omega \oplus \cdots \oplus S^n\Omega, \quad \overline{a \otimes b} \mapsto a \cdot (b, db, d_s^2 b/2, \ldots, d_s^n b/n!)$$

son isomorfismos de A-álgebras y los diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Delta^n/\Delta^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (A \otimes A)/\Delta^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"] & (A \otimes A)/\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^n\Omega \arrow[r] & A \oplus \Omega \oplus \cdots \oplus S^n\Omega \arrow[r] & A \oplus \Omega \oplus \cdots \oplus S^{n-1}\Omega \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Demostración. Es fácil comprobar que ϕ_n es un morfismo de A-álgebras. Obviamente $\phi_n(\overline{a \otimes 1 - 1 \otimes a}) = (0, da, -, ..., -)$, luego, ϕ_n es la identidad sobre Δ^n/Δ^{n+1}. Ahora es fácil ver que el diagrama es conmutativo y demostrar por inducción sobre n que los ϕ_n son isomorfismos. □

12. Corolario: *El morfismo* $A/\mathfrak{m}_x^{n+1} \to k \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$, $\bar{f} \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{d_s^i f}{i!}(x)$, *es un isomorfismo de* k*-álgebras.*

Se dice que $\frac{d_s^2 f}{2}(x)$ es el Hessiano de f en x.

13. Teorema: *Sea* d_s *la diferencial simétrica asociada a una conexión lineal simétrica. Entonces,*

$$S^{\cdot} \operatorname{Der}_k(A, A) \overset{\varphi}{=} \operatorname{Diff}_k(A, A),\ \varphi(D_1 \cdots D_n)(a) := \frac{d_s^n a}{n!}(D_1, \dots, D_n)$$

y se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n-1} S^i \operatorname{Der}_k(A,A) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal, "\varphi"] & \bigoplus_{i=0}^{n} S^i \operatorname{Der}_k(A,A) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\varphi"] & S^n \operatorname{Der}_k(A,A) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Diff}_k^{n-1}(A,A) \arrow[r, hook] & \operatorname{Diff}_k^{n}(A,A) \arrow[r] & S^n \operatorname{Der}_k(A,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Además se cumple la "fórmula de Leibnitz"

$$\varphi(D_1 \cdots D_n)(a \cdot b) = \sum_{\{i_1,\dots,i_r\} \cup \{j_1,\dots,j_{n-r}\} = \{1,\dots,n\}} \varphi(D_{i_1} \cdots D_{i_r})(a) \cdot \varphi(D_{j_1} \cdots D_{j_{n-r}})(b)$$

Ahora, $\operatorname{Diff}_k(A, A)$ vía φ, tiene estructura de álgebra conmutativa graduada:

$$\varphi(D_1 \cdots D_n) * \varphi(D_1' \cdots D_m') := \varphi(D_1 \cdots D_n \cdot D_1' \cdots D_m')$$

Sea $\operatorname{Diff}_+^r(A, A) := \{D \in \operatorname{Diff}_k^r(A, A) \colon D(1) = 0\}$.

14. Proposición:

$$\{\text{\textit{Conexiones lineales simétricas}}\} = \{s \in \operatorname{Hom}_A(S^2 \operatorname{Der}(A, A), \operatorname{Diff}_+^2(A, A)) \colon \operatorname{simb}_2 \circ s = \operatorname{Id}\}$$

Demostración. Dada una conexión lineal simétrica, ∇, definimos $s \colon S^2 \operatorname{Der}(A, A) \to \operatorname{Diff}_+^2(A, A)$ por $s(D_1 \cdot D_2) := D_1 \circ D_2 - D_1^{\nabla} D_2$. Recíprocamente, dado s definimos $D_1^{\nabla} D_2 := D_1 \circ D_2 - s(D_1 \cdot D_2)$, que como pertenece al núcleo de simb_2, pertenece a $\operatorname{Der}_k(A, A)$.

□

En $\operatorname{Diff}_k(A, A)$ existe una conexión canónica: $D^{\nabla} F := D \circ F$, para todo $F \in \operatorname{Diff}_k(A, A)$ y $D \in \operatorname{Der}_k(A, A)$. Por tanto, existe una diferencial canónica $d \colon \operatorname{Diff}_k(A, A) \otimes \Omega_{A,k}$, que extiende a una diferencial en el complejo $\operatorname{Diff}_k(A, A) \otimes \Omega^{\cdot}_{A,k}$. Observemos que $R = d^2 = 0$, porque $R(D_1, D_2) = D_1 \circ D_2 \circ - D_2 \circ D_1 \circ - [D_1, D_2] \circ = 0$. Por tanto, $\operatorname{Diff}_k(A, A) \otimes \Omega^{\cdot}_{A,k}$ es un complejo diferencial.

Sea E un A-módulos finito generado libre. Sea $K = S^{\cdot} E \otimes \Lambda^{\cdot} E^*$ el complejo cuya diferencial d es tensorializar por Id, es decir, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $\{w_1, \dots, w_n\}$ es la base dual, entonces

$$d(s_i \otimes \Omega_j) = \sum_r s_i \cdot e_r \otimes w_r \wedge \Omega_j =: \operatorname{Id} \wedge (s_i \otimes \Omega_j)$$

Obviamente, $d^2 = 0$. Graduemos $K = \oplus_r K_r$, donde $K_r := S^{\cdot} E \otimes \Lambda^r E^*$. Obviamente $d(K_r) \subset K_{r+1}$.

15. Lema:

$$H^i(K) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ \Lambda^n E^* & si\ i = n \end{cases}$$

16. Teorema de Takens: *Se cumple que*

$$H^i(\mathrm{Diff}_k(A,A) \otimes_A \Omega^{\cdot}_{A,k}) = \begin{cases} 0\ si\ i \neq n \\ \Omega^n_{A,k}\ si\ i = n \end{cases}$$

Sea $T_2 \in \Omega \otimes \Omega$ una métrica simétrica no singular y denotemos la polaridad también por

$$T_2 \colon \mathrm{Der}_k(A,A) \to \Omega.$$

Sea $d_s \colon \Omega \to S^2\Omega$, $d_s(w) := T^2(w)^L T_2$. Tenemos pues definida una conexión lineal simétrica en $\mathrm{Der}_k(A,A)$, denominada conexión de Levi-Civita asociada a T_2.

Capítulo 2

Cálculo Tensorial en Geometría Diferencial

2.1. Desarrollo de Taylor

El teorema de Bolzano afirma que si f es una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ (o al revés) entonces existe un $\xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) = 0$ (la ξ se obtiene por el método de bisección).

Si $f'(c) > 0$ para un $c \in (a,b)$, entonces existe un $\epsilon_c > 0$ de modo que $f(c+t) > f(c)$ y $f(c) > f(c-t)$, para todo $0 \leq t < \epsilon_c$. Si $f' > 0$ en (a,b) entonces f es creciente en (a,b). Como consecuencia se obtiene el teorema de Rolle que dice que si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$: Si $f' > 0$ en (a,b) entonces f sería creciente y $f(a) < f(b)$, si $f' < 0$ en (a,b) entonces f sería decreciente y $f(a) > f(b)$. Por tanto, f' es negativa en algún punto y positiva en algún otro, por Bolzano f' se anula en algún punto intermedio.

Recordemos el Teorema del valor medio: si $f(x), g(x)$ son funciones derivables en (a,b) y continuas en $[a,b]$, dados $a < b$ existe $\xi \in (a,b)$ tal que $(f(b)-f(a))g'(\xi) - (g(b)-g(a))f'(\xi) = 0$ (si $g'(\xi) \neq 0$ y $g(b) - g(a) \neq 0$, habríamos escrito $(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)) = f'(\xi)/g'(\xi)$): Sea $H(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$, como $H(a) = H(b)$, entonces existe un $\xi \in (a,b)$ tal que $H'(\xi) = 0$.

En particular, si $f'(x)$ existe para todo $x \neq a$ y existe $\lim_{x\to a} f'(x)$, entonces $f'(a)$ existe y coincide con este límite : $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(\xi) = \lim_{x\to a} f'(x)$.

Lema de L'Hôpital: Si F, G son funciones diferenciables tales que $F(0) = G(0) = 0$, G' no se anule en un entorno de 0 (salvo quizás en 0), y $\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$ existe, entonces por el Teorema del valor medio $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$.

Sea $C^n(U)$ el anillo de las funciones n veces derivables de derivadas continuas en un abierto $0 \in U \subset \mathbb{R}$.

1. Lema fundamental: *Dada $f(x) \in C^n(U)$, si $f(0) = 0$, entonces existe $h(x) \in C^{n-1}(U)$, tal que $f(x) = x \cdot h(x)$.*[1]

Demostración. Demos una demostración con el mínimo de conocimientos de Análisis de Funciones. La función, $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ (donde $h(0) := f'(0)$) es una función continua, que tenemos que probar que

[1]Hay una demostración maravillosa de este teorema, pero que hace uso de ciertos resultados de Análisis: Derivemos e integremos y ¡saquemos algo! $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx) \cdot dt = \int_0^1 f'(tx) \cdot x \cdot dt = x \cdot \int_0^1 f'(tx) dt$

pertenece a $C^{n-1}(U)$.

Considerando en vez de f, $f-\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, con $a_i=\frac{1}{i!}f^{i)}(0)$, podemos suponer que $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{n)}(0)=0$.

Tenemos que probar que $h'=f'/x-f/x^2\in C^{n-2}(U)$. Por inducción sobre n, podemos suponer que $f'/x\in C^{n-2}(U)$. Tenemos que probar que $f/x^2\in C^{n-2}(U)$. Probemos que si $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{n)}(0)=0$ entonces $f/x^2\in C^{n-2}(U)$. Observemos que f/x^2 es continua pues por L'Hopital $\lim_{x\mapsto 0} f/x^2=f''(0)/2$. Tenemos que probar que $(f/x^2)'=f'/x^2-f/2x^3\in C^{n-3}(U)$. Por inducción sobre n, podemos suponer que $f'/x^2\in C^{n-3}(U)$. Tenemos que probar que $f/x^3\in C^{n-3}(U)$. Argumentando así sucesivamente llegaremos a que tenemos que probar que $f/x^n\in C^0(U)$, lo cual es cierto porque aplicando L'Hopital sucesivamente tenemos que $\lim_{x\mapsto 0} f/x^n=f^{n)}(0)/n!$.

$\square$

2. Corolario : *Si $f(x)\in C^\infty(U)$ cumple que $f(0)=0$, entonces existe $h(x)\in C^\infty(U)$ tal que $f(x)=h(x)\cdot x$. Entonces, por cambio de variable $\bar{x}=x-\alpha$, tendremos que si $\alpha\in U$ y $f(\alpha)=0$ entonces existe $h(x)\in C^\infty(U)$ de modo que $f(x)=h(x)\cdot(x-\alpha)$.*

Así dada $f(x)\in C^n(U)$, entonces $f(x)-f(\alpha)=g(x)\cdot(x-\alpha)$ con $g(x)\in C^{n-1}(U)$. Luego $f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)\cdot g(x)$. Repitiendo el argumento con $g(x)$, tendremos que $f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)\cdot(g(\alpha)+(x-\alpha)\cdot h(x))=f(\alpha)+g(\alpha)(x-\alpha)+h(x)(x-\alpha)^2$, (con $h(x)\in C^{n-2}(U)$). Así sucesivamente, tendremos que

$$f(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+\cdots+a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+z(x)\cdot(x-\alpha)^n$$

$a_i\in\mathbb{R}$, $z(x)\in C^0(U)$. Además, $a_i=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{i-1}a_j(x-\alpha)^j}{(x-\alpha)^i}=\frac{f^{(i}(\alpha)}{i!}$.

Ahora en varias variables.

3. Definición : Se dice que una función real f definida en un entorno de un punto $\alpha\in\mathbb{R}^n$ es diferenciable en α si existe una matriz $A=(a_1,\ldots,a_n)$ de modo que

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)-A\cdot(x-\alpha)^t}{||x-\alpha||}=0$$

Observemos que en tal caso, tomando $x=(x_1+h,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ tenemos que

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha_1+h,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)-f(\alpha)-A\cdot(h,0,\ldots,0)^t}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha_1+h,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)-f(\alpha)-a_1\cdot h}{|h|}$$

Luego, $\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha_1+h,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)-f(\alpha)-a_1\cdot h}{h}=0$ y $a_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha)$. Igualmente, $a_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)$. Si las derivadas parciales existen en un entorno de α y son continuas entonces f es derivable, con $A=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha))$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\alpha}\tfrac{f(x)-f(\alpha)-\sum_i a_i(x_i-\alpha_i)}{||x-\alpha||}=\lim_{x\to\alpha}\tfrac{f(x)-f(a_1,x_2,\ldots,x_n)+f(a_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\alpha)-\sum_i a_i(x_i-\alpha_i)}{||x-\alpha||}\\
&=\lim_{x\to\alpha}\tfrac{(f_{x_1}(\xi,x_2,\ldots,x_n)-a_1)(x_1-\alpha_1)+f(\alpha_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\alpha)-\sum_{i>1}a_i(x_i-\alpha_i)}{||x-\alpha||}\\
&=\lim_{x\to\alpha}\tfrac{(f_{x_1}(\xi,x_2,\ldots,x_n)-a_1)(x_1-\alpha_1)}{||x-\alpha||}+\lim_{x\to\alpha}\tfrac{f(\alpha_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\alpha)-\sum_{i>1}a_i(x_i-\alpha_i)}{||x-\alpha||}
\end{aligned}$$

que es igual a cero, por inducción sobre n (observando que $||(x-\alpha)||$ es mayor que $|x_1-\alpha_1|$ y que $||(x_2,\ldots,x_n)-(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)||$).

Es obvio que si f es derivable en α entonces es continua en α. Se dice que f es de clase r en un abierto si $\frac{\partial^r f}{\partial_1^{m} x_1 \cdots \partial^{m_n} x_n}$ son continuas en el abierto para todo $m_1 + \cdots + m_n = r$.

Sea U un entorno abierto de α y $f \in C^2(U)$. Se verifica que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha)$: Por cambio de variable podemos suponer que $\alpha = (0,0)$. Sustituyendo $f(x,y)$, por $f(x,y) - f(0,y)$, podemos suponer que $f(0,y) = 0$.

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}(\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)}{x})(y=0) = \lim_{y\to 0} \frac{\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x}}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{x}}{y} = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,\xi)\cdot y}{xy} = f_{yx}(0,0) \end{aligned}$$

Por simplificar notaciones supongamos que $\alpha = 0$. De nuevo, dada $f(x,y) \in C^n(U)$ si $f(0,y) = 0$ entonces $\frac{f}{x} \in C^{n-1}(U)$. Así, dada $f \in C^n(U)$, tendremos que $f(x,y) = f(0,y) + x \cdot g(x,y)$, con $g(x,y) \in C^{n-1}(U)$. Por tanto, si $f(0,0) = 0$, entonces $f(0,y) = y \cdot h(y)$, con $h(y) \in C^{n-1}(U)$, en conclusión $f(x,y) = x \cdot h_1 + y h_2$, con $h_1, h_2 \in C^{n-1}(U)$.

4. Proposición : *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y $f(x_1,\ldots,x_m) \in C^n(U)$. Si $f(\alpha) = 0$, entonces $f = \sum_i h_i \cdot (x_i - \alpha_i)$ con $h_i \in C^{n-1}(U)$.*

5. Corolario : *Dada $f(x_1,\ldots,x_m) \in C^n(U)$ y $b \in U$ entonces*

$$f = (\sum_{|\alpha|<r} a_\alpha \cdot (x-b)^\alpha) + \sum_{|\alpha|=r} h_\alpha \cdot (x-b)^\alpha$$

donde $h_\alpha \in C^{n-r}(U)$ y $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}(b)$.

2.2. Espacio tangente en un punto

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto.

1. Corolario : *El ideal $\mathfrak{m}_\alpha \subset \mathcal{C}^\infty(U)$ de todas las funciones que se anulan en $\alpha \in U$ está generado por $x_1 - \alpha_1, \ldots, x_m - \alpha_m$, es decir,*

$$\mathfrak{m}_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_m - \alpha_m)$$

2. Corolario : *Una base de $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es $d_\alpha x_1 = \overline{x_1 - \alpha_1}, \ldots, d_\alpha x_m = \overline{x_m - \alpha_m}$.*

Por el teorema 1.8.8 se tiene que $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U),\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, \mathbb{R}) =: (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*$. Explícitamente, dada $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U),\mathbb{R})$ y $\lambda d_\alpha f$ entonces $D(\lambda d_\alpha f) = \lambda \cdot Df$. Denotemos por $D = \sum_i \lambda_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha$ la derivación definida por $Df := \sum_i \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)$. La base dual de $d_\alpha x_1, \ldots, d_\alpha x_m$ es $(\frac{\partial}{\partial x_1})_\alpha, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_\alpha$.

