Universidad de Extremadura

Departamento de Matemáticas

Esquemas de Álgebras y sus Representaciones

Amelia Álvarez Sánchez

Directores: Carlos Sancho de Salas
Pedro Sancho de Salas

La presente Memoria para optar al Título de Doctor se realizó en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura bajo la dirección del Dr. D. Carlos Sancho de Salas y del Dr. D. Pedro Sancho de Salas.

A mi padre,
que ya no está.
A mi madre,
que está al lado.
A mi hermana,
que está lejos.
A José Luis,
que siempre está.

Agradecimientos

Para comenzar, hay que remontarse al año 1995, cuando terminé el instituto y aún no sabía hacia donde dirigirme académicamente. Las matemáticas siempre me habían gustado y me había resultado fácil destacar en ellas, aunque nunca pensé que se podían estudiar en la universidad. Cuando me enteré de ello, lo consideré seriamente, aunque no fue hasta que hice selectividad y tuve que elegir, que me decidí por meterme en estos berenjenales, influenciada también por mi madre, que piensa que porque se suelen suspender las asignaturas de matemáticas nunca me iba a faltar trabajo (en cierto modo, tiene razón). Así pues, el primer agradecimiento para ella.

Una vez que entré en la carrera descubrí un nuevo mundo, vi que las matemáticas no eran lo que nos habían enseñado en el colegio o el instituto, y cada curso que pasaba los horizontes de ese mundo se ensanchaban más y más. En parte, los culpables de que me gustase tanto fueron mis profesores, así que para ellos el segundo agradecimiento.

Acabada la carrera preferí dedicarme a la investigación, así que pedí una beca y empezó el largo camino hacia el doctorado. Es verdad que ha sido largo, desde que empecé ese camino me he hipotecado, me he quedado huérfana de padre, me he casado, me he “exiliado”, y un poco más y soy madre antes de terminarlo. El tercer agradecimiento es para los dos guías que he tenido en ese camino, mis directores Carlos y Pedro. En especial gracias por la infinita paciencia que han tenido conmigo, los que han sufrido mis “sesiones de dudas” saben bien lo pesada que puedo llegar a ser a veces.

Por último, un agradecimiento a todos aquellos que han tenido un momento para atenderme cuando he acudido a ellos, y especialmente a José Luis, que es el que me anima y apoya en los peores momentos, cuando pienso que no voy a ninguna parte por este camino.

Gracias a todos ellos.

Índice general

Introducción

La teoría de grupos algebraicos afines y sus representaciones lineales, ha sido tratada fundamentalmente desde tres puntos de vista: vía la teoría de las álgebras de Lie, en característica cero ([5], [8], [28]), vía la teoría de álgebras de Hopf ([5], [17], [28]), vía la teoría de variedades algebraicas y sus morfismos. Dentro de este último punto de vista, el considerar los grupos algebraicos y sus representaciones en términos de sus funtores de puntos ([8]), permite desarrollar la teoría de modo geométrico e intuitivo.

De hecho, en no pocas ocasiones, es usual recurrir a este punto de vista para interpretar o comprender las definiciones y resultados de la teoría de álgebras de Hopf. Por ejemplo, dado una k-álgebra de Hopf A y un A-comódulo E, el morfismo de comultiplicación $E \to A \otimes E$ puede interpretarse de distintos modos:

1. Sea $G = \operatorname{Spec} A$ y consideremos E como G-módulo. Entonces se cumple que $A \otimes E = \operatorname{Hom}_{k-var}(G, E)$ y el morfismo de comultiplicación es el morfismo $E \to \operatorname{Hom}_{k-var}(G, E)$, $e \mapsto \tilde{e}$, donde $\tilde{e}(g) = g \cdot e$, para todo punto g de G.

2. Dado un punto g de G con valores en una k-álgebra B, es decir, $g \in G^{\cdot}(B) := \operatorname{Hom}_{k-esq}(\operatorname{Spec} B, G)$, sea $L_g : E \otimes_k B \to E \otimes_k B$ el morfismo de traslación por g, es decir, $L_g(v) = g \cdot v$, para todo $v \in E \otimes_k B$. Si $g = \operatorname{Id} \in G^{\cdot}(A) = \operatorname{Hom}_{k-esq}(G, G)$ ("punto general" de G), entonces el morfismo de comultiplicación es el morfismo

$$E \to E \otimes_k A,\ e \mapsto L_g(e \otimes 1).$$

3. A^* es un álgebra, E^* es un A^*-módulo (por la derecha) y como probamos, el dual (cuando se considera todo funtorialmente, es decir, vía sus funtores de puntos) del morfismo de multiplicación $E^* \otimes_k A^* \to E^*$ es el morfismo de comultiplicación.

Por otra parte, si G es un grupo finito discreto, es usual en Álgebra ([27]), desarrollar la teoría de representaciones lineales de G como una teoría de $k[G]$-módulos, donde $k[G]$ es el álgebra envolvente de G, que coincide con el dual del anillo de funciones de G. Es bastante menos usual tratar la teoría de representaciones lineales de un grupo algebraico $G = \operatorname{Spec} A$ como una teoría de

A^*-módulos. La razón principal por la que esto no se lleva a cabo, es que ello exige introducir topologías en A^* y en las representaciones lineales ([9], [10]). Sin embargo, si consideramos G vía su funtor de puntos y consecuentemente los espacios vectoriales, los endomorfismo lineales, etc., vía su funtor de puntos, no es necesario introducir ninguna topología y la teoría se desarrolla de modo natural.

La interpretación de la teoría de la medida de los grupos continuos, localmente compactos (análisis armónico) desde el punto de vista de los funtores de puntos, de manera que luego fuera trasladable a los grupos algebraicos, dio origen posteriormente a esta memoria. El primer problema se plantea en la definición de medida. Sea $\mathcal{C}(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{R})$ (morfismos continuos), el anillo de funciones continuas de X y definamos el funtor $C_X(S) := \mathrm{Hom}(X \times S, \mathbf{R}) = \mathcal{C}(X \times S)$. Se sabe que la topología de la convergencia en cada compacto es exactamente aquélla tal que $\mathrm{Hom}_{cont}(S, \mathcal{C}(X)) = \mathcal{C}(X \times S)$, es decir, es la topología que hace a $\mathcal{C}(X)$ representante del funtor C_X (esto justifica el considerar tal topología). Ahora, las medidas se definen como $M(X) = \mathrm{Hom}_{lin-cont}(\mathcal{C}(X), \mathbf{R})$ y se puede comprobar $M(X) = \mathrm{Hom}_{funt-lin}(C_X, \mathbf{R})$. Dicho de otro modo, las medidas en X son las formas lineales sobre $\mathcal{C}(X)$ universalmente definidas, es decir, tales que para cada espacio S se tenga $\omega_S : \mathcal{C}(X \times S) \to \mathcal{C}(S)$ lineal sobre $\mathcal{C}(S)$, de manera compatible con los cambios de base $S' \to S$ (de nuevo desaparece la condición de continuidad).

Esta observación hace ver que es posible definir los espacios de medidas para cualquier tipo de espacios (diferenciables, analíticos, esquemas afines, etc.) y en ellos son aplicables, en principio, las cuestiones formales de la teoría de la medida. Recíprocamente, este punto de vista permite aclarar y justificar definiciones y resultados de la teoría de la medida y el análisis armónico, dándoles más naturalidad.

Nuestro interés se centra en el caso algebraico. En este caso, hay que sustituir $\mathcal{C}(X)$ por el anillo $A_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{k})$ de funciones algebraicas de X y se verifica que todas las formas lineales $\omega : A_X \to k$ están universalmente definidas, por lo que el funtor de medidas en X no es otro que $\mathrm{Hom}_{k-lin}(A_X, k)$.

El desarrollo de la teoría es el siguiente. Sea $\mathcal{C}_k$ la categoría de k-álgebras. Dado un k-módulo E, sea $\mathbf{E}$ el funtor de k-módulos sobre $\mathcal{C}_k$ definido por

$$\mathbf{E}(B) := E \otimes_k B$$

para toda k-álgebra $B \in \mathcal{C}_k$. Decimos que $\mathbf{E}$ es un k-módulo cuasi-coherente. Es fácil probar que la categoría de k-módulos es equivalente a la categoría de k-módulos cuasi-coherentes. Por tanto, a veces denotaremos $\mathbf{E}$ simplemente E. Dados dos funtores de k-módulos F y H sobre $\mathcal{C}_k$, denotamos por $\mathbf{Hom}_k(F, H)$ el funtor de k-módulos definido por

$$\mathbf{Hom}_k(F, H)(B) := \mathrm{Hom}_B(F_{|B}, H_{|B})$$

donde $F_{|B}$ es el funtor F restringido a la categoría de B-álgebras. Diremos que $\mathbf{E}^* := \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{k})$ es un esquema de k-módulos (porque $\mathbf{E}^*$ es el funtor de puntos de $\mathrm{Spec}\, S^{\cdot} E$). Es fácil comprobar que $\mathbf{E}^*(B) = \mathrm{Hom}_B(E \otimes_k B, B)$. Si un esquema de módulos, $\mathbf{A}^*$, es además un funtor de álgebras diremos que es un esquema de álgebras.

El teorema fundamental, en el que se apoya toda la tesis, es el teorema de reflexividad (donde no aparece ninguna topología).

Teorema. *Sea k un anillo y E un k-módulo.*

1. $\mathbf{E}^{**} = \mathbf{E}$.

2. $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}^*, \mathbf{V}) = \mathbf{E} \otimes_k \mathbf{V}$.

Como consecuencia de 1., se tiene que la categoría de los k-módulos es anti-equivalente a la categoría de los k-esquemas de módulos. En [9, Exposé VII_B, 1.2.3] se obtiene una *anti-equivalencia entre la categoría de los k-módulos pseudocompactos proyectivos y la categoría de los funtores de k-módulos planos, siendo k un anillo pseudocompacto.*

Al considerar $G = \operatorname{Spec} A$ y $\mathbf{A}^*$ como funtores, tenemos un morfismo natural $G^\cdot \to \mathbf{A}^*$ (que clásicamente sólo podía ser definido entre los puntos k-racionales de uno y otro). Inmediatamente se plantea qué relación existe entre $k[G^\cdot]$ y $\mathbf{A}^*$. Probamos el siguiente teorema.

Teorema. *El cierre de esquemas de álgebras (y módulos) de $k[G^\cdot]$ es $\mathbf{A}^*$, es decir, $\mathbf{A}^*$ es el representante del funtor sobre la categoría de esquemas de álgebras $\operatorname{Hom}_{k-alg}(k[G^\cdot], -)$.*

Dado un funtor de k-módulos H, decimos que $F = H^*$ es un funtor dual. Con mayor generalidad (que necesitaremos) probamos que el cierre de funtores duales de álgebras (y módulos) de $k[G^\cdot]$ es $\mathbf{A}^*$.

Este teorema permite pensar $\mathbf{A}^*$ "como" si fuese $k[G^\cdot]$, exactamente como sucede en la teoría de grupos finitos discretos. Éste ha sido uno de los objetivos implícitos de la tesis: el tratar la teoría de representaciones lineales de los grupos finitos discretos y los grupos algebraicos como una única teoría. Como consecuencia del teorema anterior, probamos que si $G = \operatorname{Spec} A$ es un k-grupo afín, entonces la categoría de las representaciones lineales de G es equivalente a la categoría de $\mathbf{A}^*$-módulos. Con mayor generalidad,

Teorema. *La categoría de funtores duales de G-módulos es equivalente a la categoría de funtores duales de $\mathbf{A}^*$-módulos.*

En conclusión, la teoría de representaciones lineales de los grupos afines es una teoría de esquemas de álgebras y sus representaciones.

En el capítulo 2, como es obligado, estudiamos los esquemas de módulos $\mathbf{E}^*$ y el cierre de esquemas de módulos de los funtores de k-módulos. Probamos que un funtor de k-módulos reflexivo F es un esquema de módulos si y sólo si el funtor $\mathbf{Hom}_k(F, -)$ conmuta con sumas directas (de módulos cuasi-coherentes). Probamos

Teorema. *El cierre de esquemas de un funtor F de k-módulos es estable por cambio de base $\iff$ F^* es un k-módulo cuasi-coherente $\iff$ el cierre de esquemas de módulos de F es F^{**}.*

Probamos (con hipótesis muy generales) que el cierre de esquemas de módulos de un funtor de k-módulos F coincide con $\hat{F} := \lim\limits_{\overleftarrow{i}} F/F_i$, donde F/F_i es k-módulo coherente. En particular, obtenemos que un funtor reflexivo de k-módulos es un esquema de módulos si y sólo si es completo y separado. Enunciado que explica la relación que hay entre los esquemas de módulos y las topologías antes mencionadas.

Comenzamos el capítulo 3 probando que la categoría de coálgebras con unidad, $\mathcal{C}_{coalg}$, es anti-equivalente a la categoría de los esquemas de álgebras, $\mathcal{C}_{\mathbf{alg}}$. Los funtores que dan la anti-equivalencia son $\mathcal{C}_{coalg} \to \mathcal{C}_{\mathbf{alg}}$, $B \rightsquigarrow \mathbf{B}^*$ y $\mathcal{C}_{\mathbf{alg}} \to \mathcal{C}_{coalg}$, $\mathbf{A}^* \rightsquigarrow A$.

En [9, Exposé VII_B, 1.3.5] se puede encontrar esta anti-equivalencia en términos de $\mathbf{k}$-coálgebras planas coconmutativas y de k-variedades formales topológicamente planas, donde k es un anillo pseudocompacto.

A continuación, estudiamos los esquemas de álgebras y los cierres de esquemas de álgebras de un funtor de k-álgebras.

Teorema. *Sea F un funtor de k-álgebras. El cierre de esquemas de álgebras de F coincide con F^{**} si y sólo si F^* es un k-módulo cuasi-coherente.*

Obtenemos inmediatamente que si $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín, el cierre de esquemas de álgebras de $k[G^{\cdot}]$ es $\mathbf{A}^*$. Igualmente probamos que si $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ son esquemas de álgebras, el cierre de esquemas de álgebras de $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{B}^*$ es $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^*$.

En hipótesis muy generales, demostramos que el cierre de esquemas de álgebras de un funtor F de k-álgebras coincide con $\lim\limits_{\overleftarrow{i}} F/F_i$, donde F/F_i es k-álgebra coherente. En particular, los esquemas de álgebras son límite proyectivo de esquemas de álgebras finitas, y de este hecho se probará más tarde que todo grupo algebraico afín es un subgrupo del grupo lineal.

Sea F un funtor de k-álgebras y $D \subseteq F^*(k)$ el subespacio vectorial formado por las 1-formas lineales de F, que se anulan en algún ideal bilátero de F cuyo conúcleo es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Decimos que D es el k-espacio vectorial de distribuciones de soporte finito de F. Probamos que el cierre de esquemas de álgebras de F coincide con $\mathbf{D}^*$.

El estudio general de los esquemas de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ y los $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes, sigue las líneas generales del estudio de las k-álgebras finitas (desarrollado en el capítulo primero). Quizás sorprenda que se obtengan después los resultados básicos de la teoría de las representaciones lineales de los grupos algebraicos, sin considerar la estructura de álgebra del anillo de funciones del grupo. Demos algunos ejemplos.

Si E es un $\mathbf{A}^*$-módulo y $E' \subset E$ un k-módulo de tipo finito, probamos que $\mathbf{A}^* \cdot E'$ es un $\mathbf{A}^*$-submódulo de E, de tipo finito sobre k. En consecuencia, si $G = \operatorname{Spec} A$ es un k-grupo afín, E un G-módulo y $E' \subset E$ un k-módulo de tipo finito, entonces $G \cdot E'$ es un G-submódulo de E, de tipo finito sobre k.

$\mathbf{A}^*$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha, luego su dual $\mathbf{A}$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente por la izquierda, que llamaremos el $\mathbf{A}^*$-módulo regular. Cada

$\mathbf{A}^*$-módulo simple es un $\mathbf{A}^*$-submódulo del módulo regular. En consecuencia, cada G-módulo simple es un G-submódulo del G-módulo regular.

Teorema. *Las extensiones de $\mathbf{A}^*$-módulos de E por E', módulo isomorfismos de extensiones, están clasificadas por el grupo $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{A}^*}(E, E')$.*

La igualdad de grupos de cohomología $H^{\cdot}(G, E) = \mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathbf{A}^*}(k, E)$, dará como consecuencia que las extensiones de G-módulos de k por E están clasificadas por $H^1(G, E)$.

Las álgebras no conmutativas más sencillas y con mejores propiedades son las simples y las semisimples. Probamos que un esquema de k-álgebras es semisimple si y sólo si es un producto directo de k-álgebras simples. A toda álgebra se le asocia de modo canónico un álgebra semisimple. Dado un esquema de álgebras $\mathbf{A}^*$, denotemos por $\mathbf{M}^*$ el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$ y por $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$, es decir, el núcleo del morfismo $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$. Sea $\mathrm{Spec}_{max} A^*$ el conjunto de los ideales biláteros maximales de A^*. Probamos que

$$\mathrm{Spec}_{max} A^* = \mathrm{Spec}_{max} M^* = \left\{ \begin{matrix} \text{Conjunto de clases de isomorfía} \\ \text{de } \mathbf{A}^*\text{-módulos simples} \end{matrix} \right\}$$

Probamos que un morfismo $\mathbf{E}^* \to \mathbf{E'}^*$ es un isomorfismo si y sólo si el morfismo $G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E}^* = \prod_n \mathbf{I}^{*n}\mathbf{E}^*/\mathbf{I}^{*n+1}\mathbf{E}^* \to \prod_n \mathbf{I}^{*n}\mathbf{E}'^*/\mathbf{I}^{*n+1}\mathbf{E}'^* = G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E'}^*$ es un isomorfismo.

Todo $\mathbf{A}^*$-módulo coherente $\mathbf{E}$ ($\dim_k E < \infty$) define un carácter $\chi_E : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$, que asigna a cada $w \in \mathbf{A}^*$ la traza de la homotecia en $\mathbf{E}$ de factor w. Si $\mathrm{car}\, k = 0$, demostramos que dos caracteres χ_E y $\chi_{E'}$ son iguales si y sólo si los $\mathbf{M}^*$-módulos graduados $G_{\mathbf{I}^*}(E)$ y $G_{\mathbf{I}^*}(E')$ son isomorfos. Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, demostramos que los caracteres asociados a los $\mathbf{A}^*$-módulos simples son linealmente independientes.

Una primera aproximación a la clasificación de los esquemas de álgebras es la clasificación de las extensiones de álgebras. Probamos que las extensiones de esquemas de k-álgebras de un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ por un esquema de $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^{*\circ}$-módulos $\mathbf{V}^*$ están clasificadas por el grupo

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{V}^*) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{V}, \mathbf{A}).$$

Como consecuencia obtenemos el teorema de Wedderburn-Malcev, en el contexto de esquemas de álgebras:

Teorema. *Supongamos que $\mathbf{M}^*$ es un esquema de álgebras semisimple para todo cambio de cuerpo base (es decir, separable). El morfismo $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$ tiene una sección de funtores de álgebras, que es única salvo conjugaciones por elementos de $1 + \mathbf{I}^*$.*

Decimos que un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es unipotente si su esquema de álgebras cociente semisimple maximal es $\mathbf{M}^* = \mathbf{k}$. Decimos que es triangulable si $\mathbf{M}^* = \prod\limits_i \mathbf{k}$. Demostramos que estos conceptos quedan estables por cambios de base, productos tensoriales, cocientes y subesquemas. En el capítulo 4, probamos que un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple (unipotente, triangulable, etc.) si sólo si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras semisimple (unipotente, triangulable, etc.) y aplicamos todos los resultados anteriores (y otros) a la teoría de representaciones lineales de k-grupos afines (véase secciones 4.1 y 4.2).

Probamos que $G \cap (1 + \mathbf{I}^*)$ es igual al radical unipotente de G. Denotemos por $\operatorname{Inv} \mathbf{B}^*$ los invertibles del esquema de álgebras $\mathbf{B}^*$. Como consecuencia del teorema de Wedderburn-Malcev obtenemos que

$$\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* = (1 + \mathbf{I}^*) \rtimes \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$$

y como consecuencia de ésta descomposición obtenemos que todo grupo afín triangulable (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) es producto semidirecto de un grupo unipotente (su radical unipotente) y un grupo diagonalizable.

Uno de los lugares donde el tratamiento funtorial de los grupos algebraicos resulta más bello es en la dualidad de Cartier. La equivalencia (*dualidad de Cartier*) entre la categoría de los k-grupos formales topológicamente planos y la categoría de las biálgebras planas ha sido tratada como una dualidad de espacios vectoriales continuos (de funciones) [9, Exposé VII_B by P. Gabriel, 2.2.1]. Dieudonné (en [10, Ch. I, §2, 13]) también prueba la equivalencia entre la categoría de k-coálgebras en grupos y la categoría dual de k-álgebras linealmente compactas en grupos.

Dado un funtor de grupos G, diremos que

$$G^* = \mathbf{Hom}_{grupos}(G, G_m)$$

es el funtor de grupos dual.

Dado un esquema de álgebras $\mathbf{A}^*$ denotamos por $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ el funtor

$$(\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*)(B) = \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B})$$

para toda k-álgebra B. Probamos que el cierre cuasi-coherente de $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ es $\mathbf{A}$, como el cierre de esquemas de módulos de $\operatorname{Spec} A$ es $\mathbf{A}^*$. Obtenemos que si $G = \operatorname{Spec} A$ es un k-grupo afín, entonces $G^* = \operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ y probamos el siguiente teorema.

Teorema. *La categoría de grupos abelianos afines $G = \operatorname{Spec} A$ es anti-equivalente a la categoría de funtores $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ de grupos abelianos. Los funtores que dan la anti-equivalencia son los que asignan a cada funtor de grupos su grupo dual.*

Por último, aplicamos la teoría de esquemas de álgebras a la teoría de invariantes.

Por sencillez, supongamos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado. La Proposición 4.1.9 afirma que un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^*$ es semisimple, es decir, $\mathbf{A}^* = \prod_I \mathbf{End}_k(\mathbf{E}_i)$, donde E_i son todos los G-módulos (o $\mathbf{A}^*$-módulos) simples (módulo isomorfismos). Si k es el G-módulo trivial, entonces $\operatorname{End}_k(k) = k$ y $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$. Obtenemos el siguiente teorema.

Teorema. *Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$ como esquemas de k-álgebras, siendo la proyección de $\mathbf{A}^*$ en el primer factor la representación trivial de $\mathbf{A}^*$.*

Demostramos que la forma $w_G := (1,0) \in \mathbf{k} \times \mathbf{B}^* = \mathbf{A}^*$, que denominamos integral invariante de G, está caracterizada por ser G-invariante y por ser $w_G(1) = 1$, y probamos como corolario que la existencia de tal forma caracteriza los grupo semisimples. Ahora es inmediato que dado un G-módulo, entonces $E^G = w_G \cdot E$ y éste es sumando directo de E. De hecho procedemos con mayor generalidad:

Teorema. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo semisimple y $w_G \in \mathbf{A}^*$ la integral invariante de G. Sea F un funtor dual de G-módulos. Se cumple que:*

1. $F^G = w_G \cdot F$.
2. *F descompone de modo único como suma directa de F^G y otro subfuntor de G-módulos, explícitamente*

$$F = w_G \cdot F \oplus (1 - w_G) \cdot F.$$

Dados un k-grupo $G = \operatorname{Spec} A$ semisimple y dos RG-módulos (cuasi-coherentes) E, V, Chu, Hu y Kang (en [7]) definen en $\operatorname{Hom}_R(E, V)$ un operador de Reynolds generalizado. El problema con que se encuentran estos autores es que si bien $\mathbf{E}$ y $\mathbf{V}$ son G-módulos cuasi-coherentes (con la terminología estándar: la acción de G en E y V es racional) sin embargo $\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ no es cuasi-coherente (con la terminología estándar: G no opera racionalmente en $\operatorname{Hom}_R(E, V)$). Con nuestra terminología, tenemos que todos los funtores considerados son obviamente funtores de G-módulos, y como probamos, de $\mathbf{A}^*$-módulos. El operador de Reynolds generalizado para todo $\mathbf{A}^*$-módulo (no sólo para $\operatorname{Hom}_R(E, V)$) es la multiplicación por $w_G \in \mathbf{A}^*$.

Sea $\mathbf{A}^* = \prod_i \mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{k})$ un esquema de álgebras separable. En cada una de estas álgebras de matrices, $M_{n_i}(k)$, tenemos definida la métrica de la traza y su polaridad asociada. Tenemos definido, pues, un morfismo $\phi : \mathbf{A} = \oplus_i \mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{k}) \hookrightarrow \prod_i \mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{k}) = \mathbf{A}^*$, que resulta ser de $\mathbf{A}^*$-módulos. Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple y $* : A \to A$, $a \mapsto a^*$, el morfismo inducido en los anillos por el morfismo $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$. Probamos que el morfismo

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}^*,\ a \mapsto w_G(a^* \cdot -),$$

donde $w_G(a^* \cdot -)(b) = w_G(a^* \cdot b)$, coincide con el morfismo ϕ. La operación producto de $\mathbf{A}^*$ define vía ϕ un producto en $\mathbf{A}$, que es el producto de convolución en los ejemplos clásicos.

Terminamos la tesis con el cálculo de w_G, cuando $G = Sl_n, O_n$, etc., mediante argumentos geométricos, el uso del morfismo ϕ antes definido y diversas propiedades de w_G: Consideramos un sistema de coordenadas en G, es decir, consideramos $G = \operatorname{Spec} A$ como subgrupo de $M_n = \operatorname{Spec} B$. A es el cociente de

B por el ideal I de las funciones de M_n que se anulan en G. $\mathbf{A}^*$ es un subesquema en álgebras de $\mathbf{B}^*$ y tenemos que $A^{*G} = \{w \in B^{*G} \colon w(I) = 0\}$. Ahora bien, B^{*G}, vía el morfismo $\phi : \mathbf{B} \to \mathbf{B}^*$, coincide esencialmente con B^G, es decir, con el anillo de funciones de M_n/G. Por último, probamos que dado $w \in B^{*G}$, la condición $w(I) = 0$ equivale a $w(I^G) = 0$ (que es un sistema finito de ecuaciones "en cada grado") y con todo damos el cálculo explícito de w_G.

La referencia básica de la memoria es el texto de Carlos Sancho [26]. En este trabajo hemos desarrollado y sistematizado muchos de los conceptos y teoremas que ahí pueden encontrarse.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de módulos y álgebras simples y semisimples

Sea G un grupo y $k[G] = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i, g_i \in G, \lambda_i \in k, n \in \mathbb{N}\}$ el álgebra envolvente de G. Como se verá, la teoría de representaciones k-lineales de G es equivalente a la teoría de $k[G]$-módulos. Veremos que G es semisimple si y y sólo si $k[G]$ es semisimple. Así pues, es natural abordar la teoría de representaciones de grupos vía la teoría de módulos y el estudio de las álgebras semisimples.

Buenas referencias para este tema se pueden hallar en los capítulos correspondientes de [18], [19], [25] y [26].

1.1.1. Módulos simples y semisimples

Definición 1.1.1. *Sea A un anillo con unidad (no necesariamente conmutativo). Un A-módulo por la izquierda M es un grupo abeliano, normalmente con notación aditiva, junto con una operación de A en M, $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$, tal que para todo $a, b \in A$ y $x, y \in M$ se tiene que*

$$(a + b)x = ax + bx,$$

$$a(x + y) = ax + ay,$$

$$(ab)x = a(bx),$$

$$1x = x.$$

Es inmediato comprobar que $a(-x) = -(ax)$ y que $0x = 0$.

De modo similar se define un A-módulo por la derecha. Sólo trabajaremos con módulos por la izquierda, a menos que se indique lo contrario, y por lo tanto los llamaremos simplemente A-módulos, o incluso módulos si la referencia al anillo es clara.

Supondremos que A es un anillo no conmutativo con unidad, y que todos los módulos, submódulos y morfismos de módulos son A-módulos, A-submódulos y morfismos de A-módulos.

Definición 1.1.2. *Un módulo E se dice que es simple si $E \neq 0$ y no tiene más submódulos que* 0 *y* E.

Si N es un A-módulo simple, entonces $N =< n >\simeq A/\mathrm{Ann}(n)$ donde $\mathrm{Ann}(n)$ ha de ser un ideal maximal de A. Recíprocamente, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal entonces $A/\mathfrak{m}$ es un A-módulo simple. Además, si $\mathfrak{m} \not\simeq \mathfrak{m}'$ entonces $A/\mathfrak{m} \not\simeq A/\mathfrak{m}'$.

Definición 1.1.3. *Un módulo E se dice que es semisimple si es suma directa de submódulos simples.*

Por ejemplo, un ideal (por la izquierda) M de A es un módulo simple si y sólo si es un ideal minimal, es decir, si y sólo si M es minimal en el conjunto de los ideales no nulos de A. Pero no hay garantía de que en A haya ideales minimales; por ejemplo en $\mathbb{Z}$ no hay ninguno.

Los morfismos entre módulos simples son muy sencillos.

Proposición 1.1.4 (Lema de Schur)**.** *Sean E y F dos módulos simples. Todo morfismo no nulo de E en F es un isomorfismo. El anillo* $\mathrm{End}_A(E)$ *es un cuerpo no conmutativo.*

Demostración. El núcleo de un morfismo no nulo $g : E \to F$ debe ser 0, por ser E módulo simple. La imagen debe ser bien 0 o bien F, pues F es módulo simple. Ya que g es inyectivo, la imagen será F y por tanto g será un isomorfismo. □

Si N y P son submódulos de E, entonces P se llama *suplementario* de N si $N + P = E$ y $N \cap P = 0$, es decir, E es la suma directa de N y P. Se dice que N y P son sumandos directos de E. En general no todos los submódulos de E son sumandos directos, pero vamos a ver que la existencia de suplementarios es lo que caracteriza a los módulos semisimples.

Definición 1.1.5. *Diremos que un conjunto ordenado S está inductivamente ordenado si cada subconjunto no vacío totalmente ordenado tiene una cota superior.*

Lema 1.1.6 (Lema de Zorn)**.** *Sea S un conjunto no vacío, inductivamente ordenado. Entonces existe un elemento maximal en S.*

Proposición 1.1.7. *Sea E un módulo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *E es semisimple.*
2. *E es suma de submódulos simples.*
3. *Cada submódulo F de E es un sumando directo, es decir, existe un submódulo F' tal que $E = F \oplus F'$.*

Demostración. 2. $\Leftrightarrow$ 1. Sea $E = \sum\limits_{i \in I} E_i$ una suma de submódulos simples, y sea J el subconjunto maximal de I (que existe por el lema de Zorn) tal que la suma $\sum\limits_{j \in J} E_j$ es una suma directa. Trataremos de probar que esta suma es E, y para ello bastará comprobar que cada E_i está contenido en dicha suma. La intersección de nuestra suma con E_i es un submódulo de E_i, así pues es 0 o E_i. Si es 0, entonces J no es maximal, ya que podemos añadirle el subíndice i. Por lo tanto E_i está contenido en la suma, y la equivalencia entre 1. y 2. está probada.

1. $\Rightarrow$ 3. Tomemos un submódulo F de $E = \sum\limits_{i \in I} E_i$, y sea J el subconjunto maximal de I tal que la suma $F + \sum\limits_{j \in J} E_j$ es directa. Un razonamiento similar al de antes muestra que esta suma directa es igual a E, y por tanto F es un sumando directo en E.

3. $\Rightarrow$ 1. Obviamente los submódulos de E heredan la propiedad 3., ya que si N es un submódulo de E y N' un submódulo de N, por dicha propiedad $E = N' \oplus M'$, luego $N = N' \oplus (M' \cap N)$. En E existen submódulos simples: Sea $e \in E$ un elemento no nulo y $E' \subset < e >= A \cdot e \simeq A/\ker(\cdot e)$ un submódulo maximal. Por la maximalidad de E' sus suplementarios en $< e >$ son simples, luego existe un submódulo simple en E.

Sea $E_0 \subset E$ la suma de todos los submódulos simples de E. Si $E_0 \neq E$, entonces $E = E_0 \oplus F$, con $F \neq 0$, y existe un submódulo simple en F. Por lo tanto llegamos a contradicción con la definición de E_0, con lo que concluimos. $\square$

Corolario 1.1.8. *Los submódulos y los cocientes de un módulo semisimple son semisimples.*

Los módulos semisimples tienen por definición una estructura "buena", ya que son suma directa de submódulos simples. Vamos a ver en qué sentido esta suma es única.

Sea J el conjunto de las clases de isomorfía de los módulos simples. Dado $i \in J$ denotamos por N_i un representante de i. Dado un módulo M, denotaremos por $M(i)$ el submódulo $\sum\{N \subset M : N \simeq N_i\}$. Cuando un módulo es suma directa de módulos simples isomorfos a N_i se dice que es un módulo *homogéneo de tipo* N_i. Es una consecuencia inmediata que si M es un módulo semisimple, entonces podemos escribir $M = \bigoplus\limits_{i \in J} M(i)$ como suma directa, de modo único, de sus submódulos homogéneos de tipo definido.