Geométricamente, la derivación $\sum_i \lambda_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha$ se interpreta como el vector $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ en el punto $\alpha \in U$ y se dice que $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U),\mathbb{R}) = (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*$ es el espacio tangente (intrínseco) a $U \subseteq \mathbb{R}^m$ en α. Se dice que $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es el espacio cotangente (intrínseco) a $\mathbb{R}^m$ en α. Así, $\sum_i \lambda_i d_\alpha x_i$ se interpreta como el plano de $\mathbb{R}^m$ que pasa por α de ecuaciones

$$\lambda_1 \cdot (x_1 - \alpha_1) + \cdots + \lambda_m \cdot (x_m - \alpha_m) = 0$$

Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ entonces $f = f(\alpha) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)(x_i - \alpha_i) + \sum_{ij} f_{ij}(x)(x_i - \alpha_i)\cdot(x_j - \alpha)$. El plano tangente a la superficie de U, $f - f(\alpha) = 0$, en α es claramente $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)(x_i - \alpha_i) = 0$, es decir, el plano correspondiente a $d_\alpha f \in \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$.

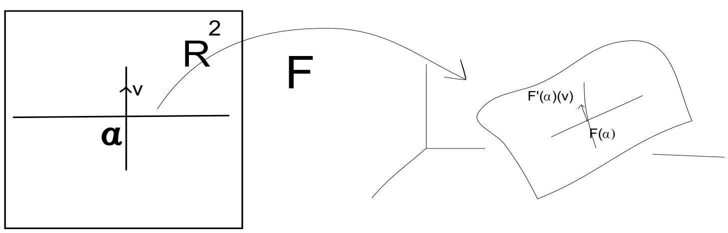
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sendos abiertos.

3. Definición : Una aplicación $F\colon U \to V$ se dice que es diferenciable en $\alpha \in U$ si existe una matriz $F'(\alpha) = (a_{ij})$ de m-columnas y n-filas tal que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{||F(x) - F(\alpha) - F'(\alpha) \cdot (x-\alpha)^t||}{||x-\alpha||} = 0$$

Es fácil ver que $F = (f_1, \dots, f_n)$ es diferenciable si y sólo si $f_1, \dots, f_n$ son diferenciables y que $A = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha))$.

Desarrollando por Taylor, tenemos que $F(x) = F(\alpha) + F'(\alpha)\cdot(x-\alpha)^t + \sum_{ij} G_{ij}(x)(x_i-\alpha_i)\cdot(x_j-\alpha_j)$. Consideremos la recta $\{\alpha + tv, t \in \mathbb{R}\}$ que pasa por α y de vector director v, entonces $F(\alpha+tv) = F(\alpha) + F'(\alpha)(tv) + t^2 \cdot H(t,v)$. Para t pequeño $F(\alpha+tv)$ es aproximadamente $F(\alpha)+F'(\alpha)(tv)$. Es decir, F aplica el vector infinitesimal tv, de origen α, en el vector infinitesimal $F'(\alpha)(tv)$ de origen $F(\alpha)$.



Por otra parte, el morfismo F induce en los anillos el morfismo de anillos $F^*\colon \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U)$, $F^*(g) := g \circ F$ y por tanto el morfismo $\mathfrak{m}_{F(\alpha)} \to \mathfrak{m}_\alpha$, $g \mapsto (g \circ F)$. En conclusión, tenemos el morfismo (intrínseco)

$$F^*\colon \mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)} \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}^2_\alpha,\ d_{F(\alpha)}g \mapsto d_\alpha(g\circ F)$$

$F^*(d_{F(\alpha)}x_i) = d_\alpha(x_i \circ F) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha)\cdot d_\alpha x_j$. Por tanto, la matriz del morfismo $F^*\colon \mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)} \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}^2_\alpha$ es $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha))$. Tomando duales tenemos "la aplicación lineal tangente en α asociada a F" (intrínseca)

$$F_*\colon (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha)^* = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathbb{R}) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(V), \mathbb{R}) = (\mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)})^*$$

que aplica (como puede comprobarse) cada derivación D en $F_*(D)$ definida por $F_*(D)(g) = D(F^*(g)) = D(g\circ F)$. Directamente, o por dualidad, tenemos que la matriz de F_* es $F'(\alpha) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha))$. Geométricamente, F_* aplica en el vector tangente $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en α en el vector tangente en $F(\alpha)$, $F'(\alpha)\cdot v$.

2.3. Derivaciones. Módulo de diferenciales

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto y $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}^\infty(U)/\mathbb{R}}$. Dada $w \in \Omega$ desearía que cumpliera la propiedad de que si $w(\alpha) = \bar{w} \in \Omega/\mathfrak{m}_\alpha \cdot \Omega$ es nulo para todo α entonces $w = 0$ y que esta propiedad se mantuviera al tomar la diferencial.

Sea M un $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo. Denotemos $\mathrm{Nul}(M) = \underset{\alpha\in U, n>0}{\cap} \mathfrak{m}^n_\alpha \cdot M$ y $\tilde{M} = M/\operatorname{Nul}(M)$. Se cumple que $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{M}$. También es claro que $\widetilde{C^\infty(U)} = C^\infty(U)$.

1. Teorema : *Sea M tal que* $\mathrm{Nul}(M) = 0$ *(por ejemplo si M es un módulo libre). Entonces,*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U), M) = M \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \overset{m}{\cdots} \oplus M \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}$$

Demostración. Asignemos a cada derivación $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U), M)$, $\sum_i (Dx_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Veamos que esta asignación es inyectiva: Tenemos que ver que si $Dx_i = 0$, para todo i, entonces $D = 0$. Sobre los polinomios $p(x_1, \dots, x_m)$ es fácil ver que $D(p(x_1, \dots, x_n)) = \sum_i \frac{\partial p(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_i} D(x_i)$ (argumentando por inducción sobre el grado del polinomio). Es claro que $D(\mathfrak{m}_\alpha^n) \subseteq \mathfrak{m}_\alpha^{n-1} \cdot M$. Toda $f \in C^\infty(U)$ es igual a un polinomio p de grado n módulo $\mathfrak{m}_\alpha^n$, $f = p + g$, $g \in \mathfrak{m}_\alpha^n$. Por tanto, $D(f) = D(p) + D(g) = 0 + D(g) \in \mathfrak{m}_\alpha^{n-1} \cdot M$, para todo n y α, luego $D(f) = 0$ y $D = 0$.

La asignación es obviamente epiyectiva, porque $\sum_i m_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es la imagen de la derivación D definida por $D(p) := \sum\limits_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot m_i$. □

Por tanto, si $\mathrm{Nul}\, M = 0$ entonces toda $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U), M)$ es $D = \sum_i Dx_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$.

2. Teorema : $\tilde{\Omega}_{C^\infty(U)/\mathbb{R}} = C^\infty(U) \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus C^\infty(U) \cdot dx_n$

Demostración. Para todo M tal que $\mathrm{Nul}(M) = 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(\tilde{\Omega}_{C^\infty(U)/\mathbb{R}}, M) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(\Omega_{C^\infty(U)/\mathbb{R}}, M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U), M) \\ &= M\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus M\frac{\partial}{\partial x_n} = \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U)dx_1 \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)dx_n, M) \end{aligned}$$

□

Por tanto,

$$\Lambda^n \tilde{\Omega}_{\mathcal{C}^\infty(U)/\mathbb{R}} = \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le m} \mathcal{C}^\infty(U) \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

3. Notación : A partir de ahora escribiremos $\mathbf{\Omega}_U = \tilde{\Omega}_{\mathcal{C}^\infty(U)/\mathbb{R}}$ y $\mathbf{\Omega}_U^r = \Lambda^r\, \mathbf{\Omega}_U$.

Observemos que $\mathbf{\Omega}_U(\alpha) = \Omega_{\mathcal{C}^\infty(U)/\mathbb{R}}(\alpha) = \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$. En general el morfismo

$$\mathbf{\Omega}_U^r(\alpha) \to \Lambda^r(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2), \quad \overline{df_1 \wedge \cdots \wedge df_r} \mapsto d_\alpha f_1 \wedge \cdots \wedge d_\alpha f_r$$

es un isomorfismo.

Todo morfismo de k-álgebras $f\colon A \to B$ induce el morfismo $\Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}$, $adb \mapsto f(a)df(b)$. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$ sendos abiertos. Dado un morfismo $F\colon U \to V$ diferenciable, tenemos el morfismo de anillos $F^*\colon \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U)$, $F^*(g) = g \circ F$, que induce el morfismo

$$F^*\colon\ \mathbf{\Omega}_V \to \mathbf{\Omega}_U,\ F^*(gdh) = (g \circ F)d(h \circ F)$$

que induce el morfismo $\mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}_{F(\alpha)}^2 = \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^m}(F(\alpha)) \to \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}(\alpha) = \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, ya conocido. Tomando álgebras exteriores tenemos un morfismo natural $F^*\colon\ \mathbf{\Omega}_V^r \to \mathbf{\Omega}_U^r$

4. Lema de Poincaré : *Una r-forma diferenciable $w_r \in \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}^r$ es cerrada, es decir, cumple que $dw_r = 0$ si y sólo si es exacta, es decir, existe una $r-1$-forma diferenciable $w_{r-1} \in \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}^{r-1}$ tal que $w_r = dw_{r-1}$.*

Demostración. Consideremos el grupo uniparamétrico $\tau\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau((t,x)) = e^t\cdot x$, cuya derivación asociada es $D=\sum_i x_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}$. Sea $\tau_t(x)=\tau(t,x)$ y denotemos $\tau_t^* w_r =: w_r(t)$. Se cumple que $w_r(t)' = (D^L w_r)(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} w_r = w_r(0)-w_r(-\infty) &= \int_{-\infty}^0 w_r(t)'\cdot dt = \int_{-\infty}^0 (D^L w_r)(t)\cdot dt = \int_{-\infty}^0 (i_D\circ d + d\circ i_D)w_r(t)\cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^0 d\circ i_D w_r(t)\cdot dt = d\int_{-\infty}^0 i_D w_r(t)\cdot dt = dw_{r-1} \end{aligned}$$

□

2.4. Variedades diferenciables. Haces

1. Definición : Sean $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{C}^n(U)$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que $f_1,\dots,f_n$ es un sistema de coordenadas en U, si la aplicación

$$F\colon U\to\mathbb{R}^n,\quad F(x):=(f_1(x),\dots,f_n(x))$$

cumple que $F(U)=V$ es un abierto, F establece un homeomorfismo entre U y V, y la aplicación inversa de F es diferenciable de clase n, es decir, F es un difeomorfismo de clase n.

En tal caso, el morfismo de anillos $F^*\colon\mathcal{C}^n(V)\to\mathcal{C}^n(U)$, $F^*(g)=g\circ F$ es un isomorfismo, luego para cada función diferenciable g en U existe una (única) función diferenciable $h(y_1,\dots,y_n)\in\mathcal{C}^n(V)$ de modo que $g(x)=h(f_1(x),\dots,f_n(x))$ ("las funciones diferenciables en U son las funciones diferenciables en las coordenadas $f_1,\dots,f_n$").

2. Definición : Se dice que $f_1,\dots,f_n$ son un sistema de coordenadas en un punto x, si existe un entorno de x en el que $f_1,\dots,f_n$ son un sistema de coordenadas.

Dado $F=(f_1,\dots,f_n)$ denotemos por $F'=(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$.

3. Teorema de la función inversa: *Sean U,V sendos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $F\colon U\to V$ un morfismo de clase n. Dado $\alpha\in U$, si $\det(F'(\alpha))\neq 0$, entonces F es un difeomorfismo de clase n en un entorno de α.*

Con otras palabras, si $f_1,\dots,f_n$ son funciones diferenciables de clase n en un entorno de $\alpha\in\mathbb{R}^n$. Entonces, $f_1,\dots,f_n$ es un sistema de coordenadas en α si y sólo si $d_\alpha f_1,\dots,d_\alpha f_n$ son linealmente independientes, es decir, $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha)))\neq 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha=0$.

1. Probemos que la aplicación $F=(f_1,\dots,f_n)\colon U\to\mathbb{R}^n$ en un entorno abierto pequeño U de (0) es inyectiva: Tenemos que $f_i(x)-f_i(y)=\sum_j H_{ij}(x,y)\cdot(x_j-y_j)$, pues en general si $g(x_1,\dots,x_r,0,\dots,0)=0$ para todo $x_1,\dots,x_r$ entonces $g=\sum_j g_{r+j}\cdot x_{r+j}$. Escribamos de forma reducida $F(x)-F(y)=H(x,y)\cdot(x-y)$, donde $H(x,y)$ es la matriz $(H_{ij}(x,y))$ y $(x-y)$ el vector $(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)$. Observemos que $H(0,0)=(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0))$. Consideremos un entorno V de 0, de modo que para todo $(x,y)\in V\times V$, $\det(H(x,y))\neq 0$. Si $0=F(x)-F(y)=H(x,y)\cdot(x-y)$, para algún $(x,y)\in V\times V$, entonces $x-y=0$ y $x=y$.

2. $F(U)$ es un entorno de $F(0)$: Reduciendo U, podemos suponer que F es inyectiva en U y que $\det(F'(x))\neq 0$ para todo $x\in U$. Sea B una bola centrada en el origen, tal que su cierre esté incluido en U, y sea S_n el borde. Por ser F inyectiva $F(S_n)$ no contiene a $F(0)$. Sea $m=$ ínfimo

$\{d(0,F(s)) \mid s \in S_n\}$ que es mayor estricto que cero porque $d(0,F(S_n))$ es un compacto (imagen de compacto) de $\mathbb{R}^+$ que no contiene a 0. Sea B' una bola centrada en $F(0)$ de radio $m/2$. Basta que probemos que $B' \subseteq F(B)$.

Sea $y \in B'$ y $g(x) := d(F(x),y)$ que la definimos sobre $\bar{B}$. La función continua g alcanza un mínimo sobre $\bar{B}$, que no yace en S_n, puesto que $d(F(s),y)+m/2 \geq d(F(s),y)+d(F(0),y) \geq d(F(0),F(s)) \geq m$, luego $d(F(s),y) \geq m/2 \geq d(F(0),y)$. Así pues, la función, $g^2 = (F(x)-y)\cdot(F(x)-y)$ alcanza un mínimo en B. Si $c \in B$ es tal que $g^2(c)$ es mínimo, entonces $0 = (g^2)'(c) = 2(F(c)-y)\cdot F'(c)$. Por tanto, $F(c) = y$ y $B' \subseteq F(B)$.

3. La aplicación $F\colon F^{-1}(B') \to B'$ es un homeomorfismo: Es biyectiva y continua. Dado un cerrado $C \subset F^{-1}(B') \subset B$, tenemos que $F(C) = F(\bar{C}) \cap B'$ es un cerrado porque $F(\bar{C})$ es un cerrado, ya que $\bar{C}$ es compacto. En conclusión, F es homeomorfismo.

4. Aconsejamos al lector que rescriba este apartado suponiendo $n = 1$, luego $F = f(x)$ es una función real en una sóla variable.

Supongamos ya que tenemos un homeomorfismo $F\colon U \to V$. Reduciendo U, podemos suponer que $\bar{U}$ y $\bar{V}$ son compactos, que $F\colon \bar{U} \to \bar{V}$ es homeomorfismo. Recordemos que $F(x') - F(x) = H(x,x')\cdot(x'-x)$. Podemos suponer también, que $\det(H(x,x')) \neq 0$ y[2] $||H(x,x')^{-1}|| \leq m$ (para cierto $m > 0$) para todo $x, x' \in U$. En particular, $||(H(x,x)^{-1} = (F'(x))^{-1}|| \leq m$.

Veamos que $G = F^{-1}$ es diferenciable de clase n.

Dado $y = F(x)$, probemos que la matriz $(F'(x))^{-1}$ cumple que $\lim\limits_{y'\to y} \frac{||G(y')-G(y)-(F'(x))^{-1}\cdot h||}{||y'-y||} = 0$. Sea x' tal que $F(x') = y'$, entonces

$$\begin{aligned}
&\lim_{y'\to y} \tfrac{||G(y')-G(y)-(F'(x))^{-1}\cdot(y'-y)||}{||y'-y||} = \lim_{x'\to x} \tfrac{||G(F(x'))-G(F(x))-(F'(x))^{-1}\cdot(F(x')-F(x))||}{||F(x')-F(x)||} \\
&= \lim_{x'\to x} \tfrac{||(x'-x)-(F'(x))^{-1}\cdot(F(x')-F(x))||}{||F(x')-F(x)||} = \lim_{x'\to x} \tfrac{||(F'(x))^{-1}\cdot[(F'(x))\cdot(x'-x)-(F(x')-F(x))]||}{||F(x')-F(x)||} \\
&\leq m\cdot \lim_{x'\to x} \tfrac{||(F'(x))\cdot(x'-x)-(F(x')-F(x))||}{||F(x')-F(x)||} = m\cdot \lim_{x'\to x} \tfrac{||(F'(x))\cdot(x'-x)-(F(x')-F(x))||}{||x'-x||}\cdot \tfrac{||x'-x||}{||F(x')-F(x)||} \\
&\leq m^2\cdot \lim_{x'\to x} \tfrac{||(F'(x))\cdot(x'-x)-(F(x')-F(x))||}{||x'-x||} = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $G'(y) = (F'(x))^{-1}$ y G es derivable. Como $G'(y) := (F'(x))^{-1} = (F'(G(y)))^{-1}$ es continua $\Rightarrow G$ es $C^1 \Rightarrow G'(y)$ es $C^1 \Rightarrow G(y)$ es C^2, etc.

□

Veamos que la esfera unidad $S^2 \equiv x^2+y^2+z^2 = 1$ localmente es "difeomorfa" a abiertos de $\mathbb{R}^2$: Sea $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in S^2$, supongamos $\alpha_1 \neq 0$. Las funciones $f_1 = x^2+y^2+z^2-1, f_2 = y, f_3 = z$ forman un sistema de coordenadas en α, por el teorema de la función inversa. Existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ de α, y un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de modo que la aplicación $F\colon U \to V$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ es un homeomorfismo. Vía F, $U \cap S^2$ es homeomorfo a $V \cap (0\times\mathbb{R}^2) = 0\times V'$, (para el correspondiente abierto $V' \subset \mathbb{R}^2$). Tenemos pues el homeomorfismo

$$U \cap S^2 \to V', \quad x \mapsto (f_2(x), f_3(x))$$

"Se dice que la restricción de f_2 y f_3 a $U \cap S^2$ es un sistema de coordenadas en $U \cap S^2$".

4. Definición : Un cerrado $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es una subvariedad diferenciable de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, si para cada punto $y \in Y$ existe un sistema de coordenadas $f_1,\ldots,f_n$ de en un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ en y, de modo que $U \cap Y = \{x \in U$ tales que $f_1(x) = \ldots = f_{n-m}(x) = 0\}$.

[2]Dada una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define $||T|| := \sup\{||T(e)||$, para todo $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $||e|| = 1\}$

5. Definición : Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un cerrado. Se dice que una función $f\colon Y \to \mathbb{R}$ es diferenciable si para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de y y una función $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$ de modo que $F_{|Y\cap U} = f_{|Y\cap U}$.

6. Proposición : *Toda función diferenciable sobre un subespacio cerrado $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es la restricción a dicho cerrado de una función diferenciable de $\mathbb{R}^n$. Es decir,*

$$\mathcal{C}^\infty(Y) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/I$$

donde $\mathcal{C}^\infty(Y)$ es el anillo de funciones diferenciables de Y e I es el ideal de las funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ que se anulan en Y.

Demostración. Sea $f\colon Y \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Existen abiertos $\{U_i\}$ y funciones $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ de modo que $\{U_i \cap Y\}$ recubren Y y $f_{|U_i\cap Y}) = f_{|U_i\cap Y}$.

Sea $\{\phi_i, \phi\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i, \mathbb{R}^n - Y\}$. Prolongando por 0 el producto $\phi_i f_i$ en el complementario de U_i, se obtiene una función diferenciable y la familia de soportes de tales funciones es localmente finita. Luego, la suma $F = \sum_i \phi_i f_i$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$. La restricción de F a Y es f, pues dado $y \in Y$

$$F(y) = \sum_i \phi_i(y) f_i(y) = \sum_i \phi_i(y) f(y) = f(y)$$

□

7. Definición : Se define variedad diferenciable como las subvariedades diferenciables de los $\mathbb{R}^n$.

Puede darse una definición en principio más general de variedad diferenciable (el teorema de Whitney afirma que es equivalente a la anterior): Un espacio topológico X se dice que es una variedad diferenciable de dimensión m si existe un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}$ de X y homeomorfismos $\phi_i\colon U_i \to V_i$ (V_i abierto de $\mathbb{R}^m$) de modo que los homeomorfismos ("de cambio de sistema de coordenadas")

$$\phi_j \circ \phi_j^{-1}\colon \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

son aplicaciones diferenciables (entre abiertos de $\mathbb{R}^m$).

El lector, al pensar en la variedad X, debe identificar U_i con V_i. Debe pensar que un espacio topológico X es una variedad diferenciable si y sólo si localmente es difeomorfo a abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Una aplicación continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable si localmente lo es, es decir, con rigor, f se dice que es diferenciable si las composiciones

$$V_i \overset{\phi_i^{-1}}{\simeq} U_i \overset{f_{|U_i}}{\to} \mathbb{R}$$

son diferenciables. Una aplicación continua entre variedades diferenciables $f\colon X \to X'$ se dice que es diferenciable si localmente lo es, es decir, las composiciones

$$\phi_i(U_i \cap f^{-1}(U'_j)) \overset{\phi_i^{-1}}{\to} U_i \cap f^{-1}(U'_j) \overset{f}{\to} U'_j \overset{\phi'_j}{\to} V'_j$$

son diferenciables. Resulta que f es diferenciable si y sólo si para toda función diferenciable $g\colon X' \to \mathbb{R}$, entonces $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Veamos la estructura de "haz" de $\mathbf{Der}_X$:

Dada una derivación $D \in \mathbf{Der}_X$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ si f es nula en un entorno abierto U de un punto $\alpha \in X$ entonces Df también es nula en dicho entorno: Basta ver que $(Df)(\alpha) = 0$. Sea $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$

nula en $X - U$ e igual a 1 en un entorno de α. Entonces $0 = h \cdot f$ y $0 = f \cdot Dh + h \cdot Df$, luego $0 = f(\alpha) \cdot (Dh)(\alpha) + h(\alpha) \cdot (Df)(\alpha) = (Df)(\alpha)$. Por tanto, si $f = g$ en un entorno de α entonces $D(f) = D(g)$ en ese entorno. Tenemos un morfismo natural

$$\mathbf{Der}_X \to \mathbf{Der}_U,\ D \mapsto D_{|U}$$

donde $(D_{|U} f)(\alpha) := D(F)(\alpha)$, siendo $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$ cualquier función que es igual a f en un entorno abierto de α.

1. Si U_i es un recubrimiento por abiertos de X y $D_{|U_i} = 0$ para todo i entonces $D = 0$, pues $(Df)_{|U_i} = D_{|U_i} f_{|U_i} = 0$, para todo i, luego $Df = 0$ y $D = 0$. Por tanto, $D = D'$ si y sólo si $D_{|U_i} = D'_{|U_i}$ para todo i.

2. Por otra parte, si tenemos para cada i, una derivación $D_i \in \mathbf{Der}_{U_i}$ de modo que $(D_i)_{|U_i \cap U_j} = (D_j)_{|U_i \cap U_j}$, para todo i, j, entonces podemos definir una $D \in \mathbf{Der}_X$, tal que $D_{|U_i} = D_i$, para todo i: $D(f)$ se define como la función que cumple que $(Df)_{|U_i} = D_i f_{|U_i}$.

Las propiedades 1. y 2. se expresan diciendo que $\mathbf{Der}_X$ es un haz. Por ejemplo, $\mathcal{C}^\infty(X)$ también es un haz. Igualmente $\mathbf{Der}^*_X$ es un haz (el $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo de las aplicaciones n-multilineales es un haz):

Dado $w \in \mathbf{Der}^*_X$ y $D \in \mathbf{Der}_X$, si $D_{|U} = 0$ entonces $w(D)_{|U} = 0$. En efecto, dada $\alpha \in U$ basta probar que $w(D)(\alpha) = 0$. Sea h nula en $X - U$ e igual a 1 en un entorno de α). Entonces $0 = h \cdot D$ y $0 = w(h \cdot D) = h \cdot w(D)$, luego $0 = h(\alpha) \cdot w(D)(\alpha) = w(D)(\alpha)$. Por tanto si $D = D'$ en un entorno abierto de α entonces $w(D) = w(D')$ en dicho entorno. Tenemos un morfismo natural

$$\mathbf{Der}^*_X \to \mathbf{Der}^*_U,\ w \mapsto w_{|U}$$

donde $(w_{|U}(D))(\alpha) := w(\tilde{D})(\alpha)$, donde $\tilde{D} \in \mathbf{Der}_X$ es cualquier derivación que coincide con D en un entorno de α.

1. Si U_i es un recubrimiento por abiertos de X y $w_{|U_i} = 0$ para todo i entonces $w = 0$, pues para todo D, $(w(D))_{|U_i} = w_{|U_i}(D_{|U_i}) = 0$, para todo i, luego $w(D) = 0$ y $w = 0$. Por tanto, $w = w'$ si y sólo si $w_{|U_i} = w'_{|U_i}$ para todo i.

2. Por otra parte, si tenemos para cada i, una $w_i \in \mathbf{Der}^*_{U_i}$ de modo que $(w_i)_{|U_i \cap U_j} = (w_j)_{|U_i \cap U_j}$, para todo i, j, entonces podemos definir una $w \in \mathbf{Der}^*_X$, tal que $w_{|U_i} = w_i$, para todo i: $w(D)$ se define como la función que cumple que $(w(D))_{|U_i} = w_i(D_{|U_i})$.

Sea $\mathfrak{m}_x \subset C^\infty(X)$ el ideal de funciones de X que se anulan en x y $\mathfrak{m}'_x \subset C^\infty(U)$ el ideal de funciones de U que se anulan en x. El morfismo natural $\pi \colon \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \mathfrak{m}'_x/\mathfrak{m}'^2_x$, $\pi(\bar{f}) = \overline{f_{|U}}$ es un isomorfismo: sea $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$ igual a 1 en un entorno abierto de x y nula en un entorno de $X - U$, entonces el morfismo $\mathfrak{m}'_x/\mathfrak{m}'^2_x \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, $\bar{f} \mapsto \overline{hf}$ es el morfismo inverso.

Dada una 1-forma diferencial $w \in \mathbf{\Omega}_X$, si $0 = w(x) = \bar{w} \in \mathbf{\Omega}_X(x) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, para todo $x \in X$, entonces $w \in \mathrm{Nul}(\mathbf{\Omega}_X) = 0$. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento por abiertos de X, si $w_{|U_i} = 0$ para todo i, entonces $w(x) = 0$ para todo $x \in X$ y $w = 0$. (*) Por tanto, si $w_{|U_i} = w'_{|U_i}$ para todo i, entonces $w = w'$.

Consideremos X como subvariedad cerrada de un $\mathbb{R}^n$. $\mathbf{\Omega}_X$ es cociente del $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-módulo $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}$, que está generado por $dx_1, \dots, dx_n$, por tanto, $\mathbf{\Omega}_X$ es un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo generado por $dx_{1|X}, \dots, dx_{n|X}$, luego es finito generado.

Sea $\dim X = r$. Dadas $w_1, \dots, w_r \in \mathbf{\Omega}_X$ sea $U = \{y \in Y$ tales que $\{w_i(y) = \bar{w}_i \in \mathbf{\Omega}_X(y) = \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2\}$ sea una base de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2\}$. Se cumple que U es un abierto de X y que $\mathbf{\Omega}_U$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo libre de base $\{w_{i|U}\}$:

Sea $y_1, \dots, y_r$ un sistema de coordenadas en un entorno abierto V_y de y. Tendremos que $w_i = f_{ij} dy_j$ (en tal entorno V_y). Entonces $\{w_i(y)\}$ es una base de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ si y sólo si $\det(f_{ij}(y)) \neq 0$. Es claro que

U es un abierto. Además, en V_y podemos despejar las dy_j en función de los $\{w_i\}$ y es fácil probar que en V_y las $\{w_i\}$ son base. Por tanto, dada $w \in \mathbf{\Omega}_U$, tendremos que $w_{|V_y} = \sum_i g_i \cdot w_i$, para $g_i \in \mathcal{C}^\infty(V_y)$ únicas. Por ser $\mathcal{C}^\infty(U)$ un haz, existen $G_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ únicas de modo que $w = \sum_i G_i w_{i|U}$, lo que muestra que $\{w_{i|U}\}$ son una base.

8. Lema : *Sea $\pi\colon M \to N$ un epimorfismo de A-módulos. Si $s\colon N \to M$ es una sección de π, es decir, $\pi \circ s = \mathrm{Id}$, entonces $M \simeq \operatorname{Ker}\pi \oplus N$.*

Demostración. El morfismo $N \oplus \operatorname{Ker}\pi \to M$, $(n, n') \mapsto s(n) + n'$ es un isomorfismo: Es inyectiva, porque si $s(n) + n' = 0$, aplicando π tenemos que $n = 0$ y por tanto $n' = 0$. Es epiyectiva, porque dado m, tenemos que $m - s(\pi(m)) \in \operatorname{Ker}\pi$ y $m = s(\pi(m)) + (m - s(\pi(m)))$. □

Si $M = M' \oplus M''$ y M es un A-módulo finito generado entonces M' es un A-módulo finito generado: Consideremos la inclusión $M'' \hookrightarrow M$, $m'' \mapsto (0, m'')$ y denotemos la imagen de esta inclusión M''. El morfismo $M' \to M/M''$, $m' \mapsto \overline{(m', 0)}$ es un isomorfismo. M/M'' es finito generado porque lo es M, entonces M' es finito generado.

9. Definición : Se dice que un A-módulo P es proyectivo si es sumando directo de un A-módulo libre.

Si P es un A-módulo proyectivo entonces tenemos un isomorfismo $P \oplus P' = A^n$. En tal caso el epimorfismo $A^n \to P$, $(p, p') \mapsto p$, tiene sección $(p \mapsto (p, 0))$. Recíprocamente si un epimorfismo $\pi\colon A^n \to P$ tiene sección entonces P es proyectivo porque $A^n = P \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

10. Proposición : *$\mathbf{\Omega}_X$ es un es un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo finito generado proyectivo.*

Demostración. Consideremos de nuevo el epimorfismo $\pi\colon \mathcal{C}^\infty(X) \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}^\infty(X) \cdot dx_n \to \mathbf{\Omega}_X$. Dado $\alpha = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ sea $U_\alpha = \{y \in X \mid d_y x_{i_1}, \dots, d_y x_{i_r}$ sea una base de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2\}$. Sea $\{\phi_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento de X, $\{U_\alpha\}_{\#\alpha = r}$. Sea s_α la composición de los morfismos

$$\mathbf{\Omega}_X \to \mathbf{\Omega}_{U_\alpha} = \mathcal{C}^\infty(U_\alpha) \cdot dx_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}^\infty(U_\alpha) \cdot dx_{i_r} \xrightarrow{\phi_\alpha \cdot} \mathcal{C}^\infty(X) \cdot dx_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}^\infty(X) \cdot dx_{i_r}$$

se tiene que $s = \sum_\alpha s_\alpha$ es una sección del epimorfismo π. □

Como $\operatorname{Nul}(\mathcal{C}^\infty(X)) = 0$ todo submódulo M de un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo libre cumple que $\operatorname{Nul}(M) = 0$.

El producto tensorial de módulos proyectivos es proyectivo: si $P \oplus P' = A^n$, $Q \oplus Q' = A^m$ entonces $A^{nm} = A^n \otimes_A A^m = (P \oplus P') \otimes_A (Q \oplus Q') = (P \otimes Q) \oplus (P \otimes Q') \oplus (P' \otimes Q) \oplus (P' \otimes Q')$, luego $P \otimes P'$ es proyectivo.

Si P es proyectivo entonces P^* es proyectivo, pues si $P \oplus P' = A^n$ entonces $P^* \oplus P'^* = (P \oplus P')^* = (A^n)^* = A^n$. Si P es un A-módulo proyectivo finito generado entonces $P = P^{**}$, como se deduce del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \oplus P' \arrow[r, equal] \arrow[d] & A^n \arrow[d, equal] \\
(P \oplus P)^{**} = P^{**} \oplus P'^{**} \arrow[r, equal] & (A^n)^{**}
\end{tikzcd}$$

Igualmente, si P es un A-módulo proyectivo finito generado $P^* \otimes_A M = \operatorname{Hom}_A(P, M)$.

Si P es proyectivo entonces $\Lambda^r P$ es proyectivo: Si la composición de dos morfismos de A-módulos $P \xrightarrow{s} A^n \xrightarrow{\pi} P$ es el morfismo identidad, entonces la composición $\Lambda^r P \to \Lambda^r A^n = A^{\binom{n}{r}} \to \Lambda^r P$ es la identidad.

En conclusión, $\Lambda^r \mathbf{\Omega}_X =: \mathbf{\Omega}_X^r$ y $\mathbf{\Omega}_X^* = \mathbf{Der}_X$, etc., son $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulos finito generados proyectivos, $\mathrm{Nul}(\mathbf{\Omega}_X^r) = \mathrm{Nul}(\mathbf{Der}_X) = 0$, $\mathbf{Der}_X^* = \mathbf{\Omega}_X^{**} = \mathbf{\Omega}_X$, etc.

Todas las proposiciones de las secciones 1.9 y 1.10 son igualmente válidas sustituyendo A por $\mathcal{C}^\infty(X)$ y Ω^i por $\mathbf{\Omega}_X^i$.

2.5. Anillo de funciones diferenciables

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función estrictamente creciente y de crecimiento cada vez más pequeño ($F' > 0$ y $F'' \leq 0$) y $F(0) = 0$ entonces $d' = F \circ d$ es una distancia y (X, d') es homeomorfo a (X, d). Consideremos $F = \frac{x}{1+x}$, en este caso $d'(p,q) = \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)}$ y $d'(p,q) < 1$ para todo $p, q \in X$.