Proposición 1.1.9. *Sean M y M' módulos semisimples. Escribamos $M = \bigoplus\limits_{i \in J} M(i)$ donde $M(i) = \overset{\alpha_i}{\oplus} N_i$ es el submódulo homogéneo de tipo N_i y $M' = \bigoplus\limits_{i \in J} M'(i)$ donde $M'(i) = \overset{\beta_i}{\oplus} N_i$ es el submódulo homogéneo de tipo N_i. Entonces M es isomorfo a M' si y sólo si los cardinales α_i y β_i son iguales para todo $i \in J$.*

Demostración. Sea $\phi : M \to M'$ un isomorfismo. Por el lema de Schur, la imagen por ϕ de un submódulo simple de tipo N_i debe ser un módulo simple del mismo tipo, luego debe ser $\phi(M(i)) = M'(i)$. Por lo tanto podemos suponer que $M = \overset{\alpha}{\oplus} N$ y $M' = \overset{\beta}{\oplus} N$ son homogéneos del mismo tipo. Se trata de comprobar que $\alpha = \beta$. El módulo simple N como A-módulo es de tipo finito, luego

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) = \mathrm{Hom}_A(N, \overset{\alpha}{\oplus} N) = \overset{\alpha}{\oplus} \mathrm{Hom}_A(N, N).$$

Si llamamos K al cuerpo $\mathrm{Hom}_A(N, N)$, entonces $\alpha = \dim_K \mathrm{Hom}_A(N, M)$. Del mismo modo $\beta = \dim_K \mathrm{Hom}_A(N, M')$. Al ser M y M' isomorfos como A-módulos, $\mathrm{Hom}_A(N, M)$ y $\mathrm{Hom}_A(N, M')$ también son isomorfos, y por tanto $\alpha = \beta$. □

1.1.2. Álgebras simples y semisimples

Definición 1.1.10. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Llamaremos álgebra sobre R a todo anillo con unidad A dotado de un morfismo de anillos $\phi : R \to A$ de modo que* $\mathrm{Im}\,\phi$ *conmuta con los elementos de A.*

En esta sección A es una R-álgebra, aunque a veces sólo nos fijaremos en que es un anillo no conmutativo con unidad.

Definición 1.1.11. *Un anillo A se dice semisimple cuando lo es cada A-módulo.*

Las primeras consecuencias de esta definición son importantes.

Proposición 1.1.12. *A es un anillo semisimple si y sólo si todo A-módulo es proyectivo. Análogamente, A es semisimple si y sólo si todo A-módulo es inyectivo.*

Demostración. Si todo A-módulo es proyectivo, todo epimorfismo admite sección, y por tanto todo submódulo de un módulo admite un suplementario. Recíprocamente, si todo submódulo admite suplementario, todo epimorfismo admite sección y toda sucesión exacta corta escinde, luego sigue siendo exacta al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$. Análogamente se prueba la segunda parte. □

Proposición 1.1.13. *Un anillo A es semisimple si y sólo si A es semisimple entendido como A-módulo. Además en este caso existen un número finito de A-módulos simples desisomorfos y cada uno es isomorfo a un ideal por la izquierda minimal de A.*

Demostración. Cada A-módulo es cociente de un libre, luego si A es un A-módulo semisimple, todo A-módulo lo es. El recíproco es trivial.

Si A es semisimple, es suma directa de submódulos simples. Como la unidad de A sólo pertenece a la suma de un número finito de simples, entonces los módulos simples considerados son sólo un número finito. Luego A es suma directa finita de ideales (por la izquierda) minimales: $A = I_1 \oplus \ldots \oplus I_s$. De nuevo, como todo A-módulo es cociente de un libre, un A-módulo simple será isomorfo a uno de los ideales minimales I_i de A, y por lo tanto sólo hay un número finito de simples desisomorfos. □

Según esto, cuando digamos que A es semisimple, no especificaremos si hablamos de A-módulo semisimple o de anillo semisimple, ya que ambas nociones coinciden.

Sea A anillo semisimple y $A = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ una descomposición en ideales minimales por la izquierda y sea, siguiendo la notación antes establecida, $A = A(1) \oplus \ldots \oplus A(k)$ la misma descomposición en A-módulos homogéneos.

Proposición 1.1.14. *Los ideales por la izquierda $A(1), \ldots, A(k)$ son biláteros (es decir, ideales por la izquierda y por la derecha) y minimales.*

Demostración. Decir que un ideal por la izquierda es bilátero es lo mismo que decir que es estable por homotecias por la derecha, es decir, por los endomorfismos de A-módulos de A. Por el lema de Schur sabemos que esto sucede para los módulos homogéneos $A(i)$, luego son ideales biláteros. Supongamos que $A(1)$ no es un ideal bilátero minimal y sea $0 \neq I \subset A(1)$ un subideal bilátero y sea J un suplementario de I en $A(1)$ (como A-módulo por la izquierda). Como $A(1)$ es suma directa de módulos simples isomorfos existe un morfismo no nulo $I \to J$, que extendiéndolo por 0 en $J \oplus A(2) \oplus \ldots \oplus A(k)$ nos da un endomorfismo de A que valora en J. Ya que los endomorfismos de A son homotecias por la derecha, deben dejar estable el ideal bilátero I, lo cual es imposible. Por lo tanto $A(1)$ es un ideal bilátero minimal. $\square$

Pasemos ahora a la definición de anillo simple.

Definición 1.1.15. *Un anillo A se dice que es simple si es semisimple y no tiene ideales biláteros propios.*

Según la proposición 1.1.14, esto significa que si A es anillo simple, como A-módulo es suma de A-módulos simples isomorfos entre sí, i.e., A es un A-módulo semisimple homogéneo, i.e., sólo hay una clase de isomorfía de A-módulos simples.

Teorema 1.1.16. *Sea A semisimple y sea $A(1), A(2), \ldots, A(s)$ su descomposición en módulos homogéneos. Entonces $A(i)$ es un ideal bilátero, que también es un anillo (con las operaciones inducidas por A), y A es un anillo isomorfo al producto directo*

$$A = \prod_{i=1}^{s} A(i).$$

Además cada $A(i)$ es un anillo simple.

Demostración. Como los ideales $A(i)$ son biláteros y están en suma directa, $A(i)A(j) = 0$ cuando $i \neq j$, luego $A = \prod_{i=1}^{s} A(i)$. Sólo falta probar que cada $A(i)$ tiene unidad.

Escribimos la unidad de A como una suma $1 = e_1 + \ldots + e_s$. Dado un elemento $a_j \in A(j)$ se tiene que

$$a_j = 1 \cdot a_j = e_1 a_j + \ldots + e_s a_j = e_j a_j$$

ya que $e_i a_j \in A(i) \cap A(j) = 0$ si $i \neq j$. Igualmente $a_j e_j = a_j$, luego e_j es la unidad en $A(j)$. $\square$

Veamos ahora cómo es la estructura de los anillos semisimples.

Teorema 1.1.17 (Wedderburn Categorial)**.** *Sea A un anillo simple y sean S y K respectivamente el único A-módulo simple y el cuerpo no conmutativo de los endomorfismos de A-módulos de S. Se verifica que las categorías $\mathcal{C}_A$ de los A-módulos y $\mathcal{C}_K$ de los K-espacios vectoriales son anti-equivalentes y los funtores contravariantes de equivalencia son $F : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_K$, $F(M) = \mathrm{Hom}_A(M, S)$ para cada A-módulo M, $G : \mathcal{C}_K \to \mathcal{C}_A$, $G(E) = \mathrm{Hom}_K(E, S)$ para cada K-espacio vectorial E, donde $F(M)$ es K-espacio vectorial operando en S y $G(E)$ es A-módulo operando también en S.*

Demostración. Tenemos morfismos naturales $M \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_A(M, S), S)$ y $E \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_K(E, S), S)$ para todo A-módulo M y para todo K-espacio vectorial E. Basta comprobar que tales morfismos son isomorfismos aplicados a los generadores (por sumas directas) de ambas categorías, S y K:

$$G(F(S)) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_A(S, S), S) = \mathrm{Hom}_K(K, S) = S,$$

$$F(G(K)) = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_K(K, S), S) = \mathrm{Hom}_A(S, S) = K.$$

Ahora, las siguientes igualdades son inmediatas.

$$\mathrm{Hom}_K(E, E') = \mathrm{Hom}_A(G(E'), G(E)),\ \mathrm{Hom}_A(M, M') = \mathrm{Hom}_K(F(M'), F(M)).$$

$\square$

Teorema 1.1.18 (Wedderburn)**.** *Sea A un anillo semisimple e $I_1, \ldots, I_s$ sus ideales por la izquierda minimales y desisomorfos (como A-módulos) y sean $K_1, \ldots, K_s$ los cuerpos no conmutativos asociados, es decir, $K_i = \mathrm{End}_A(I_i)$. Se verifica que el morfismo natural*

$$\begin{array}{rcl} h : A & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{End}_{K_1}(I_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_{K_s}(I_s) \\ a & \mapsto & (h_a, \ldots, h_a) \end{array}$$

es un isomorfismo, siendo h_a la homotecia asociada al elemento $a \in A$.

Demostración. Sabemos que A es producto de anillos simples, por lo que podemos reducir la demostración al caso en el que A es anillo simple. Aplicando el teorema anterior se tiene

$$A = F(G(A)) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_A(A, S), S) = \mathrm{Hom}_K(S, S)$$

y se concluye. $\square$

Este teorema, en particular, nos dice que los anillos simples son los endomorfismos de su único ideal minimal (salvo A-isomorfismos) sobre un cuerpo no conmutativo.

Teorema 1.1.19. *A es un anillo simple si y sólo si es isomorfo a un álgebra de matrices sobre un cuerpo no conmutativo.*

Demostración. La condición necesaria se obtiene directamente del Teorema de Wedderburn. Recíprocamente, sea E un K-espacio vectorial de dimensión finita n sobre K cuerpo no conmutativo tal que $A = \mathrm{End}_K(E)$. Es obvio que E es un A-módulo simple. Considerando el isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{End}_K(E) \to E \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus E,\ T \mapsto (T(e_1), \ldots, T(e_n))$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E, vemos que A es un A-módulo semisimple homogéneo de tipo E, luego es un anillo simple. □

Corolario 1.1.20. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. A es una k-álgebra finita simple si y sólo si $A = M_n(k)$.*

Demostración. Sabemos que $A = \mathrm{End}_K(E)$, siendo K un cuerpo no conmutativo de dimensión finita sobre k. Hay que comprobar que si K es una k-álgebra finita íntegra no conmutativa, entonces $K = k$. Dado $a \in K$, $k[a]$ es una k-álgebra finita conmutativa íntegra, luego $k[a] = k$ y por tanto $k = K$. □

Teorema 1.1.21. *Un anillo A es simple si y sólo si no tiene ideales biláteros propios y contiene algún A-submódulo (ideal) simple no nulo.*

Demostración. Por definición, si A es un anillo simple no tiene ideales biláteros propios. A como A-módulo es semisimple, es decir, es suma directa de A-módulos simples, luego contiene algún submódulo simple no nulo.

Veamos el recíproco. Sea $0 \neq E \subset A$ un A-submódulo simple. Como $E \subsetneq E \cdot A$ es un ideal bilátero de A, debe ser $A = E \cdot A$, que es suma de A-módulos simples isomorfos, es decir, A es un anillo simple. □

Si A es un álgebra finita sobre un cuerpo, siempre existen ideales simples, pues existen ideales minimales propios.

Por último, veremos la caracterización de los automorfismos de un álgebra simple.

Sea K un cuerpo no conmutativo, E un K-espacio vectorial de dimensión finita y $A = \mathrm{End}_K(E)$.

Definición 1.1.22. *Se dice que una aplicación $f : E \to E$ es semilineal cuando existe un automorfismo σ de K tal que se verifica*

$$f(e + e') = f(e) + f(e'),$$

$$f(\lambda e) = \sigma(\lambda) f(e)$$

para todo $e, e' \in E$ y $\lambda \in K$. El conjunto de automorfismos semilineales forma un grupo con la composición que denotaremos $Sem_K(E)$.

Cada automorfismo semilineal $f : E \to E$ induce un automorfismo en A, la conjugación por f, i.e., $\tau_f(a) = f \circ a \circ f^{-1}$.

Las homotecias en E por elementos de $K - 0 = K^*$ son transformaciones semilineales de automorfismo en K la correspondiente conjugación (la identidad si y sólo si K es conmutativo). Estas transformaciones son exactamente aquellas que inducen el automorfismo identidad en A pues son las que conmutan con A, es decir, $\mathrm{Aut}_A(E) = K^*$.

Se tiene por tanto el morfismo inyectivo de grupos

$$Sem_K(E)/K^* \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A).$$

El grupo $Sem_K(E)/K^*$ es el denominado *grupo de Staudt* y el teorema fundamental de la geometría proyectiva afirma que coincide con el grupo de las colineaciones del espacio proyectivo $\mathbb{P}_K(E)$. Se trata ahora de probar que todo automorfismo de A es el inducido por una transformación semilineal.

Teorema 1.1.23 (Skolem-Noether)**.** *Sea K un cuerpo no conmutativo, E un K-espacio vectorial de dimensión finita y $A = \mathrm{End}_K(E)$. Se verifica que la sucesión*

$$1 \to K^* \to Sem_K(E) \to \mathrm{Aut}(A) \to 1$$

es exacta. En particular, si K es conmutativo los automorfismos de A como K-álgebra son internos, es decir, $\mathrm{Aut}_K(A) = \mathbb{P}Gl_K(E)$*.*

Demostración. Basta probar que todo automorfismo de A es el inducido por una transformación semilineal. Sea τ un automorfismo de A. Éste induce en E otra estructura de A-módulo simple definida por la fórmula $a * e = \tau(a) \cdot e$, para cada $a \in A$ y $e \in E$. Por ser A un anillo simple todos los A-módulos simples son isomorfos, luego existe una biyección aditiva $f : E \to E$ tal que $f(a \cdot e) = \tau(a) \cdot f(e)$. Por tanto el automorfismo inducido por f en A es τ, luego se concluye si se prueba que f es semilineal. Por la fórmula anterior se observa que si $\lambda \in K$, es decir, es un endomorfismo de E lineal sobre A, entonces $f \circ \lambda \circ f^{-1}$ también, luego si denotamos por σ el automorfismo de K definido por $\sigma(\lambda) = f \circ \lambda \circ f^{-1}$ se concluye que

$$f(\lambda \cdot e) = (f \circ \lambda f^{-1})(f(e)) = \sigma(\lambda) \cdot f(e)$$

como queríamos. □

Corolario 1.1.24. *Consideremos la inclusión de K-álgebras $K \hookrightarrow M_n(K)$, $\lambda \mapsto \lambda Id$. La sucesión*

$$1 \to K^* \to M_n(K) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Aut}_K(M_n(K)) \to 1$$

es exacta ($n > 1$) y τ asigna a cada matriz el automorfismo conjugar por ella. En particular, si K es conmutativo, $\mathrm{Aut}_K(M_n(K)) = \mathbb{P}Gl_K(n)$*.*

Demostración. Sabemos que

$$1 \to K^* \to Sem_K(K^n) \to \mathrm{Aut}(M_n(K)) \to 1$$

es exacta. Basta comprobar que dada una aplicación semilineal f, tal que $f(\lambda \cdot e) = \sigma(\lambda) \cdot f(e)$, entonces la conjugación por f en $M_n(K)$ al restringirse a K es el automorfismo σ. Es decir, que $f \circ \lambda Id = \sigma(\lambda) Id \circ f$, lo cual es obvio. $\square$

1.1.3. Conmutador de un álgebra

Definición 1.1.25. *Dado $A \hookrightarrow B$ un morfismo inyectivo de k-álgebras, se define el álgebra conmutadora de A en B, que denotamos por $C_A(B)$, como*

$$C_A(B) = \{b \in B : ab = ba \text{ para todo } a \in A\}.$$

Proposición 1.1.26. *Sea $A \subseteq \mathrm{End}_k(E)$ una k-álgebra semisimple. Se cumple:*

1. $B := C_A(\mathrm{End}_k(E))$ *es una k-álgebra semisimple.*
2. $C_B(\mathrm{End}_k(E)) = A$.

Demostración. Como $A = \mathrm{End}_{K_1}(E_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_{K_m}(E_m)$ es semisimple, E es suma directa de módulos homogéneos de tipo E_i. Escribamos

$$E = E_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus E_m^{n_m} = (E_1 \otimes_{K_1} V_1) \oplus \ldots \oplus (E_m \otimes_{K_m} V_m),$$

siendo $\dim_{K_i} V_i = n_i$.

Todo endomorfismo de A-módulos de E aplica cada sumando homogéneo en el mismo sumando homogéneo. Por el teorema de Wedderburn Categorial ya es fácil probar que

$$B = C_A(\mathrm{End}_k(E)) = \mathrm{End}_A(E) = \mathrm{End}_{K_1}(V_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_{K_m}(V_m).$$

Por tanto, B es semisimple y del mismo modo simétricamente $C_B(\mathrm{End}_k(E)) = A$. $\square$

1.1.4. Álgebras centrales simples o de Azumaya

El que un anillo sea simple no es una propiedad que se conserve por cambio de base, es necesario algo más. Precisamente las álgebras simples por cambio de base son las de Azumaya.

Definición 1.1.27. *Dada una R-álgebra A, se define el centro de A como el conjunto $Z(A) = \{y \in A : xy = yx \, \forall \, x \in A\}$.*

Se verifica que $Z(A)$ es una subálgebra conmutativa de A (y en particular, $R \subseteq Z(A)$).

Definición 1.1.28. *Dada una R-álgebra A, el álgebra opuesta de A es el álgebra A° que como conjunto es el mismo conjunto A, con la misma estructura de R-módulo, y que tiene una operación de multiplicación $*$ definida por $x * y = yx$.*

Toda R-álgebra A es de modo natural un $A \otimes_R A^\circ$-módulo: $(a \otimes b)c = acb$, o equivalentemente, tenemos definido el siguiente morfismo de R-álgebras:

$$A \otimes_R A^\circ \xrightarrow{f_A} \mathrm{End}_R(A), \; f_A(a \otimes b)(c) = acb.$$

Observemos que los ideales biláteros de A son precisamente los $A \otimes A^\circ$-submódulos de A, y que $Z(A) = \mathrm{End}_{A \otimes A^\circ}(A) \subseteq \mathrm{End}_A(A) = A^\circ$.

Proposición 1.1.29. *Si A es una k-álgebra simple, $Z(A)$ es un cuerpo.*

Demostración. Por lo anterior, A es una k-álgebra simple si y sólo si es un $A \otimes A^\circ$-módulo simple. Como $Z(A) = \mathrm{End}_{A \otimes A^\circ}(A)$, por el Lema de Schur concluimos que $Z(A)$ es un cuerpo. □

Como $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$, del Teorema de Wedderburn se sigue que el centro de un álgebra semisimple es un producto de cuerpos.

Definición 1.1.30. *Sea k un cuerpo conmutativo y A una k-álgebra finita. Una k-álgebra A es central simple si A es simple y $Z(A) = k$.*

Estas álgebras centrales simples también se conocen como *álgebras de Azumaya*. Si A es un álgebra simple, entonces su centro es un cuerpo y por lo tanto A es de Azumaya sobre su centro.

Teorema 1.1.31. *Una k-álgebra finita A es de Azumaya si y sólo si el morfismo f_A es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f_A es un isomorfismo. Como $A \otimes A^\circ = \mathrm{End}_k(A)$ y A es un $\mathrm{End}_k(A)$-módulo simple, A es $A \otimes A^\circ$-módulo simple y por tanto anillo simple. Además, $Z(A) = \mathrm{End}_{A \otimes A^\circ}(A) = \mathrm{End}_{\mathrm{End}_k(A)}(A) = Z(\mathrm{End}_k(A)) = k$.

Supongamos que A es una k-álgebra de Azumaya. Sea $B = \mathrm{Im}\, f_A$, entonces A es un B-módulo simple, pues A no tiene ideales biláteros propios, y de la inclusión $B \hookrightarrow \mathrm{End}_k(A) = A \oplus \ldots \oplus A$ se deduce que B es un anillo simple. Por el Teorema de Wedderburn, $B = \mathrm{End}_D(A)$, donde $D = \mathrm{End}_B(A) = \mathrm{End}_{A \otimes A^\circ}(A) = Z(A) = k$. Luego f_A es un epimorfismo, y por dimensiones concluimos. □

Son corolarios de este teorema las siguientes propiedades.

Corolario 1.1.32. *A y B son k-álgebras de Azumaya si y sólo si $A \otimes_k B$ es una k-álgebra de Azumaya.*

Demostración. Inmediato a partir de que $f_{A \otimes_k B} = f_A \otimes_k f_B$. □

Corolario 1.1.33. *Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de cuerpos conmutativos. A es una k-álgebra de Azumaya si y sólo si $A_K = A \otimes_k K$ es una K-álgebra de Azumaya.*

Según esta proposición, la noción de álgebra de Azumaya es estable por cambio de base y descenso.

Corolario 1.1.34. *La condición necesaria y suficiente para que una k-álgebra A sea de Azumaya es que $A \otimes_k \bar{k} = M_n(\bar{k})$, siendo $\bar{k}$ el cierre algebraico de k.*

Por tanto, una k-álgebra finita A es de Azumaya si y sólo si A_K es una K-álgebra simple para toda extensión $k \hookrightarrow K$ de cuerpos conmutativos.

Como consecuencia, la dimensión de un álgebra de Azumaya es un cuadrado perfecto.

Proposición 1.1.35. *Una k-álgebra de Azumaya A, de grado n^2, es de matrices si y sólo si contiene una k-subálgebra trivial $K = k \times \overset{n}{\cdots} \times k$ de grado n.*

Demostración. Si $A = M_n(k)$ entonces contiene la k-subálgebra trivial formada por las matrices diagonales. Recíprocamente, supongamos que A contiene una k-subálgebra trivial $K = k \times \overset{n}{\cdots} \times k$. Tenemos que $A = A \otimes_K K = A \otimes_K (k \times \overset{n}{\cdots} \times k) = I_1 \times \ldots \times I_n$, donde algún ideal I_i debe tener dimensión menor o igual que n. Entonces el morfismo $A \to \operatorname{End}_k(I_i)$ es un isomorfismo, por dimensiones y porque el núcleo es un ideal bilátero. □

Proposición 1.1.36. *Toda k-álgebra de Azumaya A de dimensión n^2 contiene una k-subálgebra conmutativa separable de dimensión n.*

Demostración. Para cada $a \in A$ consideremos la subálgebra que genera, $k[a]$, que es una k-subálgebra conmutativa separable de dimensión n precisamente cuando el polinomio anulador de a sea un polinomio separable de grado n. Recordemos que $A \otimes_k \bar{k} = M_n(\bar{k})$. El polinomio anulador de a es el mismo que el de $a \otimes 1$. El discriminante del polinomio característico de $a \otimes 1$ es una función polinómica sobre el k-espacio vectorial A, y este polinomio no es nulo porque no es nulo en $A \otimes_k \bar{k} = M_n(\bar{k})$. Si k tiene infinitos elementos, podemos concluir que este polinomio no se anula en algún elemento $a \in A$, de modo que el polinomio característico de a no tiene raíces dobles y coincide con el anulador.

Si k tiene un número finito de elementos, procedamos como sigue. $A = M_r(K)$, donde K es un cuerpo no conmutativo y $k = Z(M_r(K)) = Z(K)$. Es decir, K es un álgebra de Azumaya. Fácilmente reducimos la proposición al caso $A = K$. Sea ahora, K_1 una k-subálgebra conmutativa de dimensión máxima de K. Denotemos $C_{K_1}(K) = \{a \in K : a \cdot b = b \cdot a \text{ para todo } b \in K_1\}$. Por ser máxima, se cumple que $C_{K_1}(K) = K_1$. Veamos que esto implica que $\dim_k K_1 = n$ (donde $\dim_k K = n^2$). Si $b_1, \ldots, b_s$ es una k-base de K_1, $C_{K_1}(K)$ es el núcleo del morfismo $K \to K \oplus \overset{s}{\cdots} \oplus K$, $a \mapsto (ab_1 - b_1 a, \ldots, ab_s - b_s a)$. Ahora es sencillo probar que $C_{K_1}(K) \otimes_k \bar{k} = C_{K_1 \otimes_k \bar{k}}(K \otimes_k \bar{k})$. Por ser k finito, toda extensión finita es separable, luego $K_1 \otimes_k \bar{k} = \bar{k} \times \overset{m}{\cdots} \times \bar{k}$. En conclusión, vamos a suponer que k es algebraicamente cerrado, $K_1 = k \times \overset{m}{\cdots} \times k$ y $K = M_n(k) = \operatorname{End}_k(E)$. Entonces, $E = E \otimes_{K_1} K_1 = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$ y K_1 opera sobre cada E_i por homotecias por elementos de k. Ahora es fácil comprobar, que si $C_{K_1}(K) = K_1$, entonces $\dim_k E_i = 1$ y $m = n$. □

Teorema 1.1.37. *Si A es un álgebra de Azumaya de grado n^2, existe una extensión finita de Galois $k \hookrightarrow K$ de modo que $A_K = M_n(K)$. De K se dice que neutraliza a A.*

Demostración. Sea $K_1 \subset A$ una k-álgebra conmutativa de dimensión n y sea K la envolvente de Galois de K_1. $A \otimes_k K$ es una K-álgebra de Azumaya de grado n^2, que contiene una K-álgebra trivial, $K_1 \otimes_k K = K \times \overset{n}{\cdots} \times K$, luego por la Proposición 1.1.35, $A = M_n(K)$. □

1.1.5. El radical de un álgebra. Álgebras separables

Definición 1.1.38. *Un R-módulo se dice que es artiniano si sus R-submódulos verifican la condición de cadena descendente, i.e., si toda cadena descendente de R-submódulos estabiliza.*

Un anillo se dice que es artiniano si sus ideales verifican la condición de cadena descendente, i.e., si toda cadena descendente de ideales estabiliza.

Un ejemplo de álgebras artinianas son las k-álgebras finitas.

Supongamos que A es un álgebra artiniana, aunque no necesariamente conmutativa. Sea $\{E_i\}_i$ el conjunto de los A-módulos simples desisomorfos de A, y consideremos el morfismo

$$A \to \prod_i \mathrm{End}_{K_i}(E_i)$$

donde $K_i = \mathrm{End}_A(E_i)$. La imagen $\bar{A}$ de este morfismo es un álgebra artiniana, y por ello se inyecta en un producto directo finito

$$\bar{A} \hookrightarrow \mathrm{End}_{K_1}(E_1) \times \overset{n}{\cdots} \times \mathrm{End}_{K_n}(E_n).$$

Como los módulos $E_1, \dots, E_n$ son $\bar{A}$-simples y $\mathrm{End}_{K_i}(E_i) = \oplus E_i$, $\bar{A}$ es semisimple. Por tanto, $\bar{A} = \mathrm{End}_{K_1}(E_1) \times \overset{n}{\cdots} \times \mathrm{End}_{K_n}(E_n)$ y los $\bar{A}$-módulos simples son $E_1, \dots, E_n$, que son también todos los A-módulos simples.

Todo epimorfismo de A en un álgebra simple factoriza vía el epimorfismo $A \to \bar{A}$. Por tanto, todo epimorfismo de A en un álgebra semisimple factoriza vía $\bar{A}$. Diremos que $\bar{A}$ es el *álgebra semisimple maximal* de A.

Definición 1.1.39. *Se denomina radical de A al núcleo del morfismo $A \to \bar{A}$, que es un ideal bilátero, y lo denotaremos por R.*

Se observa inmediatamente que $A/R = \bar{A}$ y que R es la intersección de los ideales biláteros maximales de A.

Sea E un A-módulo de tipo finito, luego artiniano, y sea E_1 el A-submódulo semisimple maximal de E, que coincide con $\{e \in E : R \cdot e = 0\}$. Sea $E_2 \subset E$ un A-submódulo que contiene a E_1 y tal que E_2/E_1 es el A-submódulo semisimple maximal de E/E_1. Así sucesivamente obtenemos una cadena

$$0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1} \subset E.$$

Se verifica que E_i/E_{i-1} son A-módulos semisimples, $E_i = \{e \in E : R^i \cdot e = 0\}$ y $R \cdot E_i \subseteq E_{i-1}$. En particular $R^n \cdot E = 0$.

Definición 1.1.40. *Un ideal $I \subseteq A$ se dice que es nilpotente si existe un $n > 0$ de modo que $I^n = 0$.*

Se verifica que este radical es un ideal nilpotente de A.

Proposición 1.1.41. *Existe un n tal que $R^n = 0$.*

Demostración. Puesto que A es un A-módulo de tipo finito, para un $n >> 0$ se cumple que $0 = R^n \cdot A = R^n$. □

Definición 1.1.42. *Un álgebra se dice reducida si no tiene ideales biláteros nilpotentes.*

Que un álgebra no tenga ideales biláteros nilpotentes equivale a que no tenga ideales por la izquierda I nilpotentes, porque $I^n \cdot A = (I \cdot A)^n$ e $I \cdot A$ es bilátero.

Ahora podemos caracterizar las álgebras semisimples en términos de su radical.

Proposición 1.1.43. *Un álgebra artiniana es semisimple si y sólo si es reducida, o bien si y sólo si $R = 0$.*

Demostración. Si el álgebra es reducida el radical es nulo, y por tanto es un álgebra semisimple.

Si es un álgebra semisimple es producto directo de álgebras simples, que son reducidas pues no contienen ideales biláteros propios. Por tanto, el álgebra es reducida y en particular su radical es nulo. □

Observemos que toda álgebra semisimple es artiniana, puesto que es producto de álgebras de matrices.

Al igual que las álgebras simples no se conservan por cambio de base, tampoco lo hacen las álgebras semisimples. Precisamente las álgebras semisimples por cambio de base son las álgebras separables. Ahora hacemos un breve repaso de éstas álgebras, de las que se pueden hallar referencias en [21, Ch. VII, 5], [22, §26] y [25, Ch. 10].

Definición 1.1.44. *Sea k un cuerpo y A una k-álgebra finita. Decimos que A es separable sobre k cuando es universalmente reducida, es decir, cuando $A \otimes_k k'$ es reducida sobre k' para cada extensión conmutativa $k \to k'$.*

De la definición se sigue que ser separable se conserva por cambio de base. Es fácil ver que si un álgebra por cambio de base es separable entonces es separable, ya que si un álgebra por cambio de base es reducida, antes lo era.

Teorema 1.1.45. *Una k-álgebra finita es separable si y sólo si se verifica cualquiera de las condiciones equivalentes:*

1. *A es universalmente semisimple;*
2. *$A \otimes_k \bar{k}$ es producto directo de álgebras de matrices, siendo $k \to \bar{k}$ el cierre algebraico de k;*
3. *A es reducida y su centro es un álgebra conmutativa separable;*
4. *$A \otimes_k A^\circ$ es reducida (o semisimple).*

Demostración. Puesto que un álgebra es reducida si y sólo si semisimple, universalmente reducida equivale a universalmente semisimple y tenemos (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) Es inmediato a partir de la estructura de las álgebras semisimples y de cómo son los anillos simples sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por ser $A_{\bar{k}}$ reducida lo es A, y por ser $Z(A)_{\bar{k}} = Z(A_{\bar{k}}) = \prod \bar{k}$ se concluye que $Z(A)$ es separable.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $k \to K \subset \bar{k}$ una subextensión de Galois de grupo G que trivializa a $Z(A)$. A_K es reducida: Su radical es estable por la acción de G y por tanto tomando invariantes por G desciende en A a un ideal nilpotente, lo cual contradice que A sea reducida. $Z(A_K) = Z(A)_K$ es una K-álgebra trivial. Por tanto, A_K es un producto directo de álgebras reducidas de centro trivial K, es decir, un producto directo de K-álgebras simples, luego de Azumaya. Por tanto A_K es una K-álgebra separable y A es una k-álgebra separable.

(1) $\Rightarrow$ (4) El producto tensorial de álgebras de matrices es de matrices: $\mathrm{End}_k(E) \otimes_k \mathrm{End}_k(V) = \mathrm{End}_k(E \otimes_k V)$. Por tanto $(A \otimes_k A^\circ)_{\bar{k}} = A_{\bar{k}} \otimes_{\bar{k}} A^\circ_{\bar{k}}$ es producto directo de álgebras de matrices, luego $A \otimes_k A^\circ$ es reducida por las equivalencias anteriores.

(4) $\Rightarrow$ (1) Por ser $Z(A \otimes_k A^\circ) = Z(A) \otimes_k Z(A)$ y $A \otimes_k A^\circ$ reducida, se concluye que $Z(A) \otimes_k Z(A)$ es un álgebra conmutativa reducida, luego $Z(A)$ es separable. De la inclusión $A \otimes 1 \subset A \otimes_k A^\circ$ se deduce que A es reducida y se concluye por (3). □

1.1.6. La métrica de la traza

Definición 1.1.46. *Dada una k-álgebra finita A, se define en ella la métrica de la traza T_2 como la métrica*

$$T_2(a, b) = tr(h_{ab})$$

donde h_c denota el endomorfismo lineal de A que consiste en multiplicar (por la izquierda) por el elemento $c \in A$.

Denotaremos también $T_2(a, b) = a * b$.

La métrica de la traza T_2 define una polaridad $\phi : A \to A^*$, $a \mapsto T_2(a, -)$. Además se verifica que T_2 es una métrica simétrica, pues $tr(h_a \circ h_b) = tr(h_b \circ h_a)$. A^* es A-módulo por la izquierda, $(a \cdot w)(b) = w(b \cdot a)$, y por la derecha, $(w \cdot a)(b) = w(a \cdot b)$. La polaridad verifica que también es morfismo de A-módulos por la izquierda y por la derecha, pues se cumple

$$T_2(aa', b) = T_2(a', ba)$$

$$T_2(a'a, b) = T_2(a', ab)$$

para todo $a, a', b \in A$.