Sean ahora dos distancias d_1, d_2 en X y consideremos en X la topología menos fina que contenga a las topologías definidas por d_1 y d_2, que es justamente la topología definida por $d_1 + d_2$. Como la topología definida por una distancia d es la misma que la definida por $\lambda \cdot d$, $\lambda > 0$, entonces la topología definida por $d_1 + d_2$ es la misma que la definida por $\lambda_1 \cdot d_1 + \lambda_2 \cdot d_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Sea ahora un conjunto numerable $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de distancias en X y supongamos (como podemos) que $d_i \leq 1/2^i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. La topología menos fina que contiene a las topologías definidas por todos los d_i coincide con la topología definida por la distancia $d := \sum_i d_i$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $\{U_1, U_2, \ldots\}$ abiertos tales que sus cierres cumplen que $\bar{U}_i \subset U_{i+1}$ y son compactos, y tales que $\cup_i U_i = U$.

Sea $\mathcal{C}^k(U)$ las funciones en U de clase k. Para cada compacto $K \subseteq U$ sea $d_K\colon \mathcal{C}^k(U) \to \mathbb{R}$ la distancia definida por

$$d_K^k(f,g) := \max\{|D^\alpha(f-g)(x)|,\ |\alpha| \leq k, x \in K\}$$

donde $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Consideremos $\mathcal{C}^k(U)$ la topología menos fina que contiene a las topologías definidas por las distancias d_K^k, para todo compacto K. Esta topología es igual a la topología menos fina que contiene a las topologías definidas por $d_{\bar{U}_i}^k$ (o $\frac{d_{\bar{U}_i}^k}{1+d_{\bar{U}_i}^k}$), $i = 1, 2, \ldots$, que coincide con la topología definida por

$$d = \sum_i \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_{\bar{U}_i}^k}{1 + d_{\bar{U}_i}^k}$$

Si en $\mathcal{C}^\infty(U)$ consideramos la topología menos fina que contiene a las topologías definidas por las distancias d_K^k, para todo compacto K y $k \in \mathbb{N}$, entonces esta topología coincide con la topología definida por

$$d = \sum_i \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_{\bar{U}_i}^i}{1 + d_{\bar{U}_i}^i}$$

1. Teorema : *$\mathcal{C}^k(U)$ es un espacio métrico completo para toda $0 \leq k \leq \infty$.*

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Para todo $\alpha \leq K$, $\{D^\alpha f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^0(U)$, para el que suponemos bien conocido que es completo. Sean $f_\alpha \in C^0(U)$ el límite de la sucesión $\{D^\alpha f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Basta probar que $D^\alpha f_0$ existe y coincide con f_α para todo α, con $|\alpha| \leq k$. Si $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_j + 1, \ldots, \beta_n)$, basta probar que $\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} = f_\alpha$.

Por el teorema del valor medio, dado $a \in U$, $D^\beta f_i(x) - D^\beta f_i(a) = D^\alpha f_i(\xi_i)(x_j - a_j)$, con $x = (a_1, \dots, x_j, \dots, a_n)$ y ξ_i en el segmento que une a y x. Existe una subsucesión $\{i_k\}$ de modo que $\{\xi_{i_k}\}$ converge a un ξ (perteneciente al segmento que une a y x). Tomando límite cuando $i_k \to \infty$ obtenemos

$$f_\beta(x) - f_\beta(a) = f_\alpha(\xi) \cdot (x_j - a_j) = f_\alpha(a) \cdot (x_j - a_j) + o(x_j - a_j)$$

donde $o(x_j - a_j)/x_j - a_j$ tiende a cero cuando $x_j \to a_j$. Por tanto, $\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}(a)$ existe y coincide con $f_\alpha(a)$. □

Veamos ahora que el morfismo $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ que asigna a cada función diferenciable su desarrollo de Taylor infinito, en un punto $\alpha \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, es epiyectivo (sorprendentemente a primera vista).

2. Lema : *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $D^\alpha(f)(0) = 0$, para todo α, con $|\alpha| \leq m$. Dado $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, que se anula en un entorno abierto de 0 tal que*

$$||f - g||_m < \epsilon$$

con $||f - g||_m := \sup\{|D^\alpha(f - g)(a)|, \, a \in \mathbb{R}^n, \, |\alpha| \leq m\}$.

Demostración. Sea $\eta(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\eta(x) = 0$, si $||x|| \leq 1/2$ y $\eta(x) = 1$ si $||x|| \geq 1$. Para $\delta > 0$, definamos

$$g_\delta(x) = \eta(\frac{x}{\delta}) \cdot f(x)$$

Claramente $g_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se anula en un entorno abierto de 0. Calculemos $||f - g_\delta||_m$.

Tenemos que $f - g_\delta = f \cdot (1 - \eta(x/\delta))$ que es nula para $||x|| > \delta$ y $||\eta(x)||_m < \infty$. Observemos que por las hipótesis $\lim_{x \to 0} D^\alpha f(x)/||x||^{m-|\alpha|} = 0$, luego

$$|D^\alpha(f - g_\delta)| = |D^\alpha f \cdot (1 - \eta(x/\delta)) + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot D^\beta f \cdot \delta^{-(|\alpha| - |\beta|)} \cdot D^{\alpha - \beta} \eta(x/\delta)| \leq \epsilon$$

para todo x, cuando δ es pequeño. En conclusión, $||f - g_\delta||_m \leq \epsilon$, para δ pequeño.

□

3. Teorema de Borel sobre los desarrollos de Taylor: *El morfismo $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ que asigna a cada función diferenciable su desarrollo de Taylor infinito en $0 \in \mathbb{R}^n$ es epiyectivo.*

Demostración. Sea $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$. Sea $T_m = \sum_{|\alpha| = m+1} c_\alpha x^\alpha$ y $g_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que se anule en un entorno abierto de 0 y tal que $||T_m - g_m||_m \leq 1/2^m$.

Entonces $f = c_0 + \sum_m (T_m - g_m) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y el desarrollo de Taylor de f en el 0 es $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$. □

2.6. Localización en el álgebra tensorial diferencial

1. Teorema : *Sea X una variedad diferenciable y $U \subseteq X$ un abierto. Se cumple que*

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{C}^\infty(X)_U}$$

con $\mathcal{C}^\infty(X)_U := \mathcal{C}^\infty(X)_S$, donde S es el conjunto de las funciones que no se anulan en ningún punto de U.

Demostración. 1. Supongamos que $X = \mathbb{R}^n$. Sea $\{U_1, U_2, \dots\}$ un recubrimiento de U por cubos abiertos cuyas adherencias estén contenidas en U. Sean $\phi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables positivas sobre U_i y nulas en el complementario. Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ sea

$$\lambda_i = \sup_{|\alpha|\le i} |\{D^\alpha(f\phi_i)\}|, \qquad \mu_i = \sup_{|\alpha|\le i} |\{D^\alpha(\phi_i)\}|$$

donde $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Las series

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{f\phi_i}{1+\lambda_i+\mu_i}; \qquad h = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\phi_i}{1+\lambda_i+\mu_i}$$

son funciones diferenciables, por el teorema anterior. Es evidente que $f = g/h$.

2. Caso general. Sumérjase X como subvariedad cerrada de un $\mathbb{R}^m$. Sea V un abierto de $\mathbb{R}^m$ tal que $V \cap X = U$ y $F \in \mathcal{C}^\infty(V)$ su restricción a $V \cap X = U$ sea f. Sean $G, H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, tal que H no se anule en ningún punto de V y G/H coincida con F sobre V. Las restricciones de G y H a X, g y h respectivamente, cumplen que h no se anula en ningún punto de U y $f = g/h$ en U.

□

2. Observación : La función h construida en la primera parte de la demostración es positiva sobre U y nula en el complementario. Por tanto, usando el teorema de inmersión de Whitney, concluimos que todo cerrado de una variedad son los ceros de una función diferenciable.

Igualmente se puede probar que $\mathcal{C}^k(U) = \mathcal{C}^k(X)_U$.

3. Corolario : [3] *Sea X una variedad diferenciable y $U \subseteq X$ un abierto. Entonces*

$$(\mathbf{\Omega}_X)_U = \mathbf{\Omega}_U, \quad (\mathbf{\Omega}^r_X)_U = \mathbf{\Omega}^r_U$$

Demostración. Sea A una k-álgebra y $S \subset A$ un sistema multiplicativamente cerrado. El morfismo $A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, induce el morfismo $\Omega_{A/k} \to \Omega_{A_S/k}$, $adb \mapsto \frac{a}{1}d\frac{b}{1}$, que induce el morfismo $(\Omega_{A/k})_S \to \Omega_{A_S/k}$, $\frac{da}{s} \mapsto \frac{1}{s}\cdot d\frac{a}{1}$. El morfismo inverso es $\Omega_{A_S/k} \to (\Omega_{A/k})_S$, $d\frac{a}{s} \mapsto \frac{da}{s} - \frac{ads}{s^2}$. Por tanto, $(\Omega_{A/k})_S = \Omega_{A_S/k}$, luego $(\mathbf{\Omega}_X)_U = \mathbf{\Omega}_U$, $\frac{df}{s} \mapsto s^{-1}_{|U}\cdot df_{|U}$.

Ahora ya,

$$(\mathbf{\Omega}^r_X)_U = (\Lambda^r_{\mathcal{C}^\infty(X)}\,\mathbf{\Omega}_X)_U = \Lambda^r_{\mathcal{C}^\infty(U)}\,\mathbf{\Omega}_U = \mathbf{\Omega}^r_U$$

□

4. Lema : *Si M es un A-módulo proyectivo finito generado entonces $(M^*)_S = (M_S)^*$ (denoto $(M_S)^* = \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, A_S)$).*

[3] Este corolario es un caso particular de un teorema de la teoría de fibrados vectoriales: Sea $X' \to X$ un morfismo entre variedades diferenciables y $E \to X$ un fibrado vectorial. Se cumple que

$$\mathrm{Hom}_{X'}(X', E \times_X X') = \mathcal{C}^\infty(X') \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} \mathrm{Hom}_X(X, E)$$

que se prueba, sumergiendo E en un fibrado vectorial trivial, considerando un fibrado vectorial suplementario y reduciendo, pues, el teorema al caso de fibrado vectoriales triviales.

Demostración. Sea N tal que $M \oplus N = A^n$. Es fácil comprobar que $((A^n)_S)^* = ((A^n)^*)_S$. Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(M^*)_S \oplus (N^*)_S = (M^* \oplus N^*)_S \arrow[r, equal] \arrow[d] & ((A^n)^*)_S \arrow[d, equal] \\
(M_S)^* \oplus (N_S)^* = (M_S \oplus N_S)^* \arrow[r, equal] & ((A^n)_S)^*
\end{tikzcd}$$

se deduce que $(M^*)_S = (M_S)^*$.

□

5. Proposición: $(\mathbf{Der}_X)_U = \mathbf{Der}_U$.

2.7. Integración. Fórmula de Stokes

Fórmula de cambio de variable en integración.

Sea $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y $w_1, \dots, w_n$ la base dual. Supongamos $\mathbb{R}^n$ orientado con la orientación estándar $w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$.

Dados n-vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, llamamos palelepípedo generado por $v_1, \dots, v_n$ al subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $P(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_i \lambda_i v_i,\, 0 < \lambda_i < 1\}$. La aplicación $V\colon \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$V(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} \int_{P(v_1,\dots,v_n)} dx_1 \cdots dx_n \text{ si } v_1, \dots, v_n \text{ está positivamente orientada} \\ -\int_{P(v_1,\dots,v_n)} dx_1 \cdots dx_n \text{ si } v_1, \dots, v_n \text{ está negativamente orientada} \end{cases}$$

es una aplicación multilineal alternada (al lector) y como sobre la base estándar de $\mathbb{R}^n$ vale 1, tenemos que $V = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$. Diremos que $V(v_1, \dots, v_n)$ es el volumen (afectado de signo) del paralelepípedo generado por $v_1, \dots, v_n$.

Consideremos ahora una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Obviamente T transforma el paralelepípedo generado por $v_1, \dots, v_n$ en el paralelepípedo generado por $T(v_1), \dots, T(v_n)$ y

$$V(T(v_1), \dots, T(v_n)) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n (T(v_1) \wedge \cdots \wedge T(v_n)) = w_n(\det(T) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \det(T) V(v_1, \dots, v_n)$$

1. Teorema: *Sean U y U' abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $T\colon U' \to U$, $T(y) = (T_1(y), \dots, T_n(y))$ un difeomorfismo de clase C^1. Sea $f(x) \in \mathcal{C}^0(U)$ de soporte compacto. Entonces,*

$$\int_U f(x) \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{U'} f(T(y)) \cdot |\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})| \cdot dy_1 \cdots dy_n$$

Demostración. Podemos suponer que $f \geq 0$.

Consideremos un cubo cerrado C que contenga a U' y sea l la longitud de los lados de C. Sea $C_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon] \times \overset{n}{\cdots} \times [-\epsilon, \epsilon]$ y supongamos que l es un múltiplo entero de ϵ. Sean $y_{\epsilon k}$ puntos de C, de modo que $C = \cup_k (y_{\epsilon k} + C_\epsilon)$ y los cubos $y_{\epsilon k} + C_\epsilon$ sean de interiores disjuntos.

$T(y') - T(y) = H(y', y) \cdot (y' - y)$ para cierta matriz de funciones continuas H. Recordemos que $H(y, y) = (\frac{\partial T_i}{\partial y_j})$. Así pues, $T(y') = T(y) + H(y, y)(y' - y) + (H(y', y) - H(y, y))(y' - y)$. Sea $G(y', y) = H(y', y) - H(y, y)$. Como $G(y, y) = 0$ entonces $||G(y, y)||_\infty = 0$ y dado $\delta > 0$ existe un ϵ de modo que para $||y' - y||_\infty < \epsilon$ entonces $||G(y', y)||_\infty < \delta$, es decir, $G(y', y) \cdot C_\lambda \subseteq C_{\delta \cdot \lambda}$. Por tanto,

$$T(y + C_\epsilon) \subseteq T(y) + H(y, y) \cdot C_\epsilon + C_{\delta \cdot \epsilon} \subseteq T(y) + H(y, y) \cdot C_{\epsilon \cdot (1 + \delta')}$$

con $\delta' = \delta \cdot \sqrt{n}$ (la longitud de la diagonal del cubo C_δ). Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(T(y+C_\epsilon)) \leq \ \mathrm{Vol}(H(y,y)\cdot C_{\epsilon\cdot(1+\delta')}) &= \det(H(y,y))\cdot \ \mathrm{Vol}(C_{\epsilon\cdot(1+\delta')}) \\ &= \det(H(y,y))\cdot \ \mathrm{Vol}(C_\epsilon)\cdot(1+\delta')^n\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_C f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n = \mathrm{lím}_{\epsilon\to 0}\sum_k f(T(y_{\epsilon k}))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j}(y_{\epsilon k}))|\cdot \mathrm{Vol}(C_\epsilon)\\ &\textstyle\geq \mathrm{lím}_{\epsilon\to 0}\sum_k f(T(y_{\epsilon k}))\cdot\mathrm{Vol}(T(y_{\epsilon k}+C_\epsilon))\cdot(1+\delta')^{-n} = \int_{T(C)} f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n\cdot(1+\delta')^{-n}\end{aligned}$$

Por tanto, $\int_{U'} f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n \geq \int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n$.

Si consideramos el morfismo inverso $T^{-1}\colon U'\to U$ y como función continua $g(y) = f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|$, entonces, $f(x) = g(T^{-1}(x))\cdot|\det(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial x_j})|$ y

$$\int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_U g(T^{-1}(x))\cdot|\det(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial x_j})|\cdot dx_1\cdots dx_n \geq \int_{U'} g(y)\cdot dy_1\cdots dy_n$$

y concluimos que $\int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_{U'} f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n$.

□

Integración de formas.

Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto, con la orientación $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Sea $w = f\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\in\mathbf{\Omega}_U^n$ y supongamos que $\operatorname{sop} f$ es compacto.

2. Definición: Se define $\int_U w := \int_U f\cdot dx_1\cdots dx_n$.

Sea $U'\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y escribamos ahora las coordenadas $y_1,\ldots,y_n$. Si $\varphi\colon U'\to U$ es un difeomorfismo que conserve la orientación, entonces el teorema del cambio de variables en integración ($\overset{*}{=}$, más abajo) implica que

$$\int_{U'=\varphi^{-1}U}\varphi^* w = \int_U w$$

En efecto, $\varphi^*w = f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\cdot d\varphi_1\wedge\cdots\wedge d\varphi_n = f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\cdot(\sum_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}dy_i)\wedge\cdots\wedge(\sum_i\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_i}dy_i) = f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\cdot\det(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j})\cdot dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$ y

$$\int_{U'=\varphi^{-1}U}\varphi^*w = \int_{U'} f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\cdot\det(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j})\cdot dy_1\cdots dy_n \overset{*}{=} \int_U f(x_1,\ldots,x_n)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_U w$$

Sea X una variedad diferenciable orientada de dimensión n. Dada w una r-forma definimos $\operatorname{sop} w = \{x\in X \text{ tales que } w_x\neq 0\}$. Sea w una n-forma diferenciable y supongamos que $\operatorname{sop} w$ es compacto. Supongamos que existe un difeomorfismo $\phi\colon X\to U'\subseteq\mathbb{R}^n$ orientado. Tenemos pues un difeomorfismo $\phi^*\colon C^\infty(U')\to C^\infty(X)$, $f\mapsto f\circ\phi = f(\phi_1,\ldots,\phi_n)$. Entonces existe una n-forma diferenciable en U', $w' = f(x_1,\ldots,x_n)\cdot dx_1\wedge\cdot\wedge dx_n$, tal que $\phi^*w' = w$ (luego, $w = f(\phi_1,\ldots,\phi_n)\cdot d\phi_1\wedge\cdots\wedge d\phi_n$) y definimos

$$\int_X w = \int_{\phi^{-1}(U')}\phi^*w' := \int_{U'} w' := \int_{U'} f(x_1,\ldots,x_n)\cdot dx_1\cdots dx_n$$

Veamos que la definición no depende del ϕ considerado. Sea $\phi''\colon X\to U''\subseteq\mathbb{R}^n$ otro difeomorfismo orientado, entonces $\varphi=\phi'\circ\phi''^{-1}\colon U''\to U'$, $y\mapsto(\varphi_1(y),\dots,\varphi_n(y)$ es un difeomorfismo orientado. Definamos $w''=\varphi^*w'$, que cumple que $\phi''^*(w'')=\phi''^*\varphi^*w'=\phi'^*w'=w$. Por tanto,

$$\int_X w \overset{\text{vía }\phi''}{=} \int_{U''} w'' = \int_{\varphi^{-1}(U')}\varphi^*w' = \int_{U'} w' \overset{\text{vía }\phi'}{=} \int_X w$$

Sea X una variedad diferenciable de dimensión n orientada y w una n-forma diferenciable de soporte compacto. Sea un número finito de abiertos coordenados $U_1,\dots,U_n$ que recubran $\operatorname{sop} w$ y consideremos el recubrimiento de X, $\{U_1,\dots,U_n,X-\operatorname{sop} w\}$. Sea $\{f_1,\dots,f_n,f\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento. Observemos que $w=f_1\cdot w+\cdots+f_nw$ (y $f\cdot w=0$) y que $\operatorname{sop} f_i\cdot w\subset U_i$. Definimos

$$\int_X w := \int_{U_1} f_1w+\cdots+\int_{U_n} f_nw$$

Esta definición no depende del recubrimiento ni de la partición: Sea $\{V_1,\dots,V_m\}$ abiertos coordenados que recubran $\operatorname{sop} w$ y $\{g_1,\dots,g_m,g\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{V_1,\dots,V_m,X-\operatorname{sop} w\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\int_{U_i} f_iw &= \sum_{i=1}^n\int_{U_i}\sum_{j=1}^m f_ig_jw = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_{U_i\cap V_j} f_ig_jw = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_{V_j} f_ig_jw\\ &= \sum_{j=1}^m\int_{V_j}\sum_{i=1}^n f_ig_jw = \sum_{j=1}^m\int_{V_j} g_jw\end{aligned}$$

Dejamos ya que el lector pruebe:

1. Si $w_1,\dots,w_r$ son n-formas con soporte compacto entonces $\int_X\sum_i w_i=\sum_i\int w_i$.
2. Si $\phi\colon X\to X'$ es un difeomorfismo orientado entre variedades diferenciables orientadas entonces para toda n-forma diferenciable w' de X' de soporte compacto se satisface que

$$\boxed{\int_{X=\phi^{-1}(X')}\phi^*w' = \int_{X'} w'}$$

Fórmula de Stokes.

3. Definición: Sea X una variedad diferenciable, $B\subset X$ un cerrado y ∂B el borde de B. Diremos que B es una variedad con borde si para todo $p\in\partial B$ existe un entorno coordenado U, $u_1,\dots,u_n$ de p en X de modo que $B\cap U=\{x\in U\colon u_1(x)\le 0\}$.

Observemos que $\partial B\cap U\equiv u_1=0$, luego ∂B es una subvariedad diferenciable de X. Si w_X es una forma diferenciable de volumen en X que lo orienta, podemos definir una orientación en ∂B: Sea w' una $n-1$-forma diferenciable en U tal que $du_1\wedge w'=w_X$, entonces $w'_{|\partial B\cap U}$ define una orientación en $\partial B\cap U$. Observemos que $i_{\partial u_1}w_X=w'-du_1\wedge i_{\partial u_1}w_X$, luego $w'_{|\partial B\cap U}=(i_{\partial u_1}w_X)_{|\partial B\cap U}$. Sólo tenemos que probar que esta orientación no depende de la u_1 escogida: Si $B\cap U\equiv v_1\le 0$ entonces $v_1=u_1\cdot F$ con $F>0$ en $B\cap U$ ($F\neq 0$ incluso en $\partial B\cap U$, porque $dv_1=Fdu_1+u_1dF$ es no nula en todo punto). Sea w'' tal que $dv_1\wedge w''=w_X$. La $n-1$ forma $w'_{|\partial B\cap U}$ coincide con la restricción de $i_{\partial u_1}w_X=i_{\partial u_1}(dv_1\wedge w'')=(F+u_1\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1})\cdot w''+v_1\cdot i_{\partial u_1}w''$ a ∂B, que coincide con $F\cdot w''_{|partial B\cap U}$.

Nota: Cuando escribamos $\int_B w$ querremos decir $\int_{\overset{0}{B}} w$.

4. Lema : *Sea X una variedad diferenciable orientada de dimensión n y $B \subset X$ una variedad con borde. Para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x de modo que para toda $n-1$-forma diferenciable w sobre X de soporte compacto contenido en U se cumple que*

$$\int_B dw = \int_{\partial B} w$$

Demostración. 1. Si $x \notin B$, tómese $U = X - B$. Si w tiene soporte compacto contenido en U entonces $\int_B dw = 0 = \int_{\partial B} w$.

2. Si $x \in \overset{0}{B}$, sea U, $u_1, \ldots, u_n$ un entorno coordenado de x, contenido en $\overset{0}{B}$, isomorfo a un cubo, es decir, tenemos

$$U \underset{\sim}{\overset{(u_1,\ldots,u_n)}{\longrightarrow}} \bar{U} \subset \mathbb{R}^n, \qquad \bar{U} = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

Si w es una $n-1$ forma con soporte compacto incluido en U entonces $\int_{\partial B} w = 0$. Veamos que $\int_B dw = 0$: Por la linealidad de la integral podemos suponer que $w = f du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_B dw &= \int_U d(f du_2 \wedge \cdots \wedge du_n) = \int_U \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot du_1 \cdots du_n \\
&= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1) \cdot du_2 \cdots du_n \\
&= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (f(b_1, u_2, \ldots, u_n) - f(a_1, u_2, \ldots, u_n)) \cdot du_2 \cdots du_n = 0
\end{aligned}$$

porque w es nula sobre los hiperplanos $u_1 = a_1$, $u_1 = b_1$.

3. Si $x \in \partial B$ sea $U, u_1, \ldots, u_n$ un entorno coordenado de x tal que $B \cap U \equiv u_1 \leq 0$ y de modo que U sea isomorfo a un cubo $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, como en el caso anterior. Observemos que $\partial B \cap U$ está coordenado por $u_2, \ldots, u_n$ y es difeomorfo al cubo $(a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Consideremos una $n-1$-forma diferenciable con soporte compacto incluido en U.

Escribamos $w = \sum_i f_i du_1 \wedge \cdots \wedge \hat{du_i} \wedge \cdots \wedge du_n$. Entonces, $w_{|\partial B} = f_1(0, u_2, \ldots, u_n) du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$ y

$$\int_{\partial B} w = \int_{\partial B \cap U} = \int_{(a_2,b_2) \times \cdots \times (a_n,b_n)} f_1(0, u_2, \ldots, u_n) \cdot du_2 \cdots du_n$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\int_B dw = \int_{B \cap U} dw &= \int_{u_1=a_1}^{u_1=0} \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n \\
&= \int_{u_1=a_1}^{u_1=0} \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 \cdots du_n
\end{aligned}$$

pues, $\frac{\partial f_i}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n$ son formas como en 2. nulas sobre los hiperplanos $u_i = a_i$, $u_i = b_i$. Por tanto,

$$\int_B dw = \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} (\int_{a_1}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}) \cdot du_1 \cdots du_n = \int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2} \cdots \int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n} f_1(0, u_2, \ldots, u_n) \cdot du_2 \cdots du_n$$

□

5. Teorema de Stokes: *Sea w una $n-1$-forma de soporte compacto sobre X. Se cumple que*

$$\boxed{\int_B dw = \int_{\partial B} w}$$

Demostración. Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ abiertos coordenados que recubran el soporte de w y que satisfagan el lema anterior. Sea $f_1, \ldots, f_n, f$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_1, \ldots, U_n, X - B\}$. Entonces

$$\int_B dw = \int_B d(\sum_i f_i w) = \sum_i \int_B d(f_i w_i) = \sum_i \int_{\partial B} f_i w_i = \int_{\partial B} f_i w_i = \int_B w$$

□

2.8. Gradiente, divergencia y rotacional

Vayamos con el ejemplo fundamental. Consideremos el anillo $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y el $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-módulo libre de rango n, $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}$. [4] $\mathbf{Der}_{\mathbb{R}^n}$ es el $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-módulo dual de $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}$.

Sea $T_2\colon \mathbf{Der}_{\mathbb{R}^n} \times \mathbf{Der}_{\mathbb{R}^n} \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-bilineal. Sea $w_1, \ldots, w_n$ una base de $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}$. Sabemos que $T_2 = \sum_{ij} a_{ij} \cdot w_i \otimes w_j$, $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, de modo que

$$T_2(D_1, D_2) = \sum_{ij} a_{ij} w_i(D_1) \cdot w_j(D_2)$$

T_2 induce la polaridad, $T_2\colon \mathbf{Der}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^n}$, $T_2(D) := i_D T_2 = \sum_{ij} a_{ij} w_i(D) \cdot w_j$. Supongamos que la polaridad T_2 es un isomorfismo. Denotemos por T^2 el morfismo inverso de T_2.

1. Definición : Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ se define $\operatorname{grad} f = T^2(df)$.

2. Proposición : *Se cumple que*

1. $\operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad} g$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Interpretación geométrica de las diferenciales, campos, gradiente,.....

Fijemos "una forma de volumen" $w_X \in \mathbf{\Omega}^n_{\mathbb{R}^n}$ de modo que $\Omega^n = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cdot w_X$. Observemos que $\mathbf{\Omega}^{n+1}_{\mathbb{R}^n} = 0$ y por tanto, $dw_X = 0$.

3. Definición : Dado $D \in \mathbf{Der}_{\mathbb{R}^n}$ se define la divergencia de D, que denotaremos por $\operatorname{div} D$, como la función que cumple

$$\boxed{D^L w_X = (\operatorname{div} D) \cdot w_X}$$

Observemos que $D^L w_X = (di_D + i_D d) w_X = di_D w_X$. Así pues,

$$\boxed{di_D w_X = (\operatorname{div} D) \cdot w_X}$$

[4] Podríamos desarrollar la teoría correspondiente considerando una k-álgebra A tal que $\Omega_{A/k}$ fuese un A-módulo finito generado localmente libre...

4. Teorema de la divergencia: *Sea $B \subset X$ una subvariedad con borde compacta. Sea w_X una forma de volumen en X, N un campo normal al borde ∂B de módulo 1 y $w_{\partial B}$ la forma de volumen en ∂B. Sea D un campo diferencial de vectores en X. Entonces por el teorema de Stokes*

$$\int_B (\operatorname{div} D) \cdot w_X = \int_{\partial B} i_D w_X = \int_{\partial B} (D \cdot N) \cdot w_{\partial B}$$

5. Proposición : $\operatorname{div}(fD) = f \cdot \operatorname{div} D + Df$.

Demostración. $\operatorname{div}(fD) \cdot w_X = (fD)^L w_X = (di_{fD})w_X = di_{fD}w_X = d(f \cdot i_D w_X) = df \wedge i_D w_X + f d i_D w_X = -i_D(df \wedge w_X) + i_D df \wedge w_X + fD^L w_X = Df \cdot w_X + f \operatorname{div} D \cdot w_X$. □

Consideremos ahora el $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$-módulo libre de rango 3, $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^3}$. Sea $T_2 = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$ y $w_{\mathbb{R}^3} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ la forma diferencial de volumen de $\mathbb{R}^3$. El morfismo $\mathbf{Der}_{\mathbb{R}^3} \to \mathbf{\Omega}^2_{\mathbb{R}^3}$, $D' \mapsto i_{D'} w_{\mathbb{R}^3}$ es un isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$-módulos.

6. Definición : Dado $D \in \mathbf{Der}_{\mathbb{R}^3}$ se define el rotacional de D, que denotamos por $\operatorname{rot} D$, como el campo que cumple que

$$\boxed{i_{\operatorname{rot} D} w_{\mathbb{R}^3} = d i_D T_2}$$

7. Teorema : *Sea S una subvariedad diferenciable compacta de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, y N un vector normal a S de módulo 1. Sea $B \subset S$ una subvariedad con borde y sea T un vector tangente a ∂B de módulo 1. Sea D un campo diferencial de vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces por el teorema de Stokes*

$$\int_B ((\operatorname{rot} D) \cdot N) \cdot w_B = \int_B i_{\operatorname{rot} D} w_{\mathbb{R}^3} = \int_{\partial B} i_D T_2 = \int_{\partial B} (D \cdot T) \cdot w_{\partial B}$$

8. Teorema : $\operatorname{rot}(D) = 0 \iff$ *Existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $D = \operatorname{grad} f$.*

Demostración. $\operatorname{rot} D = 0 \iff 0 = i_{\operatorname{rot} D} w_{\mathbb{R}^3} = d(T_2(D)) \iff T_2(D) = df$, para cierta $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ $\iff D = T^2(df) = \operatorname{grad} f$ para cierta $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. □

"Un campo de fuerzas es conservativo si y sólo si es un gradiente"

9. Teorema : $\operatorname{div} D' = 0 \iff$ *Existe una derivación D tal que $D' = \operatorname{rot} D$.*

Demostración. $\operatorname{div}(D') = 0 \iff 0 = \operatorname{div}(D') \cdot w_{\mathbb{R}^3} = d(i_{D'} w_{\mathbb{R}^3}) \iff$ Existe $w \in \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^3}$ tal que $i_{D'} w_{\mathbb{R}^3} = dw$. Ahora bien, para toda $w \in \mathbf{\Omega}_{\mathbb{R}^3}$ existe una (única) derivación D tal que $w = T_2(D)$. Por tanto, $\operatorname{div}(D') = 0 \iff$ Existe D tal que $i_{D'} w_{\mathbb{R}^3} = dT_2(D) \iff D' = \operatorname{rot} D$, para cierto D. □

10. Ejercicio : $\operatorname{rot} fD = f \cdot \operatorname{rot} D + \operatorname{grad}(f) \times D$.

2.9. Apéndice 1. Normas

1. Definición : Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una norma es una aplicación $E \to \mathbb{R}^+$, $e \overset{\text{Not.}}{\mapsto} ||e||$ que cumple

1. $||e|| = 0 \iff e = 0$.
2. $||\lambda \cdot e|| = |\lambda| \cdot ||e||$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $e \in E$.
3. $||e + e'|| \leq ||e|| + ||e'||$, para todo $e, e' \in E$.

2. Ejemplo : Supongamos $E = \mathbb{R}^n$ y consideremos la norma $|| \,||_1$ definida por $||(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)||_1 := |x_1| + \cdots + |x_2|$ Otra norma que podemos definir en $\mathbb{R}^n$ es $|| \,||_2$ definida por $||(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)||_2 := \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}$. Otra norma que podemos definir en $\mathbb{R}^n$ es $|| \,||_\infty$ definida por $||(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)||_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

$E, || \,||$ se dice que es un espacio normado. La norma $|| \,||$ define en E una distancia, d, $d(e, e') := ||e - e'||$ que cumple que $d(e, e') = 0 \iff e = e'$ (por la propiedad 1.), que $d(e, e') = d(e', e)$ (por la propiedad 2.) y que $d(e, e'') \leq d(e, e') + d(e', e'')$ (por la propiedad 3.). Luego $|| \,||$ define una topología en E, para la cual una base de entornos de cada punto $e \in E$ es

$$B(e, \delta) := \{e' \in E \colon d(e', e) < \delta\} = \{e' \in E \colon ||e - e'|| < \delta\}$$

3. Teorema : *Si E es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita entonces todas las normas de E definen la misma topología.*

Demostración. Podemos suponer que $E = \mathbb{R}^n$ y que $e_1, \ldots, e_n$ es la base estándar. Sea $|| \,||$ una norma en E y $M = \text{máx}\{||e_1||, \ldots, ||e_n||\}$. Entonces, dado $e = \sum_i \lambda_i e_i$ tenemos que $||e|| = ||\sum_i \lambda_i e_i|| \leq \sum_i |\lambda_i| ||e_i|| \leq \sum_i |\lambda_i| \cdot M = M \cdot ||e||_1$. Por tanto, $|| \,|| \leq M \cdot || \,||_1$.