Consideremos el caso particular de $A = \mathrm{End}_k(E)$, con k cuerpo de característica 0. Dado $\tau \in \mathrm{End}_k(E)$, vía el isomorfismo $\mathrm{End}_k(E) = E \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus E$ el morfismo $h_\tau : \mathrm{End}_k(E) \to \mathrm{End}_k(E)$ consiste en aplicar el endomorfismo τ a cada E. Por lo tanto, $tr(h_\tau) = n \cdot tr(\tau)$. Sea $\{\delta_{ij}\}$ la base de $M_n(k) = \mathrm{End}_k(E)$

formada por las matrices que tienen 1 en la posición ij y 0 en la demás, y sea $\{\omega_{ij}\}$ la base dual en $M_n(k)^* = \mathrm{End}_k(E)^*$. Como

$$\delta_{ij} * \delta_{i'j'} = tr(h_{\delta_{ij}\cdot\delta_{i'j'}}) = \begin{cases} n \text{ si } i = j' \text{ y } j = i' \\ 0 \text{ en los demás casos,} \end{cases}$$

entonces $\delta_{ij} * - = nw_{ji}$. Por tanto, la polaridad $\phi : M_n(k) \to M_n(k)^*$ es claramente un isomorfismo.

Por último, si $A = A_1 \times A_2$, como $A_1 \perp A_2$ para nuestra T_2, ya que $(a, 0) \cdot (0, b) = (0, 0)$, la polaridad de A descompone en el producto de las polaridades: $A = A_1 \times A_2 \xrightarrow{\phi_1\times\phi_2} A_1^* \times A_2^*$.

Vamos a aplicar todo esto que hemos visto a caracterizar las álgebras separables (las álgebras universalmente reducidas) en términos de la métrica de la traza.

Teorema 1.1.47. *Sea A una k-álgebra finita y sea k un cuerpo de característica cero. A es separable si y sólo si la métrica de la traza es no singular, i.e., si y sólo si $rad(T_2)$ es nulo.*

Demostración. Podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Si A es separable, por el teorema de Wedderburn $A = \prod M_{n_i}(k)$. La polaridad de la métrica de la traza es un isomorfismo sobre el álgebra de las matrices y "funciona bien" con el producto directo, luego T_2 es no singular sobre A.

Recíprocamente, supongamos que la polaridad ϕ es un isomorfismo de A en A^* y probemos que el radical de A es nulo. Basta ver que $R \subseteq rad(T_2)$. Sean $r \in R$ y $a \in A$:

$$T_2(r, a) = tr(h_{r\cdot a}) = 0$$

ya que $r \cdot a \in R$ por ser R ideal bilátero, y el endomorfismo $h_{r\cdot a}$ es nilpotente pues $R \subset A$ es un ideal nilpotente. □

En cualquier característica, tenemos la forma lineal $w : A = \mathrm{End}_k(E) \to k$, $w(\tau) = tr(\tau)$. Ésta define a su vez la métrica simétrica $\phi_2(\tau, \tau') = w(\tau\cdot\tau')$, cuya polaridad asociada $\phi : A \to A^*$ es un isomorfismo de A-módulos por la izquierda y por la derecha. La polaridad ϕ está determinada por $\phi(1) = w$. Además, todo isomorfismo con estas propiedades difiere por composición en un isomorfismo de A-módulos de A por la izquierda y por la derecha, es decir, en una homotecia por un elemento invertible de $Z(A) = k$. Por cambio de base y descenso, si A es una k-álgebra de Azumaya existe una única métrica simétrica (salvo homotecias por elementos invertibles de $Z(A) = k$) cuya polaridad asociada es un isomorfismo de A-módulos por la izquierda (y por la derecha). Por último, si A es una k-álgebra separable existe una única métrica simétrica (salvo homotecias por elementos invertibles de $Z(A) = k$) cuya polaridad asociada es un isomorfismo de A-módulos por la izquierda (y por la derecha).

La existencia de tales métricas no caracteriza en característica $p > 0$ las k-álgebras separables: Sea $A = k[x]/(x^2)$ y $w \in A^*$ tal que $w(1) = 0$ y $w(\bar{x}) = 1$. La polaridad asociada a la métrica simétrica $\phi_2(a, a') := w(a \cdot a')$, con $a, a' \in A$, es un isomorfismo de A-módulos por la izquierda y por la derecha, pero obviamente A no es separable.

1.2. Representaciones lineales de grupos

La parte que nos interesa recordar del estudio de las representaciones de grupos finitos (y de grupos algebraicos más tarde) se puede encontrar en [19], [26] y también en [28].

Definición 1.2.1. *Sea k un cuerpo, E un k-espacio vectorial y G un grupo finito. Una representación lineal de G en E es un morfismo de grupos*

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(E)$$

donde $\mathrm{Aut}_k(E)$ es el grupo de los automorfismos de k-espacios vectoriales de E.
Se dice que E es un G-espacio vectorial, y la $\dim_k E$ es el grado de la representación lineal.

Se puede definir la k-álgebra no conmutativa $k[G] = \underset{g\in G}{\oplus} k \cdot g$, cuya suma y producto son

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g) + (\sum_{g\in G} \lambda'_g g) := \sum_{g\in G} (\lambda_g + \lambda'_g) g,$$

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot (\sum_{g\in G} \lambda'_g g) := \sum_{g,g'\in G} \lambda_g \lambda'_{g'} \cdot gg' = \sum_{g\in G} (\sum_{g'\cdot g''=g} \lambda_{g'} \lambda'_{g''} g).$$

Sólo si G es un grupo abeliano la k-álgebra[1] $k[G]$ es conmutativa. A la k-álgebra $k[G]$ se le llama *álgebra envolvente de G*.

Sea $F(G) = \mathrm{Aplic}(G, k)$. Se verifica que $F(G) = k[G]^*$, pues toda función $w \in F(G)$ extiende de modo único a una forma lineal sobre $k[G]$:

$$w(\sum_{g\in G} \lambda_g g) := \sum_{g\in G} \lambda_g \cdot w(g).$$

Dada una representación lineal $\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(E)$ se puede dotar a E de estructura de $k[G]$-módulo:

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot e = \sum_{g\in G} \lambda_g \rho(g)(e).$$

Recíprocamente, si E tiene estructura de $k[G]$-módulo se puede definir la representación lineal $\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(E)$, $\rho(g)(e) := g \cdot e$.

Sean $\rho : G \to \mathrm{End}_k(E)$ y $\rho' : G \to \mathrm{End}_k(E')$ dos representaciones lineales. Una aplicación lineal $T : E \to E'$ diremos que es una aplicación de representaciones lineales si $T(\rho(g)(e)) = \rho'(g)(T(e))$. Con todo tenemos el siguiente teorema.

[1] En la bibliografía es frecuente denotar por $k[G]$ el anillo de funciones de G. No seguimos esta convención.

Teorema 1.2.2. *La categoría de representaciones lineales de un grupo G es equivalente a la categoría de $k[G]$-módulos.*

Definición 1.2.3. *Se dice que dos representaciones lineales $\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(E)$, $\rho' : G \to \mathrm{Aut}_k(E')$ son equivalentes si y sólo si E y E' son isomorfos como $k[G]$-módulos.*

Se dice que la representación lineal $\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(E)$ es irreducible si E es un $k[G]$-módulo simple.

Definición 1.2.4. *Sean E_1, E_2, E, $k[G]$-módulos.*

1. *La suma directa $E_1 \oplus E_2$ es de modo natural un $k[G]$-módulo con la estructura*
$$g \cdot (e_1 \oplus e_2) = g \cdot e_1 \oplus g \cdot e_2$$
para cada $g \in G$, $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$.

2. *El producto tensorial $E_1 \otimes_k E_2$ es de modo natural un $k[G]$-módulo con la estructura de representación dada por la fórmula*
$$g \cdot (e_1 \otimes e_2) = g \cdot e_1 \otimes g \cdot e_2$$
para cada $g \in G$, $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$.

3. *Si E es $k[G]$-módulo por la izquierda (respectivamente por la derecha), es de modo natural $k[G]$-módulo por la derecha (respectivamente por la izquierda):*
$$e * g := g^{-1} \cdot e$$
para cada $g \in G$, $e \in E$ (respectivamente $g * e := e \cdot g^{-1}$).

4. *Si E es un $k[G]$-módulo por la izquierda, su dual E^* es de modo natural $k[G]$-módulo por la derecha, luego $k[G]$-módulo por la izquierda*
$$(g \cdot w)(e) = w(g^{-1} \cdot e)$$
para cada $g \in G$, $w \in E^*$ y todo $e \in E$.

5. *Las aplicaciones k-lineales $\mathrm{Hom}_k(E_1, E_2)$ son $k[G]$-módulo con la estructura de representación dada por la fórmula*
$$(g * T)(e_1) = g \cdot T(g^{-1} \cdot e_1)$$
para cada $g \in G$, $T \in \mathrm{Hom}_k(E_1, E_2)$ y todo $e_1 \in E_1$.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que el álgebra $k[G]$ sea semisimple.

Teorema 1.2.5 (Maschke)**.** *Sea G un grupo finito. Toda representación lineal de G es suma directa de representaciones irreducibles si y sólo si $\#G$ y $\mathrm{car}\, k$ son primos entre sí.*

Demostración. Se trata de comprobar cuándo todo $k[G]$-módulo es suma directa de $k[G]$-módulos simples, es decir, cuando $k[G]$ es semisimple.

Supongamos que $\#G$ y $\operatorname{car} k$ son primos entre sí. Dado un $k[G]$-módulo E y un $k[G]$-submódulo E', consideremos la sucesión exacta

$$0 \to E' \to E \xrightarrow{\pi} E/E' \to 0.$$

Sea $s : E/E' \to E$ una sección de k-espacios vectoriales de π. El morfismo $s' := \dfrac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g \cdot s \cdot g^{-1}$ es un morfismo de $k[G]$-módulos y es sección de π. Por lo tanto la sucesión escinde y $E = E' \oplus E/E'$. Por la Proposición 1.1.7 E es semisimple y $k[G]$ es una k-álgebra semisimple.

Recíprocamente, supongamos que $\#G$ es múltiplo de $\operatorname{car} k$. Si toda representación k-lineal de G es suma directa de representaciones irreducibles, $k[G]$ es semisimple y por Wedderburn descompone $k[G] = M_{n_1}(K_1) \times \ldots \times M_{n_r}(K_r)$. Sea el elemento no nulo $s = \sum_{g \in G} g$, que pertenece al centro $Z(k[G]) = Z(K_1) \times \ldots \times Z(K_r)$. Se verifica que $s^2 = \#G \cdot s = 0$, lo cual es imposible. □

A partir de este momento suponemos siempre que $\operatorname{car} k$ no divide a $\#G < \infty$. Por sencillez, supondremos además que k es algebraicamente cerrado. Con estas hipótesis, sabemos por Wedderburn que $k[G] = M_{n_1}(k) \times \ldots \times M_{n_r}(k) = \operatorname{End}_k(E_1) \times \ldots \times \operatorname{End}_k(E_r)$, donde $\operatorname{End}_k(E_i)$ es un anillo simple y E_i es el único $\operatorname{End}_k(E_i)$-módulo simple. Entonces la composición $G \hookrightarrow k[G] \to \operatorname{End}_k(E_i)$ son (todas) las representaciones irreducibles de G, desisomorfas entre sí. Además, como $\operatorname{End}_k(E_i) = E_i \oplus \overset{n_i}{\cdots} \oplus E_i$, la descomposición $k[G] = M_{n_1}(k) \times \ldots \times M_{n_r}(k)$ es la descomposición de $k[G]$ en suma de monógenos.

Definición 1.2.6. *Se llama carácter χ_E de una representación lineal $\rho : G \to \operatorname{Aut}_k(E)$ a la función $\chi_E : G \to k$, $\chi_E(g) = tr(\rho(g))$.*

Observemos que la composición de los morfismos

$$G \hookrightarrow k[G] = \operatorname{End}_k(E_1) \times \ldots \times \operatorname{End}_k(E_r) \xrightarrow{\pi_i} \operatorname{End}_k(E_i) \xrightarrow{tr_i} k$$

es justamente el carácter χ_{E_i}, donde hemos denotado tr_i la aplicación que asigna a cada matriz su traza.

Los principales resultados referente a los caracteres son los siguientes.

Proposición 1.2.7. *Los caracteres asociados a las representaciones irreducibles son linealmente independientes.*

Demostración. Todo carácter χ_E extiende por linealidad de modo único a una forma lineal sobre $k[G]$. Los caracteres asociados a las representaciones irreducibles serán linealmente independientes si y sólo si lo son sus extensiones lineales sobre $k[G]$.

Consideremos la descomposición $k[G] = \operatorname{End}_k(E_1) \times \ldots \times \operatorname{End}_k(E_r)$ y las proyecciones $\pi_i : k[G] \to \operatorname{End}_k(E_i)$. La extensión lineal de χ_{E_i} a $k[G]$, que seguimos denotando χ_{E_i}, es $\chi_{E_i} = tr_i \circ \pi_i$. Estas extensiones son linealmente independientes, pues

$$(\chi_{E_i})_{|\mathrm{End}_k(E_j)} = \delta_{ij} \cdot tr_i.$$

□

Proposición 1.2.8. *Si* $\operatorname{car} k = 0$*, dos representaciones lineales son equivalentes si y sólo si sus caracteres son iguales.*

Demostración. Sea una representación lineal de G en $\mathrm{End}_k(E)$, y sea la descomposición $E = E_1^{m_1} \oplus \ldots \oplus E_r^{m_r}$. Tenemos que $\chi_E = m_1 \cdot \chi_{E_1} + \ldots + m_r \cdot \chi_{E_r}$. Los números m_i están unívocamente determinados por χ_E por la proposición anterior y clasifican al $k[G]$-módulo E. □

1.3. G-invariantes

Sea G un grupo y E un $k[G]$-módulo.

Definición 1.3.1. *Se dice que* $e \in E$ *es invariante por* G *cuando* $g \cdot e = e$ *para todo* $g \in G$.

El subconjunto de invariantes de un $k[G]$-módulo E es un subespacio vectorial y se denota E^G.

Sean E_1, E_2 dos $k[G]$-módulos. Observemos que

$$\mathrm{Hom}_k(E_1, E_2)^G = \mathrm{Hom}_G(E_1, E_2).$$

Definición 1.3.2. *Se dice que el grupo* G *es (linealmente) semisimple si* $k[G]$ *es una* k*-álgebra semisimple.*

Teorema 1.3.3. *G es semisimple si y sólo si el funtor "tomar invariantes" es exacto.*

Demostración. Si G es semisimple, toda sucesión exacta de $k[G]$-módulos rompe, y es claro que la toma de invariantes es exacta. Recíprocamente, supongamos que la toma de invariantes es exacta. Dado un epimorfismo de $k[G]$-módulos $\pi : M \to M'$ entre espacios vectoriales, consideremos el epimorfismo inducido

$$\pi_* : \mathrm{Hom}_k(M', M) \to \mathrm{Hom}_k(M', M')$$

donde G opera por conjugación, i.e., $(g * f)(m) = g \cdot (f(g^{-1}m))$. Tomando invariantes se obtiene el epimorfismo

$$\pi_* : \mathrm{Hom}_{k[G]}(M', M) \to \mathrm{Hom}_{k[G]}(M', M').$$

Por tanto, existe $s \in \mathrm{Hom}_{k[G]}(M', M)$ tal que $\pi_*(s) = \mathrm{Id}$. En conclusión, π tiene sección, luego toda sucesión exacta de $k[G]$-módulos rompe y G es semisimple.

□

Teorema 1.3.4. *Sea G un grupo finito. G es semisimple si y sólo si existe un isomorfismo de álgebras $k[G] = k \times B$, de modo que la proyección en el primer factor $\pi_1 : k[G] \to k$ es $\pi_1(g) = 1$, para todo $g \in G$.*

Demostración. Si G es semisimple entonces sabemos que $k[G]$ es el producto directo de los anillos de endomorfismos de las representaciones irreducibles de G, una de ellas es la trivial.

Supongamos que $k[G] = k \times B$, de modo que la proyección π_1 en el primer factor aplique G en 1. Si E es un $k[G]$-módulo trivial, es decir, $g\cdot e = e = \pi_1(g)\cdot e$, entonces $a \cdot e = \pi_1(a) \cdot e$, para todo $a \in k[G]$ y $e \in E$, es decir, B anula a E. Por tanto dado un $k[G]$-módulo V, tenemos la identificación de $k[G]$-módulos

$$V = k[G] \otimes_{k[G]} V = (k \otimes_{k[G]} V) \oplus (B \otimes_{k[G]} V),$$

de modo que $k[G]$ opera en el primer sumando vía π_1 y en el segundo vía la proyección π_2 en el segundo factor. Tomando invariantes por G tenemos

$$V^G = (k \otimes_{k[G]} V)^G \oplus (B \otimes_{k[G]} V)^G.$$

Según lo anterior, $k\otimes_{k[G]} V$ es invariante por G pues $k[G]$ opera vía π_1. Por otra parte, $k[G]$ opera en $B\otimes_{k[G]} V$ vía π_2. Puesto que los invariantes están anulados por B, eso significa que $(B \otimes_{k[G]} V)^G = 0$, luego $V^G = k \otimes_{k[G]} V$. Por tanto, la toma de invariantes es exacta por la derecha. Como la toma de invariantes siempre es exacta por la izquierda concluimos que la toma de invariantes es exacta y G es semisimple. $\square$

Definición 1.3.5. *Dado un grupo G, llamaremos integral de G a cada forma lineal sobre las funciones de G, es decir, a toda $w \in F(G)^* = \mathrm{Aplic}(G, k)^* = k[G]$.*

Definición 1.3.6. *Se dice que una integral w sobre un grupo G es invariante por traslación cuando $g*w = w$ para todo $g \in G$. Es decir, $w(f(g\cdot x)) = w(f(x))$ para toda función $f(x) \in F(G)$ y todo $g \in G$. Diremos que w está normalizada si $w(1) = 1$.*

La existencia de esta integral invariante está ligada a la semisimplicidad del grupo.

Teorema 1.3.7. *Un grupo finito G es semisimple si y sólo si admite una integral invariante normalizada.*

Demostración. Si G es semisimple entonces $k[G] = k \times B$, de modo que la proyección π_1 en el primer factor cumple que $\pi_1(G) = 1$, es decir, $\pi_1 = 1 \in F(G)$. Se cumple que $w_G := (1, 0)$ es la integral invariante normalizada:

$$g \cdot (1, 0) = (\pi_1(g), \pi_2(g)) \cdot (1, 0) = (1, \pi_2(g)) \cdot (1, 0) = (1, 0)$$

y $w_G(1) = \pi_1((1, 0)) = 1$.

Sea $w_G \in k[G]$ una integral invariante normalizada. Entonces, $g \cdot w_G = w_G = g(1) \cdot w_G$, luego $w' \cdot w_G = w'(1) \cdot w_G$ para toda $w' \in k[G]$. Sea $*$:

$k[G] \to k[G]^\circ$ el isomorfismo de k-álgebras definido por $*(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$. Se verifica que $w'_G := *(w_G)$ es una integral invariante por la derecha normalizada. Por tanto, $w'_G \cdot w = w'_G \cdot w(1)$. En conclusión, $\tilde{w} = w_G \cdot w'_G$ cumple que $w' \cdot \tilde{w} = w'(1) \cdot \tilde{w} = \tilde{w} \cdot w'$ y $\tilde{w}(1) = 1$. En particular, $\tilde{w}$ es idempotente y es fácil comprobar que la descomposición, $k[G] = \tilde{w} \cdot k[G] \oplus (1 - \tilde{w}) \cdot k[G]$ es una descomposición de $k[G]$ en producto de dos k-álgebras. Además, $k \cdot \tilde{w} = \tilde{w} \cdot k[G]$ y $\pi_1(g) = \pi_1(\tilde{w} \cdot g + (1 - \tilde{w}) \cdot g) = \pi_1(\tilde{w} + (1 - \tilde{w}) \cdot g) = 1$, para todo $g \in G$. Luego G es semisimple. □

Proposición 1.3.8. *Si G es un grupo que admite una integral invariante normalizada w_G, para cada representación E de G existe un retracto de $k[G]$-módulos $\rho_E : E \to E^G$, $\rho_E = w_G * -$.*

Demostración. Si $e \in E^G$, entonces para toda $w = \sum_i \lambda_i g_i \in k[G]$ se verifica $w * e = \sum_i \lambda_i \cdot g_i * e = (\sum_i \lambda_i) \cdot e = w(1) \cdot e$. Por tanto, $(w_G * -)_{|E^G} = Id_{E^G}$. Además, dado un $e \in E$ cualquiera, entonces $g * (w_G * e) = (g * w_G) * e = w_G * e$, es decir, $w_G * E \subset E^G$. □

Calculemos (cuando exista) la integral normalizada de un grupo finito G. Si $w = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ es invariante por traslaciones, entonces

$$\sum_{g \in G} \lambda_g \bar{g} g = \bar{g} * w = w = \sum_{g \in G} \lambda_g g \quad \forall \, \bar{g} \in G$$

de donde igualando componentes se obtiene $\lambda_{\bar{g}g} = \lambda_g$ para todo $\bar{g}, g \in G$, es decir, $\lambda_g = \lambda_{g'}$ para todo $g, g' \in G$, es decir, $w = \lambda \cdot \sum_{g \in G} g$. Si además $w(1) = 1$ se concluye que $\lambda \cdot |G| = 1$. Por tanto, la integral normalizada existe si y sólo si $|G|$ es primo con la característica de k. En tal caso

$$w_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

Teorema 1.3.9. *Los grupos finitos son semisimples si y sólo si $|G|$ es primo con la característica del cuerpo base.*

1.4. Grupos algebraicos. Representaciones lineales

El funtor de puntos de las variedades algebraicas permite tratar de modo natural la teoría de grupos algebraicos igual que la teoría de grupos finitos.

Los resultados de esta sección para grupos algebraicos y G-espacios vectoriales se obtendrán más tarde como consecuencia de nuestra teoría de esquemas de álgebras.

Consideremos un sistema de ecuaciones algebraicas

$$p_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,p_r(x_1,\dots,x_n)=0.$$

El funtor sobre la categoría de álgebras en la categoría de conjuntos F definido por

$$F(B)=\{\text{Soluciones del sistema de ecuaciones con valores en } B\}$$

determina el ideal generado por el sistema de ecuaciones, es decir, determina la variedad de soluciones de dicho sistema.

En efecto, sea $\mathcal{C}$ una categoría, $X\in\mathcal{C}$ un objeto y denotemos por $X^\cdot$ el funtor de $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos definido por $X^\cdot=\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$. Diremos que $X^\cdot$ es el funtor de puntos de X. El lema de Yoneda ([16, II, 4.1]) dice que

$$\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(X^\cdot,Y^\cdot)=\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

y que $X^\cdot\simeq Y^\cdot$ si y sólo si $X\simeq Y$. Además, un morfismo de funtores $\theta\colon X^\cdot\rightsquigarrow Y^\cdot$ está determinado por la imagen por θ_X de $\operatorname{Id}_X\in X^\cdot(X)$, que llamaremos punto general de X.

Sea $\mathcal{C}$ la categoría de k-esquemas afines (que se identifica con la categoría de k-álgebras). Sea $A=k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ y $X=\operatorname{Spec}A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} X^\cdot(B) &:= \operatorname{Hom}_{\text{esquemas}}(\operatorname{Spec}B,\operatorname{Spec}A)=\operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(A,B)\\ &= \left\{\begin{array}{l}\ \text{Soluciones del sistema de ecuaciones}\\ p_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,p_r(x_1,\dots,x_n)=0\\ \text{con valores en } B\end{array}\right\}=F(B).\end{aligned}$$

Sea $\mathbb{A}_n=\operatorname{Spec}k[x_1,\dots,x_n]$. Observemos que $\mathbb{A}_n{}^\cdot(B)=\{(b_1,\dots,b_n):\ b_i\in B\}$. Sea

$$q_1(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,q_s(x_1,\dots,x_n)=0$$

otro sistema de ecuaciones (con el mismo número de variables), y denotemos $B=k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)$ e $Y=\operatorname{Spec}B$. Existe un isomorfismo de funtores θ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X^\cdot \arrow[r, hook] \arrow[d, "\theta"] & \mathbb{A}_n^\cdot \\ Y^\cdot \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

si y sólo si $A=B$, es decir, $(p_1,\dots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$.

Definición 1.4.1. *Dado un k-esquema afín $X=\operatorname{Spec}A$, el funtor $X^\cdot$ de la categoría de k-álgebras en la categoría de conjuntos definido por*

$$X^\cdot(B)=\operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(A,B)$$

se llama funtor de puntos de X.

Ejemplo 1.4.2. *Dado el k-esquema afín* $\operatorname{Spec} A$*, se verifica que dar un morfismo de funtores de su funtor de puntos en el de la recta afín* $\mathbb{A}_1$ *es dar un elemento de* A*:*

$$\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}((\operatorname{Spec} A)^{\cdot}, \mathbb{A}_1^{\cdot}) = \mathbb{A}_1^{\cdot}(A) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(k[x], A) = A.$$

Definición 1.4.3. *Un grupo afín sobre un anillo k es un k-esquema afín $G =$* $\operatorname{Spec} A$ *tal que su funtor de puntos $G^{\cdot}$ valora en la categoría de grupos.*

Esta última condición es equivalente a que G esté dotado de tres morfismos $\mu : G \times_k G \to G$, $\operatorname{inv} : G \to G$ y $e : \operatorname{Spec} k \to G$ de modo que cumplen:

1. La propiedad asociativa: $\mu \circ (\mu \times \mathrm{Id}) = \mu \circ (\mathrm{Id} \times \mu)$.
2. Elemento neutro: $\mu \circ (e \times \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.
3. Elemento inverso: $\mu \circ (\operatorname{inv} \times \mathrm{Id}) = e \circ \pi$, donde $\pi : G \to \operatorname{Spec} k$ es la proyección estructural.

Se verifica que dotar a $G = \operatorname{Spec} A$ de estructura de grupo afín es equivalente a dotar a A de estructura de álgebra de Hopf.

Definición 1.4.4. *Un álgebra de Hopf es una k-álgebra A dotada de tres morfismos*

$$m : A \to A \otimes_k A,$$
$$e : A \to k,$$
$$i : A \to A,$$

tal que m es asociativo, e es un punto neutro respecto a m, i.e.,

$$A \xrightarrow{m} A \otimes_k A \xrightarrow{e \otimes id} k \otimes A \simeq A$$

es el morfismo identidad de A, e i es un paso al inverso respecto a m, i.e.,

$$A \xrightarrow{m} A \otimes A \xrightarrow{(i,id)} A$$

es la composición $A \xrightarrow{e} k \hookrightarrow A$.

Definición 1.4.5.

1. *Sea G un grupo finito. El funtor de grupos $\mathcal{G}$ definido por $\mathcal{G}(A) = G$ es representable por* $\operatorname{Spec}(\prod^{G} k)$*, que es, por tanto, un grupo algebraico afín.*
2. *El grupo lineal $Gl_n(k)$ es el grupo algebraico afín representante del funtor*

$$F(B) = \operatorname{Aut}_{B-\text{mód}}(B \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus B)$$

para cada k-álgebra B. Se comprueba que $Gl_n(k) = \operatorname{Spec} A$ donde $A = (k[x_{11}, \dots, x_{nn}])_{\det(x_{ij})}$, siendo $\det$ *la función determinante.*

3. *El grupo lineal especial $Sl_n(k)$ es el subgrupo de $Gl_n(k)$ de las matrices de determinante 1, es decir, es el cerrado definido por los ceros del ideal $(\det(x_{ij}) - 1)$ y es el representante del funtor*

$$F(B) = \{\tau \in \mathrm{Aut}_{B-\text{mód}}(B\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus B) : \det(\tau) = 1\}.$$

4. *El grupo ortogonal $O_n(k)$ es el cerrado de $Gl_n(k)$ formado por las matrices que dejan invariante una métrica simétrica T_2 no singular, es decir, es el cerrado que define el sistema de ecuaciones $(x_{ij}) \cdot (a_{ij}) \cdot (x_{ij})^t = (a_{ij})$:*

$$a_{ij} = \sum_k (\sum_l x_{il} a_{lk}) x_{jk}.$$

Además, es el representante del funtor

$$F(B) = \{\tau \in \mathrm{Aut}_{B-\text{mód}}(B\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus B) : \tau \circ T_2 \circ \tau^* = T_2\}.$$

5. *El grupo lineal triangular $T_n(k)$ es el subgrupo de $Gl_n(k)$ de las matrices invertibles superiormente triangulares, es decir, el cerrado definido por los ceros del ideal $(x_{ij})_{i<j}$ y es el representante del funtor*

$$\begin{aligned} F(B) =\{&\tau \in \mathrm{Aut}_{B-\text{mód}}(B^{\oplus n}) : \tau \text{ deja estable la cadena trivial de} \\ &\text{submódulos } B \oplus 0 \subset B \oplus B \oplus 0 \subset \ldots \subset B\oplus \overset{n}{\cdots} \oplus B\}. \end{aligned}$$

6. *El grupo lineal triangular unipotente $U_n(k)$ es el subgrupo del grupo triangular $T_n(k)$ de las matrices triangulares con los coeficientes de la diagonal iguales a 1; es decir, es el cerrado de $T_n(k)$ definido por el ideal $(x_{ii} - 1)_{1\leq i\leq n}$. Su funtor de puntos es el subfuntor del de $T_n(k)$ de los automorfismos lineales que, además de dejar estable la cadena anterior, dan la identidad en cada uno de los factores consecutivos.*

Sea E un k-espacio vectorial y $\mathbf{E}$ el funtor de k-espacios vectoriales sobre la categoría de k-álgebras asociado a E, definido por

$$\mathbf{E}(A) = E \otimes_k A.$$

Sea $\mathrm{Aut}_k(\mathbf{E})$ el funtor de grupos definido por

$$\mathrm{Aut}_k(\mathbf{E})(A) = \mathrm{Aut}_A(E \otimes_k A).$$

Definición 1.4.6. *Sea G un funtor de grupos. Dado un k-espacio vectorial E, se llama representación lineal de G en E o estructura de G-módulo en E a cada morfismo de funtores en grupos:*

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(\mathbf{E}).$$

Comentario 1.4.7. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. Sea E un G-módulo y $x = \mathrm{Id} \in G^{\cdot}(A) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(A, A)$, el "punto general" de G. Sea*

$$L_x : A \otimes_k E \to A \otimes_k E$$

la traslación por el punto general.

Para cada punto $g \in G^{\cdot}(B)$, la traslación por g, $L_g : B \otimes_k E \to B \otimes_k E$ es el automorfismo L_x cambiado de base al punto $g : A \to B$.

Un funtor $\mathcal{A}$ de la categoría de k-álgebras en la de álgebras diremos que un *funtor de álgebras*. El funtor $\mathbf{k}$ definido por $\mathbf{k}(A) = A$ es un funtor de álgebras. Diremos que un funtor de álgebras $\mathcal{A}$, junto con un morfismo de funtores de álgebras $\mathbf{k} \to \mathcal{A}$, es un *funtor de k-álgebras.*

Sea E un k-espacio vectorial. Dado un morfismo $\mathcal{A} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ que dote a E_B de estructura de $\mathcal{A}(B)$-módulo para toda k-álgebra B, diremos que E es un *$\mathcal{A}$-módulo*.

Sea G un funtor de grupos. El funtor $\mathbf{k}[G]$ definido por

$$\mathbf{k}[G](A) := \{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i,\ a_i \in A,\ g_i \in G(A)\}$$

es de modo natural un funtor de k-álgebras. Es fácil demostrar que la categoría de G-módulos es equivalente a la categoría de $\mathbf{k}[G]$-módulos.

Dado un $\mathcal{A}$-módulo E, un subespacio vectorial $E' \hookrightarrow E$ diremos que es un $\mathcal{A}$-submódulo de E si para toda k-álgebra B, E'_B es un B-submódulo de E_B, es decir, si el morfismo natural $\mathcal{A} \times \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ valora en $\mathbf{E}'$.

Dejamos que el lector defina los conceptos de $\mathcal{A}$-módulo simple, semisimple y pruebe la proposición equivalente a 1.1.7.

Proposición 1.4.8. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un grupo algebraico y E un G-módulo. Si $V \subset E$ es un subespacio de dimensión finita, entonces también lo es el mínimo G-módulo conteniendo a V, $< G \cdot V >$.*

Definición 1.4.9. *Un k-espacio vectorial A tiene estructura de coálgebra si existen morfismos $m : A \to A \otimes_k A$ y $e : A \to k$ tal que m es asociativo y e es un punto neutro respecto a m.*

Conviene observar que dotar a un espacio vectorial de dimensión finita de estructura de coálgebra equivale a dotar a su espacio vectorial dual de estructura de álgebra.

Corolario 1.4.10. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un grupo afín. Se cumple que A es unión de sus subcoálgebras de dimensión finita.*

Teorema 1.4.11. *Si G es un grupo algebraico afín sobre k, entonces es isomorfo a un subgrupo cerrado del grupo lineal $Gl_n(k)$, para cierto $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.4.12. *Dado un G-módulo de dimensión finita E, llamamos carácter lineal asociado, y lo denotamos χ_E, a la función $\chi_E : G \to \mathbb{A}_1$ definida, vía el funtor de puntos, por*

$$\chi_E(g) = \mathrm{Tr}_E(g)$$

donde $\mathrm{Tr}_E(g)$ es la traza del endomorfismo inducido por g en E.

Teorema 1.4.13. *Se verifican las afirmaciones:*

1. *Los caracteres lineales de un grupo algebraico G asociados a sus representaciones finitas constituyen un subanillo de funciones de G. Con precisión se verifican las fórmulas*

$$\chi_{E_1 \oplus E_2} = \chi_{E_1} \oplus \chi_{E_2},$$

$$\chi_{E_1 \otimes E_2} = \chi_{E_1} \cdot \chi_{E_2},$$
$$\chi_{E^*}(g) = \chi_E(g^{-1}).$$

2. *Los caracteres lineales de G asociados a representaciones simples desisomorfas son linealmente independientes sobre k como funciones de G. En particular, dos representaciones simples son isomorfas si y sólo si tienen el mismo carácter lineal asociado ($\mathrm{car}\, k = 0$).*

Definición 1.4.14. *Sea G un grupo algebraico y E un G-módulo de dimensión finita.*

1. *Se dice que E es triangulable cuando admite una cadena de composición como espacio vectorial*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = E$$

constituida por G-submódulos.

2. *Se dice que E es unipotente cuando es triangulable, es decir, admite una cadena de composición formada por G-submódulos, y además los G-módulos cocientes E_i/E_{i-1} son triviales, es decir, G opera por la identidad sobre ellos.*

Definición 1.4.15. *Un G-módulo se dice triangulable (respectivamente unipotente) cuando cada G-submódulo de dimensión finita es triangulable (respectivamente unipotente).*

Definición 1.4.16. *Un grupo afín G se dice que es triangulable (respectivamente unipotente) si y sólo si todo G-módulo de dimensión finita es triangulable (respectivamente unipotente).*

Teorema 1.4.17.

1. *Un grupo algebraico afín es triangulable cuando es isomorfo a un subgrupo del grupo triangular Tn(k) para algún n.*

2. *Un grupo algebraico afín es unipotente cuando es isomorfo a un subgrupo del grupo triangular unipotente Un(k) para algún n.*

1.4.1. Lisitud de los grupos algebraicos en característica cero

Definición 1.4.18. *Una variedad algebraica X es lisa sobre un cuerpo k si por cambio de base es regular en todo punto.*

Si X es una variedad algebraica irreducible entonces es lisa si el módulo de las diferenciales $\Omega_{X/k}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango la dimensión de X. Si el cuerpo es algebraicamente cerrado, liso equivale a regular.

Un anillo local noetheriano A_x de maximal $\mathfrak{m}_x$ es regular si y sólo si

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 =< f_1, \ldots, f_n >$$

donde n es la dimensión de Krull de A_x.

Teorema 1.4.19. *Todo grupo algebraico afín, $G = \operatorname{Spec} A$, sobre un cuerpo k de característica cero, es liso.*

Demostración. Por cambio de cuerpo base podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Definimos el grupo reducido de G como $G_{red} := \operatorname{Spec} A/rad(A)$, que es de nuevo un grupo algebraico: Si hacemos cociente por los radicales en el morfismo de comultiplicación $A \to A \otimes_k A$ obtenemos el morfismo de comultiplicación $A/rad(A) \to A \otimes A/rad(A \otimes A) = A/rad(A) \otimes A/rad(A)$ del anillo de funciones de G_{red}.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G es conexo. G_{red} es un subgrupo de G, que coincide con G a nivel topológico. El cociente $G/G_{red} = \operatorname{Spec} B$ es una variedad algebraica afín de dimensión cero y con un único punto cerrado, luego B es una k-álgebra conmutativa finita local[2].

Sea T_2 la métrica de la traza en B. G opera por translaciones en G/G_{red} de modo transitivo, luego opera en B y opera como simetrías de T_2. Luego G deja estable $(rad\, T_2)_0$. Como G opera transitivamente, esquemáticamente bien $(rad\, T_2)_0 = \varnothing$, bien $(rad\, T_2)_0 = \operatorname{Spec} B$. En el primer caso $rad\, T_2 = B$, y en el segundo $rad\, T_2 = 0$. Sin embargo, $T_2(1,1) = tr(h_1) = tr(Id) = \dim_k B \neq 0$ $(\operatorname{car} k = 0)$, por lo que debe ser $rad\, T_2 = 0$. Entonces B es una k-álgebra finita local separable, luego reducida, y racional, luego es una k-álgebra trivial y su grado sobre k es el número de puntos de su espectro, es decir, $B = k$. Como $G/G_{red} = \operatorname{Spec} k$, $G_{red} = G$ y el anillo de funciones A de G es reducido.

En G, que es reducido y conexo, existen abiertos afines no vacíos irreducibles y reducidos, por tanto, existe un abierto no vacío donde G es liso. Puesto que k es algebraicamente cerrado todo punto cerrado es racional, así que por translaciones todo G es liso. □

[2] En este caso, la existencia de este cociente, en la topología fielmente plana, es sencilla, supuesto conocida la construcción de la grasmanniana de subespacios de codimensión finita de un espacio vectorial ([3]). G/G_{red} es el "conjunto" de subespacios de A de la misma codimensión que la del ideal de funciones de A que se anulan en G_{red}, que son ideales y que son estables por la acción de G_{red}.

Capítulo 2

R-módulos cuasi-coherentes y esquemas de R-módulos

2.1. Funtores de R-módulos

Sea R un anillo conmutativo con unidad, sea $\mathcal{C}_R$ la categoría de las R-álgebras conmutativas y sea $\mathbf{R} : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_R$ el funtor de álgebras que asigna a A la R-álgebra $\mathbf{R}(A) := A$. Sea $\mathcal{C}_{Ab}$ la categoría de los grupos conmutativos.

Definición 2.1.1. *Un funtor $F : \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_{Ab}$ con un morfismo de funtores $\mathbf{R}\times F \xrightarrow{\theta} F$ se dice que es un funtor de R-módulos si $F(A)$ junto con el morfismo $A \times F(A) \xrightarrow{\theta(A)} F(A)$ es un A-módulo para cada $A \in \mathcal{C}_R$.*

Dado un R-módulo E, el funtor $\mathbf{E}$ definido por $\mathbf{E}(A) = E \otimes_R A$ para toda R-álgebra A, es un funtor de R-módulos.

Salvo que se diga lo contrario, de ahora en adelante supondremos que todos los funtores considerados están definidos sobre la categoría $\mathcal{C}_R$.

Definición 2.1.2. *Dado un par de funtores de R-módulos F y F', denotaremos por $\mathbf{Hom}_R(F, F')$ el funtor de homomorfismos de R-módulos de F en F',*

$$\mathbf{Hom}_R(F, F')(A) = \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$$

donde $F_{|A}$ denota el funtor F restringido a la categoría de las A-álgebras $\mathcal{C}_A$. Un elemento de $\mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$ consiste en asignar un morfismo de B-módulos $F(B) \to F'(B)$ a cada A-álgebra B.

Denotamos por $F^* = \mathbf{Hom}_R(F, \mathbf{R})$ el funtor dual de F[1].

[1]Si $F = \mathbf{E}$ o $F = \mathbf{E}^*$, entonces $\mathbf{Hom}_R(F, F')(A)$ es un conjunto (véase 2.1.3, 2.1.6 y el lema de Yoneda) y $\mathbf{Hom}_R(F, F')$ es un funtor. Cuando escribamos F^* o F^{**} supondremos que son funtores bien definidos. Sin embargo, dados cualesquier F y F', para que $\mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$ sea un conjunto (será necesario en 2.2.1, 2.2.2 y A.2.1), en vez de considerar la categoría de las álgebras conmutativas, consideramos un conjunto infinito X y la categoría de las álgebras conmutativas cuyo cardinal es menor o igual que $\mathrm{card}(\mathrm{X}^{\mathbb{N}})$. Véase [8, General conventions].

Proposición 2.1.3. *Para cada funtor de R-módulos F y cada R-módulo E, se cumple que*
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}, F) = \mathrm{Hom}_R(E, F(R)).$$

Demostración. Dado un morfismo $f : \mathbf{E} \to F$ de R-módulos, tenemos para cada R-álgebra A un morfismo de A-módulos $f_A : E \otimes_R A \to F(A)$ y un diagrama conmutativo
$$\begin{array}{ccc} E \otimes_R A & \xrightarrow{f_A} & F(A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E & \xrightarrow{f_R} & F(R). \end{array}$$
Luego el morfismo de A-módulos f_A está determinado por f_R. □

Lema 2.1.4. *Sea A una R-álgebra y sean E un R-módulo y F, F' funtores de R-módulos. Entonces:*

1. $\mathbf{E}_{|A}$ *es el funtor asociado al A-módulo $E \otimes_R A$ en $\mathcal{C}_A$.*
2. $\mathbf{Hom}_R(F, F')_{|A} = \mathbf{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$.

Definición 2.1.5. *Dada una R-álgebra conmutativa A, definimos el funtor* $(\mathrm{Spec}\, A)^{\cdot}$ *en $\mathcal{C}_R$ como* $(\mathrm{Spec}\, A)^{\cdot}(B) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(A, B)$ *para cada R-álgebra conmutativa B. Llamaremos a este funtor el funtor de puntos de* $\mathrm{Spec}\, A$.

Por el lema de Yoneda ([16, II, 4.1]), $\mathrm{Hom}_{\text{funtores}}((\mathrm{Spec}\, A)^{\cdot}, F) = F(A)$.

Dado un R-módulo E, denotaremos por $S^{\cdot}_R E$ el álgebra simétrica de E. Recordemos ahora el siguiente bien conocido lema (véase [8, II, §1, 2.1] o [9, Exposé VII_B, 1.2.4]).

Lema 2.1.6. *Si E es un R-módulo, entonces* $\mathbf{E}^* = (\mathrm{Spec}\, S^{\cdot}_R E)^{\cdot}$ *como funtor de R-módulos.*

Demostración. Para cada R-álgebra A, se cumple que
$$\mathbf{E}^*(A) = \mathrm{Hom}_A(\mathbf{E}_{|A}, \mathbf{R}_{|A}) = \mathrm{Hom}_A(\mathbf{E} \otimes_R \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \mathrm{Hom}_A(E \otimes_R A, A)$$
$$= \mathrm{Hom}_R(E, A) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(S^{\cdot}_R E, A) = (\mathrm{Spec}\, S^{\cdot}_R E)^{\cdot}(A).$$
□

Definición 2.1.7. *Se definen los R-módulos cuasi-coherentes como los funtores de R-módulos de la forma* $\mathbf{E}$*, donde E es un R-módulo cualquiera. Diremos que* $\mathbf{E}$ *es un R-módulo coherente si E es un R-módulo de tipo finito.*

Los esquemas de R-módulos se definen como funtores de R-módulos del tipo $\mathbf{E}^*$.

Si E es un R-módulo libre de tipo finito, entonces $\mathbf{E}$ es un R-módulo coherente y un esquema de R-módulos.

2.1.1. El Teorema de Reflexividad

Definición 2.1.8. *El producto tensorial $F \otimes_R G$ de dos funtores F y G en la categoría de los funtores de R-módulos se define $(F \otimes_R G)(A) := F(A) \otimes_A G(A)$.*

Proposición 2.1.9. *Sean E y E' dos R-módulos. Entonces*

$$\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}') = \mathbf{E} \otimes_R \mathbf{E}'.$$

Demostración. Sabemos que el funtor $\mathbf{E}^*$ está representado por $\operatorname{Spec} S^{\cdot}_R E$, por lo tanto

$$\operatorname{Hom}_R(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}') \subseteq \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}') = \mathbf{E}'(S^{\cdot}_R E) = S^{\cdot}_R E \otimes_R E'.$$

Sin embargo, para que $w \in S^{\cdot}_R E \otimes_R E'$ sea una aplicación lineal, debe ser $w \in E \otimes_R E'$. Por lo tanto, $\operatorname{Hom}_R(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}') = E \otimes_R E'$.

Para cada R-álgebra A tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}')(A) &= \operatorname{Hom}_A(\mathbf{E}^*{}_{|A}, \mathbf{E}'{}_{|A}) = \operatorname{Hom}_A((\mathbf{E} \otimes_R \mathbf{A})^*, \mathbf{E}' \otimes_R \mathbf{A}) \\ &= (E \otimes_R A) \otimes_A (E' \otimes_R A) = (\mathbf{E} \otimes_R \mathbf{E}')(A).\end{aligned}$$

□

Comentario 2.1.10. *Si $\mathcal{C}_R$ es la categoría de las R-álgebras conmutativas cuyo cardinal es menor o igual que $\operatorname{card}(X^{\mathbb{N}}) = m$, entonces debemos suponer que $S^{\cdot}_R E \in \mathcal{C}_R$, es decir, que $\operatorname{card} S^{\cdot}_R E \leq m$. Si E es un R-módulo libre de cardinal cualquiera, obtenemos la proposición de nuevo: Sea $\{E_i\}$ el conjunto de cocientes de E cuyo cardinal es menor o igual que m. Se verifica que $\mathbf{E}^* = \lim\limits_{\overrightarrow{i}} \mathbf{E}_i^*$. El morfismo natural $\lim\limits_{\overrightarrow{i}} \mathbf{E}_i^* \to \mathbf{E}^*$, que llamaremos T, es claramente inyectivo. Veamos que es epiyectivo. Sea $w \in \mathbf{E}^*(A)$. Como $\mathbf{E}^*(A) = \operatorname{Hom}_A(E \otimes_k A, A) = \operatorname{Hom}_k(E, A)$, w se corresponde con cierta aplicación $\phi \in \operatorname{Hom}_k(E, A)$. Sea $E_i = E/\ker\phi$ y $\phi_i : E_i \to A$ el morfismo inducido por ϕ. Sea $w_i \in \mathbf{E}_i^*(A)$ correspondiente a ϕ_i. Se cumple que $T(\bar{w}_i) = w$.*

Entonces

$$\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}^*, \mathbf{E}') = \mathbf{Hom}_R(\lim_{\overrightarrow{i}} \mathbf{E}_i^*, \mathbf{E}') = \lim_{\overleftarrow{i}} (\mathbf{E}_i \otimes_R \mathbf{E}') \overset{*}{=} \mathbf{E} \otimes_R \mathbf{E}'$$

donde $\overset{*}{=}$ es una consecuencia de la igualdad $E \otimes_R E' \otimes_R S = \lim\limits_{\overleftarrow{i}} (E_i \otimes_R E' \otimes_R S)$ para cualquier R-álgebra $S \in \mathcal{C}_R$. Para demostrar esta igualdad probemos, por sencillez, que todo espacio vectorial E es límite proyectivo de sus cocientes E_i de dimensión numerable: Es fácil comprobar que el morfismo $E \to \lim\limits_{\overleftarrow{i}} E_i$ es inyectivo. Veamos que es epiyectivo. Sea $v \in \lim\limits_{\overleftarrow{i}} E_i$, sea $\{e_j\}$ una base de E y $w_k \in E^*$ tal que $w_k(e_j) = \delta_{kj}$. Sea $\pi_j : \lim\limits_{\overleftarrow{i}} E_i \to E/\ker w_j \simeq k$ el morfismo *natural. Se cumple que sólo para un número finito de índices $\pi_j(v) \neq 0$. En efecto, si existe una cantidad numerable infinita de índices j' tal que $\pi_{j'}(v) = \lambda_{j'} \neq 0$, consideremos un suplementario V en E de $< e_{j'} >_{j'}$ y el morfismo natural $\pi : \lim\limits_{\overleftarrow{i}} E_i \to E/V$. Tendremos que $\pi(v) = \sum\limits_{j'} \mu_{j'} \bar{e}_{j'}$, siendo todos los $\mu_{j'} = 0$ salvo un número finito. Ahora bien, la composición de los morfismos naturales $\lim\limits_{\overleftarrow{i}} E_i \to E/V \to E/\ker w_{j'}$ es el morfismo $\pi_{j'}$, luego $\mu_{j'} = \lambda_{j'}$ y llegamos a contradicción. En el morfismo $E \to \lim\limits_{\overleftarrow{i}} E_i$, $\sum\limits_{finita} \pi_j(v) \cdot e_j$ se aplica en v.*

Con más generalidad, la proposición es cierta si E es un R-módulo proyectivo, es decir, es un sumando directo de un R-módulo libre.

Como corolario de la proposición anterior obtenemos el teorema de reflexividad para funtores de R-módulos cuasi-coherentes.

Teorema 2.1.11. *Sea E un R-módulo. Entonces*

$$\mathbf{E}^{**} = \mathbf{E}.$$

Comentario 2.1.12. *Probemos el teorema para espacios vectoriales sin la teoría de esquemas. Sabemos que el dual de una suma directa es un producto directo y lo que queremos probar es que el dual "natural" de un producto directo es una suma directa. Dado el k-espacio vectorial $\prod\limits_{i \in I} k$ queremos calcular las aplicaciones k-lineales naturales $w_k : \prod\limits_{i\in I} k \to k$, es decir, debemos dar para cada k-álgebra A, aplicaciones A-lineales $w_A : \prod\limits_{i\in I} A \to A$, tales que para cada morfismo de k-álgebras $A \to B$ el siguiente cuadrado es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{i\in I} A & \xrightarrow{w_A} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod\limits_{i\in I} B & \xrightarrow{w_B} & B. \end{array}$$

Bien, las únicas aplicaciones naturales son las combinaciones lineales de las proyecciones sobre cada factor: Sea $A = k[x_i]_{i\in I}$ y sea $p(x) := w_A((x_i)_{i\in I}) \in A$. Dado $(\alpha_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} k$, consideremos el morfismo de k-álgebras $\pi : A \to k$, $\pi(x_i) = \alpha_i$. Tenemos que $w_k((\alpha_i)) = w_k(\pi(x_i)) = \pi(w_A(x_i)) = \pi(p(x))$, así que, como w_k es lineal, $p(x)$ debe ser un polinomio homogéneo de grado 1, $p(x) = \lambda_1 x_{j_1} + \ldots + \lambda_n x_{j_n}$ y por lo tanto w_k es una combinación lineal de proyecciones sobre n factores.

Subrayemos que el teorema de reflexividad se verifica para todo R-módulo E, por ejemplo para $E = \oplus_{n\in\mathbb{N}} R$ o para $E = R/I$ (siendo I cualquier ideal de R).

Teorema 2.1.13. *La categoría de los módulos cuasi-coherentes sobre R es equivalente a la categoría de los R-módulos. La categoría de los módulos cuasi-coherentes sobre R es anti-equivalente a la categoría de los esquemas de R-módulos (la correspondencia se establece asignando a cada funtor de módulos su dual).*

En [9, Exposé VII_B, 1.2.2] se demuestra la equivalencia entre la categoría de los R-módulos planos y la de los $\mathbf{R}$-módulos planos. Y en [9, Exposé VII_B, 1.2.3], queda establecida la anti-equivalencia entre la categoría de los $\mathbf{R}$-módulos planos y la categoría de los R-módulos pseudocompactos proyectivos, donde R es un anillo (conmutativo) pseudocompacto.

Proposición 2.1.14. *El morfismo R-lineal $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ es epiyectivo, en la categoría de funtores de R-módulos, si y sólo si el morfismo $\mathbf{E}'^* \to \mathbf{E}^*$ es inyectivo, en la categoría de funtores de R-módulos.*

Demostración. Se sigue inmediatamente que si el morfismo $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ es epiyectivo, entonces el morfismo $\mathbf{E}'^* \to \mathbf{E}^*$ es inyectivo. Recíprocamente, supongamos que el morfismo $\mathbf{E}'^* \to \mathbf{E}^*$ es inyectivo. Si V es el conúcleo del morfismo $E \to E'$, obtenemos que $\mathbf{V}^* = 0$. Luego $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{**} = 0$ y el morfismo $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ es epiyectivo. □

Comentario 2.1.15. *Si un morfismo de funtores de R-módulos $\mathbf{E}'^* \to \mathbf{E}^*$ es epiyectivo entonces existe una sección. En efecto, veamos que el morfismo asociado $E \to E'$ (que es inyectivo) tiene un retracto: Consideremos la R-álgebra $A := R \oplus E$, donde $(r, e) \cdot (r', e') = (rr', re' + r'e)$ para todo $r, r' \in R$ y $e, e' \in E$. Sea $w \in \mathbf{E}^*(A) = \mathrm{Hom}_R(E, A)$ definido por $w(e) := (0, e)$. Entonces existe un $w' \in \mathrm{Hom}_R(E', A)$ tal que $w'(e) = (0, e)$ para todo $e \in E$. Si $\pi : A \to E$ es la proyección natural, entonces $\pi \circ w'$ es un retracto del morfismo $E \to E'$.*

Lema 2.1.16. *Sean F y G dos funtores de R-módulos. Entonces*

$$\mathbf{Hom}_R(F, G^*) = \mathbf{Hom}_R(G, F^*).$$

Demostración.

$$\mathbf{Hom}_R(F, G^*) = \mathbf{Hom}_R(F \otimes_R G, \mathbf{R}) = \mathbf{Hom}_R(G, F^*).$$

□

Definición 2.1.17. *Diremos que un funtor de R-módulos F es dual si existe un funtor de R-módulos G tal que $F \simeq G^*$.*

Proposición 2.1.18. *Sea E un R-módulo libre y F un funtor de R-módulos dual. Se cumple que*

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}^*, F) \subseteq \mathrm{Hom}_R(E^*, F(R)).$$

Demostración. Escribamos $F = G^*$ y $E = \underset{i\in I}{\oplus} R$. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_R(\prod_{i\in I}\mathbf{R}, F) &= \operatorname{Hom}_R(G, \underset{i\in I}{\oplus}\mathbf{R}) \subset \operatorname{Hom}_R(G, \prod_{i\in I}\mathbf{R}) = \prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_R(G,\mathbf{R})\\ &= \prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_R(\mathbf{R}, F) = \prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_R(R, F(R)).\end{aligned}$$

La composición $\operatorname{Hom}_R(\prod_{i\in I}\mathbf{R}, F) \to \operatorname{Hom}_R(\prod_{i\in I} R, F(R)) \to \prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_R(R, F(R))$ es inyectiva, luego el morfismo $\operatorname{Hom}_R(\prod_{i\in I}\mathbf{R}, F) \to \operatorname{Hom}_R(\prod_{i\in I} R, F(R))$ es inyectivo.

□

Recordemos ahora la Fórmula de los funtores adjuntos.

Definición 2.1.19. *Sea A una R-álgebra. Consideremos la inclusión de las categorías*

$$\mathcal{C}_R = \{R\text{-álgebras conmutativas}\} \overset{i}{\supset} \mathcal{C}_A = \{A\text{-álgebras conmutativas}\}.$$

Dado un funtor G en $\mathcal{C}_A$, definimos el funtor $(i_*G)(B) := G(A\otimes_R B)$ para cada objeto B de $\mathcal{C}_R$. Dado un funtor F en $\mathcal{C}_R$, definimos el funtor $(i^*F)(B) := F(B)$ para cada objeto B de $\mathcal{C}_A$.

Damos un demostración directa del siguiente teorema, aunque se puede obtener de [4, 8.4,8.5] tras múltiples precisiones y complicados términos técnicos.

Teorema 2.1.20 (Fórmula de los funtores adjuntos)**.** *Sea F un funtor de R-módulos y sea G un funtor de A-módulos. Entonces se verifica que*

$$\operatorname{Hom}_A(i^*F, G) = \operatorname{Hom}_R(F, i_*G).$$

Demostración. Dado un $w \in \operatorname{Hom}_A(i^*F, G)$, tenemos morfismos $w_{A\otimes B'} : F(A\otimes B') \to G(A\otimes B')$ para cada R-álgebra B'. Componiendo con los morfismos $F(B') \to F(A\otimes B')$, tenemos los morfismos $\phi_{B'} : F(B') \to G(A\otimes B') = i_*G(B')$, que a su vez definen $\phi \in \operatorname{Hom}_R(F, i_*G)$.

Dado un $\phi \in \operatorname{Hom}_R(F, i_*G)$, tenemos morfismos $\phi_{B'} : F(B') \to i_*G(B') = G(A\otimes B')$ para cada A-álgebra B'. Componiendo con los morfismos $G(A\otimes B') \to G(B')$, tenemos los morfismos $w_{B'} : F(B') \to G(B')$, que a su vez definen $w \in \operatorname{Hom}_A(i^*F, G)$.

Ahora comprobaremos que $w \mapsto \phi$ y $\phi \mapsto w$ son asignaciones mutuamente inversas. Dado $w \in \operatorname{Hom}_A(i^*F, G)$, tenemos $\phi \in \operatorname{Hom}_R(F, i_*G)$. Probemos que este último define w de nuevo. Tenemos el siguiente diagrama, donde B' es una A-álgebra:

$$\begin{tikzcd}
F(A\otimes B') \arrow[r, "w_{A\otimes B'}"] & G(A\otimes B') \arrow[r, "p"] & G(B') \\
F(B') \arrow[u] \arrow[ur, "\phi_{B'}"] \arrow[r, "w_{B'}"] & G(B') \arrow[u] \arrow[ur, "Id"] &
\end{tikzcd}$$

El morfismo compuesto $p\circ\phi_{B'}$ es el asignado a ϕ, y coincide con $w_{B'}$ ya que el diagrama entero es conmutativo.

Dado $\phi\in \operatorname{Hom}_R(F,i_*G)$, tenemos $w\in \operatorname{Hom}_A(i^*F,G)$. Veamos que el último define ϕ. Tenemos el siguiente diagrama, donde B' es una R-álgebra:

$$\begin{tikzcd}
F(B') \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\phi_{B'}"] & F(A\otimes B') \arrow[r, "w_{A\otimes B'}"] \arrow[d, "\phi_{A\otimes B'}"] & (i_*G)(B') \\
(i_*G)(B') \arrow[r, "j"] & (i_*G)(A\otimes B') \arrow[ur, "p"] &
\end{tikzcd}$$

El morfismo compuesto $w_{A\otimes B'}\circ r$ asignado a w coincide con $\phi_{B'}$, ya que $p\circ j=Id$ y el diagrama entero es conmutativo. □

Por simplicidad de notación, dado un funtor F escribiremos a veces $w\in F$ en vez de $w\in F(A)$.

Proposición 2.1.21. *Sean F_i funtores de k-espacios vectoriales y sea E un k-espacio vectorial. Se cumple que*

$$\mathbf{Hom}_k(\prod_i F_i,\mathbf{E})=\underset{i}{\oplus}\mathbf{Hom}_k(F_i,\mathbf{E}).$$

Demostración. Del morfismo inyectivo $\underset{i}{\oplus} F_i\overset{j}{\to}\prod_i F_i$ se obtiene el morfismo

$$j^*:\mathbf{Hom}_k(\prod_i F_i,\mathbf{E})\to \mathbf{Hom}_k(\underset{i}{\oplus} F_i,\mathbf{E})=\prod_i \mathbf{Hom}_k(F_i,\mathbf{E}).$$

Se trata probar que este morfismo es inyectivo y que su imagen es $\underset{i}{\oplus}\mathbf{Hom}_k(F_i,\mathbf{E})$.

Respecto a la primera cuestión, sea $w\in \mathbf{Hom}_k(\prod_i F_i,\mathbf{E})$ una forma lineal tal que $w\neq 0$ pero $w_{|\underset{i}{\oplus} F_i}=0$. Entonces existen una k-álgebra A y elementos $f_i\in F_i(A)$ tales que $w((f_i)_i)\neq 0$, y componiendo con los morfismos $\phi:\prod_i \mathbf{A}\to \prod_i F_{i_{|A}}$, $\phi((a_i)_i)=(a_if_i)_i$ obtenemos una forma lineal $w\circ\phi\in \operatorname{Hom}_A(\prod_i\mathbf{A},\mathbf{E}\otimes\mathbf{A})$ que no es nula pero se anula en $\underset{i}{\oplus}\mathbf{A}$, lo cual es imposible ya que $\mathbf{Hom}_A(\prod_i\mathbf{A},\mathbf{E}\otimes\mathbf{A})=\mathbf{Hom}_A((\underset{i}{\oplus}\mathbf{A})^*,\mathbf{E}\otimes\mathbf{A})=(\underset{i}{\oplus}\mathbf{A})\otimes_A(\mathbf{E}\otimes\mathbf{A})=\underset{i}{\oplus}\mathbf{E}\otimes\mathbf{A}$ se inyecta en $\mathbf{Hom}_A(\underset{i}{\oplus}\mathbf{A},\mathbf{E}\otimes\mathbf{A})=\prod_i\mathbf{E}\otimes\mathbf{A}$.

Para probar que $\operatorname{Im} j^*=\underset{i}{\oplus}\mathbf{Hom}_k(F_i,\mathbf{E})$, es suficiente probar que

$$\operatorname{Hom}_k(\prod_i F_i,\mathbf{E})=\underset{i}{\oplus}\operatorname{Hom}_k(F_i,\mathbf{E}),$$

pues en ese caso tendremos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(\prod_i F_{i_{|A}}, \mathbf{E}_{|A}) &\overset{2.1.20}{=} \mathrm{Hom}_k(\prod_i F_i, \mathbf{E}\otimes \mathbf{A}) = \oplus_i \mathrm{Hom}_k(F_i, \mathbf{E}\otimes\mathbf{A})\\ &\overset{2.1.20}{=} \oplus_i \mathrm{Hom}_A(F_{i_{|A}}, \mathbf{E}_{|A}).\end{aligned}$$

Dada una forma lineal $w \in \mathrm{Hom}_k(\prod_i F_i, \mathbf{E})$ tenemos que probar que como mucho existe un subconjunto finito de índices i tales que $w_{|F_i} \neq 0$. Supongamos que esto no es cierto, es decir, que existe un conjunto de índices i_n, donde $n \in \mathbb{N}$, y k-álgebras A_n tales que $w(f_{i_n}) \neq 0$ para algún $f_{i_n} \in F_{i_n}(A_n)$. Sea $A = \otimes_n A_n$ y denótese por $h_m : A_m \hookrightarrow \otimes_n A_n$ las inyecciones naturales y por $\tilde{f}_m$ la imagen de f_{i_m} por el morfismo inducido $F_{i_m}(h_m) : F_{i_m}(A_m) \to F_{i_m}(\otimes_n A_n)$. Es fácil ver que $w(\tilde{f}_m) = h_m(w(f_{i_m})) \neq 0$. Por lo tanto, tenemos una forma lineal $\bar{w} : \prod_n \mathbf{A} \to \mathbf{E}\otimes\mathbf{A}$, $\bar{w}((a_n)_n) := w((a_n\tilde{f}_n)_n)$, que no se anula en ningún factor $\mathbf{A} \subset \prod_n \mathbf{A}$. De nuevo esto contradice el hecho de que $\mathbf{Hom}_A(\prod_n \mathbf{A}, \mathbf{E}\otimes\mathbf{A}) = \oplus_n \mathbf{E}\otimes\mathbf{A}$. □

Corolario 2.1.22. *Sean F_i funtores de k-espacios vectoriales. Se verifica que*

$$(\prod_i F_i)^* = \oplus_i F_i^*.$$

Definición 2.1.23. *Un funtor de R-módulos F se dice que es reflexivo si $F = F^{**}$.*

Proposición 2.1.24. *Sea F un funtor de k-espacios vectoriales y sea E un k-espacio vectorial. Entonces se cumple que*

$$\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F)^* = \mathbf{E}\otimes_k F^*.$$

En particular, si F es reflexivo, $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F)$ *es reflexivo.*

Demostración. Como se tiene que $\mathbf{E} = \oplus_{i\in I} \mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F)^* &= \mathbf{Hom}_k(\oplus_{i\in I}\mathbf{k}, F)^* = (\prod_{i\in I}\mathbf{Hom}_k(\mathbf{k}, F))^*\\ &= (\prod_{i\in I} F)^* = \oplus_{i\in I} F^* = \oplus_{i\in I}(\mathbf{k}\otimes_k F^*) = \mathbf{E}\otimes_k F^*.\end{aligned}$$

Si F es reflexivo, entonces

$$\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F) = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F^{**}) = (\mathbf{E}\otimes_k F^*)^* = (\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F))^{**}.$$

□

2.2. Caracterización de los esquemas de espacios vectoriales

Sea R un anillo conmutativo con unidad, y sea k un cuerpo conmutativo.

En primer lugar, probaremos una caracterización de los esquemas de espacios vectoriales en términos de los funtores reflexivos.

Teorema 2.2.1. *Si F es un funtor reflexivo de k-espacios vectoriales tal que $\mathbf{Hom}_k(F,-)$ conmuta con sumas directas, es decir,*

$$\mathbf{Hom}_k(F, \underset{i\in I}{\oplus} F_i) = \underset{i\in I}{\oplus} \mathbf{Hom}_k(F, F_i)$$

para cualesquier funtores F_i de k-espacios vectoriales, entonces F es un esquema de k-espacios vectoriales.

Demostración. Por la Formula de los funtores adjuntos, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_k(F, \mathbf{A}) = \mathrm{Hom}_k(F, i_* i^* \mathbf{k}) = \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, \mathbf{A}) = F^*(A).$$

Sin embargo, $\mathbf{A} = \underset{i\in I}{\oplus} \mathbf{k}$ y por la propiedad que F verifica por hipótesis, tenemos que $\mathrm{Hom}_k(F, \mathbf{A}) = F^*(k) \otimes A$. Por lo tanto, $F^*(A) = F^*(k) \otimes_k A$ y $F^* = \mathbf{E}$, donde $E = F^*(k)$, y por lo tanto $F = F^{**} = \mathbf{E}^*$. □

Ahora podemos reformular este resultado en términos de límites inductivos (la definición de tal límite que se utiliza aquí en concreto es la que aparece en [12, Ap. 6], como indicamos al final del Apéndice B).

Teorema 2.2.2. *Sea F un funtor reflexivo de k-espacios vectoriales. El funtor sobre la categoría de los k-espacios vectoriales cuasi-coherentes, $\mathbf{Hom}_k(F,-)$, conmuta con límites inductivos si y solo si F es un esquema de k-espacios vectoriales.*

Demostración. La condición necesaria es una consecuencia del teorema previo, ya que solo era necesario que $\mathbf{Hom}_k(F,-)$ conmutase con sumas directas de k-espacios vectoriales cuasi-coherentes para que F fuese un esquema de k-espacios vectoriales.