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la topología estándar definida por $|| \,||_1$ (que es la misma que la definida por $|| \,||_2$). La norma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $e \mapsto ||e||$ es una aplicación continua, pues

$$|\, ||e|| - ||e'|| \,| \leq ||e - e'|| \leq M \cdot ||e - e'||_1$$

Sea m el mínimo de $|| \,||$ sobre el compacto $K = \{e \in \mathbb{R}^n \colon ||e||_1 = 1\}$. Por tanto, $|| \,|| \geq m \cdot || \,||_1$.

En conclusión, la topología definida por $|| \,||$ es la misma que la definida por $|| \,||_1$.

$\square$

Sea $E, || \,||$ un espacio vectorial normado de dimensión finita. Podemos definir una norma en $\text{End}_k E$ del siguiente modo: Dado $T \in \text{End}_k E$, $||T|| := \text{máx}\{||T(e)|| \colon ||e|| = 1\}$. Por tanto, $||T(e)|| \leq ||T|| \cdot ||e||$, para todo $e \in E$.

2.10. Apéndice 2. Teorema de existencia y unicidad en sistemas de ecuaciones diferenciales

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots \\ \tfrac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Dar una solución de este sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $a_1(\lambda), \ldots, a_n(\lambda)$ es dar funciones $\phi_i(t, \lambda)$ tales que $\frac{d\phi_i}{dt} = f_i(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ y $\phi_i(t_0, \lambda) = a_i(\lambda)$.

Si escribimos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $F = (f_1, \ldots, f_n)$ podemos escribir de modo reducido el sistema anterior como

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

y dada la condición inicial $a(\lambda) = (a_1(\lambda), \ldots, a_n(\lambda))$, buscamos $\phi(t, \lambda) = (\phi_1(t, \lambda), \ldots, \phi_n(t, \lambda))$ tal que

$$\frac{d\phi}{dt} = F(\phi)$$

y $\phi(t_0, \lambda) = a(\lambda)$.

El sistema de ecuaciones diferenciales (con condición inicial $a(\lambda)$) es equivalente a la ecuación

$$x = a(\lambda) + \int_{t_0}^{t} F(x) \cdot dt$$

Dada φ si denotamos $\varphi^* = a(\lambda) + \int_0^t F(\varphi) \cdot dt$, buscamos ϕ tal que $\phi = \phi^*$.

Vamos a ver que bajo ciertas condiciones, si consideramos una φ cualquiera y tomamos $*$ infinitas veces obtenemos una ϕ tal que al tomar $*$ una vez más obtenemos ϕ, es decir, $\phi^* = \phi$. Así demostraremos que el sistema de ecuaciones diferenciales anterior tiene solución.

1. Lema : *Sea X, d un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, tal que exista una constante $0 \leq c < 1$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Entonces existe un único punto $p \in X$ tal que $T(p) = p$.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto cualquiera. La sucesión $\{x_n := T^n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy: Sea $a = d(x, T(x))$ entonces $d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq c \cdot d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \leq \cdots \leq c^n \cdot d(x, T(x)) = c^n \cdot a$. Entonces, dado $n \geq m$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(T^m(x), T^n(x)) &\leq d(T^m(x), T^{m+1}(x)) + d(T^{m+1}(x), T^{m+2}(x)) + \cdots + d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \\ &\leq c^m \cdot a + c^{m+1} \cdot a + \ldots + c^{n-1} \cdot a = a \cdot \frac{c^m - c^n}{1-c} \leq c^m \cdot \frac{a}{1-c} \end{aligned}$$

que es todo lo pequeño que se quiera para n, m grandes.

Por tanto, la sucesión converge a un punto p. Por ser T contractiva es continua, luego $T(p) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p$.

Si $T(p') = p'$ entonces $d(p, p') = d(T(p), T(p')) \leq c \cdot d(p, p')$, luego $d(p, p') = 0$ y $p' = p$.

□

2. Teorema : *Sea $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $a(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Dado $b = (b_0, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, existe un entorno abierto conexo V de b y una única solución $\phi(t, t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^0(V, \mathbb{R}^n)$ (derivable en t) del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

con condiciones iniciales, para $t = b_0$, $\phi(b_0, t_1, \ldots, t_m) = a(t_1, \ldots, t_m)$.

Demostración. Sea U un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ de cierre compacto que contenga a $(b_1, \ldots, b_m)$. Sea $c > ||a_{|U}||_\infty$.

Por el teorema del valor medio existe una constante d (consideremos la menor posible) tal que

1. $||F(x) - F(y)||_\infty \leq d \cdot ||x - y||_\infty$, para todo x, y tales que $||x||_\infty, ||y||_\infty \leq 2c$.

2. $||F(x)||_\infty \leq 2d \cdot c$, para todo x tal que $||x||_\infty \leq 2c$.

Sea $\epsilon = 1/2d$, $U_\epsilon := (b_0 - \epsilon, b_0 + \epsilon)$ y Sea $E = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{C}^0(U_\epsilon \times U, \mathbb{R}^n), ||\varphi||_\infty \leq 2c\}$. E, $||\,||_\infty$ es un espacio normado completo. La aplicación $T\colon E \to E$, $T(\varphi) = a(t_1, \ldots, t_n) + \int_{t_0}^t F(\varphi(s, t_1, \ldots, t_n)) \cdot ds$ está bien definida y es contractiva. Veamos que $T(\varphi) \in E$:

$$||T(\varphi)||_\infty \leq ||a||_\infty + ||\int_{t_0}^t F(\varphi)\cdot ds||_\infty \leq c + |\int_{t_0}^t ||F(\varphi)||_\infty \cdot ds| \leq c + |\int_{t_0}^t 2d\cdot c\cdot ds| \leq c + d\cdot 2c\cdot\epsilon = 2c$$

Veamos que T es contractiva:

$$\begin{aligned}||T(\varphi) - T(\phi)||_\infty &= ||\int_{t_0}^t F(\varphi) - F(\phi)\, ds||_\infty \leq |\int_{t_0}^t ||F(\varphi) - F(\phi)||_\infty \cdot ds| \\ &\leq |\int_{t_0}^t d\cdot ||\varphi - \phi||_\infty \cdot ds| \leq \epsilon\cdot d\cdot ||\varphi - \phi|| = \frac{1}{2}||\varphi - \phi||_\infty\end{aligned}$$

Por tanto, existe una única $\phi \in E$ tal que $T(\phi) = \phi$, que es la solución en $V = U_\epsilon \times U$ del sistema de ecuaciones diferenciales.

Si ϕ' es otra solución del sistema de ecuaciones en V, reduciendo V muy poco, podemos suponer que $||\phi'||_\infty = c' < \infty$. Si $c' \leq c$, entonces $\phi' \in E$ y $\phi' = \phi$. Si $c' > c$, siguiendo notaciones obvias, entonces $d' \geq d$. Denotemos $V' = (b_0 - 1/2d', b_0 + 1/2d') \times U$, entonces $\phi'_{|V'} \in E' = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{C}^0(V', \mathbb{R}^n), ||\varphi||_\infty \leq 2c'\}$. Entonces, $\phi_{|V'} = \phi'_{|V'}$. Ahora es fácil ver que los puntos en los que coinciden ϕ y ϕ' es un abierto, luego $\phi = \phi'$.

□

Dependencia diferenciable de las condiciones iniciales:

Si $F \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $a(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ entonces la solución ϕ también es de clase k:

Es un problema local. Podemos suponer que F es de soporte compacto. Veamos que podemos proceder como en el teorema 2.10.4.

Sea U un cubo abierto de $\mathbb{R}^m$ y $U_\epsilon := (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Dada $g(t, t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^k(U_\epsilon \times U, \mathbb{R}^n)$, denotemos $g_\alpha = \frac{\partial^\alpha g}{\partial t^{\alpha_0} \cdots \partial t_m^{\alpha_m}}$. Dada $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{C}^k(U_\epsilon \times U, \mathbb{R}^n)$ definamos $||\varphi|| := \text{máx}\{||\varphi_{j,\alpha}||_\infty, : 1 \leq j \leq n \text{ y } |\alpha| \leq k\}$. Sea $c = ||a_{|U}||$.

Sea $E = \{\varphi \in \mathcal{C}^k(U_\epsilon \times U, \mathbb{R}^n), \text{ tales que } ||\varphi|| \leq 2c\}$, que es un espacio métrico completo.

Dada α, con $|\alpha| \leq k$, tendremos que $F_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)_\alpha = G^{i,\alpha}(\varphi_{j,\beta})_{1\leq j\leq n, |\beta|\leq k}$, para cierta función $G^{i,\alpha} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^n)$, con $N = n\cdot \#\{\beta\colon |\beta| \leq k\}$. Sea $G = (G^{j,\beta})_{1\leq j\leq n, |\beta|\leq k}$. Existe una constante d, tal que

1. $||G(x_{j,\beta}) - G(y_{j,\beta})||_\infty \leq d\cdot ||(x_{j,\beta}) - (y_{j,\beta})||_\infty$, para todo $(x_{j,\beta})$ y $(y_{j,\beta})$ tales que $||(x_{j,\beta})||_\infty$, $||(y_{j,\beta})||_\infty < 2c$

2. $||G(x_{j,\beta})||_\infty < 2d\cdot c$, para todo $(x_{j,\beta})$ tal que $||(x_{j,\beta})||_\infty < 2c$.

En tal caso, $||F(\varphi) - F(\phi)|| < d\cdot ||\varphi - \phi||$ y $||F(\varphi)|| < 2d\cdot c$, si $||\varphi||$, $||\phi|| < 2c$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2d}$. La aplicación $T\colon E \to E$, $T(\varphi) = a(t_1, \ldots, t_n) + \int_{t_0}^t F(\varphi(s, t_1, \ldots, t_n))\cdot ds$ está bien definida y es contractiva. Veamos que $T(\varphi) \in E$:

$$||T(\varphi)|| \leq ||a|| + ||\int_{t_0}^t F(\varphi)\cdot ds|| \leq c + |\int_{t_0}^t ||F(\varphi)||\cdot ds| \leq c + |\int_{t_0}^t 2d\cdot c\cdot ds| \leq c + 2d\cdot c\cdot\epsilon = 2c$$

Veamos que T es contractiva:

$$||T(\varphi) - T(\phi)|| = ||\int_{t_0}^{t} F(\varphi) - F(\phi)\, ds|| \leq |\int_{t_0}^{t} ||F(\varphi) - F(\phi)|| \cdot ds|$$
$$\leq |\int_{t_0}^{t} d \cdot ||\varphi - \phi|| \cdot ds| \leq \epsilon \cdot d \cdot ||\varphi - \phi|| = \frac{1}{2}||\varphi - \phi||$$

Por tanto, existe $\phi \in E$ tal que $T(\phi) = \phi$, que es la solución local del sistema de ecuaciones diferenciales.

3. Corolario: *Sea $F \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $a(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. existe un entorno abierto conexo V de $0 \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y una única solución $\phi(t, t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R}^n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

con condiciones iniciales, $\phi(0, t_1, \ldots, t_m) = a(t_1, \ldots, t_m)$.

4. Teorema: *Sea $F \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con soporte compacto y $a(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Entonces existe una única solución $\phi(t, t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

con condiciones iniciales, para $t = t_0$, $\phi(t_0, t_1, \ldots, t_m) = a(t_1, \ldots, t_m)$.

Demostración. Por ser F y sus derivadas continuas de soporte compacto, por el teorema del valor medio existe una constante d tal que $||F(x) - F(y)||_\infty \leq d \cdot ||x - y||_\infty$, para todo x, y. Podemos proceder como en el teorema 2.10.2, tomando $c = \infty$, $U \subset \mathbb{R}^m$ cualquier abierto de soporte compacto, $\epsilon = 1/2d$, $U_\epsilon = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $V = U_\epsilon \times U$ y $E = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{C}^0(V, \mathbb{R}^n),\ ||\varphi||_\infty < \infty\}$. Igualmente existe una única $\phi \in E$ solución del sistema de ecuaciones diferencial y con condición inicial $\phi(t_0, t) = a(t)$. Como U puede ser un abierto compacto todo lo grande que se quiera podemos suponer que $U = \mathbb{R}^m$. Si tomamos $V' = (t_0 - \epsilon/2, t_0 + 3\epsilon/2) \times \mathbb{R}^m$ y como condición inicial $a'(t) := \phi((t_0 + \epsilon/2, t)$ igualmente existe una única solución ϕ' del sistema de ecuaciones en V' tal que $\phi'(t_0 + \epsilon/2, t) = \phi((t_0 + \epsilon/2, t)$. Por la unicidad ϕ y ϕ' coinciden sobre $V \cap V'$, por tanto, existe una solución única ψ del sistema de ecuaciones en $V \cup V' = (t_0 - \epsilon, t_0 + 3\epsilon/2) \times \mathbb{R}^m$ con condición inicial $\psi(t_0, t) = a(t)$. Ampliando sucesivamente el intervalo abierto U_ϵ concluimos.

□

Curvas integrales de un campo

Sea $D = \sum_i f_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathbf{Der}_{\mathbb{R}^n}$. Nos planteamos la existencia (local) de una aplicación diferenciable

$$\tau\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (t, x) \mapsto \tau(t, x)$$

tal que $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)}) = D_{\tau(t,x)}$ y $\tau(0, x) = x$.

Si escribimos $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, sabemos que $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)}) = (\sum_i \frac{\partial \tau_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i})_{\tau(t,x)}$. Por tanto, $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)}) = D_{\tau(t,x)}$ si y sólo si $\frac{\partial \tau_i}{\partial t} = f_i(\tau)$. Si escribimos $F = (f_1, \ldots, f_n)$ entonces τ es justamente la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\tau}{dt} = F(\tau)$$

con condiciones iniciales $\tau(0, x) = x$. Si D es un campo con soporte compacto sabemos que existe una única τ "global". En general, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un entorno abierto U_x de x, un $\epsilon_x) \in \mathbb{R}$ y una única aplicación diferenciable $\tau\colon U_{\epsilon_x} \times U_x \to \mathbb{R}^n$, de modo que $\tau_*(\frac{\partial}{\partial t}{}_{(t,x)}) = D_{\tau(t,x)}$ y $\tau(0,x) = x$. Por tanto, si $W = \cup_{x\in\mathbb{R}^n} U_{\epsilon_x} \times U_x \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tenemos definida una única aplicación diferenciable $\tau\colon W \to \mathbb{R}^n$, de modo que $\tau_*(\frac{\partial}{\partial t}{}_{(t,x)}) = D_{\tau(t,x)}$ y $\tau(0,x) = x$.

Denotemos $\tau_t\colon U \to \mathbb{R}^n$, $\tau_t(x) = \tau(t,x)$. Se cumple que $\tau_t \circ \tau_s = \tau_{t+s}$ (donde todo esté definido). En efecto, cumplen el mismo sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\tau(t,\tau(s,x))}{dt} = F(\tau(t,\tau(s,x))), \quad \frac{d\tau(t+s,x)}{dt} = F(\tau(t+s,x))$$

y cumplen las mismas condiciones iniciales $\tau(0,\tau(s,x)) = \tau(s,x) = \tau(0+s,x)$. Se dice que $\tau_t(x)$ es el "grupo uniparamétrico" asociado a D.

Observemos que si fijamos un $x \in \mathbb{R}^n$, obtenemos una curva

$$\sigma_x\colon U_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \sigma_x(t) = \tau(t,x)$$

en $\mathbb{R}^n$ cuyo campo tangente en $\sigma_x(t) = \tau(t,x)$ es $\sigma_{x,*}((\frac{\partial}{\partial t})_t) = \sum_i \frac{\tau_i(t,x)}{dt}(\frac{\partial}{\partial x_i})_{\sigma_x(t)} = D_{\sigma_x(t)}$. Se dice que σ_x es la curva integral de D en x.

Sea $W \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un abierto conexo máximo, que contenga a $0\times\mathbb{R}^n$ y para el que existe $\tau\colon W \to \mathbb{R}^n$ una (única) aplicación diferenciable tal que $\tau_*(\frac{\partial}{\partial t}{}_{(t,x)}) = D_{\tau(t,x)}$ y $\tau(0,x) = x$. Sean $y = (t,x) \in W$, $U_\epsilon = (\epsilon,\epsilon)$, U_y entorno abierto de y y $\tau\colon U_\epsilon \times U_y \to \mathbb{R}^n$. Si U_x es un entorno abierto conexo de x tal que $\tau_t(U_x) \subseteq U_y$, entonces la aplicación $\tilde\tau\colon (t-\epsilon,t+\epsilon)\times U_x \to \mathbb{R}^n$, $\tilde\tau((t',x')) := \tau_{t'-t}(\tau_t(x'))$, coincide con $\tau\colon W \to \mathbb{R}^n$ sobre $W \cap ((t-\epsilon,t+\epsilon)\times U_x)$. Por tanto, $(t-\epsilon,t+\epsilon)\times U_x \subseteq W$. Es fácil concluir que, dado $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $(\mathbb{R}\times x)\cap W \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}^n$ es la curva integral máxima de D que pasa por x.

Reducción local de un campo a forma canónica

Si $F\colon U \to V$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, "entonces todo lo que digamos en U podemos traducirlo a V". Dada una función en g en U, tenemos la correspondiente función en V: $g\circ F^{-1}$. Dada una derivación D en U, tenemos la derivación $F(D)$ en V, determinada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(U) \arrow[r, equal, "F^{*-1}"] \arrow[d, "D"] & \mathcal{C}^\infty(V) \arrow[d, "F(D)"] \\
\mathcal{C}^\infty(U) \arrow[r, equal, "F^{*-1}"] & \mathcal{C}^\infty(V)
\end{tikzcd}$$

Es decir, $F(D)g := D(g\circ F)\circ F^{-1}$. Puede comprobarse que $F(D)_{F(\alpha)} = F_* D_\alpha$. $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$ en un sistema de coordenadas $x_1,\dots,x_n$ si y sólo si $F(D) = \frac{\partial}{\partial y_1}$ en el sistema de coordenadas $y_1 = x_1\circ F,\dots,y_n = x_n\circ F$.

Sigamos las notaciones del apartado anterior. Supongamos que $D_p \neq 0$, por tanto $f_i(p) \neq 0$ para algún i. No hay pérdida de generalidad si suponemos que $f_1(p) \neq 0$. Sea $V = \{(t,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $(t,x_1(p),x_2,\dots,x_n) \in U_\epsilon \times U\}$ y consideremos la composición de morfismos

$$\begin{array}{ccccc} V & \overset{i}{\to} & U_\epsilon \times U & \overset{\tau}{\to} \mathbb{R}^n \\ (t,x_2,\dots,x_n) & \mapsto & (t,x_1(p),x_2,\dots,x_n) & \end{array}$$

A nivel tangente tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial}{\partial t} & \overset{i_*}{\mapsto} & \frac{\partial}{\partial t} & \qquad & \frac{\partial}{\partial t} & \overset{\tau_*}{\mapsto} & D \\ \frac{\partial}{\partial x_i} & \overset{i_*}{\mapsto} & \frac{\partial}{\partial x_i},\ i>1 & & (\frac{\partial}{\partial x_i})_{0,q} & \overset{\tau_*}{\mapsto} & (\sum_j \frac{\partial\tau_j(0,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j})_q = (\frac{\partial}{\partial x_i})_q \end{array}$$

En conclusión, la matriz de $(\tau \circ i)_*$ en el punto $(0, p_2, \dots, p_n)$ es

$$\begin{pmatrix} f_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(p) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(p) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\tau \circ i$ es un difeomorfismo de un entorno abierto V' de $(0, p_2, \dots, p_n)$ con un entorno abierto U de p y tenemos

$$\begin{array}{ccc} V' & \simeq & U \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \leftrightarrow & D \end{array}$$

y en las coordenadas $z_1 = t \circ (\tau \circ i)^{-1}, \dots, z_n = x_n \circ (\tau \circ i)^{-1}$, $D = \frac{\partial}{\partial z_1}$.

Sea w_r una r-forma diferencial en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y D una derivación. Veamos que

$$\boxed{D^L w_r = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^*(w_r) - w_r}{t}}$$

Si $D_p \neq 0$ entonces en un entorno V de p, $D = \frac{\partial}{\partial z_1}$ en cierto sistema de coordenadas $z_1, \dots, z_n$. Entonces $\tau_t((z_1, \dots, z_n)) = (z_1 + t, z_2, \dots, z_n)$, como es de comprobación inmediata. Escribamos $w_r = \sum f_{i_1 \dots i_r} \cdot dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}$, entonces en V

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^*(w_r) - w_r}{t} = \sum \frac{\partial f_{i_1 \dots i_r}}{\partial z_1} \cdot dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r} = D^L w_r$$

Si $D = 0$ en un entorno abierto V de p entonces $\tau_t(x) = x$ para todo $x \in V$, como es de comprobación inmediata. Entonces en V, $D^L w_r = 0 = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^*(w_r) - w_r}{t}$.

En conclusión, $D^L w_r = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^*(w_r) - w_r}{t}$ en un abierto denso de puntos de U, luego son iguales.

2.11. Apéndice 3. Inmersión de variedades compactas

1. Definición : Sea $\phi\colon Y \to X$ una aplicación diferenciable entre dos variedades. Se dice que ϕ es una inmersión local en $y \in Y$ si la aplicación lineal tangente en y es inyectiva.

Obviamente ϕ es una inmersión local en y si y sólo si la aplicación lineal cotangente $\phi^* : \mathfrak{m}_{\phi(y)}/\mathfrak{m}_{\phi(y)}^2 \to \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ es epiyectiva. En este caso, si $d_{\phi(y)} x_1, \dots, d_{\phi(y)} x_n$ es una base de $\mathfrak{m}_{\phi(y)}/\mathfrak{m}_{\phi(y)}^2$, reordenando la base, podemos suponer que $d_y(x_1 \circ \phi), \dots, d_y(x_r \circ \phi)$ es una base de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$. Sea V un entorno abierto de y en el que $y_1 = x_1 \circ \phi, \dots, y_r = x_r \circ \phi$ sean un sistema de coordenadas. Por tanto, para $j > r$, $x_j \circ \phi = f_j(x_1 \circ \phi, \dots, x_r \circ \phi)$, para ciertas funciones diferenciables f_j. Las funciones $z_1 = x_1, \dots, z_r = x_r, z_{r+1} = x_{r+1} - f_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, z_n = x_n - f_n(x_1, \dots, x_r)$ son un sistema de coordenadas en un entorno U de $\phi(y)$. Reduciendo V si es preciso para que $\phi(V) \subset U$, tenemos

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & V, \{x_1, \dots, x_r\} & \to & U, \{z_1, \dots, z_n\} \\ & p = (p_1, \dots, p_r) & \mapsto & \phi(p) = (p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0) \end{array}$$

Recíprocamente, si existen sistemas de coordenadas en los que ϕ se expresa de este modo entonces ϕ es una inmersión local.

2. Definición : Sea $\phi\colon Y \to X$ una aplicación diferenciable entre dos variedades. Se dice que ϕ es una inmersión si ϕ es inyectiva e inmersión local an cada punto.

A pesar del nombre, puede ocurrir que la imagen de Y no se identifica con una subvariedad de X, como sucede con el "ocho" en el plano, parametrizado convenientemente. Ahora bien, si además $\phi\colon Y \to \phi(Y)$ es un homeomorfismo entonces $\phi(Y)$ es una subvariedad diferenciable de X y además $\phi\colon Y \to \phi(Y)$ es un difeomorfismo.

3. Observación : Si Y es compacta, entonces $\phi\colon Y \to \phi(Y)$ es un homeomorfismo, y, por tanto, $\phi(Y)$ es una subvariedad de X.

Sea X una variedad diferenciable compacta. Queremos encontrar una inmersión

$$\phi = (f_1, \dots, f_m)\colon X \to \mathbb{R}^m,$$

con lo cual, tendremos identificada la variedad X con una subvariedad de $\mathbb{R}^m$.

4. Proposición : *Sea $\phi = (f_1, \dots, f_m)\colon X \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Entonces, ϕ es una inmersión si y sólo si las funciones $f_1, \dots, f_m$ separan puntos de X y separan vectores tangentes de X.*

(Separan puntos si, para cualesquiera $x, x' \in X$ entonces $f_i(x) = f_i(x')$ para todo i, si y sólo si $x = x'$. Separan vectores tangentes si, para todo punto $x \in X$ y todo par de vectores tangentes $D_x, D'_x \in T_xX$ se cumple que si $d_xf_i(D_x) = d_xf_i(D'_x)$, para todo i, entonces $D_x = D'_x$).

Demostración. Que separe puntos equivale a que ϕ sea inyectiva. Que separe vectores tangentes equivale a que la aplicación lineal tangente sea inyectiva en todo punto. □

5. Teorema de inmersión en el caso compacto: *Toda variedad diferenciable compacta es difeomorfa a una subvariedad diferenciable de algún $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Buscamos funciones $f_1, \dots, f_m$ que separen puntos y separen vectores tangentes.

Sea $U_1, \dots, U_r$ un recubrimiento finito por abiertos coordenados de X y $\{u_{i1}, \dots, u_{in}\}$ el sistema de coordenadas en U_i. Sea $\{f_1, \dots, f_r\} \subset \mathcal{C}^\infty(X)$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento ($\operatorname{sop} f_i \subset U_i$, $\sum_i f_i = 1$). Consideremos ahora la siguiente colección de funciones $\{f_i, f_i \cdot u_{ik}\}_{i,k}$, todas definidas en X, si extendemos $f_i \cdot u_{ik}$ por cero fuera del abierto U_i.

Comprobemos que esta colección separa puntos y vectores tangentes, y con ello habremos acabado la demostración.

Separan puntos: dados dos puntos $x, x' \in X$, para algún j se cumple $f_j(x) \neq 0$. Si $0 \neq f_j(x) = f_j(x')$ entonces $x, x' \in U_j$. Ahora ya, si $f_j(x) \cdot u_{jk}(x) = f_j(x') \cdot u_{jk}(x')$ para todo k, entonces $u_{jk}(x) = u_{jk}(x')$ y $x = x'$.

Separan vectores tangentes: Dados dos vectores tangentes $D_x, D'_x \in T_xX$, existe i tal que $f_i(x) \neq 0$. Si $d_xf_i(D_x) = d_xf_i(D'_x)$ y $d_x(f_i \cdot u_{ik})(D_x) = d_x(f_i \cdot u_{ik})(D'_x)$ para todo k, entonces $f_i(x)d_xu_{ik}(D_x) = f_i(x)d_xu_{ik}(D'_x)$ para todo k. Por tanto, $d_xu_{ik}(D_x) = d_xu_{ik}(D'_x)$ para todo k y $D_x = D'_x$.

□

Capítulo 3

Aplicaciones de la teoría

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales. Regla de Cramer

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{11}x_1+ & \cdots & +\lambda_{n1}x_n = b_1 \\ & \cdots & \\ \lambda_{1m}x_1+ & \cdots & +\lambda_{nm}x_n = b_m \end{array}$$

Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal de matriz asociada (λ_{ij}) en las bases estándar y $e' = (b_1, \ldots, b_m)$. Las soluciones del sistema de ecuaciones lineales se corresponden con los vectores $e = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(e) = e'$.

Sea $T\colon E \to E'$ una aplicación k-lineal entre k-espacios vectoriales de dimensión finita.

1. Definición: Se llama rango de T, que denotaremos $\operatorname{rango} T$, a la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

Como $E/\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$, $\bar{e} \mapsto T(e)$, se tiene que $\operatorname{rango} T = \dim \operatorname{Im} T = \dim E - \dim \operatorname{Ker} T$.

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E, entonces $\operatorname{Im} T = \langle T(e_1), \ldots, T(e_n)\rangle$ y hemos definido $\operatorname{rango} T$ como el número máximo de $T(e_i)$ que son linealmente independientes entre sí. Si (λ_{ij}) es una matriz asociada a T entonces $\operatorname{rango} T$ es el número máximo de columnas linealmente independientes entre sí.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V y $u_i = \sum_j \lambda_{ij} v_j$, $1 \leq i \leq s$. Tendremos que

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_s = \sum \lambda_{j_1,\ldots,j_s} v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_s}$$

Calculemos $\lambda_{j_1,\ldots,j_s}$. Sea $i\colon \langle u_1, \ldots, u_s\rangle \hookrightarrow V$, la inclusión y $\pi\colon V \to \langle v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}\rangle$ tal que $\pi(v_j) = 0$ si $j \neq \{j_1, \ldots, j_s\}$ y $\pi(v_{j_i}) = v_{j_i}$, para $1 \leq i \leq s$. Entonces

$$\begin{aligned} \det(\pi \circ i) \cdot v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_s} &= \Lambda^s(\pi \circ i)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_s) = \Lambda^s(\pi)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_s) \\ &= \Lambda^s \pi(\sum \lambda_{j'_1,\ldots,j'_s} v_{j'_1} \wedge \cdots \wedge v_{j'_s}) = \lambda_{j_1,\ldots,j_s} v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_s} \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\lambda_{j_1,\ldots,j_s} = \det(\ (\lambda_{ij})_{j \in \{j_1,\ldots,j_s\}})$$

Recordemos que $u_1, \cdots, u_s$ son linealmente independientes si y sólo $u_1 \wedge \cdots \wedge u_s \neq 0$, luego $u_1, \ldots, u_s$ son linealmente independientes si y sólo si algún $\lambda_{j_1,\ldots,j_s} \neq 0$.

2. Proposición : *Sea (λ_{ij}) una matriz asociada a $T\colon E \to E'$. El rango de T es el máximo de los órdenes de los menores de la matriz (λ_{ij}) de determinante no nulo.*

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ una base de E' de modo que $T(e_i) = \sum_j \lambda_{ij} e'_j$. El rango de T es el número máximo de los $T(e_1), \dots, T(e_n)$ linealmente independientes. □

3. Corolario : *El número máximo de columnas linealmente independientes de una matriz coincide con el número máximo de filas linealmente independientes.*

Dada una aplicación lineal $T\colon E \to E'$, $e' \in E'$ cumple que $e' \in \operatorname{Im} T$ si y sólo si $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T + \langle e' \rangle$. Así pues, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E, $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ es una base de E', $T(e_i) = \sum_j \lambda_{ij} e'_j$ y $e' = \sum_j b_j e'_j$, tendremos que $e' \in \operatorname{Im} T$ si y sólo si el rango de la matriz (λ_{ij}) es igual al rango de la matriz (λ_{ij}) ampliada por la columna $(b_1, \dots, b_m)$.

Supongamos que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{11}x_1 + & \cdots & +\lambda_{n1}x_n = b_1 \\ & \cdots & \\ \lambda_{1m}x_1 + & \cdots & +\lambda_{nm}x_n = b_m \end{array}$$

tiene solución. Supongamos que el menor M obtenido de las columnas $\{i_1, \dots, i_r\}$ y filas $\{j_1, \dots, j_r\}$ de la matriz (λ_{ij}) es de determinante no nulo ($r = \operatorname{rango} T$). Por tanto, las filas $j' \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ dependen linealmente de las filas $j_1, \dots, j_r$ y para calcular las soluciones del sistema las podemos quitar. Pasemos las variables $x_{i'}$, con $i' \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ al otro lado de la igualdad. Tendremos que

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{j_1} - \sum_{i' \notin \{i_1, \dots, i_r\}} \lambda_{i' j_1} x_{i'} \\ \vdots \\ b_{j_r} - \sum_{i' \notin \{i_1, \dots, i_r\}} \lambda_{i' j_r} x_{i'} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_{j_1} - \sum_{i' \notin \{i_1, \dots, i_r\}} \lambda_{i' j_1} x_{i'} \\ \vdots \\ b_{j_r} - \sum_{i' \notin \{i_1, \dots, i_r\}} \lambda_{i' j_r} x_{i'} \end{pmatrix}$$

3.2. Máximos y mínimos bajo condiciones

Sea U un entorno abierto de $a \in \mathbb{R}$ y $f(x) \in \mathcal{C}^1(U)$.

1. Proposición : *Si $f(x)$ alcanza un máximo relativo en a (es decir, $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in V$, para cierto entorno abierto V de a, $V \subset U$) entonces $f'(a) = 0$.*

Demostración. En efecto, tenemos que $f(x) = f(a) + h(x) \cdot (x - a)$, donde $h(x) \in \mathcal{C}(U)$ y $h(a) = f'(a)$. Si $h(a) > 0$ entonces en un entorno $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ la función $h(x)$ será estrictamente mayor que cero, entonces $f(x) > f(a)$ para $x \in (a, a + \epsilon)$ (y $f(x) < f(a)$ para $x \in (a - \epsilon, a)$). Llegamos a contradicción. Del mismo modo se llega a contradicción si $h(a) < 0$. □

Sea ahora U un entorno abierto de $a \in \mathbb{R}^n$ y $f(x) \in \mathcal{C}^1(U)$.

2. Proposición : *Si $f(x)$ alcanza un máximo relativo en a entonces $d_a f = 0$.*

Demostración. Por la proposición anterior $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ para todo x_i (considerando f como función en la variable x_i). □

3. Proposición: *Supongamos ahora que $f(x) \in \mathcal{C}^2(U)$ y que $d_a f = 0$. Tenemos que $f(x) = f(a) + (x - a) \cdot H(x) \cdot (x - a)^t$, siendo $H(x)$ una matriz simétrica (de funciones continuas) y $H(a) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))$. Si $H(a)$ es una matriz no singular entonces*

1. *$f(x)$ alcanza un máximo relativo en a si y sólo si $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))$ es definida negativa.*

2. *$f(x)$ alcanza un mínimo relativo en a si y sólo si $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))$ es definida positiva.*

Demostración. $H(a)$ es una matriz definida positiva si y sólo si para todo $v \in S^n$, $v \cdot H(a) \cdot v^t > 0$. Si $H(a)$ es definida positiva entonces $H(x)$ es definida positiva en un entorno de a, y por tanto en ese entorno $f(x) > f(a)$, para $x \neq a$, y a es un mínimo relativo. Del mismo modo se razona si $H(a)$ es definida negativa.