La condición suficiente se obtiene como una consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.9, ya que el funtor $\underset{\overrightarrow{i\in I}}{\lim} \mathbf{E}_i$ es de nuevo un k-espacio vectorial cuasi-coherente y

$$\mathbf{Hom}_k(F, \underset{\overrightarrow{i\in I}}{\lim} \mathbf{E}_i) = F^* \otimes (\underset{\overrightarrow{i\in I}}{\lim} \mathbf{E}_i) = \underset{\overrightarrow{i\in I}}{\lim} (F^* \otimes \mathbf{E}_i) = \underset{\overrightarrow{i\in I}}{\lim} \mathbf{Hom}_k(F, \mathbf{E}_i).$$

□

Definición 2.2.3. *Dado un funtor de R-módulos F llamaremos clausura de esquemas de R-módulos de F, y la denotaremos por $\bar{F}$, al representante (único salvo isomorfismos) del funtor* $\mathrm{Hom}_R(F,-)$ *en la categoría de esquemas de R-módulos.*

Se cumple la igualdad

$$\mathrm{Hom}_R(F, \mathbf{V}^*) = \mathrm{Hom}_R(\bar{F}, \mathbf{V}^*)$$

para todo R-modulo V.

Notación 2.2.4. *Por* $\mathbf{F}^*(\mathbf{R})$ *denotamos el* R*-modulo cuasi-coherente correspondiente al* R*-modulo* $F^*(R)$*, es decir,* $\mathbf{F}^*(\mathbf{R})(A) = F^*(R) \otimes_R A$*.*

Proposición 2.2.5. *Sea* F *un funtor de* R*-módulos. Se verifica que* $\bar{F} = \mathbf{F}^*(\mathbf{R})^*$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(F, \mathbf{V}^*) &= \mathrm{Hom}_R(\mathbf{V}, F^*) = \mathrm{Hom}_R(V, F^*(R)) \\ &= \mathrm{Hom}_R(\mathbf{V}, \mathbf{F}^*(\mathbf{R})) = \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}^*(\mathbf{R})^*, \mathbf{V}^*).\end{aligned}$$

□

En particular, $\bar{\mathbf{E}}(k) = E^{**}$, es decir, "los puntos racionales del cierre esquemático de E son E^{**}".

Desgraciadamente, la clausura de esquemas de R-módulos de un funtor de R-módulos F no es estable por cambio de base. Sin embargo, podemos establecer cuando sí lo es.

Proposición 2.2.6. *Sea* F *un funtor de* R*-módulos. Si* F^* *es un* R*-modulo cuasi-coherente entonces* $\bar{F} = F^{**}$ *y* $\bar{F}^* = F^*$*.*

Demostración. Si F^* es un R-módulo cuasi-coherente, entonces

$$\mathrm{Hom}_R(F, \mathbf{E}^*) = \mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}, F^*) = \mathrm{Hom}_R(F^{**}, \mathbf{E}^*).$$

Por lo tanto $\bar{F} = F^{**}$. Es más, $\bar{F}^* = (F^{**})^* = (F^*)^{**} = F^*$. □

Proposición 2.2.7. *La clausura de esquemas de* R*-módulos de un funtor de* R*-módulos* F *es estable por cambio de base si y solo si* F^* *es un* R*-módulo cuasi-coherente.*

Demostración. Si $\bar{F}_{|A} = \overline{F_{|A}}$, entonces tomando $\mathrm{Hom}_A(-, \mathbf{A})$ obtenemos que $F^*(R) \otimes_R A = F^*(A)$. Recíprocamente, si F^* es cuasi-coherente entonces $\bar{F}_{|A} = {F^{**}}_{|A} = ({F^*}_{|A})^* = \overline{F_{|A}}$. □

Ejemplo 2.2.8. *Si* $F_1, \ldots, F_n$ *son funtores de* R*-módulos cuyos duales son* R*-módulos cuasi-coherentes, entonces* $(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)^* = F_1^* \otimes \ldots \otimes F_n^*$*, que en particular es un* R*-módulo cuasi-coherente:*

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}_R(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n, \mathbf{R}) &= \mathbf{Hom}_R(F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-1}, F_n^*) \\ &= \mathbf{Hom}_R(F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-2}, \mathbf{Hom}_R(F_{n-1}, F_n^*)) \\ &= \mathbf{Hom}_R(F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-2}, \mathbf{Hom}_R(F_n^{**}, F_{n-1}^*)) \\ &= \mathbf{Hom}_R(F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-2}, F_{n-1}^* \otimes F_n^*) \\ &= \ldots = F_1^* \otimes \ldots \otimes F_n^*.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{F_1 \otimes \ldots \otimes F_n} = (F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)^{**} = (F_1^* \otimes \ldots \otimes F_n^*)^*$ *y* $\overline{F_1 \otimes \ldots \otimes F_n} = \overline{\bar{F}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{F}_n}$ *(pues* $F_i^* = \bar{F}_i^*$*).*

Si denotamos por $\bar{\otimes}$ *el producto tensorial en la categoría de esquemas de* R*-módulos entonces* $\mathbf{E}_1^* \bar{\otimes} \mathbf{E}_2^* = \overline{\mathbf{E}_1^* \otimes \mathbf{E}_2^*} = (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2)^*$*. Es más,* $\bar{\otimes}$ *conmuta con límites proyectivos:*

$$\begin{aligned}(\lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \mathbf{E}_i^*) \bar{\otimes} \mathbf{E}^* &= (\lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} \mathbf{E}_i)^* \bar{\otimes} \mathbf{E}^* = ((\lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} \mathbf{E}_i) \otimes \mathbf{E})^* = (\lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}))^* \\ &= \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E})^* = \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} (\mathbf{E}_i^* \bar{\otimes} \mathbf{E}^*).\end{aligned}$$

De ahora en adelante, solo trabajaremos con funtores de k-espacios vectoriales.

Proposición 2.2.9. *El morfismo* $F \to F^{**}$ *es inyectivo si y solo si el morfismo* $F \to \bar{F}$ *es inyectivo.*

Demostración. Probemos la condición necesaria. Dada un k-álgebra A, sea $s \in F(A)$ tal que $s = 0$ en

$$\bar{F}(A) = \mathbf{F}^*(\mathbf{k})^*(A) = \operatorname{Hom}_A(\mathbf{F}^*(\mathbf{k})_{|A}, \mathbf{A}) = \operatorname{Hom}_k(\mathbf{F}^*(\mathbf{k}), \mathbf{A}) = \operatorname{Hom}_k(F^*(k), A)$$

entonces $s(w) := w(s) = 0$ para todo $w \in F^*(k)$.

Dada una k-álgebra B, si uno escribe $B = \oplus k \cdot e_i$, advierte que

$$F^*(B) = \operatorname{Hom}_B(F_{|B}, \mathbf{B}) = \operatorname{Hom}_k(F, \mathbf{B}) = \operatorname{Hom}_k(F, \oplus \mathbf{k}) \subset \prod \operatorname{Hom}_k(F, \mathbf{k})$$

que asigna a cada $w_B \in F^*(B)$ un $(w_i) \in \prod F^*(k)$. Explícitamente, dado $s \in F(B)$, entonces $w_B(s) = \sum_i w_i(s) \cdot e_i$. Por lo tanto $w_B(s) = 0$ para todo $w_B \in F^*(B)$. Puesto que el morfismo $F \hookrightarrow F^{**}$ es inyectivo, esto significa que $s = 0$, es decir, el morfismo $F \to \bar{F}$ es inyectivo.

Para la condición suficiente, consideremos el morfismo $\mathbf{F}^*(\mathbf{k}) \to F^*$, el cual, mediante la toma de duales, se convierte en $F^{**} \to \mathbf{F}^*(\mathbf{k})^*$. Ya que el morfismo compuesto $F \to F^{**} \to \bar{F} = \mathbf{F}^*(\mathbf{k})^*$ es inyectivo, también lo es el morfismo $F \to F^{**}$. □

Finalmente, caracterizamos los esquemas de k-espacios vectoriales como los funtores completos reflexivos. Necesitamos algunos resultados técnicos antes de la Definición 2.2.12.

Proposición 2.2.10.

1. *El morfismo* $F^*(k) \to F(k)^*$ *es inyectivo si y sólo si el morfismo* $F^* \to \mathbf{F}(\mathbf{k})^*$ *es inyectivo.*

2. *El morfismo* $F^*(k) \to F(k)^*$ *es inyectivo si y sólo si para cualquier espacio vectorial cuasi-coherente* $\mathbf{E}$ *la imagen de cualquier aplicación* k*-lineal* $F \to \mathbf{E}$ *es un subespacio cuasi-coherente de* $\mathbf{E}$*.*

Demostración.

1. Si el morfismo $F^* \to \mathbf{F}(\mathbf{k})^*$ es inyectivo, entonces tomando secciones en k el morfismo $F^*(k) \to F(k)^*$ es inyectivo. Recíprocamente, del diagrama conmutativo
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_k(F, \oplus\mathbf{k}) & \to & \mathrm{Hom}_k(F(k), \oplus k) \\ \cap & & \cap \\ \prod \mathrm{Hom}_k(F, \mathbf{k}) & \hookrightarrow & \prod \mathrm{Hom}_k(F(k), k) \end{array}$$
se tiene que $\mathrm{Hom}_k(F, \oplus\mathbf{k}) \subset \mathrm{Hom}_k(F(k), \oplus k)$. Puesto que $A = \oplus k$, entonces
$$\begin{aligned} F^*(A) &= \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, \mathbf{A}) = \mathrm{Hom}_k(F, \oplus\mathbf{k}) \subset \mathrm{Hom}_k(F(k), \oplus k) \\ &= \mathrm{Hom}_A(F(k) \otimes_k A, A) = \mathrm{Hom}_A(\mathbf{F}(\mathbf{k}) \otimes_k \mathbf{A}, \mathbf{A}) \\ &= \mathrm{Hom}_A(\mathbf{F}(\mathbf{k})_{|A}, \mathbf{A}) = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{F}(\mathbf{k}), \mathbf{k})(A) = \mathbf{F}(\mathbf{k})^*(A), \end{aligned}$$
i.e., el morfismo $F^* \to \mathbf{F}(\mathbf{k})^*$ es inyectivo.

2. Supongamos que la imagen de cualquier morfismo $F \to \mathbf{E}$ es un subespacio cuasi-coherente de $\mathbf{E}$. Dado $w \in F^*(k)$, i.e., un morfismo $w : F \to \mathbf{k}$, $\mathrm{Im}\, w$ es igual al espacio vectorial cuasi-coherente asociado a $w(F(k))$. Luego si $w(F(k)) = 0$ entonces $w = 0$.

   Recíprocamente, sea E' la imagen del morfismo $F(k) \to E$ y consideremos el morfismo $F \to \mathbf{V} := \mathbf{E}/\mathbf{E}'$. El morfismo $\mathbf{V}^* \to \mathbf{F}(\mathbf{k})^*$ es nulo. Por tanto el morfismo $\mathbf{V}^* \to F^*$ es nulo, y la composición $F \to F^{**} \to \mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}$ es nulo. En consecuencia, la imagen del morfismo $F \to \mathbf{E}$ es $\mathbf{E}'$.

□

Corolario 2.2.11. *Sea F un funtor reflexivo y sea E un k-espacio vectorial. Entonces la imagen de cualquier morfismo k-lineal $F \to \mathbf{E}$ es un subespacio cuasi-coherente de $\mathbf{E}$.*

Demostración. Si $F = F^{**}$, por la Proposición 2.2.9 el morfismo $F^* \to \overline{F^*} = \mathbf{F}(\mathbf{k})^*$ es inyectivo. Luego por la proposición anterior, la demostración está completa. □

Definición 2.2.12. *Dado un funtor de k-espacios vectoriales F tal que la imagen de cualquier aplicación k-lineal $F \to \mathbf{E}$ es un subespacio cuasi-coherente de $\mathbf{E}$, consideremos el conjunto de los subfuntores de k-espacios vectoriales $F_i \subset F$ tales que F/F_i son k-espacios vectoriales coherentes. Entonces definimos $\hat{F} := \lim\limits_{\overleftarrow{i}} F/F_i$.*

El límite inductivo de espacios vectoriales cuasi-coherentes, en la categoría de funtores de k-espacios vectoriales, es un espacio vectorial cuasi-coherente. Luego, el límite proyectivo de esquemas de k-espacios vectoriales es un esquema de k-espacios vectoriales. Por lo tanto $\hat{F}$ es un esquema de k-espacios vectoriales, específicamente, $\hat{F} := (\lim\limits_{\overrightarrow{i}} (F/F_i)^*)^*$.

Proposición 2.2.13. *Sea E un k-espacio vectorial. Entonces $\mathbf{E}^*$ es completo y separado, i.e., $\widehat{\mathbf{E}^*} = \mathbf{E}^*$.*

Demostración. Por el teorema de reflexividad, los conúcleos coherentes de $\mathbf{E}^*$ se corresponden con los subespacios $E' \subset E$ de dimensión finita. Por lo tanto,

$$\widehat{\mathbf{E}^*} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \dim_k E' < \infty}} (\mathbf{E}')^* = (\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \dim_k E' < \infty}} \mathbf{E}')^* = \mathbf{E}^*.$$

□

Proposición 2.2.14. *Sea F un funtor de k-espacios vectoriales tal que la imagen de cualquier aplicación k-lineal $F \to \mathbf{E}$ es un subespacio cuasi-coherente de $\mathbf{E}$. Entonces la clausura de esquemas de espacios vectoriales de F es igual a la compleción de F, i.e., $\hat{F} = \bar{F}$.*

En particular, $\hat{F} = \mathbf{E}^*$, donde $\mathbf{E} = \mathbf{F}^*(\mathbf{k})$, y $\hat{F}$ es completo, separado, y reflexivo.

Demostración. En primer lugar, supongamos que E es un espacio de dimensión finita. Obviamente, dado un morfismo de funtores de k-espacios vectoriales $\hat{F} \to \mathbf{E}^*$, tenemos un morfismo $F \to \mathbf{E}^*$ sin más que componer con el morfismo natural $F \to \hat{F}$. Recíprocamente, dado un morfismo de k-espacios vectoriales $F \to \mathbf{E}^*$, por hipótesis, su imagen es un subespacio coherente de $\mathbf{E}^*$, luego el morfismo factoriza por uno de los cocientes F/F_i y por lo tanto tenemos un morfismo de su límite proyectivo, $\hat{F}$, en $\mathbf{E}^*$.

En general, $\mathbf{E}^* = \lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ i}} \mathbf{E}_i^*$, donde $\dim_k E_i < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_k(\hat{F}, \mathbf{E}^*) &= \mathrm{Hom}_k(\hat{F}, \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} \mathbf{E}_i^*) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} \mathrm{Hom}_k(\hat{F}, \mathbf{E}_i^*) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} \mathrm{Hom}_k(F, \mathbf{E}_i^*) \\ &= \mathrm{Hom}_k(F, \mathbf{E}^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{F} = \bar{F}$. □

Teorema 2.2.15. *Sea F un funtor reflexivo de k-espacios vectoriales. Entonces F es un esquema de k-espacios vectoriales si y sólo si F es completo y separado.*

2.3. Linealización de una variedad

Sea R un anillo conmutativo con unidad y sea k un cuerpo.

Definición 2.3.1. *Sea $X = \operatorname{Spec} A$ un R-esquema afín y denotemos por $X^\cdot$ el funtor de puntos de X, i.e., $X^\cdot(B) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(A, B)$. Sea $R[X^\cdot]$ el funtor de R-módulos definido por*

$$R[X^\cdot](B) := \underset{X^\cdot(B)}{\oplus} B = \left\{ \begin{array}{c} \textit{combinaciones } B\textit{-lineales formales} \\ \textit{finitas de puntos de } X \textit{ en } B \end{array} \right\}$$

Es claro que para cualquier funtor de R-módulos se cumple que

$$\mathrm{Hom}_R(R[X^\cdot], F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{funtores}}(X^\cdot, F).$$

Recordemos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{funtores}}(X^\cdot, \mathbf{R}) = A$. Por tanto, todo punto x de X define una forma lineal perteneciente a $\mathbf{A}^*$, la que asigna a cada función de X su valor en x. De otro modo, $X^\cdot(B)$ son los morfismos de R-álgebras $A \to B$ y $\mathbf{A}^*(B)$ son los morfismos R-lineales $A \to B$. Tenemos, pues, un morfismo natural $\phi : X^\cdot \hookrightarrow \mathbf{A}^*$. Entonces tenemos un morfismo $R[X^\cdot] \to \mathbf{A}^*$.

Notación 2.3.2. *Dado $X = \mathrm{Spec}\, A$ un R-esquema afín, es usual la notación $X_B = \mathrm{Spec}\, A \times_R \mathrm{Spec}\, B = \mathrm{Spec}\,(A \otimes_R B)$ y $A_B = A \otimes_R B$.*

Teorema 2.3.3. *Sea $X = \mathrm{Spec}\, A$ un R-esquema afín. Se verifica que:*

1. $R[X^\cdot]^* = \mathbf{A}$.
2. $\overline{R[X^\cdot]} = R[X^\cdot]^{**} = \mathbf{A}^*$.

Demostración. Se tiene

$$R[X^\cdot]^*(R) = \mathrm{Hom}_R(R[X^\cdot], \mathbf{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{funtores}}(X^\cdot, \mathbf{R}) = A$$

y del mismo modo

$$R[X^\cdot]^*(B) = \mathrm{Hom}_B(R[X^\cdot]_{|B}, \mathbf{B}) = \mathrm{Hom}_B(B[X_B^\cdot], \mathbf{B}) = A_B = \mathbf{A}(B).$$

Por lo tanto, $R[X^\cdot]^* = \mathbf{A}$ y tomando duales $\mathbf{A}^* = R[X^\cdot]^{**} \overset{2.2.6}{=} \overline{R[X^\cdot]}$. □

Teorema 2.3.4. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Si $X = \mathrm{Spec}\ A$ es un R-esquema y F es un funtor de R-módulos dual, entonces el morfismo*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{A}^*, F) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{funtores}}(X^\cdot, F) \\ \mathbf{A}^* \to F & \mapsto & X^\cdot \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbf{A}^* \to F \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Escribamos $F = G^*$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{funtores}}(X^\cdot, F) &= \mathrm{Hom}_R(R[X^\cdot], F) \overset{2.1.16}{=} \mathrm{Hom}_R(G, R[X^\cdot]^*) \\ &\overset{2.3.3}{=} \mathrm{Hom}_R(G, \mathbf{A}) \overset{2.1.16}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{A}^*, F). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.5. *Supongamos que la única función $a \in A$ del k-esquema $X =$ $\mathrm{Spec}\, A$ que se anula en cada punto k-racional es la función $a = 0$. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y $X \to \mathbf{E}$ un morfismo de k-esquemas. La imagen esquemática del morfismo inducido $\overline{k[X^\cdot]} \to \mathbf{E}$ coincide con el subespacio vectorial de E generado por las imágenes de los puntos racionales de X.*

Demostración. Por hipótesis, el morfismo $X \to \mathbf{E}$ factoriza a través del subespacio vectorial V generado por las imágenes de todos los puntos racionales de X. Luego tenemos un epimorfismo $k[X^\cdot] \to \mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{E}$ y por tanto un epimorfismo $\overline{k[X^\cdot]} \to \mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{E}$. □

Teorema 2.3.6. *Supongamos que la única función $a \in A$ del k-esquema $X = \operatorname{Spec} A$ que se anula en cada punto k-racional es la función $a = 0$. Entonces, $\widehat{k[X^\cdot]} = \mathbf{A}^*$.*

Demostración. Por hipótesis, el morfismo $k[X^\cdot]^*(k) = A \hookrightarrow k[X^\cdot](k)^*$ es inyectivo, luego estamos en las hipótesis de la Definición 2.2.12 y la Proposición 2.2.10. Por lo tanto, por la Proposición 2.2.14 se cumple $\widehat{k[X^\cdot]} = \overline{k[X^\cdot]} = \mathbf{A}^*$. □

Quizás es más natural la definición

$$R[X^\cdot]'(B) :=< \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(A,B) >_B \subset \mathrm{Hom}_R(A,B),$$

i.e., $R[X^\cdot]'$ es la imagen de $R[X^\cdot]$ en $\mathbf{A}^*$.

Proposición 2.3.7. *Se cumple:*

1. $\mathrm{Hom}_R(R[X^\cdot]', F) = \mathrm{Hom}_{\text{funtores}}(X^\cdot, F)$ *para cada funtor dual F.*
2. $R[X^\cdot]'^* = \mathbf{A}$.
3. $\overline{R[X^\cdot]'} = \mathbf{A}^*$.
4. *El mínimo subfuntor reflexivo de $\mathbf{A}^*$ que contiene $R[X^\cdot]'$ es $\mathbf{A}^*$.*

Demostración.

1. Es una consecuencia de las igualdades
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{A}^*, F) = \mathrm{Hom}_{\text{funtores}}(X^\cdot, F) = \mathrm{Hom}_R(R[X^\cdot], F).$$
2. Es consecuencia de (1).
3. Es consecuencia de (1).
4. Supongamos que tenemos morfismos $R[X^\cdot]' \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathbf{A}^*$, donde F es un funtor reflexivo. Tomando dobles duales, obtenemos que la composición $\mathbf{A}^* \to F \to \mathbf{A}^*$ es el morfismo identidad. Por lo tanto, el morfismo $F \to \mathbf{A}^*$ es epiyectivo y se sigue 4.

□

Capítulo 3

Esquemas de álgebras y sus representaciones

3.1. Esquemas de álgebras

Sea R un anillo conmutativo con unidad.

Definición 3.1.1. *Diremos que un esquema de R-módulos $\mathbf{A}^*$ es un esquema de R-álgebras si además es un funtor de R-álgebras, es decir, $\mathbf{A}^*(B)$ es una B-álgebra y los morfismos $\mathbf{A}^*(B) \to \mathbf{A}^*(B')$ son morfismos de B-álgebras para cada morfismo $B \to B'$ de R-álgebras.*

Proposición 3.1.2. *La categoría de coálgebras con unidad, $\mathcal{C}_{coalg}$, es anti-equivalente a la categoría de los esquemas de álgebras, $\mathcal{C}_{\mathbf{alg}}$. Los funtores que dan la equivalencia son $\mathcal{C}_{coalg} \to \mathcal{C}_{\mathbf{alg}}$, $B \rightsquigarrow \mathbf{B}^*$ y $\mathcal{C}_{\mathbf{alg}} \to \mathcal{C}_{coalg}$, $\mathbf{A}^* \rightsquigarrow A$.*

Demostración. Obsérvese que $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{E}_n^*, \mathbf{V}^*) = \mathrm{Hom}_R(\mathbf{V}, (\mathbf{E}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{E}_n^*)^*) = \mathrm{Hom}_R(\mathbf{V}, \mathbf{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{E}_n)$.

Dar una estructura de funtor de R-álgebras en un esquema $\mathbf{A}^*$ es equivalente a dar un morfismo de multiplicación $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^*$ y una unidad $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{A}^*$, de modo que los diagramas que establecen las propiedades asociativa, distributiva y demás, son conmutativos. Esto es equivalente a dar morfismos $A \to A \otimes A$, $A \to R$ que doten a A de estructura de coálgebra con unidad. $\square$

En [9, Exposé VII$_B$, 1.3.5] se puede encontrar esta anti-equivalencia en términos de $\mathbf{k}$-coálgebras planas coconmutativas y de k-variedades formales topológicamente planas, donde k es un anillo pseudocompacto.

Notación 3.1.3. *De ahora en adelante, en ésta y en las demás secciones del capítulo, $\mathbf{A}^*$ denota un esquema de R-álgebras.*

Definición 3.1.4. *Sea F un funtor de R-módulos y sea $\mathcal{A}$ un funtor de R-álgebras. Decimos que F es un $\mathcal{A}$-módulo (por la izquierda) si existe un morfismo de funtores de R-álgebras, $\mathcal{A} \to \mathbf{End}_R(F)$.*

Diremos que un R-módulo E es un $\mathcal{A}$-módulo si $\mathbf{E}$ *es un $\mathcal{A}$-módulo.*

Dar una estructura de $\mathbf{A}^*$-módulo en E es equivalente a que exista un morfismo $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ verificando las propiedades bien conocidas. Si $\mathbf{E}$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda entonces $\mathbf{E}^*$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha (y recíprocamente) como sigue:

$$(w \cdot a)(e) = w(a \cdot e)$$

donde $a \in \mathbf{A}^*$, $w \in \mathbf{E}^*$ y $e \in \mathbf{E}$. De otro modo,

$$\mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{End}_R(\mathbf{E})) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^{*\circ}, \mathbf{End}_R(\mathbf{E}^*)).$$

Dar un morfismo $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}^*$ verificando las propiedades conocidas de módulo (por la derecha) es equivalente a que exista un morfismo $\mathbf{E} \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{E}$ verificando las propiedades conocidas de comódulo. Así pues, la categoría de $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes es equivalente a la categoría de comódulos sobre A.

Mediante estas equivalencias, si tenemos el morfismo $E \to A \otimes E$, $e \mapsto \sum\limits_i a_i \otimes e_i$, entonces $w \cdot e = \sum\limits_i w(a_i) e_i$ dado $w \in \mathbf{A}^*$. Si w es la forma lineal general, i.e., $w = \mathrm{Id} \in \mathbf{A}^*(A) = \mathrm{Hom}_R(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, entonces $w \cdot e = \sum\limits_i a_i \otimes e_i$.

Si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras, entonces A es de un modo natural un $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda y por la derecha como sigue:

$$\begin{aligned} (w \cdot a)(w') &:= a(w' \cdot w) \\ (a \cdot w)(w') &:= a(w \cdot w') \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbf{A}$, $w, w' \in \mathbf{A}^*$. Diremos que A es el $\mathbf{A}^*$-*módulo regular* de $\mathbf{A}^*$.

Lema 3.1.5. *Sean $E_1, \dots, E_n$, R-módulos proyectivos y sea E_0 un R-módulo. La imagen de cualquier morfismo R-lineal $T : \mathbf{E}_1^* \otimes_R \dots \otimes_R \mathbf{E}_n^* \to \mathbf{E}_0$ es un R-módulo coherente.*

Demostración. Como $E_1, \dots, E_n$ son R-módulos proyectivos, son sumandos directos de R-módulos libres $L_1, \dots, L_n$. Entonces, $\mathbf{E}_i^*$ es un cociente de $\mathbf{L}_i^*$ y podemos suponer que $E_i = L_i$ son módulos libres.

Por el Lema 2.1.16 y la Proposición 2.1.9, $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}_1^* \otimes_R \dots \otimes_R \mathbf{E}_n^*, \mathbf{E}_0) = E_1 \otimes_R \dots \otimes_R E_n \otimes_R E_0$. Sea $\{e_{i_j}\}_i$ una base de E_j, para cada j. Entonces para $T \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}_1^* \otimes_R \dots \otimes_R \mathbf{E}_n^*, \mathbf{E}_0)$ podemos escribir

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1 1} \otimes \dots \otimes e_{i_n n} \otimes e_{i_1 \dots i_n}$$

donde sólo un número finito de elementos $e_{i_1 \dots i_n} \in E_0$ no son nulos. Es fácil comprobar que el R-módulo coherente asociado a $E =< e_{i_1 \dots i_n} >_{i_1 \dots i_n}$ es igual a $\mathrm{Im}\, T$. $\square$

Proposición 3.1.6. *Sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de* R*-álgebras,* E *un* $\mathbf{A}^*$*-módulo y* $E' \subset E$ *un* R*-submódulo. Supongamos que* A *es un* R*-módulo proyectivo. Entonces,* E' *es un* $\mathbf{A}^*$*-submódulo de* E *si y sólo si* E' *es un* A^**-submódulo de* E*.*

Demostración. Obviamente, si E' es un $\mathbf{A}^*$-submódulo de E entonces E' es un A^*-submódulo de E. Recíprocamente, supongamos que E' es un A^*-submódulo de E y consideremos el morfismo natural de multiplicación $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$. La imagen de este morfismo es un R-módulo cuasi-coherente de $\mathbf{E}$. En efecto, considerando un R-módulo libre $\mathbf{L} = \underset{i\in I}{\oplus} \mathbf{R}$ que se epiyecte en E', podemos suponer que $\mathbf{E}' = \mathbf{L}$. En este caso, $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{E}' = \underset{i\in I}{\oplus} \mathbf{A}^*$ y por el lema anterior la imagen del morfismo estudiado es un R-módulo cuasi-coherente. Por tanto, la imagen del morfismo $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ coincide con el R-módulo cuasi-coherente asociado a $A^* \cdot E' = E'$, lo que prueba que E' es un $\mathbf{A}^*$-submódulo de E. $\square$

Proposición 3.1.7. *Sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de* R*-álgebras y sea* E *un* $\mathbf{A}^*$*-módulo (respectivamente un* $\mathbf{A}^*$*-módulo por la derecha y por la izquierda). Supongamos que* A *es un* R*-módulo proyectivo. Cada* R*-submódulo de tipo finito de* E *está incluido en un* $\mathbf{A}^*$*-submódulo de* E *(respectivamente un* $\mathbf{A}^*$*-módulo por la derecha y por la izquierda) que es un* R*-submódulo de tipo finito.*

Demostración. Dado un R-módulo de tipo finito $E' \subset E$ entonces $\mathbf{A}^* \cdot E'$ (respectivamente $\mathbf{A}^* \cdot E \cdot \mathbf{A}^*$), que es la imagen del morfismo de multiplicación $\mathbf{A}^* \otimes E' \to E$ (respectivamente $\mathbf{A}^* \otimes E' \otimes \mathbf{A}^* \to E$), es un $\mathbf{A}^*$-submódulo (respectivamente un $\mathbf{A}^*$-submódulo por la derecha y por la izquierda) de E que es un R-módulo de tipo finito por el lema previo. $\square$

Comentario 3.1.8. *En particular, un* $\mathbf{A}^*$*-módulo* E *es un* k*-espacio vectorial de dimensión finita si y sólo si es un* $\mathbf{A}^*$*-módulo de tipo finito, i.e, si existe un epimorfismo de* $\mathbf{A}^*$*-módulos* $\mathbf{A}^* \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$*.*

Definición 3.1.9. *Sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de* R*-álgebras. Diremos que un esquema de submódulos* $\mathbf{I}^* \subseteq \mathbf{A}^*$ *es un esquema de ideales si es un subfuntor de ideales. Diremos que* $\mathbf{I}^* \subseteq \mathbf{A}^*$ *es un esquema de ideales biláteros si es un subfuntor de ideales biláteros.*

El núcleo de un morfismo de esquemas de álgebras es un esquema de ideales biláteros.

Definición 3.1.10. *Dada una* R*-álgebra finita* B*, diremos que* $\mathbf{B}$ *es una* R*-álgebra coherente.*

Comentario 3.1.11. *Debido a la equivalencia entre la categoría de* R*-módulos y la categoría de* R*-módulos cuasi-coherentes, hay una equivalencia categorial obvia entre las* R*-álgebras finitas y las* R*-álgebras coherentes.*

Teorema 3.1.12. *Sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de* R*-álgebras. Supongamos que* A *es un* R*-módulo proyectivo. Entonces* $\mathbf{A}^*$ *es un límite proyectivo de cocientes* $\mathbf{B}_i$*, que son* R*-álgebras coherentes.*

Demostración. A es el límite inductivo de sus R-submódulos de tipo finito $M_i \subset A$. Entonces por la Proposición 3.1.7 es el límite inductivo de sus $\mathbf{A}^*$-submódulos por la derecha y por la izquierda N_i, que son R-módulos de tipo finito.

Los núcleos de los morfismos $\mathbf{A}^* \to \mathbf{N}_i^*$ son esquemas de ideales biláteros $\mathbf{I}_i^* = (\mathbf{A}/\mathbf{N}_i)^*$ de $\mathbf{A}^*$. Es más, $\mathbf{A}^*/\mathbf{I}_i^*$ es una R-álgebra coherente: Consideremos un epimorfismo $R^n \to N_i$. La imagen de la composición $\mathbf{A}^* \to \mathbf{N}_i^* \hookrightarrow (\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$ es un R-módulo coherente por el Lema 3.1.5, y es isomorfo a $\mathbf{A}^*/\mathbf{I}_i^*$.

El dual de un límite inductivo es un límite proyectivo. Tomando límites proyectivos en la sucesión de morfismos $\mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^*/\mathbf{I}_i^* \hookrightarrow \mathbf{N}_i^*$ obtenemos la sucesión $\mathbf{A}^* \to \lim\limits_{\overleftarrow{i}} \mathbf{A}^*/\mathbf{I}_i^* \hookrightarrow \mathbf{A}^*$. Por lo tanto, $\mathbf{A}^* = \lim\limits_{\overleftarrow{i}} \mathbf{A}^*/\mathbf{I}_i^*$ es un límite proyectivo de R-álgebras coherentes. $\square$

Definición 3.1.13. *Sea F un funtor de R-álgebras. Definimos $\tilde{F}$ como el representante en la categoría de los esquemas de R-álgebras, si existe, del funtor* $\mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(F, -)$*, es decir,*

$$\mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(F, \mathbf{A}^*) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\tilde{F}, \mathbf{A}^*).$$

Proposición 3.1.14. *Si F es un funtor de R-álgebras tal que F^* es un R-módulo cuasi-coherente, entonces $\tilde{F} = \bar{F} = F^{**}$. Es más, si G es un funtor de R-álgebras dual, entonces*

$$\mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(F, G) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\tilde{F}, G).$$

Demostración. Por el Lema 2.1.16, el Ejemplo 2.2.8 y la Proposición 2.2.6 se cumple para cualquier funtor de R-módulos dual $T := S^*$ que

$$\mathrm{Hom}_R(F \otimes \ldots \otimes F, T) = \mathrm{Hom}_R(S, F^* \otimes \ldots \otimes F^*) = \mathrm{Hom}_R(\bar{F} \otimes \ldots \otimes \bar{F}, T).$$

Si consideramos $T = \bar{F}$, se sigue fácilmente que la estructura de álgebra de F define una estructura de álgebra en $\bar{F}$. Finalmente, si consideramos $T = G$, vemos enseguida que $\mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(F, G) = \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\tilde{F}, G)$. $\square$

Notación 3.1.15. *Denotaremos por $\tilde{\otimes}$ el producto tensorial en la categoría de los esquemas de R-álgebras.*

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\widetilde{F \otimes G}, \mathbf{A}^*) &= \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(F \otimes G, \mathbf{A}^*) \\
&= \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(F, \mathbf{A}^*) \times \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(G, \mathbf{A}^*) \\
&= \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\tilde{F}, \mathbf{A}^*) \times \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\tilde{G}, \mathbf{A}^*) \\
&= \mathrm{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\tilde{F} \tilde{\otimes} \tilde{G}, \mathbf{A}^*).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{F \otimes G} = \tilde{F} \tilde{\otimes} \tilde{G}$.

Corolario 3.1.16. *Si $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ son esquemas de R-álgebras, entonces* $\mathbf{A}^* \tilde{\otimes} \mathbf{B}^* = \mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^* \overset{2.2.8}{=} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^*$.

En esta sección de ahora en adelante, F será un funtor de álgebras tal que la imagen de cualquier morfismo k-lineal $F \to \mathbf{E}$ es un subespacio cuasi-coherente de $\mathbf{E}$, por ejemplo, si F es un funtor reflexivo de k-espacios vectoriales.

Teorema 3.1.17. *Se verifica que* $\tilde{F} = \lim\limits_{\overleftarrow{i}} F/F_i$, *donde* $\{F_i\}_i$ *es el conjunto de subfuntores de ideales biláteros de* F *tales que* F/F_i *es una* k*-álgebra coherente.*

Demostración. Denotemos $F' = \lim\limits_{\overleftarrow{i}} F/F_i$. Debemos probar la expresión funtorial

$$\mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F, \mathbf{A}^*) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F', \mathbf{A}^*).$$

Primero supongamos que $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras finitas. Cada morfismo de funtores de k-álgebras $F \to \mathbf{A}^*$ tiene como núcleo un F_i, luego factoriza a través de F/F_i. Recíprocamente, cada morfismo $F' \to \mathbf{A}^*$ factoriza a través de F/F_i:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(F', \mathbf{A}^*) &= \mathrm{Hom}_k(\lim_{\overleftarrow{i}} F/F_i, \mathbf{A}^*) = \mathrm{Hom}_k(\mathbf{A}, \lim_{\overrightarrow{i}} (F/F_i)^*) \\ &\overset{*}{=} \lim_{\overrightarrow{i}} \mathrm{Hom}_k(\mathbf{A}, (F/F_i)^*) = \lim_{\overrightarrow{i}} \mathrm{Hom}_k(F/F_i, \mathbf{A}^*)\end{aligned}$$

donde $\overset{*}{=}$ se cumple porque A es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

En el caso general,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F, \mathbf{A}^*) &= \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F, \lim_{\overleftarrow{i}} \mathbf{A}_i^*) = \lim_{\overleftarrow{i}} \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F, \mathbf{A}_i^*) \\ &= \lim_{\overleftarrow{i}} \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F', \mathbf{A}_i^*) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F', \lim_{\overleftarrow{i}} \mathbf{A}_i^*) \\ &= \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F', \mathbf{A}^*).\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.18. *Sea* F *un funtor de* k*-álgebras. Entonces,* $\tilde{F}$ *es el cociente de* $\bar{F}$ *por el subesquema de espacios vectoriales mínimo de* F*, tal que su conúcleo tiene estructura de esquema de álgebras y el morfismo de* F *en él es un morfismo de funtores de* k*-álgebras.*

Demostración. Si $F_i \hookrightarrow F$ es un funtor de ideales biláteros tal que F/F_i es un k-espacio vectorial coherente, entonces el epimorfismo $F \to F/F_i$ factoriza a través de $\bar{F}$ y por lo tanto el morfismo $\bar{F} \to F/F_i$ es epiyectivo. El límite proyectivo de tales epiyecciones es $\bar{F} \to \tilde{F}$ que es epiyectivo, porque dualmente el límite inductivo de inyecciones de espacios vectoriales cuasi-coherentes es una inyección.

Sea $\bar{F}' \hookrightarrow \bar{F}$ un subesquema de espacios vectoriales tal que $\bar{F}/\bar{F}'$ es una k-álgebra coherente y el morfismo $F \to \bar{F}/\bar{F}'$ es de funtores de álgebras. Entonces la imagen del morfismo $F \to \bar{F}/\bar{F}'$ es un esquema de álgebras finito, luego el morfismo es epiyectivo y por tanto $\bar{F}/\bar{F}' \simeq F/F_i$ para algún $F_i \hookrightarrow F$ subfuntor de ideales biláteros. Recíprocamente, si $F_i \hookrightarrow F$ es un funtor de ideales biláteros tal que F/F_i es un k-espacio vectorial coherente entonces existe un $\bar{F}'$ tal que $F/F_i = \bar{F}/\bar{F}'$.

Por tanto, el núcleo del morfismo $\bar{F} \to \tilde{F} = \lim\limits_{\overleftarrow{i}} F/F_i$ es la intersección de los subesquemas de $\bar{F}$ de codimensión finita cuyo conúcleo tiene estructura de esquema de álgebras y el morfismo de F en él es un morfismo de funtores de k-álgebras.

Por la Proposición 3.1.12, en todo esquema de álgebras el ideal cero es la intersección de los ideales biláteros de codimensión finita, luego todo subesquema de $\bar{F}$ cuyo conúcleo tiene estructura de esquema de álgebras es intersección de subesquemas de $\bar{F}$ de codimensión finita cuyo conúcleo tiene estructura de esquema de álgebras. Luego el núcleo del morfismo $\bar{F} \to \tilde{F}$ es la intersección de los subesquemas de $\bar{F}$ cuyo conúcleo tiene estructura de esquemas de álgebras y el morfismo de F en él es un morfismo de funtores de álgebras. □

Corolario 3.1.19. *Sea F un funtor de k-álgebras tal que $\bar{F}$ es un funtor de k-álgebras y $F \to \bar{F}$ es un morfismo de funtores de k-álgebras. Entonces $\bar{F} = \tilde{F}$.*

Observemos que este corolario implica que en $\bar{F}$ existe una única estructura de álgebra (si existe alguna) de modo que el morfismo $F \to \bar{F}$, que denotaremos i, sea un morfismo de funtores de k-álgebras: Por la unicidad del representante de un funtor, si existen dos estructuras de funtor de álgebras en $\bar{F}$ entonces existe un isomorfismo $\phi : \bar{F} \to \bar{F}$, que aplica una de las estructuras de funtor de álgebras en la otra y tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{F} \arrow[rr, "\phi"] & & \bar{F} \\ & F \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ahora bien, como $\mathrm{Hom}_k(\bar{F}, \bar{F}) = \mathrm{Hom}_k(F, \bar{F})$, $h \mapsto h \circ i$, y $\phi \circ i = i$, se tiene que $\phi = \mathrm{Id}$.

Proposición 3.1.20. *Sea F un funtor de k-álgebras. Entonces, la categoría de los F-módulos k-coherentes es la misma que la categoría de los $\tilde{F}$-módulos k-coherentes.*

Demostración. Si $F_i \hookrightarrow F$ es un funtor de ideales biláteros tal que F/F_i es un k-espacio vectorial coherente, entonces el epimorfismo $F \to F/F_i$ factoriza a través de $\tilde{F}$ y por lo tanto el morfismo $\tilde{F} \to F/F_i$ es epiyectivo.

Si $\tilde{F}_i \hookrightarrow \tilde{F}$ es un funtor de ideales biláteros tal que $\tilde{F}/\tilde{F}_i$ es un k-espacio vectorial coherente, entonces la imagen del morfismo $F \to \tilde{F}/\tilde{F}_i$ es un esquema de álgebras, luego la imagen del morfismo inducido $\tilde{F} \to \tilde{F}/\tilde{F}_i$ valora en esa imagen. En conclusión, el morfismo $F \to \tilde{F}/\tilde{F}_i$ es epiyectivo.

En conclusión, dado un k-espacio vectorial de dimensión finita E

$$\mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F, \mathbf{End}_k(\mathbf{E})) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\tilde{F}, \mathbf{End}_k(\mathbf{E}))$$

y se concluye la proposición. □

Dado un k-subfuntor de un esquema de k-espacios vectoriales $F \subset \mathbf{E}^*$, llamamos *cierre* de F en $\mathbf{E}^*$, y lo denotaremos F', al mínimo subesquema de k-espacios vectoriales de $\mathbf{E}^*$ que contiene a F. Obviamente, la imagen de $\bar{F}$ en $\mathbf{E}^*$ contiene al cierre de F en $\mathbf{E}^*$. Recíprocamente, tomando clausura esquemática, se observa que el cierre de F en $\mathbf{E}^*$ contiene a la imagen de $\bar{F}$ en $\mathbf{E}^*$.

Lema 3.1.21. *Sea $\phi : F_1 \to F_2$ un morfismo de funtores de espacios vectoriales y sea $\bar{\phi} : \bar{F}_1 \to \bar{F}_2$ el morfismo inducido en la clausura de esquemas de espacios vectoriales. Se verifica que:*

1. $\bar{\phi}(F_1)' = \bar{\phi}(\bar{F}_1)$.
2. $\overline{F_2/\phi(F_1)} = \bar{F}_2/\bar{\phi}(\bar{F}_1)$.

Demostración. Obviamente, $\bar{\phi}(\bar{F}_1)$ es el mínimo subesquema de espacios vectoriales en $\bar{F}_2$ que contiene la imagen de F_1.

Por otra parte, todo morfismo de $\bar{F}_2$ en un esquema de espacios vectoriales que se anula en $\bar{\phi}(\bar{F}_1)$ define un único morfismo de F_2, que se anula en $\phi(F_1)$. Recíprocamente, todo morfismo de F_2 en un esquema de espacios vectoriales que se anula en $\phi(F_1)$ define un único morfismo de $\bar{F}_2$, que se anula sobre el mínimo subesquema de espacios vectoriales que contiene a la imagen de F_1 en $\bar{F}_2$, es decir,

$$\overline{F_2/\phi(F_1)} = \bar{F}_2/\bar{\phi}(\bar{F}_1).$$

□

Proposición 3.1.22. *Sean $\mathbf{I}_1^*, \dots, \mathbf{I}_n^* \subseteq \mathbf{A}^*$ esquemas de ideales biláteros y sea $\mathbf{E}$ un $\mathbf{A}^*$-módulo. Se verifica que:*

1. *$\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{E}$ es un submódulo cuasi-coherente de $\mathbf{E}$.*
2. *$\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^* \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^*)' \cdot \mathbf{E}$.*
3. *$\{e \in \mathbf{E} : \mathbf{I}_1^* \cdot e = 0\}$ es un submódulo cuasi-coherente de $\mathbf{E}$.*
4. *$(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)'$ es un $\mathbf{A}^*$-submódulo de $\mathbf{E}^*$ y tomar la clausura de esquemas de módulos es estable por cambio de base, i.e., dado un morfismo de anillos $k \to B$, entonces $(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)'_{|B} = (\mathbf{E}^*{}_{|B} \cdot \mathbf{I}_{1|B}^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_{n|B}^*)'$. Además, $(\mathbf{E}^*/(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)')^* = (\mathbf{E}^*/(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*))^*$.*
5. *$((\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_r^*)' \cdot (\mathbf{I}_{r+1}^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)')' = (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)'$.*

Demostración.

1. La imagen del morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos $\mathbf{I}_1^* \otimes_k \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ es un $\mathbf{A}^*$-submódulo cuasi-coherente y coincide con $\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{E}$.

2. Es suficiente probar $\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^* \cdot e = (\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^*)' \cdot e$ para todo $e \in E$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^* \arrow[r, "\cdot e"] \arrow[d, hook] & \mathbf{E} \arrow[d, equal] \\ \mathbf{A}^* \arrow[r, "\cdot e"] & \mathbf{E} \end{tikzcd}$$

   La imagen del morfismo horizontal superior es un espacio vectorial de dimensión finita porque es la imagen del morfismo $\mathbf{I}_1^* \otimes_k \mathbf{I}_2^* \otimes_k < e > \to \mathbf{E}$, luego es cerrado y coincide con $\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^* \cdot e$. La antimagen de $\mathbf{I}_1^* \cdot \mathbf{I}_2^* \cdot e$ por el morfismo horizontal inferior es un esquema, luego debe contener a $(\mathbf{I}^* \cdot \mathbf{I}_2^*)'$. Por tanto, $(\mathbf{I}^* \cdot \mathbf{I}_2^*)' \cdot e \subseteq \mathbf{I}^* \cdot \mathbf{I}_2^* \cdot e$ y se sigue la igualdad.

3. Consideremos la sucesión exacta $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \to \mathbf{E}^* \to \mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \to 0$. Entonces el núcleo del morfismo dual

$$\mathbf{E} \to \mathbf{I}_1 \otimes_k \mathbf{E}$$

   es $\{e \in \mathbf{E} : \mathbf{I}_1^* \cdot e = 0\}$.

4. La imagen del morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos

$$\overline{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n)^* \to \mathbf{E}^*$$

   es $(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)'$. Por lo tanto $(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)'$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo. Dado un morfismo de anillos $k \to B$, la imagen de $\overline{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*}_{|B}$ en $\mathbf{E}^*{}_{|B}$ es $(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)'_{|B}$. Como $(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*)^* = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n$, sabemos que su clausura cambia de base. Es decir, se verifica que

$$\overline{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*}_{|B} = \overline{(\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*)_{|B}}$$

$$= \overline{\mathbf{E}^*_{|B} \otimes_B \mathbf{I}^*_{1|B} \otimes_B \ldots \otimes_B \mathbf{I}^*_{n|B}}.$$

   Pero la imagen de este último módulo en $\mathbf{E}^*{}_{|B}$ es $(\mathbf{E}^*_{|B} \cdot \mathbf{I}^*_{1|B} \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}^*_{n|B})'$, luego concluimos esta parte.

   Respecto a $(\mathbf{E}^*/(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*)')^* = (\mathbf{E}^*/(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{I}_n^*))^*$, es consecuencia del lema previo.

5. Se sigue de $\overline{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*} = \overline{\overline{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{I}_1^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_r^*} \otimes \overline{\mathbf{I}_{r+1}^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{I}_n^*}}$.

□

Notación 3.1.23. *De ahora en adelante, cuando estemos en el contexto de esquemas de álgebras y de espacios vectoriales, dado un esquema de ideales biláteros* $\mathbf{I}^* \subset \mathbf{A}^*$ *y un* $\mathbf{A}^*$*-módulo por la derecha* $\mathbf{E}^*$*, entenderemos* $\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^*$ *por su clausura de esquemas de módulos* $(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^*)'$ *en el esquema de espacios vectoriales* $\mathbf{E}^*$*.*

3.1.1. Apéndice: Distribuciones con soporte finito

La siguiente definición y la siguiente proposición son las extensiones análogas para funtores y esquemas de k-álgebras a las que se pueden encontrar en el apartado 2 del capítulo VI de [26] sobre el álgebra de distribuciones de soporte finito de un grupo algebraico afín.

Definición 3.1.24. *Sea F un funtor de k-álgebras. Llamamos k-espacio vectorial de distribuciones de soporte finito de F, y lo denotamos por D, al subespacio vectorial $D \subseteq F^*(k)$ que consiste en las 1-formas lineales de F que se anulan en algún ideal bilátero de F cuyo conúcleo es un k-espacio vectorial de dimensión finita.*

Por la demostración del Teorema 3.1.17, $\tilde{F}^* = \mathbf{D}$. Entonces $\tilde{F} = \mathbf{D}^*$ y se cumple que

$$\mathrm{Hom}_{\text{coálgebras}}(B, D) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{D}^*, \mathbf{B}^*) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(F, \mathbf{B}^*)$$

para cualquier coálgebra B.

Notación 3.1.25. *Dada una k-álgebra conmutativa A y un punto cerrado $x \in \operatorname{Spec} A$, cuando lo consideremos como ideal de A escribiremos $\mathfrak{m}_x$.*

Proposición 3.1.26. *Sea A una k-álgebra conmutativa de tipo finito. Se cumple que:*

1. $\tilde{\mathbf{A}} = \prod_{x \in \operatorname{Spec}_{max} A} \hat{\mathbf{A}}_x$*, donde* $\hat{\mathbf{A}}_x := \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathbf{A}/\mathfrak{m}_x^n$.
2. *El morfismo natural $\bar{\mathbf{D}} \to \mathbf{A}^*$ es epiyectivo, donde D es el k-espacio vectorial de las distribuciones de soporte finito de $\mathbf{A}$.*

Demostración.

1. Si A/I es una k-álgebra de tipo finito, entonces $\operatorname{Spec}(A/I)$ se corresponde con un número finito de puntos cerrados de $\operatorname{Spec} A$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, y existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{m}_{x_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_{x_n})^m \subset I$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \lim_{\substack{\leftarrow \\ x_1, \ldots, x_n, m}} \mathbf{A}/(\mathfrak{m}_{x_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_{x_n})^m \\ &= \lim_{\substack{\leftarrow \\ x_1, \ldots, x_n, m}} \mathbf{A}/\mathfrak{m}_{x_1}^m \times \ldots \times \mathbf{A}/\mathfrak{m}_{x_n}^m = \prod_{x \in \operatorname{Spec}_{max} A} \hat{\mathbf{A}}_x. \end{aligned}$$

2. El morfismo $\bar{\mathbf{D}} \to \mathbf{A}^*$ es epiyectivo si y sólo si el morfismo $A \to \bar{\mathbf{D}}^*(k) = D^*$ es inyectivo. Este morfismo es obviamente inyectivo, por 1. y porque $\mathbf{D}^* = \tilde{\mathbf{A}}$.

□

3.2. Esquemas de álgebras semisimples

Definición 3.2.1. *Decimos que un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es simple si no contiene ningún esquema de ideales biláteros propio. Decimos que un $\mathbf{A}^*$-módulo $E \neq 0$ es simple si no contiene ningún $\mathbf{A}^*$-submódulo propio. Decimos que un $\mathbf{A}^*$-módulo E es semisimple si es una suma de $\mathbf{A}^*$-módulos simples.*

Por la Proposición 3.1.6, un $\mathbf{A}^*$-módulo es semisimple si y sólo si es una suma directa de $\mathbf{A}^*$-módulos simples.

Por la Proposición 3.1.7, los $\mathbf{A}^*$-módulos simples son k-espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema 3.2.2. *Un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es simple si y sólo si es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo no conmutativo de grado finito. Además, dicho espacio vectorial es un $\mathbf{A}^*$-módulo simple y el cuerpo no conmutativo son sus endomorfismos como $\mathbf{A}^*$-módulo.*

Demostración. Si $\mathbf{A}^*$ es simple, por la Proposición 3.1.12 es un esquema finito de k-álgebras. Por tanto el teorema es consecuencia del Teorema de Wedderburn. $\square$

Teorema 3.2.3. *Cada $\mathbf{A}^*$-módulo simple es un $\mathbf{A}^*$-submódulo del módulo regular. Cada $\mathbf{A}^*$-módulo es un submódulo de una suma directa de módulos regulares.*

Demostración. Si E es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda simple, luego de dimensión finita, entonces $\mathbf{E}^*$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha simple. Por lo tanto, para cada $w \in E^*$ no nulo, $\mathbf{E}^* = w \cdot \mathbf{A}^*$. Es decir, $\mathbf{E}^*$ es un cociente de $\mathbf{A}^*$, como $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha. Por tanto, E es un submódulo de A^*, como $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda. Supongamos ahora que E no es simple. El morfismo de multiplicación $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}^*$ es obviamente epiyectivo y es morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos por la derecha, donde $\mathbf{A}^*$ actúa en $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{A}^*$ por la derecha en el segundo factor. Tomando duales tenemos la inyección deseada $E \hookrightarrow A \otimes E = \oplus A$. $\square$

Definición 3.2.4. *Decimos que un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es un esquema semisimple de k-álgebras si cada $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente es semisimple.*

Proposición 3.2.5. *$\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras semisimple si y sólo si A es un $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple.*

Demostración. Si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras semisimple entonces en particular A es un $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple. Recíprocamente, si A es un $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple, por la Proposición 3.2.3 cada $\mathbf{A}^*$-módulo E es un submódulo de una suma directa de A, que es semisimple, luego tenemos que E es semisimple. Entonces $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras semisimple. $\square$

Definición 3.2.6. *Un esquema de ideales biláteros $\mathbf{I}^* \subset \mathbf{A}^*$ se dice maximal si $\mathbf{A}^*/\mathbf{I}^*$ es simple. Llamaremos espectro maximal de $\mathbf{A}^*$ al conjunto de sus esquemas maximales de ideales biláteros, el cual denotaremos por $\mathrm{Spec}_{max}\mathbf{A}^*$.*

Si $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_1^* \times \mathbf{A}_2^*$, entonces

$$\mathrm{Spec}_{max}\mathbf{A}^* = \mathrm{Spec}_{max}\mathbf{A}_1^* \sqcup \mathrm{Spec}_{max}\mathbf{A}_2^*$$

porque cada esquema de ideales biláteros $\mathbf{I}^* \subseteq \mathbf{A}^*$ es $\mathbf{I}^* = \mathbf{I}_1^* \times \mathbf{I}_2^*$, donde $\mathbf{I}_i^*$ es un esquema de ideales biláteros de $\mathbf{A}_i^*$. Por lo tanto, cada epimorfismo de un producto de dos esquemas de k-álgebras en un esquema de k-álgebras simple factoriza a través de la proyección en uno de los dos factores. Si $\mathbf{A}_i^*$, $\mathbf{B}_j^*$ son k-álgebras simples y $\phi : \mathbf{A}_1^* \times \ldots \times \mathbf{A}_r^* \to \mathbf{B}_1^* \times \ldots \times \mathbf{B}_s^*$ es un epimorfismo, entonces existen isomorfismos $\phi_j : \mathbf{A}_{i_j}^* \to \mathbf{B}_j^*$ ($i_j \neq i_k$, $j \neq k$) tales que $\phi(a_1, \ldots, a_r) = (\phi_1(a_{i_1}), \ldots, \phi_s(a_{i_s}))$.

Teorema 3.2.7. *$\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras semisimple si y sólo si es un producto directo de k-álgebras simples.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras semisimple. Sabemos que $\mathbf{A}^*$ es un límite proyectivo de cocientes $\mathbf{A}_i^*$ que son k-álgebras finitas. Obviamente, los $\mathbf{A}_i^*$-módulos son $\mathbf{A}^*$-módulos, luego $\mathbf{A}_i^*$ es un álgebra semisimple. Por la teoría de anillos semisimples, $\mathbf{A}_i^*$ es un producto directo de k-álgebras finitas simples, luego $\mathbf{A}^*$ es un producto directo de k-álgebras finitas simples.

Sea $\mathbf{A}^*$ producto directo de álgebras simples. $\mathbf{A}^*$ será semisimple si y sólo si A es $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple. Por la Proposición 3.1.6, equivale a que A sea A^*-semisimple. Como A^* es producto directo de álgebras simples, es un álgebra semisimple y en particular A es un A^*-módulo semisimple. □

Como consecuencia de este teorema, obtenemos que todo esquema de álgebras simple es en particular semisimple.

Proposición 3.2.8. *Cada $\mathbf{A}^*$-módulo $E \neq 0$ contiene un único $\mathbf{A}^*$-submódulo no nulo semisimple maximal.*

Demostración. El submódulo semisimple maximal es la suma de todos los submódulos semisimples. Además existen submódulos simples, pues dado $0 \neq e \in E$, este e está contenido en un $\mathbf{A}^*$-submódulo de dimensión finita, que contiene $\mathbf{A}^*$-submódulos simples. □

Proposición 3.2.9. *El dual del submódulo semisimple maximal de A es el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$, es decir, cualquier otro esquema de álgebras cociente semisimple de $\mathbf{A}^*$ es un cociente de éste.*

Demostración. Sea $M \subset A$ el submódulo semisimple maximal. Veamos que es un módulo bilátero, ya que así será una subcoálgebra de A. Debemos probar que es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha. Dado $w \in A^*$, es claro que $M \cdot w$ es un A^*-submódulo por la izquierda de A. Luego es un $\mathbf{A}^*$-submódulo por la izquierda de A. Es también claro que es semisimple, luego $M \cdot w \subseteq M$. Entonces M es un A^*-submódulo por la derecha de A, luego es un $\mathbf{A}^*$-submódulo por la derecha de A.

Es más, la counidad $w : A \to k$ (es decir, la unidad de A^*) no se anula en todo M: si $m(w) = w(m) = 0$ para cualquier $m \in M$, entonces $0 = (m\cdot w')(w) = m(w' \cdot w) = m(w')$ para cualquier $w' \in A^*$, y por lo tanto $m = 0$, luego M sería nulo, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $\mathbf{M}^*$ es un esquema de k-álgebras. Si $\mathbf{I}^*$ es el esquema de ideales biláteros núcleo del epimorfismo $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$, entonces $\mathbf{I}^* \cdot M = 0$: $(i \cdot m)(w) = m(w\cdot i) = 0$, para todo $w \in \mathbf{A}^*$ y para cada $i \in \mathbf{I}^*$ y $m \in M$, luego $i\cdot m = 0$. M es semisimple como $\mathbf{M}^*$-módulo, porque como $\mathbf{A}^*$-módulo es semisimple. Entonces por la Proposición 3.2.5, $\mathbf{M}^*$ es un esquema de k-álgebras semisimple. Si $\mathbf{B}^*$ es un cociente semisimple de $\mathbf{A}^*$ entonces B es un $\mathbf{B}^*$-módulo semisimple, luego es un $\mathbf{A}^*$-submódulo semisimple de A. Por lo tanto $B \subset M$ y $\mathbf{B}^*$ es un cociente de $\mathbf{M}^*$. □

Notación 3.2.10. *Denotaremos el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$ como $\mathbf{M}^*$.*

Si E es un $\mathbf{A}^*$-módulo simple, luego de dimensión finita, entonces la imagen del morfismo natural $\phi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ es un esquema de k-álgebras simple: E es simple y fiel como módulo sobre $\operatorname{Im}\phi$, luego $\operatorname{Im}\phi$ es un álgebra simple (en concreto $\operatorname{Im}\phi = \mathbf{End}_K(\mathbf{E})$, donde $K = \operatorname{End}_{\mathbf{A}^*}(E)$). Luego, es un cociente de $\mathbf{M}^*$. Entonces E es un $\mathbf{M}^*$-módulo simple. Si E es un $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple entonces es un $\mathbf{M}^*$-módulo semisimple. Obviamente,

$$\operatorname{Spec}_{max}\mathbf{A}^* = \operatorname{Spec}_{max}\mathbf{M}^* = \left\{\begin{matrix}\text{Conjunto de clases de isomorfía} \\ \text{de } \mathbf{A}^*\text{-módulos simples}\end{matrix}\right\}$$

Definición 3.2.11. *Llamaremos (ideal) radical de un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ al núcleo del morfismo cociente $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$ del esquema de álgebras en su esquema de álgebras cociente semisimple maximal.*

Sea $E \neq 0$ un $\mathbf{A}^*$-módulo y sea $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$. E es semisimple si y sólo si es un $\mathbf{M}^*$-módulo, es decir, si está anulado por $\mathbf{I}^*$. Si $0 \neq E_1 \subseteq E$ es el $\mathbf{A}^*$-submódulo semisimple maximal de E, entonces

$$E_1 = \{e \in E : \mathbf{I}^* \cdot e = 0\}$$

o equivalentemente, $E_1 = \{e \in E : \mathbf{I}^*(k) \cdot e = 0\}$.

Proposición 3.2.12. *Sea E un $\mathbf{A}^*$-módulo y sea $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$. Sea E_1 el submódulo semisimple maximal de E, entonces*

$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{M}^*)^* = (\mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^*)^*.$$

Demostración. Por cambio de base, es suficiente probar que $E_1 = \operatorname{Hom}_k(\mathbf{E}^*/\mathbf{E}^*\cdot \mathbf{I}^*, \mathbf{k})$. $\operatorname{Hom}_k(\mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^*, \mathbf{k})$ se identifica con los vectores $e \in \operatorname{Hom}_k(\mathbf{E}^*, \mathbf{k}) = E$ tales que $e(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^*) = 0$. Como $e(w \cdot i) = w(i \cdot e)$ para todo $w \in \mathbf{E}^*$ e $i \in \mathbf{I}^*$, se sigue que $e \in E$ verifica que $e(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^*) = 0$ si y sólo si $e \in E_1$. □

El funtor $F(E) := E_1$ de la categoría de los $\mathbf{A}^*$-módulos en la de los $\mathbf{M}^*$-módulos es un funtor exacto por la izquierda representado por $\mathbf{M}^*$, pues

$$F(E) = E_1 = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{M}^*, \mathbf{E}).$$

Consideremos el cociente $E' = E/E_1$ y sea E'_1 el $\mathbf{A}^*$-submódulo semisimple maximal de E'. Sea $E_2 := \pi^{-1}(E'_1)$, donde $\pi : E \to E'$ es el morfismo cociente. Entonces $E_1 \subset E_2$ y $E_2/E_1 = E'_1$. Sucesivamente construimos una cadena canónica $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, tal que cada cociente E_i/E_{i-1} es un $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple y $E_i/E_{i-1} = \{\bar{e} \in E/E_{i-1} : \mathbf{I}^* \cdot \bar{e} = 0\}$. Inductivamente deducimos que

$$E_i = \{e \in E : \mathbf{I}^{*i} \cdot e = 0\}.$$

De nuevo, por la proposición anterior, obtenemos que

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*i})^* = (\mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^{*i})^*.$$

Notación 3.2.13. *Dado un $\mathbf{A}^*$-módulo E, denotaremos por $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ la cadena canónica de $\mathbf{A}^*$-submódulos que acabamos de construir. Denotaremos $G(E) := \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i/E_{i-1}$, donde $E_0 = 0$, y $G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E}^* := \prod_{i=1}^{\infty} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^{*i-1}/\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^{*i})$.*

Proposición 3.2.14. *Sea E un $\mathbf{A}^*$-módulo. Entonces*

$$(G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E}^*)^* = G(\mathbf{E}).$$

En el caso del $\mathbf{A}^*$-módulo regular A, la cadena canónica de factores semisimples es $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A$ donde $\mathbf{A}_i = (\mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*i})^*$.

Lema 3.2.15. *Sea E un $\mathbf{A}^*$-módulo de tipo finito y sea $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$. Existe un $n >> 0$ tal que $\mathbf{I}^{*n} \cdot \mathbf{E} = 0$.*

Demostración. En la cadena natural de inclusiones $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E$, una inclusión $E_n \subseteq E_{n+1}$ es una igualdad cuando $E = E_n$ por la Proposición 3.2.8. Puesto que E es de dimensión finita, la igualdad $E = E_n$ debe ser cierta para algún n. Por lo tanto, $\mathbf{I}^{*n} \cdot \mathbf{E} = 0$. □

Teorema 3.2.16. *Sea E un $\mathbf{A}^*$-módulo y sea $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$. Se verifica que:*

1. $E = \varinjlim_{i} E_i$.

2. $\mathbf{E}^* = \varprojlim_{n} \mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^{*n}$. *En particular,* $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{I}^{*n} = 0$.

Demostración.

1. Cada $e \in E$ está incluido en un $\mathbf{A}^*$-submódulo de dimensión finita E' de E. Por lo tanto existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{I}^{*n} \cdot e = 0$. Luego $E = \varinjlim_{i} E_i$.

2. Como $E = \lim\limits_{\substack{\rightarrow \\ i}} E_i$, tomando duales y recordando que $\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot {\mathbf{I}^*}^i)^*$, se sigue que $\mathbf{E}^* = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathbf{E}^*/\mathbf{E}^* \cdot {\mathbf{I}^*}^i$.

□

Proposición 3.2.17. (Nakayama) *Sean E y E' $\mathbf{A}^*$-módulos y sea $\mathbf{M}^*$ el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$.*

1. $\mathbf{E}^* = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{M}^* = 0$.
2. *Un morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos $\mathbf{E}^* \to \mathbf{E'}^*$ es epiyectivo si y sólo si el morfismo $\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{M}^* \to \mathbf{E'}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{M}^*$ es epiyectivo.*
3. *El morfismo $\mathbf{E}^* \to \mathbf{E'}^*$ es un isomorfismo si y sólo si el morfismo $G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E}^* \to G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E'}^*$ es un isomorfismo.*

Demostración.

1. Si $\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{M}^* = 0$ entonces $\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{M}^*)^* = 0$, luego $E = 0$ y $\mathbf{E}^* = 0$.
2. Aplicamos 1. a los conúcleos de los morfismos.
3. Si el morfismo $G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E}^* \to G_{\mathbf{I}^*}\mathbf{E'}^*$ es un isomorfismo, entonces también lo es el morfismo entre las compleciones, que coincide con los propios esquemas de espacios vectoriales por el apartado 2. del teorema anterior.