Nos falta ver que si $H(a)$ no es definida positiva ni negativa entonces a no es mínimo ni máximo relativo. Existen $v, v' \in S^n$ de modo que $v \cdot H(a) \cdot v^t < 0$ y $v' \cdot H(a) \cdot v'^t > 0$. Existe un entorno abierto V de a, de modo que $v \cdot H(x) \cdot v^t < 0$ y $v' \cdot H(x) \cdot v'^t > 0$, para todo $x \in V$. Por tanto, para $x = a + \frac{v}{n}$, para todo $n >> 0$, se tiene que $f(x) < f(a)$ y para $x = a + \frac{v'}{n}$, para todo $n >> 0$, se tiene que $f(x) > f(a)$. □

Sea ahora $Y \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad diferenciable. Dada una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ nos planteamos si $f_{|Y}$ alcanza un máximo (o un mínimo) relativo en $a \in Y$.

Recordemos que podemos identificar (localmente) Y con un abierto de $\mathbb{R}^{n-r}$ y por tanto podemos aplicar la teoría recién desarrollada. En efecto, sea un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y un sistema de coordenadas $y_1, \ldots, y_n$ en U de modo que $U \cap Y \equiv y_1 = \ldots = y_r = 0$. Tenemos que $f(x_1, \ldots, x_n) = g(y_1, \ldots, y_n)$ y $f_{|Y} = g(0, \ldots, 0, y_{r+1}, \ldots, y_n)$. Es decir, podemos considerar $f_{|Y}$ como una función diferenciable en las variables $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Por tanto si a es un máximo o un mínimo relativo de $f_{|Y}$ entonces $0 = d_a f_{|Y} \in \bar{\mathfrak{m}}_a / \bar{\mathfrak{m}}_a^2$, donde $\bar{\mathfrak{m}}_a$ es el ideal de todas las funciones diferenciables de Y que se anulan en a. Observemos que $\dim_{\mathbb{R}} \bar{\mathfrak{m}}_\alpha / \bar{\mathfrak{m}}_a^2 = n - r$. El epimorfismo natural $\mathfrak{m}_a \to \bar{\mathfrak{m}}_a$, $h \mapsto h_{|Y}$, define el epimorfismo

$$\pi \colon \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2 \to \bar{\mathfrak{m}}_a / \bar{\mathfrak{m}}_a^2,\ \pi(\bar{h}) = \bar{h}_{|Y}$$

Por tanto, $d_a f_{|Y} = 0$ si y sólo si $d_a f \in \operatorname{Ker} \pi$. $\operatorname{Ker} \pi$ contiene a $d_a y_1 = \bar{y}_1, \ldots, d_a y_r = \bar{y}_r$. Por dimensiones, $\operatorname{Ker} \pi = \langle d_a y_1, \ldots, d_a y_r \rangle$. En conclusión, si a es un máximo o mínimo relativo de $f_{|Y}$ entonces $d_a f$ es combinación lineal de $d_a y_1, \ldots, d_a y_r$.

Las funciones $y_{r+1}, \ldots, y_n$ son un sistema de coordenadas en a de Y. Por tanto, si la matriz $(\frac{\partial^2 f_{|Y}}{\partial y_i \partial y_j}(a))_{i,j>r} = (\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(a))_{i,j>r}$ es no singular, entonces a es un máximo relativo en Y de $f_{|Y}$ si es definida negativa. El problema que nos planteamos es como calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}$, suponiendo que conocemos las funciones y en términos de las x. Tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (\frac{\partial y_j}{\partial x_i}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} = (\frac{\partial y_j}{\partial x_i})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

3.3. Longitudes, áreas y volúmenes

El volumen (en dimensión dos área, en dimensión uno longitud) de una variedad diferenciable riemanniana es la integral de su forma de volumen.

Longitud de una curva

1. Calculemos la longitud de una curva dada en cartesianas.

Sea $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ una curva. $\mathbb{R}^n$ es una variedad riemanniana con la métrica $T_2 = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$. La curva σ con la métrica $T_{2\sigma}$ es una variedad riemanniana.

$$T_{2\sigma} = dx_1(t) \otimes dx_1(t) + \cdots + dx_n(t) \otimes dx_n(t) = \sum_i x'_i(t)^2 \cdot dt \otimes dt$$

La forma de longitud de σ, w_σ en la coordenada t es $w_\sigma = \sqrt{\sum_i x'_i(t)^2} \cdot dt$

$$\text{Longitud de } \sigma \text{ entre } t_0 \text{ y } t_1 := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_i x'_i(t)^2} \cdot dt$$

2. Ahora calculemos la longitud de una curva plana dada en coordenadas polares ρ, θ.

Sea $\sigma \colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \times S^1$, $\sigma(t) = (\rho(t), \theta(t))$. Recordemos que la relación entre las coordenadas cartesianas y las polares es $x_1 = \rho \cdot \cos\theta$, $x_2 = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$. Luego,

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos\theta \cdot d\rho - \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta \\ dx_2 &= \operatorname{sen}\theta \cdot d\rho + \rho \cdot \cos\theta \cdot d\theta \end{aligned}$$

y $T_2 = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 = \ldots = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta$. Ahora ya,

$$T_{2|\sigma(t)} = ({\rho'}^2 + \rho^2 \cdot {\theta'}^2) \cdot dt \otimes dt$$

y

$$\text{Longitud de } \sigma \text{ entre } t_0 \text{ y } t_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{{\rho'}^2 + \rho^2 \cdot {\theta'}^2} \cdot dt$$

3. Supongamos ahora que la curva viene dada en implícitas $C \equiv p(x, y) = 0$ (x, y las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$). Un campo normal a la curva es $D = T^2(dp(x, y)) = p_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$. Sea $N = D/\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Por tanto, la forma de longitud de C es $w_C = i_N(dx \wedge dy) = \frac{p_x \cdot dy - p_y \cdot dx}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$. Supongamos que $x, p(x, y)$ forman un sistema de coordenadas, entonces en C, $0 = dp(x, y) = p_x dx + p_y dy$ y $dy = -\frac{p_x}{p_y} \cdot dx$. En conclusión si parametrizamos C por x, tenemos que

$$\text{Longitud de } \sigma \text{ entre } x_0 \text{ y } x_1 = \int_C \frac{p_x \cdot dy - p_y \cdot d}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} = \ldots = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{p_y^2}} \cdot dx$$

que coincide con el cálculo de 1., si consideramos la parametrización $x \mapsto (x, y(x))$ (y es función de x en en C), y recordamos que $y_x = -\frac{p_x}{p_y}$ en C.

Área de una superficie

1. El área del círculo de radio r, que en coordenadas polares es la región $C \equiv \{0 < \rho \leq r, 0 < \theta \leq 2\pi\}$, es igual a

$$\int_C \sqrt{|T_2|} \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_{\substack{0 < \rho \leq r \\ 0 < \theta \leq 2\pi}} \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = \int_0^r 2\pi \cdot \rho d\rho = \pi \cdot \rho^2|_0^r = \pi \cdot r^2$$

El área de la región del plano limitada por la gráfica de una función $y = f(x)$ (supongamos $f(x) \geq 0$ y coordenadas cartesianas x, y) , es por definición $\int_A dx \wedge dy$, donde A es la región del plano limitada por la gráfica $L_1 = \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$, el eje OY, $L_2\{y = 0, a \leq x \leq b\}$ y las rectas $L_3 = \{x = a,\, 0 \leq y \leq f(a)\}$, $L_4 = \{x = b,\, 0 \leq y \leq f(b)\}$ (no me preocupo por las orientaciones, pero sí del resultado final). Por el teorema de Stokes

$$\int_A dx \wedge dy = \int_{L_1 \cup \cdots \cup L_4} y \cdot dx = \int_{L_1} y \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

2. Calculemos el área del triángulo T limitado por la gráfica de una función (dada en polares) $\rho = \rho(\theta)$ y el origen:

$$\text{Área del triángulo } T = \int_T \sqrt{|T_2|} \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_T \rho \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_{\partial T} \frac{\rho^2}{2} \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(\theta)^2}{2} \cdot d\theta$$

3. Calculemos el área de la superficie S que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje OX.

Consideremos coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$, x, ρ, θ, es decir, $x = x$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \theta$. En estas coordenadas $S = \{\rho = f(x), a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, x, θ son un sistema de coordenadas en S y $d\rho = df(x) = f' dx$ en S.

$T_2 = dx \otimes dx + d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta$ en coordenadas cilíndricas. Por tanto, $T_{2|S} = (1 + {f'}^2) \cdot dx \otimes dx + f^2 \cdot d\theta \otimes d\theta$ y

$$\text{Área de S} = \int_S \sqrt{|T_{2|S}|} \cdot dx \wedge d\theta = \int_S \sqrt{1 + {f'}^2} \cdot f \cdot dx \wedge d\theta = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Igualmente se tiene que el área de la superficie S que se obtiene al girar la curva plana parametrizada $(x_1(t), x_2(t))$ alrededor del eje OX_1 es

$$\int_{t_0}^{t_1} 2\pi \cdot x_2(t) \cdot \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} \cdot dt \qquad (*)$$

El área de la superficie de la esfera (que se obtiene al girar la semicircunferencia $\{(r \cdot \cos t, r \cdot \operatorname{sen} t), 0 \leq t \leq \pi\}$ alrededor del eje OX_1) es

$$\int_0^\pi 2\pi \cdot r \cdot \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{r^2} \cdot dt = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

El área de la superficie tórica que se obtiene al girar la circunferencia $\{(r \cdot \cos t, a + r \cdot \operatorname{sen} t)\}$, $a \geq r$ alrededor del eje $0X_1$ es

$$\int_0^{2\pi} 2\pi \cdot (a + r \cdot \operatorname{sen} t) \cdot \sqrt{r^2} \cdot dt = 4 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot r$$

Veamos que la fórmula $(*)$ está diciendo que el área de una superficie de revolución es la longitud de una sección por el perímetro de la circunferencia que describe el centro de gravedad de una sección: Si tenemos dos masas m y m' en los puntos del plano $x = (x_1, x_2)$ y $x' = (x_1', x_2')$ el centro de gravedad de ambas masas es $\frac{x \cdot m + x' \cdot m'}{m + m'}$. Si tenemos una curva (homogénea) en el plano, que troceamos en incrementos Δ_i, el centro de gravedad de la curva es $\frac{\sum x_i \cdot \Delta_i}{\sum \Delta_i}$ es decir, el centro de gravedad de la curva $C \equiv \{(x_1(t), x_2(t)\}$, de forma de longitud $w_C = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} \cdot dt$ es

$$\frac{\int_C x \cdot w_C}{\int_C w_C} = \frac{(\int_C x_1 \cdot w_C, \int_C x_2 \cdot w_C)}{\text{Long. } C}$$

El perímetro de la circunferencia (alrededor del eje OX_1) que describe el centro de gravedad es

$$2\pi \cdot \frac{\int_C x_2 w_C}{\text{Long. } C}$$

Por tanto,

$$2\pi \cdot \frac{\int_C x_2 \cdot w_C}{\text{Long. } C} \cdot \text{Long. } C = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi \cdot x_2(t) \cdot \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} \cdot dt$$

Volúmenes

1. Consideremos en el plano una región A y sea $V \subset \mathbb{R}^3$ el cuerpo de revolución obtenido al girar la región S alrededor del eje OX_1. Sean x_1, x_2, x_3 coordenadas cartesianas y x_1, ρ, θ coordenadas cilíndricas, es decir, $x_1 = x_1$, $x_2 = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$, $x_3 = \rho \cdot \cos\theta$. Un punto $(x_1, x_2, x_3) \in V \iff (x_1, \rho) \in A$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto, el volumen del cuerpo revolución es

$$\int_V dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{A \times [0,2\pi]} \rho \cdot dx_1 \wedge d\rho \wedge d\theta = \int_A 2\pi\rho \cdot dx_1 \wedge d\rho = \int_A 2\pi x_2 \cdot w_A$$

donde w_A es la forma de área de A y la última igualdad es un simple cambio de notación. Argumentando como más arriba el lector puede probar que el volumen de un cuerpo de revolución es el es el área de una sección por el perímetro de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la sección.

Calculemos el volumen del toro "macizo", $Toro$, que se obtiene al girar el círculo C de radio r y centrado en $(0, a)$ alrededor del eje OX_1. Consideremos en el plano las coordenadas ρ, θ, con $x_1 = \rho \operatorname{sen}\theta$ y $x_2 = a + \rho\cos\theta$, entonces

$$\text{Vol. } Toro = \int_C 2\pi \cdot x_2 \cdot w_C = \int_{[0,r]\times[0,2\pi]} 2\pi(a + \rho\cos\theta) \cdot \rho \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_0^r 4\pi^2 \cdot a \cdot \rho \cdot d\rho = 2 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot r^2$$

Calculemos el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX el triángulo T de vértice el origen y lado opuesto un arco de curva $\rho = \rho(\theta)$ (en coordenadas polares).

$$\text{Vol. } T = \int_T 2\pi x_2 w_T = \int_{0<\rho\leq\rho(\theta), \theta\in[\theta_0,\theta_1]} 2\pi \cdot \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \rho \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{2\pi}{3} \cdot \rho(\theta)^3 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta$$

2. Calculemos el volumen del cuerpo de revolución V obtenido al girar alrededor del origen, pasando por el eje OZ cada punto del triángulo de vértice el origen y lado opuesto un arco de curva $\rho = f(\theta)$ es $\frac{4}{3}\int_\alpha^\beta f^3(\theta)\, d\theta$. Consideremos coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ, es decir,

$$x_1 = \rho\cos\theta\cos\phi, \quad x_2 = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad x_3 = \rho\operatorname{sen}\phi$$

Entonces $(x_1, x_2, x_3) \in V \iff \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ y $0 < \rho \leq \rho(\theta)$ y

$$\text{Vol. } V = \int_V dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int \rho^2 |\cos\phi| \cdot d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi = \int 4\rho^2 \cdot d\rho \wedge d\theta = \frac{4}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^3 \cdot d\theta$$

La esfera de radio r se obtiene al girar la curva $\rho = r$ (con $\theta \in [0, \pi]$) alrededor del origen, luego su volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Hipervolumen

Calculemos el volumen de la bola de radio r, $B = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1^2 + \dots + x_4^2 \leq r^2\}$, de $\mathbb{R}^4$. Consideremos coordenadas hiperesféricas $\rho, \theta, \phi, \varphi$, es decir,

$$x_1 = \rho\cos\theta\cos\phi\cos\varphi, \quad x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta\cos\phi\cos\varphi, \quad x_3 = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\varphi, \quad x_4 = \rho\operatorname{sen}\varphi$$

$B = \{0 < \rho \leq r, 0 \leq \theta < 2\pi, -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}$ y $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_4 = \rho^3 \cos\phi \cos^2\varphi \cdot d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi \wedge d\varphi$ y

$$\text{Vol. } B. = \int_{[0,r]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[-\pi/2,\pi/2]} \rho^3 \cos\phi\cos^2\varphi \cdot d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi \wedge d\varphi = \frac{\pi^2 r^4}{2}$$

3.4. Ejemplos en Física

Quiero establecer justificadamente los principios mínimos o básicos de la física Newtoniana y la Relativista.

"Todo individuo tiene conocimiento sólo de un entorno relativamente pequeño (infinitesimal) suyo. En cada instante de tiempo y lugar el individuo observará un tiempo y un espacio". El espacio físico X en una variedad diferenciable de dimensión cuatro (infinitesimalmente $T_xX = \mathbb{R}^4$). Dar un individuo-observador es dar una curva $C \hookrightarrow X$ (curva espacio-temporal) y un punto $c \in C$ digamos que es el individuo en un instante y lugar determinados.

"Cada individuo infinitesimalmente tiene una concepción de tiempo y espacio, romperá su realidad observada en dos bien diferenciadas: tiempo y espacio. Además suponemos que cada individuo le puede comunicar a uno cercano qué hora tiene y qué lugar ocupa. Infinitesimalmente el individuo rompe su realidad física en tiempo y espacio y lo puede comunicar". Es decir, $T_cX = T_cC \oplus E_c$, donde diremos que T_cC es el tiempo infinitesimal del individuo-observador C en c y E_c es el espacio del observador C en c. La condición de comunicabilidad (que no hemos expresado o detallado con rigor) se traduce en que T_cX sucede una de las dos posibilidades siguientes:

1. Existe una métrica simétrica (de Lorentz) que en una base ortogonal es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $E_c = T_cC^\perp$.

2. Existe una métrica simétrica que en una base ortogonal es de la forma

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $E_c = \operatorname{rad} T_2$