□

Si E es un $\mathbf{A}^*$-módulo de dimensión finita definimos el carácter asociado a E, $\chi_E : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$, como
$$\chi_E(w) := \operatorname{tr} h_w$$
donde h_w es la homotecia de E de factor $w \in \mathbf{A}^*$ y $\operatorname{tr} h_w$ es la traza de dicho endomorfismo lineal. La traza de $h_w : E \to E$ coincide con la traza del endomorfismo inducido $h_w : G(E) := \bigoplus\limits_i E_i/E_{i-1} \to \bigoplus\limits_i E_i/E_{i-1} =: G(E)$. Así que tenemos el triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^* \arrow[rr, "\chi_E"] \arrow[dr] & & \mathbf{k} \\
& \mathbf{M}^* \arrow[ur, "\chi_{\bigoplus_i E_i/E_{i-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.2.18. *Supongamos que* $\operatorname{car} k = 0$. *Entonces $\chi_E = \chi_{E'}$ si y sólo si $G(E)$ y $G(E')$ son isomorfos como $\mathbf{M}^*$-módulos.*

Proposición 3.2.19. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Los caracteres asociados a los $\mathbf{A}^*$-módulos simples son linealmente independientes.*

Notación 3.2.20. *Sea $\mathbf{E}^*$ un esquema de R-módulos (respectivamente de R-álgebras) y sea $R \to S$ una extensión de anillos conmutativos. Denotaremos por $\mathbf{E}^*_{\mathbf{S}}$ al esquema de S-módulos (respectivamente de S-álgebras) $\mathbf{E}^*{}_{|S} = (\mathbf{E} \otimes_R \mathbf{S})^*$ asociado al S-módulo $E \otimes_R S$. Diremos que $\mathbf{E}^*$ cambiado de base por $R \to S$ es $\mathbf{E}^*_{\mathbf{S}}$.*

Proposición 3.2.21. *Sea $\mathbf{A}^*$ un esquema de k-álgebras, sea $\mathbf{M}^*$ su esquema de k-álgebras cociente semisimple maximal y sea $k \to K$ una extensión de cuerpos conmutativos. El esquema de K-álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es un cociente de $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$.*

Si k es algebraicamente cerrado, entonces el esquema de K-álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$.

Demostración. Sea $0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ la filtración canónica de $\mathbf{A}^*$-módulos de A. Consideremos la filtración $A_1 \otimes_k K \subset A_2 \otimes_k K \subset \dots$ de $A \otimes_k K$. Si E es $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$-módulo simple, entonces se inyecta en $A \otimes_k K$ y para algún i existe una inyección $E \hookrightarrow (A_i \otimes_k K)/(A_{i-1} \otimes_k K)$ de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$-módulos. Por tanto, como $(A_i \otimes_k K)/(A_{i-1} \otimes_k K)$ es un $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$-módulo, E es un $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$-módulo. En conclusión, cada morfismo de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ en un álgebra simple factoriza a través de $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$. Por lo tanto, el esquema de K-álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es un cociente de $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$.

Si k es algebraicamente cerrado entonces $\mathbf{M}^* = \prod_i \mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{k})$, luego $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}} = \prod_i \mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{K})$ es semisimple y el esquema de K-álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es isomorfo a $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$. $\square$

En particular, si $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es semisimple, entonces $\mathbf{A}^*$ también es un esquema de álgebras semisimple.

Proposición 3.2.22. *Sea $\mathbf{M}^*$ el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$ y sea $\mathbf{N}^*$ el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{B}^*$. Entonces el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$ es un cociente de $\mathbf{M}^* \bar{\otimes} \mathbf{N}^*$.*

Si k es algebraicamente cerrado entonces $\mathbf{M}^* \bar{\otimes} \mathbf{N}^*$ es el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$ y un $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$-módulo es simple si y sólo si es un producto tensorial de un $\mathbf{A}^*$-módulo simple y un $\mathbf{B}^*$-módulo simple.

Demostración. Sea E un $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$-módulo simple. En particular $\dim E < \infty$. Consideremos la cadena canónica $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n = E$ de E como $\mathbf{A}^*$-módulo. $\mathbf{B}^*$ conmuta con $\mathbf{A}^*$ en $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{B}^*$, entonces debe dejar estable la cadena. Puesto que E es simple, entonces $E = E_1$, es decir, E es un $\mathbf{A}^*$-módulo semisimple. Del mismo modo, E es un $\mathbf{B}^*$-módulo semisimple. En conclusión, E es un $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{N}^*$-módulo, luego es un $\mathbf{M}^* \bar{\otimes} \mathbf{N}^*$-módulo. Por lo tanto, cada morfismo de $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$ en un esquema de álgebras simple factoriza a través de $\mathbf{M}^* \bar{\otimes} \mathbf{N}^*$, luego el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$ es un cociente de $\mathbf{M}^* \bar{\otimes} \mathbf{N}^*$.

Sea ahora k un cuerpo algebraicamente cerrado. Ya que $\mathrm{End}_k(V)\otimes_k\mathrm{End}_k(V') = \mathrm{End}_k(V\otimes_k V')$ $(\dim_k V, V' < \infty)$, $\mathbf{M}^* = \prod_i \mathbf{End}_k(\mathbf{V}_i)$ y $\mathbf{N}^* = \prod_j \mathbf{End}_k(\mathbf{V'}_j)$, entonces

$$\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{N}^* = \prod_{i,j}\mathbf{End}_k(\mathbf{V}_i\otimes_k\mathbf{V}'_j).$$

$\square$

Corolario 3.2.23. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ son esquemas de k-álgebras semisimples si y sólo si $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*$ es semisimple.*

3.3. Esquemas de álgebras separables

Definición 3.3.1. *Decimos que un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es separable si por cualquier cambio de base $k \hookrightarrow K$, $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}} := (\mathbf{A}\otimes_k \mathbf{K})^*$ es un esquema de K-álgebras semisimple.*

Definición 3.3.2. *Sea F un funtor de k-algebras. Llamaremos centro de F al subfuntor de k-álgebras de F, que denotaremos como $Z(F)$, definido por*

$$Z(F)(C) := \{a \in F(C) \mid a\cdot = \cdot a\}$$

donde $a\cdot : F_{|C} \to F_{|C}$, $b \mapsto a\cdot b$ and $\cdot a : F_{|C} \to F_{|C}$, $b \mapsto b\cdot a$.

Se verifica que $Z(\mathbf{A}^*)(C) = \{w \in \mathbf{A}^*(C) \mid \mathbf{A}^*_{\mathbf{C}} \xrightarrow{w\cdot=\cdot w} \mathbf{A}^*_{\mathbf{C}}\}$ coincide con el centro de la C-álgebra $(A\otimes_k C)^* = \mathbf{A}^*(C)$.

$Z(\mathbf{A}^*)$ es esquema de k-álgebras: $Z(\mathbf{A}^*)$ es el núcleo del morfismo $\phi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{End}_k(\mathbf{A})$, $w \mapsto w\cdot - \cdot w$, y $\mathbf{End}_k(\mathbf{A})$ está contenido en el esquema de k-espacios vectoriales $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{A},\bar{\mathbf{A}}) = (\mathbf{A}\otimes_k \bar{\mathbf{A}}^*)^*$.

Se verifica que $Z(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*) = Z(\mathbf{A}^*)\bar{\otimes}Z(\mathbf{B}^*)$: $\mathbf{B}^*$ es un esquema de k-espacios vectoriales isomorfo a $\prod \mathbf{k}$, entonces $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha y por la izquierda isomorfo a $\prod \mathbf{A}^*$. Ahora es fácil ver que $Z(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*) \subseteq Z(\mathbf{A}^*)\bar{\otimes}\mathbf{B}^*$. Igualmente, $Z(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*) \subseteq \mathbf{A}^*\bar{\otimes}Z(\mathbf{B}^*)$. Por lo tanto, $Z(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*) \subseteq Z(\mathbf{A}^*)\bar{\otimes}Z(\mathbf{B}^*)$. La otra inclusión es inmediata.

Teorema 3.3.3. *Sea $\mathbf{A}^*$ un esquema de k-álgebras. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathbf{A}^*$ es separable.*

2. *$\mathbf{A}^*_{\bar{k}}$ es un producto directo de álgebras de matrices, donde $\bar{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

3. *$\mathbf{A}^*$ es semisimple y su centro es un esquema de álgebras separable.*

4. *$\mathbf{A}^*\bar{\otimes}_k\mathbf{A}^{*\circ}$ es semisimple.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es obvio.

2) $\Rightarrow$ 1) Si $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}_k\bar{\mathbf{k}}$ es un producto directo de álgebras de matrices entonces por cualquier cambio de base también es un producto directo de algebras de matrices cuyo radical es nulo. Si $\mathbf{A}^*$, o cualquier cambio de base suyo, tiene radical no nulo, entonces al cambiar de base el radical tampoco sería nulo.

$1), 2) \Rightarrow 3)$ $Z(\mathbf{A}^*)_{\bar{k}} = Z(\mathbf{A}^*_{\bar{k}}) = \prod \bar{\mathbf{k}}$, entonces $Z(\mathbf{A}^*)$ es separable. Obviamente $\mathbf{A}^*$ es semisimple.

3) $\Rightarrow$ 2) $\mathbf{A}^*$ es un producto directo de álgebras simples. Como el centro de un producto directo es el producto directo de los centros, podemos suponer que $\mathbf{A}^*$ es simple de centro separable, y que en particular es k-álgebra finita. Entonces podemos escribir $A^* = \mathbf{A}^*$. En este caso $Z(A^*)$ es un cuerpo, porque $A^* = \mathrm{End}_K(E)$ y $Z(A^*) = Z(K)$. Por lo tanto, A^* es un $Z(A^*)$-álgebra de Azumaya y $A^*\otimes_k \bar{k} = A^*\otimes_{Z(A^*)} Z(A^*)\otimes_k \bar{k} = A^*\otimes_{Z(A^*)} \prod \bar{k} = \prod(A^*\otimes_{Z(A^*)} \bar{k})$ que es un producto directo de álgebras de matrices.

2) $\Rightarrow$ 4) Es suficiente probar que $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}_k\mathbf{A}^{*\circ}$ por cambio de base al cierre algebraico de k es semisimple. Como el producto tensorial de álgebras de matrices sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es un álgebra de matrices, 4. está probado.

4) $\Rightarrow$ 3) Como $Z(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}) = Z(\mathbf{A}^*)\bar{\otimes}Z(\mathbf{A}^*)$ y puesto que $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}$ es un producto directo de álgebras de matrices (sobre álgebras de división de grado finito), se sigue que $Z(\mathbf{A}^*)\bar{\otimes}Z(\mathbf{A}^*)$ es un producto directo de cuerpos conmutativos (de grado finito) y, por lo tanto, $Z(\mathbf{A}^*)$ es un producto directo de extensiones finitas separables de cuerpos conmutativos de k, luego es separable. Por la Proposición 3.2.23, $\mathbf{A}^*$ es semisimple. □

3.3.1. Teorema Principal de Wedderburn-Malcev

Generalicemos ahora el Teorema Principal de Wedderburn-Malcev para los esquemas de álgebras. Este teorema afirma que el epimorfismo natural de una k-álgebra finita A en la k-álgebra cociente semisimple maximal tiene sección (siendo k un cuerpo algebraicamente cerrado).

Lema 3.3.4. *Si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras semisimple, entonces cada esquema de $\mathbf{A}^*$-módulos es inyectivo y proyectivo (en la categoría de los esquemas de $\mathbf{A}^*$-módulos).*

Demostración. Dualmente, debemos probar que cada $\mathbf{A}^*$-módulo V es proyectivo e inyectivo. Como $\mathbf{A}^*$ es semisimple toda sucesión exacta de $\mathbf{A}^*$-módulos rompe, lo que implica que cada $\mathbf{A}^*$-módulo V es proyectivo e inyectivo. □

Definición 3.3.5. *Sea F un funtor de k-álgebras. Diremos que $D \in \mathrm{Hom}_k(F, M)$ es una derivación de F en un $F\otimes F^\circ$-módulo M si $D(ab) = (Da)b+a(Db)$, para todo a, $b \in F$. Denotaremos por $\mathrm{Der}_k(F, M)$ el conjunto de las derivaciones de F en M.*

Lema 3.3.6. *Sea Δ_F el núcleo del morfismo $F \otimes_k F \to F$, $a \otimes b \mapsto ab$. Se verifica que*

$$\mathrm{Der}_k(F, M) = \mathrm{Hom}_{F\otimes F^\circ}(\Delta_F, M).$$

Demostración. Sea $\phi \in \operatorname{Hom}_{F\otimes F^\circ}(\Delta_F, M)$ y sea $d : F \to F\otimes_k F$ el morfismo de k-espacios vectoriales definido por $d(a) = a\otimes 1 - 1\otimes a$. Puesto que $\operatorname{Im} d \subseteq \Delta_F$, la composición $\phi\circ d$ es un morfismo de k-espacios vectoriales de F en M, y además es una k-derivación:

$$\begin{aligned}(\phi\circ d)(ab) &= \phi(ab\otimes 1 - 1\otimes ab) = \phi(ab\otimes 1 - a\otimes b) + \phi(a\otimes b - 1\otimes ab)\\ &= \phi(a(b\otimes 1 - 1\otimes b)) + \phi((a\otimes 1 - 1\otimes a)b)\\ &= a(\phi\circ d)(b) + (\phi\circ d)(a)b \quad \forall\ a, b\in F.\end{aligned}$$

Sea D una k-derivación de F en M y $\psi : F\otimes F \to M$, $\psi(a\otimes b) = D(a)b$, que es morfismo de k-espacios vectoriales. Comprobemos que ψ restringida a Δ_F es morfismo de $F\otimes F^\circ$-módulos:

$$\begin{aligned}\psi(c(\sum_i a_i\otimes b_i)d) &= \psi(\sum_i ca_i\otimes b_i d) = \sum_i D(ca_i)b_i d\\ &= \sum_i (D(c)a_i b_i d + cD(a_i)b_i d) = \sum_i c(D(a_i)b_i)d\\ &= c(\psi(\sum_i a_i b_i))d \quad \forall \sum_i a_i\otimes b_i \in \Delta_F.\end{aligned}$$

Ahora sólo resta comprobar que ambas asignaciones son inversas entre sí, lo cual es fácil. □

Notación 3.3.7. *Dado un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ denotemos por $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{A}^*}$ el núcleo del morfismo $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}_k\mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^*$, $a\otimes a' \mapsto aa'$. Observemos que $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{A}^*} = \bar{\Delta}_{\mathbf{A}^*}$, ya que $\mathbf{A}^*\otimes_k \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\oplus \Delta_{\mathbf{A}^*}$.*

Proposición 3.3.8. *Sea $\pi : \mathbf{B}^* \to \mathbf{A}^*$ un epimorfismo de esquemas de k-álgebras de núcleo $\mathbf{I}^*$. Entonces la "sucesión de diferenciales"*

$$0 \to \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2} \xrightarrow{d} \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{B}^*}\bar{\otimes}_{\mathbf{B}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}) \to \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{A}^*} \to 0$$

es exacta, donde $d\bar{i} := \overline{i\otimes 1 - 1\otimes i}$ para todo $i\in \mathbf{I}^*$.

Demostración. Si aplicamos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(-, \mathbf{V}^*)$ a la sucesión de diferenciales obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Der}_k(\mathbf{A}^*, \mathbf{V}^*) \to \operatorname{Der}_k(\mathbf{B}^*, \mathbf{V}^*) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{I}^*, \mathbf{V}^*).$$

Por tanto, sólo queda probar que d es inyectivo. Sea $s : \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ una sección de esquemas de k-espacios vectoriales del epimorfismo $\pi : \mathbf{B}^* \to \mathbf{A}^*$. La aplicación

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{B}^*}\bar{\otimes}_{\mathbf{B}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}) \to \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2},\ \overline{\sum_i b_i\otimes b'_i} \mapsto \overline{\sum_i (b_i - s(\pi(b_i)))\cdot b'_i}$$

es un retracto de d. □

Teorema 3.3.9. *$\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-algebras separable si y sólo si $\mathbf{A}^*$ es un $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}$-módulo proyectivo.*

Demostración. Si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras separable entonces $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^*$ es un álgebra semisimple y cada esquema de $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}$-módulos es proyectivo.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{A}^*$ es un $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}$-módulo proyectivo. Por tanto, la sucesión de $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}$-módulos

$$0 \to \mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^*} \to \mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ} \to \mathbf{A}^* \to 0 \tag{3.1}$$

rompe. Sea $\bar{\mathbf{k}}$ el cierre algebraico de $\mathbf{k}$. Por simplicidad de notación escribimos $\mathbf{A}^*$ en lugar de $\mathbf{A}^*_{\bar{\mathbf{k}}}$ (obsérvese que $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^*}$ cambia de base porque $(\Delta_{\mathbf{A}^*})^*$ es cuasi-coherente). Sea $\mathbf{M}^*$ el esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$ y sea $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$. Si aplicamos $-\otimes_{\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}} \mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^{*\circ}$ a (3.1) obtenemos que $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^*} \otimes_{\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}} (\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^{*\circ}) = \mathbf{\Delta}_{\mathbf{M}^*}$.

De la sucesión exacta $0 \to \mathbf{I}^* \to \mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^* \to 0$ obtenemos la sucesión exacta de diferenciales de la Proposición 3.3.8

$$0 \to \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2} \xrightarrow{d} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^*}\bar{\otimes}_{\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^{*\circ}) \to \mathbf{\Delta}_{\mathbf{M}^*} \to 0$$

de la que deducimos que $\mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2} = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{I}^* = \mathbf{I}^{*2}$ y por el Teorema 3.2.16 $\mathbf{A}^* = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*n} = \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^* = \mathbf{M}^*$, luego $\mathbf{A}^*$ es separable por el Teorema 3.3.3. □

Comentario 3.3.10. *En la demostración hemos visto que si (y sólo si) la sucesión de* $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}$*-módulos* $0 \to \mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^*} \to \mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ} \to \mathbf{A}^* \to 0$ *rompe, entonces* $\mathbf{A}^*$ *es un esquema de k-álgebras separable.*

Teorema 3.3.11. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de k-álgebras, sea* $\mathbf{M}^*$ *su esquema de álgebras cociente semisimple maximal y sea* $\mathbf{I}^*$ *el radical de* $\mathbf{A}^*$*. El morfismo* $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$ *tiene una sección de funtores de álgebras, que es única salvo conjugaciones por elementos de* $1+\mathbf{I}^*$*.*

Demostración. $\mathbf{M}^*$ es un esquema de álgebras semisimple, luego $\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^*$ es semisimple. Por el Lema 3.3.4 y el Teorema A.4.4, cada extensión de esquemas de álgebras de $\mathbf{M}^*$ por cualquier esquema de $\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^*$-módulos es trivial. $\mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*2}$ es una extensión de esquemas de álgebras de $\mathbf{M}^*$ por $\mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2}$, por lo tanto, el epimorfismo $\pi_2 : \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*2} \to \mathbf{M}^*$ tiene una sección s_2. Sea $\pi : \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*3} \to \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*2}$ el epimorfismo natural y sea $\mathbf{B}^* = \pi^{-1}(s_2(\mathbf{M}^*)) \subset \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*3}$. $\mathbf{B}^*$ es una extensión de esquemas de álgebras de $\mathbf{M}^*$ por $\mathbf{I}^{*2}/\mathbf{I}^{*3}$, por lo tanto, existe una sección $s' : \mathbf{M}^* \to \mathbf{B}^*$. Como $\mathbf{B}^* \subset \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*3}$, tenemos un morfismo $s_3 : \mathbf{M}^* \to \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*3}$. Actuando de esta manera, finalmente obtenemos un diagrama conmutativo de flechas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*3} \arrow[r] & \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*2} \arrow[r] & \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^* \arrow[d, equal] \\
& & & & & \mathbf{M}^* \arrow[ullll, "s_n"] \arrow[ull, "s_3"] \arrow[ul, "s_2"]
\end{tikzcd}$$

que define la sección $\mathbf{M}^* \to \mathbf{A}^*$ que buscábamos, ya que $\mathbf{A}^* = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*n}$ por el Teorema 3.2.16.

Sean s_1, s_2 dos secciones de esquemas de álgebras del epimorfismo $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$. Los morfismos inducidos $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2 : \mathbf{M}^* \to \mathbf{A}^*/{\mathbf{I}^*}^2$ difieren en un elemento de $\mathrm{Der}_k(\mathbf{M}^*, \bar{\mathbf{I}}^*) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}^*\otimes_k\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{\Delta}_{\mathbf{M}^*}, \bar{\mathbf{I}}^*)$, donde $\bar{\mathbf{I}}^* = \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2}$. Es más, el morfismo natural

$$\bar{\mathbf{I}}^*(k) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}^*\otimes_k\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^{*\circ}, \bar{\mathbf{I}}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}^*\otimes_k\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{\Delta}_{\mathbf{M}^*}, \bar{\mathbf{I}}^*)$$

es epiyectivo porque $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{M}^*, \bar{\mathbf{I}}^*) = 0$ por el Teorema 3.3.9, ya que $\mathbf{M}^*$ es separable al ser $\mathbf{M}^*\bar{\otimes}\mathbf{M}^{*\circ}$ semisimple por el Teorema 3.3.3. En conclusión, existe un $i_1 \in \mathbf{I}^*(k)$ tal que $\bar{s}_2(m) = (1+i_1)\cdot\bar{s}_1(m)\cdot(1+i_1)^{-1}$. Sea s_2' la composición de s_1 con el automorfismo de $\mathbf{A}^*$ que es conjugar por $1+i_1$. Los morfismos inducidos $\bar{s}_2$, $\bar{s}_2' : \mathbf{M}^* \to \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*3}$ difieren en un elemento de $\mathrm{Der}_k(\mathbf{M}^*, \bar{\mathbf{I}}^{*2}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}^*\otimes_k\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{\Delta}_{\mathbf{M}^*}, \bar{\mathbf{I}}^{*2})$, donde $\bar{\mathbf{I}}^{*2} = \mathbf{I}^{*2}/\mathbf{I}^{*3}$. Pero el morfismo natural $\bar{\mathbf{I}}^{*2}(k) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}^*\otimes_k\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^{*\circ}, \bar{\mathbf{I}}^{*2}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}^*\otimes_k\mathbf{M}^{*\circ}}(\mathbf{\Delta}_{\mathbf{M}^*}, \bar{\mathbf{I}}^{*2})$ es epiyectivo. Por lo tanto existe un $i_2 \in \mathbf{I}^{*2}(k)$ tal que $\bar{s}_2$ la composición de $\bar{s}_2'$ con el automorfismo de conjugación por $1+i_2$. Por lo tanto, módulo $\mathbf{I}^{*3}$, s_2 es igual a la composición de s_1 con la conjugación por $1+i_1+i_2$. Razonando de este modo obtenemos que s_2 es igual a la composición de s_1 con la conjugación por un elemento de $1+\mathbf{I}^*$. □

3.4. Álgebras unipotentes y triangulables

Definición 3.4.1. *Diremos que un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es unipotente si su esquema de álgebras cociente semisimple maximal es $\mathbf{M}^* = \mathbf{k}$.*

Las únicas k-álgebras finitas conmutativas unipotentes son las locales y racionales.

Proposición 3.4.2.

1. *Si $\mathbf{A}^*$ es esquema de k-álgebras unipotente entonces $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es un esquema de K-álgebras unipotente.*

2. *El producto tensorial $\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{B}^*$ de un par de esquemas de k-álgebras unipotentes, $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$, es unipotente.*

Demostración. 1. se debe a la Proposición 3.2.21 y 2. a la Proposición 3.2.22. □

Si $\mathbf{A}^*$ es unipotente, existe un único $\mathbf{A}^*$-módulo simple V, que resulta ser de dimensión 1. Recíprocamente, si existe un único módulo simple V y es de dimensión 1, entonces $\mathbf{M}^* = \mathbf{k}$.

Si $\mathbf{A}^*$ es unipotente, de módulo simple V, dado un $\mathbf{A}^*$-módulo E, la cadena canónica $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots \subset E$ de factores semisimples verifica que $E_{i+1}/E_i = V^{(I)}$.

Definición 3.4.3. *Sea $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ un morfismo de funtores de k-álgebras. Diremos que un $\mathbf{A}^*$-módulo E es χ-unipotente si existe una cadena de $\mathbf{A}^*$-submódulos $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots \subset E$ de modo que $E = \underset{i}{\cup} V_i$ y $w\cdot\bar{e} = \chi(w)\cdot\bar{e}$ para todo i, todo $\bar{e} \in V_{i+1}/V_i$ y todo $w \in \mathbf{A}^*$ (es decir, si consideramos k como $\mathbf{A}^*$-módulo vía χ, entonces $V_{i+1}/V_i = \oplus k$ como $\mathbf{A}^*$-módulos).*

Submódulos y cocientes de un $\mathbf{A}^*$-módulo χ-unipotente son unipotentes. El dual de un módulo (por la izquierda) de dimensión finita χ-unipotente es χ-unipotente (por la derecha).

Si $\mathbf{A}^*$ es unipotente, entonces todo $\mathbf{A}^*$-módulo es χ-unipotente, para algún morfismo de funtores de k-álgebras $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$.

Proposición 3.4.4. $\mathbf{A}^*$ *es unipotente si y sólo si existe un morfismo de k-álgebras* $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ *de modo que* A *es* χ*-unipotente.*

Demostración. Si $\mathbf{A}^*$ es unipotente y $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^* = \mathbf{k}$ es el epimorfismo canónico, entonces la cadena canónica $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A$ muestra que A es χ-unipotente. Recíprocamente, si existe tal cadena, entonces k con la estructura de $\mathbf{A}^*$-módulo definida por χ es el único $\mathbf{A}^*$-módulo simple (salvo isomorfismos), luego $\mathbf{A}^*$ es unipotente. □

Ejemplo 3.4.5. *La subálgebra* B *del álgebra de matrices triangulares cuyos coeficientes de la diagonal son iguales es un álgebra unipotente: Escribamos* $B \subset T_n(k) \subset M_n(k)$*, éste último se identifica con* $\operatorname{End}_k(E)$*, una vez que se fija una base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *de* E*. Sea* $\chi : B \to k$ *el morfismo de k-álgebras que asigna a cada matriz de* B *cualquier coeficiente de la diagonal. Considerando la cadena* $0 \subset < e_n > \subset < e_n, e_{n-1} > \subset \ldots \subset E$*, tenemos que* E *es un módulo* χ*-unipotente. Como* $\operatorname{End}_k(E) = E^* \oplus \ldots \oplus E^*$ *es* χ*-unipotente (por la derecha),* B *lo es, luego su dual también lo es (por la izquierda). En conclusión,* B *es un álgebra unipotente.*

Lema 3.4.6. *Sean* $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A'}^*$ *esquemas de k-álgebras cuyos esquemas cocientes semisimples maximales son* $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M'}^*$ *respectivamente. Todo epimorfismo* $\mathbf{A}^* \to \mathbf{A'}^*$ *define por paso al cociente un epimorfismo* $\mathbf{M}^* \to \mathbf{M'}^*$*.*

Demostración. $\mathbf{M'}^*$ es un cociente semisimple de $\mathbf{A}^*$, luego es un cociente de $\mathbf{M}^*$. □

Proposición 3.4.7. *Sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de k-álgebras unipotente.*

1. *Si* $\mathbf{B}^* \subset \mathbf{A}^*$ *es un subesquema de k-álgebras, entonces* $\mathbf{B}^*$ *es unipotente.*
2. *Si* $\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ *es un epimorfismo de esquemas de k-álgebras, entonces* $\mathbf{B}^*$ *es unipotente.*

Demostración.

1. Sea V el único $\mathbf{A}^*$-módulo simple y sea $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ la cadena canónica de A, que verifica $A_{i+1}/A_i = V^{(I)}$. Consideremos la epiyección $A \to B$, que es morfismo de $\mathbf{B}^*$-módulos (por la izquierda y por la derecha). La imagen de la cadena canónica de A por esta epiyección es una cadena de B, cuyos factores son isomorfos a una suma directa de V. Por tanto, $\mathbf{B}^*$ es unipotente.
2. El esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{B}^*$ es un cociente del de $\mathbf{A}^*$, que es $\mathbf{k}$. Luego $\mathbf{B}^*$ es unipotente.

□

Definición 3.4.8. *Diremos que $X \subset A^*$ es un subconjunto denso en $\mathbf{A}^*$ si el mínimo subesquema de espacios vectoriales de $\mathbf{A}^*$ que contiene a X es $\mathbf{A}^*$. Dualmente, X es denso en $\mathbf{A}^*$ si la única función $a \in A$ tal que $a(x) = 0$ para todo $x \in X$ es $a = 0$.*

Proposición 3.4.9. *Sea $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ un morfismo de funtores de k-álgebras y sea $X \subset A^*$ un subconjunto denso en $\mathbf{A}^*$. $\mathbf{A}^*$ es unipotente si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $x \in X$, $x - \chi(x)$ pertenece al radical de $\mathbf{A}^*$.*

2. *Para todo $\mathbf{A}^*$-módulo E de dimensión finita, si $\phi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ es el morfismo natural, entonces $\phi(x) - \chi(x) \cdot \mathrm{Id}$ es nilpotente, para todo $x \in X$ (k cuerpo algebraicamente cerrado o de característica cero).*

Demostración.

1. Si $\mathbf{A}^*$ es unipotente entonces $x - \chi(x)$ pertenece al núcleo de χ, que es el radical de $\mathbf{A}^*$. Veamos ahora el recíproco. Haciendo cociente por el radical podemos suponer que el radical es nulo. En tal caso, $x = \chi(x)$ para todo $x \in X$, luego $w = \chi(w)$ para toda $w \in \mathbf{A}^*$. Por tanto $A^* = k$.

2. Supongamos que $\mathbf{A}^*$ es unipotente. Sabemos que $x - \chi(x)$ pertenece al radical $\mathbf{I}^*$ de $\mathbf{A}^*$, y también sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{I}^{*n} \cdot E = 0$ por ser E de dimensión finita. Luego se verifica que $(x - \chi(x))^n$ es el operador nulo sobre E, es decir, $\phi(x) - \chi(x) \cdot \mathrm{Id}$ es nilpotente.

   Veamos el recíproco. Supongamos que E es un $\mathbf{A}^*$-módulo simple. Sea $\chi_E : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ la aplicación lineal que asigna a cada $w \in A^*$ la traza de $\phi(w)$ ($\chi_E \neq 0$). Dado $x \in X$, como $\phi(x) - \chi(x) \cdot \mathrm{Id}$ es nilpotente, se cumple que $0 = \chi_E(x - \chi(x)) = \chi_E(x) - n \cdot \chi(x)$, donde $n = \dim_k E$. Los elementos de X generan linealmente $\mathbf{A}^*$, por lo tanto $\chi_E = n \cdot \chi$. De aquí se sigue que $\chi_E = \chi$ y $E = k$. En conclusión, $\mathbf{A}^*$ es unipotente.

□

Definición 3.4.10. *Diremos que un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ es triangulable si $\mathbf{M}^* = \prod_i \mathbf{k}$.*

Por lo tanto, $\mathbf{A}^*$ es triangulable si y sólo si los $\mathbf{A}^*$-módulos simples son de dimensión 1.

Las álgebras finitas conmutativas triangulares coinciden con las racionales.

Comentario 3.4.11. *Como veremos en el siguiente capítulo, un grupo algebraico afín $G = \operatorname{Spec} A$ será triangulable o unipotente si y sólo si lo es $\mathbf{A}^*$. Luego, G será triangulable si y sólo si cada G-módulo es de dimensión 1, y será unipotente si y sólo si, salvo isomorfismos, k es el único G-módulo simple, tal y como podemos también encontrar en [17, §I, 2.14].*

Definición 3.4.12. *Diremos que un $\mathbf{A}^*$-módulo E es triangulable si existe una cadena de $\mathbf{A}^*$-submódulos $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset E$ tal que $E = \underset{i}{\cup} V_i$ y V_{i+1}/V_i es suma directa de módulos simples de dimensión 1, para todo i.*

Los submódulos y cocientes de un $\mathbf{A}^*$-módulo triangulable son triangulables.

Si $\mathbf{A}^*$ es triangulable entonces todo $\mathbf{A}^*$-módulo E es triangulable: La cadena canónica $0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots E$ cumple que E_i/E_{i-1} es semisimple luego suma directa de módulos simples de dimensión 1. Si A como $\mathbf{A}^*$-módulo contiene una cadena de este tipo, entonces los módulos simples son de dimensión 1 y $\mathbf{M}^* = \prod \mathbf{k}$.

Proposición 3.4.13. $\mathbf{A}^*$ *es triangulable si y sólo si el módulo regular A es triangulable.*

El álgebra de matrices triangulables es un álgebra triangulable.

Proposición 3.4.14. *Todo cociente de un esquema de k-álgebras triangulable es triangulable.*

Lema 3.4.15. *Si $\mathbf{A}^* \hookrightarrow \mathbf{B}^*$ es un morfismo inyectivo de funtores de k-álgebras, entonces cada $\mathbf{A}^*$-módulo simple es un $\mathbf{A}^*$-submódulo de un cociente (de $\mathbf{A}^*$-módulos) de un $\mathbf{B}^*$-módulo simple.*

Demostración. Dualmente tenemos el epimorfismo $\pi : B \to A$, que es de $\mathbf{A}^*$-módulos. Sea V un $\mathbf{A}^*$-módulo simple y consideremos una inyección $V \hookrightarrow A$. Sea $W \subset B$ un $\mathbf{B}^*$-módulo máximo con la condición de que $\pi(W) \cap V = 0$ (que existe por el Lema de Zorn). Tenemos la epiyección natural $\bar{\pi} : B/W \to A/\pi(W)$ y la inyección natural $V \hookrightarrow A/\pi(W)$. Si W' es cualquier $\mathbf{B}^*$-módulo simple de B/W entonces $\pi(W') \cap V \neq 0$, luego $V \hookrightarrow \pi(W')$. □

Proposición 3.4.16. *Cada subesquema de k-álgebras de un esquema de k-álgebras triangulable es triangulable.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{B}^*$ es triangulable y que $\mathbf{A}^* \hookrightarrow \mathbf{B}^*$ es un subesquema de k-álgebras. Cada $\mathbf{A}^*$-módulo simple es de dimensión 1, ya que es un $\mathbf{A}^*$-submódulo de un cociente de un $\mathbf{B}^*$-módulo simple, que es de dimensión 1. Entonces $\mathbf{A}^*$ es triangulable. □

Proposición 3.4.17.

1. *Si $\mathbf{A}^*$ es esquema de k-álgebras triangulable entonces $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$ es un esquema de K-álgebras triangulable.*

2. *El producto tensorial $\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{B}^*$ de un par de esquemas de k-álgebras triangulables, $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$, es triangulable.*

Demostración. 1. se debe a la Proposición 3.2.21 y 2. a la Proposición 3.2.22. □

Proposición 3.4.18. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras conmutativo entonces $\mathbf{A}^*$ es triangulable.*

Demostración. $\mathbf{M}^* = \prod_I \mathbf{k}$, porque la única k-álgebra conmutativa simple es k. □

Capítulo 4

Aplicación de la teoría de esquemas de álgebras a la teoría de grupos algebraicos

4.1. Aplicación de 3.1 y 3.2 a la teoría de grupos algebraicos

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un R-grupo afín. El funtor de R-módulos $R[G^{\cdot}]$ es de modo obvio un funtor de R-álgebras. Dado un funtor de R-módulos E, es fácil probar la igualdad

$$\operatorname{Hom}_{\text{grupos}}(G^{\cdot}, \mathbf{Aut}_R(\mathbf{E})) = \operatorname{Hom}_{R-\text{álgebras}}(R[G^{\cdot}], \mathbf{End}_R(\mathbf{E})).$$

Proposición 4.1.1. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un R-grupo afín. Se cumple que*

$$\widetilde{R[G^{\cdot}]} = \overline{R[G^{\cdot}]} = \mathbf{A}^*.$$

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 3.1.14 y del Teorema 2.3.3. □

El dual del morfismo de multiplicación $k[G^{\cdot}] \otimes k[G^{\cdot}] \to k[G^{\cdot}]$ es el morfismo de comultiplicación $A \to A \otimes A$, y el dual de éste es el morfismo de multiplicación $\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^*$. La estructura de esquemas de álgebras de $\mathbf{A}^*$ es la única que hace que el morfismo $k[G^{\cdot}] \to \mathbf{A}^*$ sea de funtores de álgebras.

Teorema 4.1.2. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un R-esquema en grupos. La categoría de G-módulos es igual a la categoría de $\mathbf{A}^*$-módulos.*

Demostración. Sea E un R-módulo. Observemos que $\mathbf{End}_R(\mathbf{E}) = (\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E})^*$. Por lo tanto, por la Proposición 3.1.14 y la proposición anterior

$$\operatorname{Hom}_{R-\text{álgebras}}(R[G^{\cdot}], \mathbf{End}_R(\mathbf{E})) = \operatorname{Hom}_{R-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{End}_R(\mathbf{E})).$$

En conclusión, dotar a E de estructura de G-módulo es equivalente a dotar a E de estructura de $\mathbf{A}^*$-módulo.

Observemos que $\mathrm{Hom}_R(R[G^\cdot], \mathbf{E}) \overset{2.1.16}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}^*, \mathbf{A}) = \mathrm{Hom}_R(\mathbf{A}^*, \mathbf{E})$. Por tanto, dados dos G-módulos (o $\mathbf{A}^*$-módulos) E, E', una aplicación lineal $f : E \to E'$ y $e \in E$, tendremos que $f_1 : R[G^\cdot] \to \mathbf{E}'$, $f_1(g) := f(ge) - gf(e)$ es nula si y sólo si la aplicación $f_2 : \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}'$, $f_2(a) := f(ae) - af(e)$ es nula. En conclusión, $\mathrm{Hom}_{G-\text{mód}}(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$. □

Ahora obtenemos como consecuencia principal resultados conocidos para esquemas de grupos afines.

Proposición 4.1.3. *[5, Ch. I, 1.9] Sea E un G-módulo. Cada subespacio vectorial de E de dimensión finita está incluido en un G-submódulo de E de dimensión finita.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.1.7. □

Proposición 4.1.4. *[28, 3.4] Si $G = \operatorname{Spec} A$ es un grupo algebraico entonces es un subgrupo de un grupo lineal Gl_n.*

Demostración. Consideremos las inclusión natural $G^\cdot \hookrightarrow \mathbf{A}^*$. Por la Proposición 3.1.12 sabemos que $\mathbf{A}^* = \varprojlim_i \mathbf{A}_i^*$ es el límite proyectivo de k-álgebras cocientes finitas. Por la noetherianidad de G, existe un índice i tal que el morfismo $G^\cdot \to \mathbf{A}_i^*$ es inyectivo. Además, tenemos la inyección natural $\mathbf{A}_i^* \hookrightarrow \mathbf{End}_k(\mathbf{A}_i)$, luego tenemos una inyección $G^\cdot \hookrightarrow \mathbf{End}_k(\mathbf{A}_i)$. □

Corolario 4.1.5. *[26, 5.35] Si A es un álgebra de Hopf y $V \subset A$ es un subespacio vectorial de dimensión finita, existe una subcoálgebra $E \subset A$ de dimensión finita y que contiene a V. Es decir, A es unión de sus subcoálgebras de dimensión finita.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.12 sabemos que $\mathbf{A}^* = \varprojlim_i \mathbf{A}_i^*$ es el límite proyectivo de sus k-álgebras cocientes finitas. Dualmente, A es unión de sus subcoálgebras de dimensión finita. □

Corolario 4.1.6. *[26, 5.37] Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un grupo afín. Entonces G es límite proyectivo de grupos algebraicos afines.*

Demostración. A es unión de sus subcoálgebras A_i de dimensión finita. La k-álgebra $k[A_i]$ generada por A_i es una k-álgebra de tipo finito de Hopf. Obviamente, $A = \varinjlim_i k[A_i]$ y $G = \varprojlim_i \operatorname{Spec} k[A_i]$. □

Ya hemos visto algunas de las consecuencias inmediatas de la aplicación de la sección 3.1 a la teoría de representación de grupos. Veamos algunas aplicaciones de la sección 3.2. Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo.

Proposición 4.1.7. *[28, 3.5] Cada G-módulo simple es un G-submódulo del G-módulo regular. Cada G-módulo es un G-submódulo de una suma directa de módulos regulares.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y el Teorema 3.2.3. □

Definición 4.1.8. *Un k-grupo afín G se dice (linealmente) semisimple si todo G-módulo E es semisimple.*

Proposición 4.1.9. *El k-grupo $G = \operatorname{Spec} A$ es linealmente semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^*$ es semisimple.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.1.2. □

G_m es semisimple. Sea $G_m = \operatorname{Spec} k[x, 1/x]$ el grupo multiplicativo. Calculemos la clausura de esquemas de su linealización $\widetilde{k[G_m^{\cdot}]} = \mathbf{k}[\mathbf{x}, \mathbf{1}/\mathbf{x}]^*$.

Puesto que $k[x, 1/x] = \underset{\mathbb{Z}}{\oplus} k \cdot x^i$, entonces $\mathbf{k}[\mathbf{x}, \mathbf{1}/\mathbf{x}]^* = \prod\limits_{\mathbb{Z}} \mathbf{k} \cdot w_i$ como k-espacios vectoriales, donde w_i es la función que sobre x^i vale 1 y sobre x^j vale 0 para $j \neq i$. Veamos ahora cuál es la estructura de álgebra de $\mathbf{k}[\mathbf{x}, \mathbf{1}/\mathbf{x}]^* = \prod\limits_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$: el morfismo natural $G_m^{\cdot} \to \mathbf{k}[\mathbf{x}, \mathbf{1}/\mathbf{x}]^* = \prod\limits_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, $t \mapsto (t^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es de grupos, luego $(t \cdot t')^n$ ha de ser la componente n-ésima de $(t^i)_i \cdot (t'^i)_i$. Luego la única estructura posible de k-álgebra en $\prod\limits_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$ es la asociada al producto directo de k-álgebras.

En conclusión G_m es semisimple y las representaciones lineales irreducibles de G_m son $\{E_i = k\}$, de modo que $t * e = t^i \cdot e$ para todo $t \in G_m$ y $e \in E_i$.

Proposición 4.1.10. *Si un k-grupo afín G es semisimple al cambiar de base a K, entonces antes también lo era.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.2.21. □

Más adelante, en el Corolario 4.5.25, probaremos que si un k-grupo es semisimple entonces por cambio de cuerpo base es semisimple.

Proposición 4.1.11. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. El producto directo de un par de k-grupos es linealmente semisimple si y sólo si lo es cada uno de ellos.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.1.2 y el Corolario 3.2.23. □

Corolario 4.1.12. *[26, 7.18] Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Los caracteres asociados a representaciones simples desisomorfas son linealmente independientes.*

Demostración. Consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.2.19. □

Dado un $G = \operatorname{Spec} A$-módulo E, la cadena canónica de $\mathbf{A}^*$-módulos $0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E$ puede definirse en términos de G-módulos como sigue: E_1 es el G-módulo semisimple maximal de E, E_2 es el G-módulo de E que contiene a E_1, tal que E_2/E_1 es el G-módulo semisimple maximal de E/E_1, etc. Denotemos $G(E) = \underset{i}{\oplus} E_{i+1}/E_i$.

Proposición 4.1.13. *Sea k un cuerpo de característica cero. Sean E y E' dos G-módulos. Entonces $\chi_E = \chi_{E'}$ si y sólo si $G(E) = G(E')$.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.2.18. □

Proposición 4.1.14. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. Se verifica que*

$$\operatorname{Hom}_{\text{grupos}}(G, G_m) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{k}) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{M}^*, \mathbf{k}).$$

Los caracteres multiplicativos de un grupo algebraico afín $G = \operatorname{Spec} A$ se corresponden con los puntos "racionales" de $\mathbf{A}^*$ (o los de $\mathbf{M}^*$).

Demostración. La primera igualdad es consecuencia del Teorema 4.1.2 y la segunda se debe a que $\mathbf{M}^*$ es el álgebra cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{k}$ es semisimple. □

Corolario 4.1.15. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. El conjunto $\mathrm{Spec}_{max} A^*$ de los ideales biláteros maximales de A^* es igual al conjunto de representaciones irreducibles de G.*

Demostración. Observemos que los ideales biláteros maximales de A^*, los cuales son de codimensión finita, se identifican con los esquemas de ideales biláteros maximales de $\mathbf{A}^*$. Ahora ya, se concluye por las igualdades

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}_{max}\mathbf{A}^* = \mathrm{Spec}_{max}\mathbf{M}^* &= \left\{\begin{array}{l}\text{Conjunto de clases de isomorfía}\\ \text{de } \mathbf{A}^*\text{-módulos simples}\end{array}\right\}\\ &= \left\{\begin{array}{c}\text{Conjunto de clases de isomorfía}\\ \text{de representaciones irreducibles de } G\end{array}\right\}\end{aligned}$$

□

4.2. Aplicación de 3.4 a la teoría de grupos algebraicos

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín y $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ el carácter trivial (es decir, la unidad de A, o equivalentemente $\chi(g) = 1$ para todo $g \in G$). Un G-módulo es unipotente si y sólo si es un $\mathbf{A}^*$-módulo χ-unipotente. Observemos que si $\mathbf{A}^*$ es unipotente existe un único morfismo de funtores de k-álgebras $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$, que ha de ser el carácter trivial.

Teorema 4.2.1. *Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es unipotente si y sólo si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras unipotente.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.4.4. $\square$

Por la Proposición 3.4.4 un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es unipotente si y sólo si A es un G-módulo unipotente.

Proposición 4.2.2. *Los subgrupos, cocientes y productos directos de grupos unipotentes son unipotentes.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.1.2, la Proposición 3.4.7 y la Proposición 3.4.2. $\square$

G_a es unipotente. Sea $G_a = \operatorname{Spec} k[x]$ el grupo aditivo. Dado $\alpha \in G_a^{\cdot}$, éste opera en $G_a^{\cdot}$ por translaciones: $G_a^{\cdot} \to G_a^{\cdot}$, $\beta \mapsto \beta + \alpha$. Así pues, $G_a^{\cdot}$ opera en el anillo de funciones de G_a como sigue: para cada $\alpha \in G_a^{\cdot}$ tenemos $k[x] \to k[x]$, $x \mapsto x + \alpha$ (o en general $p(x) \mapsto p(x+\alpha)$). Por tanto, si consideramos la cadena $k \subset < 1, x > \subset < 1, x, x^2 > \subset \ldots \subset k[x]$ tenemos que $k[x]$ es G_a-unipotente, luego G_a es unipotente.

Calculemos la clausura de esquemas de su linealización $\widetilde{k[G_a]} = \mathbf{k[x]}^*$.

Sea $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ una base de $k[x]$. Puesto que $k[x] = \bigoplus_{\mathbb{N}} k \cdot x^i$, entonces $\mathbf{k[x]}^* = \prod_{\mathbb{N}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{w^i} = \mathbf{k[[w]]}$, donde la identificación como k-espacios vectoriales es entender la serie formal $\sum \lambda_i w^i$ como la función cuyo valor en el elemento de la base x^n es λ_n. Por lo tanto tenemos el morfismo

$$G_a^{\cdot} \to \mathbf{k[[w]]}, \quad t \mapsto \sum_i t^i w^i.$$

Ahora bien, la multiplicación en $\mathbf{k[[w]]}$ debe ser $\sum_i (t + t')^i w^i = (\sum_j t^j w^j) \cdot (\sum_k t'^k w^k)$ para que el anterior morfismo sea de grupos, luego comparando término a término observamos que es necesario que

$$w^i \cdot w^j = \binom{i+j}{i} w^{i+j}.$$

Si $\operatorname{car} k = 0$ y denotamos $z^i = i! \cdot w^i$, tendremos que $z^i \cdot z^j = z^{i+j}$ y por lo tanto $\mathbf{k[x]}^*$ como anillo es $\mathbf{k[[z]]}$ con el producto usual del anillo de series, y tenemos el morfismo natural

$$G_a^{\cdot} \to \mathbf{k[[z]]}, \quad t \mapsto e^{tz}.$$

El cociente semisimple maximal de $\mathbf{k[[z]]}$ es $\mathbf{M}^* = \mathbf{k}$, porque los únicos ideales de $k[[z]]$ son de la forma (z^p).

Proposición 4.2.3. *[5, Ch. I, 4.8] Un grupo algebraico afín $G = \operatorname{Spec} A$ es unipotente si y sólo si es un subgrupo (cerrado) de un grupo triangular unipotente $U_n(k)$, para algún n.*

Demostración. Supongamos que $G = \operatorname{Spec} A$ es un subgrupo (cerrado) del grupo de las matrices unipotentes $U_n(k) = \operatorname{Spec} B$. Para probar que $\mathbf{A}^*$ es unipotente basta probar que $\mathbf{B}^*$ lo es, por la Proposición 3.4.7 y ya que $\mathbf{A}^*$ es una subálgebra de $\mathbf{B}^*$. Escribamos $M_n^{\cdot}(k) = \mathbf{End}_k(\mathbf{E}) = \operatorname{Spec} C$, con $C = S^{\cdot}\operatorname{End}_k(E)^* = S^{\cdot}(E \otimes E^*)$. Por tanto, B es un cociente de sumas directas y productos tensoriales de E, el cual es obviamente $U_n(k)$-unipotente. Por tanto, B es un $\mathbf{B}^*$-módulo unipotente, luego por la Proposición 3.4.4 $\mathbf{B}^*$ es unipotente.

Supongamos que $\mathbf{A}^*$ es unipotente. Podemos suponer, por la Proposición 4.1.4, que G es un subgrupo (cerrado) de un grupo lineal. Tenemos una inyección $G^{\cdot} \hookrightarrow \mathbf{End}_k(\mathbf{E})$. E es un G-módulo, luego es unipotente. Escogiendo convenientemente una base de E, tenemos que G es un subgrupo del grupo lineal triangular unipotente $U_n(k)$, con $n = \dim_k E$. □

Proposición 4.2.4. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y G un grupo íntegro. G es unipotente si y sólo si para cada morfismo de funtores de semigrupos $\phi : G \to \mathbf{End}_k(\mathbf{E})$, donde E es de dimensión finita, $\phi(g)$ es unipotente, es decir, $\phi(g) - id$ es nilpotente.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.4.9. □

No es difícil comprobar que si $G \subseteq Gl_n = \mathbf{Aut}_k(\mathbf{E})$ es un subgrupo íntegro, entonces G es unipotente si y sólo si cada punto cerrado $g \in G$ es una matriz unipotente, o bien si y sólo si E es un G-módulo unipotente.

Obviamente un G-módulo E es triangulable si y sólo si es un $\mathbf{A}^*$-módulo triangulable.

Teorema 4.2.5. *Un grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es triangulable si y sólo si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras triangulable.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.4.13. □

Por la Proposición 3.4.13 un grupo algebraico $G = \operatorname{Spec} A$ es triangulable si y sólo si A es un G-módulo triangulable.

Proposición 4.2.6. *Un grupo algebraico afín es triangulable si y sólo si es un subgrupo (cerrado) de un grupo triangular de matrices $T_n(k)$, para algún n.*

Demostración. Se procede de modo equivalente al que hemos seguido en la demostración anterior. Sólo tenemos que hacer observar que $T_n(k)$ es un cerrado de $Gl_n(k)$ (y no de $M_n(k)$). El anillo de funciones de $Gl_n(k)$ es la localización del anillo de funciones C de $M_n(k)$ por la función determinante det. Ahora bien, $C_{\det}$ es un cociente de $\underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} C \cdot \det^n$. □

Proposición 4.2.7. *Los subgrupos, cocientes y productos directos de grupos triangulables son triangulables.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 4.1.2, la Proposición 3.4.14, la Proposición 3.4.16 y la Proposición 3.4.17. □

Proposición 4.2.8. *[26, 9.23] Si $G = \operatorname{Spec} A$ es un k-grupo afín abeliano entonces es triangulable (k algebraicamente cerrado).*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y la Proposición 3.4.18. □

Definición 4.2.9. *Diremos que un grupo afín es diagonalizable si es semisimple y triangulable.*

Un grupo algebraico es diagonalizable si y sólo si es un subgrupo de G_m^n, para cierto n.

4.3. Aplicación del teorema de Wedderburn-Malcev a la teoría de grupos algebraicos

Proposición 4.3.1. *Sea $\mathbf{A}^*$ un esquema de k-álgebras e $\mathbf{I}^*$ el radical de $\mathbf{A}^*$. Se cumple que:*

1. *$1 + \mathbf{I}^*$ es un k-grupo afín unipotente.*
2. *La sucesión de morfismos obvios*
$$1 \to 1 + \mathbf{I}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{A}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{M}^* \to 1$$
es exacta. Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* = (1+\mathbf{I}^*) \rtimes \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$. En particular, si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras abeliano, $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* = (1 + \mathbf{I}^*) \times \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$.
3. *Todo subgrupo afín normal unipotente de $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$ está incluido en $1 + \mathbf{I}^*$, es decir, $1 + \mathbf{I}^*$ es el radical unipotente de $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$.*

Demostración.

1. $1 + \mathbf{I}^* = \operatorname{Spec} S^{\cdot} I$ es un funtor de semigrupos afín de $\mathbf{A}^*$, con la multiplicación. Por el Teorema 3.2.16, $\mathbf{I}^* = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*n}$, luego $1+\mathbf{I}^* = 1+\lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*n}$. Ahora bien, $1 + \mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*n}$ es un grupo, pues $(1 - \bar{i})^{-1} = 1 + \bar{i} + \ldots + \bar{i}^{n-1}$, luego $1 + \mathbf{I}^*$ es un grupo. La cadena canónica de $\mathbf{A}^*$-módulos $0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I$ de I, muestra que I es $1 + \mathbf{I}^*$-unipotente, luego $1 + \mathbf{I}^*$ es un grupo unipotente.
2. El morfismo natural $\pi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$ induce un morfismo $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$ de núcleo $1 + \mathbf{I}^*$. Además, el morfismo $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$ es epiyectivo: Dado $m \in \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$, sean $t, t' \in \mathbf{A}^*$ tales que $\pi(t) = m$ y $\pi(t') = m^{-1}$, entonces $t \cdot t' \in 1 + \mathbf{I}^*$, luego es invertible y $t \in \operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$. Tenemos la sucesión exacta
$$1 \to 1 + \mathbf{I}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{A}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{M}^* \to 1.$$
Toda sección de álgebras del epimorfismo $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$, que existe por el teorema de Wedderburn-Malcev, define por restricción una sección de grupos del morfismo $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$. Luego, $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^* = (1 + \mathbf{I}^*) \rtimes \operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$.

3. Sea $G \subset \operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$ un subgrupo afín normal unipotente. Consideremos el morfismo obvio $G \to \mathbf{M}^*$. Sea E un $\mathbf{M}^*$-módulo simple (o un $\mathbf{A}^*$-módulo simple). E^G es estable por productos por $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$, por ser G normal en $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$. Por tanto, es estable por $\operatorname{Inv} \mathbf{M}^*$ y como éste es denso en $\mathbf{M}^*$, E^G es estable por $\mathbf{M}^*$. Luego $E^G = E$, pues E es simple. En conclusión, G opera por la identidad en todo $\mathbf{M}^*$-módulo simple, luego la imagen morfismo $G \to \mathbf{M}^*$ es la unidad, es decir, $G \subset 1 + \mathbf{I}^*$.

□

Corolario 4.3.2. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. Entonces, $G \cap (1 + \mathbf{I}^*)$ es igual al radical unipotente de G.*

Demostración. $G_u = G \cap (1 + \mathbf{I}^*)$ es un subgrupo normal unipotente de G porque $1 + \mathbf{I}^*$ es un subgrupo normal unipotente de $\operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$. Si $G' \subset G/G_u$ (que está incluido en $\mathbf{M}^*$) es un subgrupo normal unipotente, de nuevo tendremos que G' opera por la identidad en todo G-módulo simple, luego $G' = \mathrm{Id}$. Por tanto, $G \cap (1 + \mathbf{I}^*)$ es igual al radical unipotente de G. □

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un grupo triangulable. Denotemos $G_u = G \cap (1 + \mathbf{I}^*)$ su radical unipotente. Tenemos que $D := G/G_u \subset \operatorname{Inv} \mathbf{M}^* = \prod G_m$ es un grupo diagonalizable (cuyas representaciones irreducibles son exactamente las de G, luego M es el anillo de funciones de D). Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_u \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & 1 + \mathbf{I}^* \arrow[r] & \operatorname{Inv} \mathbf{A}^* \arrow[r] & \operatorname{Inv} \mathbf{M}^* \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.3.3. *[26, 10.6] Si $G = \operatorname{Spec} A$ es un grupo abeliano entonces es producto directo de un grupo unipotente (su radical unipotente) y un grupo diagonalizable.*

Demostración. En el diagrama anterior consideremos un retracto r del morfismo $1 + \mathbf{I}^* \to \operatorname{Inv} \mathbf{A}^*$. Tenemos el triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G_u \arrow[r] \arrow[dr, hook] & G \arrow[d, "r"] \\
 & r(G)
\end{tikzcd}$$

Luego tenemos un morfismo $D = G/G_u \to r(G)/G_u$ de un grupo diagonalizable en uno unipotente. Luego el morfismo es trivial y $r(G) = G_u$, es decir, r es un retracto de la inclusión $G_u \to G$. En conclusión, $G = G_u \times D$. □

Proposición 4.3.4. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Si $G = \operatorname{Spec} A$ es un grupo triangulable entonces es producto semidirecto de un grupo unipotente (su radical unipotente) y un grupo diagonalizable.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta $1 \to G_u \to G \xrightarrow{\pi} D \to 1$. Tenemos que probar que existe una sección de grupos de π. Vamos a proceder por inducción noetheriana sobre G_u. Si $G_u = \mathrm{Id}$ entonces la proposición es obviamente cierta.

Si la proposición es cierta para un cociente de G por un subgrupo $G'_u \subsetneq G_u$ normal en G entonces es cierta para G: Si el epimorfismo $\bar{\pi} : G/G'_u \to D$ tiene sección $\bar{s}$ y $G' \subset G$ es la antimagen de $\bar{s}(D)$ por el epimorfismo $G \to G/G'_u$, tenemos la sucesión exacta

$$1 \to G'_u \to G' \xrightarrow{\pi} D \to 1$$

y por inducción noetheriana, sabemos que existe una sección s de π con lo que concluiríamos.

Por tanto, basta probar la proposición para el grupo imagen del morfismo natural $G \to \mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*2}$. $\mathbf{I}^*/\mathbf{I}^{*2} = \prod\limits_\alpha \mathbf{I}^*_\alpha$, donde $\mathbf{I}^*_\alpha$ son $\mathbf{M}^*$-módulos (por la derecha y la izquierda) tales que $m \cdot i = \chi_\alpha(m) \cdot i$, para todo $i \in \mathbf{I}^*_\alpha$, $m \in \mathbf{M}^*$ y siendo $\chi_\alpha : \mathbf{M}^* \to k$ un morfismo de esquemas de álgebras. Por otra parte, $\mathbf{I}^*_\alpha = \prod\limits_\beta \mathbf{I}^*_{\alpha\beta}$, donde $i \cdot m = \chi_\beta(m) \cdot i$. Haciendo cociente en $\mathbf{A}^*/\mathbf{I}^{*2}$ por el ideal bilátero conveniente y tomando la imagen de G, podemos suponer que G está incluido en un esquema de álgebras $\mathbf{B}^*$ de radical $\mathbf{k} = G_a$ y esquema cociente semisimple maximal $\mathbf{M}^*$. Sabemos que $\mathrm{Inv}\,\mathbf{B}^* = (1+\mathbf{k}) \rtimes \mathrm{Inv}\,\mathbf{M}^*$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_u \arrow[r] \arrow[d, hook] & G \arrow[r] \arrow[d, hook] & D \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & G_a = 1+\mathbf{k} \arrow[r] & \mathrm{Inv}\,\mathbf{B}^* = G_a \rtimes \mathrm{Inv}\,\mathbf{M}^* \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Inv}\,\mathbf{M}^* \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Observemos que G se inyecta en $\pi^{-1}(D) = G_a \rtimes D$. Observemos que toda sección s del epimorfismo $\pi^{-1}(D) \to D$ define un morfismo $D \to \mathbf{B}^*$ que define una sección $\mathbf{M}^* \to \mathbf{B}^*$, que se obtiene de una dada conjugando por elementos de $1+\mathbf{k}$. En conclusión, las secciones del morfismo $\pi^{-1}(D) = G_a \rtimes D \to D$ se obtienen de una dada conjugando por elementos de G_a.

Si $G_u = G_a$ entonces $G = \pi^{-1}(D) = G_a \rtimes D$ y hemos terminado. Si $G_u = \alpha_{p^n}$, tendremos

$$D = G/G_u \hookrightarrow \pi^{-1}(D)/G_u = G_a/G_u \rtimes D \simeq G_a \rtimes D.$$

Conjugando por un elemento de G_a podemos suponer que la inclusión natural $D = G/G_u \to G_a/G_u \rtimes D$ es $d \mapsto (0,d)$. Luego la sección $D \to G_a \rtimes D$, $d \mapsto (0,d)$ valora en G y hemos terminado. $\square$

Proposición 4.3.5. *Sea $\mathbf{A}^*$ un esquema de k-álgebras e $\mathbf{I}^*$ su radical. Entonces, $\mathbf{k} \oplus \mathbf{I}^*$ es un esquema de k-álgebras unipotente. Cualquier otro subesquema de álgebras unipotente de $\mathbf{A}^*$, estable por conjugaciones por invertibles de $\mathbf{A}^*$, está incluido en $\mathbf{k} \oplus \mathbf{I}^*$.*

Demostración. $\mathbf{B}^* := \mathbf{k} \oplus \mathbf{I}^* \subset \mathbf{A}^*$ opera en los factores de la cadena $\mathbf{B}^* \supset \mathbf{I}^* \supset \mathbf{I}^{2*} \supset \dots$ vía el epimorfismo de funtores de k-álgebras natural (y único) $\chi : \mathbf{B}^* \to \mathbf{k}$. Tomando incidentes obtenemos una cadena en B de modo que en los factores opera $\mathbf{B}^*$ vía χ. Por lo tanto $\mathbf{B}^*$ es unipotente.

Sea $\mathbf{C}^* \subset \mathbf{A}^*$ un subesquema de álgebras unipotente, estable por conjugaciones por invertibles de $\mathbf{A}^*$. Sea $\mathbf{D}^*$ la imagen de $\mathbf{C}^*$ por el epimorfismo natural $\mathbf{A}^* \to \mathbf{M}^*$. $\mathbf{D}^*$ es un esquema de álgebras unipotente, estable por conjugaciones por invertibles de $\mathbf{M}^*$. Basta probar que $\mathbf{D}^*$ está incluido en k. Para ello basta probar que está incluido en $Z(\mathbf{M}^*)$, pues la única k-álgebra conmutativa finita reducida unipotente es k. Sea $\chi : \mathbf{D}^* \to \mathbf{k}$ el único morfismo de funtores de k-álgebras. Dado un $\mathbf{M}^*$-módulo simple E, sea E_1 el subespacio vectorial de E sobre el que $\mathbf{D}^*$ opera vía χ. E_1 es estable por multiplicaciones por $\mathbf{M}^*$, porque es estable por sus elementos invertibles (los cuales son densos en $\mathbf{M}^*$). Por tanto, $E = E_1$ y $\mathbf{D}^*$ opera en E vía χ. Ahora es ya claro que $\mathbf{D}^* \subseteq Z(\mathbf{M}^*)$. $\square$

4.4. Dualidad de Cartier

En esta subsección supondremos que $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras conmutativo.

Definición 4.4.1. *Dado un funtor de álgebras $\mathcal{A}$, definimos el funtor espectro de $\mathcal{A}$ como* $(\operatorname{Spec} \mathcal{A})(B) = \operatorname{Hom}_{\text{álgebras}}(\mathcal{A}, \mathbf{B})$ *para cada k-álgebra no conmutativa B.*

Ejemplo 4.4.2. *Sea X un conjunto. Consideremos en X la topología discreta. Sea $\mathcal{X}$ el funtor sobre la categoría de k-álgebras $\mathcal{C}_k$, que diremos que es el funtor constante X, definido por*

$$\mathcal{X}(B) := \operatorname{Aplic}_{\text{cont.}}(\operatorname{Spec} B, X)$$

para toda k-álgebra B.

Sea $\mathcal{A}_X$ el funtor de álgebras definido por

$$\mathcal{A}_X(B) = \operatorname{Aplic}(X, B) = \prod_X B, \quad \forall\, B \in \mathcal{C}_k.$$

Observemos que $\mathcal{A}_X = \prod_X \mathbf{k}$ es un esquema de álgebras conmutativo.

Probemos que $\operatorname{Spec} \mathcal{A}_X = \mathcal{X}$.

Los morfismos de funtores de k-álgebras son en particular morfismos de funtores de k-espacios vectoriales

$$(\operatorname{Spec} \mathcal{A}_X)(B) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathcal{A}_X, \mathbf{B}) \subset \operatorname{Hom}_k(\mathcal{A}_X, \mathbf{B}) = \operatorname{Hom}_k(\prod_{x \in X} \mathbf{k}, \mathbf{B})$$

y sabemos por la Proposición 2.1.21 que los morfismos de k-espacios vectoriales de $\prod_X \mathbf{k}$ en $\mathbf{B}$ factorizan a través de la proyección en un número finito de factores.

Luego, dado un morfismo $\prod_X \mathbf{k} \to \mathbf{B}$ *existe un subconjunto* $Y \subset X$ *de orden finito, de modo que se tiene la factorización*

$$\prod_X \mathbf{k} \to \prod_Y \mathbf{k} \to \mathbf{B}.$$

Igualmente, todo morfismo continuo $\operatorname{Spec} B \to X$ *es de imagen finita, pues* $\operatorname{Spec} B$ *es compacto y* X *discreto. Podremos suponer que* X *es un conjunto finito.*

Ahora ya,

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\prod_X k, B) &= \text{Aplic.cont.}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} \prod_X k = \coprod_X \operatorname{Spec} k)\\ &= \operatorname{Aplic}_{\text{cont.}}(\operatorname{Spec} B, X).\end{aligned}$$

Más abajo veremos que las funciones de $\operatorname{Spec} \mathcal{A}_X$ *coinciden con* $\mathcal{A}_X$*, es decir,*

$$\mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec} \mathcal{A}_X, \mathbf{k}) = \mathcal{A}_X.$$

Proposición 4.4.3. $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = \mathbf{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{k})$.

Demostración. Por la Fórmula de los funtores adjuntos 2.1.20 (restringida a los morfismos de álgebras y no todos los morfismos de módulos) se verifica que

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{k})(B) &= \operatorname{Hom}_{B-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*{}_{|B}, \mathbf{B}) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B})\\ &= \operatorname{Spec} \mathbf{A}^*(B).\end{aligned}$$

□

Por tanto $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}$. Veamos que $\mathbf{A}$ es la envolvente lineal (cuasi-coherente) de $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$.

Si $\dim_k A < \infty$ entonces

$$\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = (\operatorname{Spec} A^*)^{\cdot}.$$

Teorema 4.4.4. *Sea* $\mathbf{A}^*$ *un esquema de álgebras conmutativas. Sabemos que* $\mathbf{A}^* = \varprojlim_i \mathbf{A}_i^*$*, donde los* $\mathbf{A}_i^*$ *son los cocientes de álgebras de* $\mathbf{A}^*$ *de dimensión finita. Se verifica que*

$$\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = \varinjlim_i \operatorname{Spec} \mathbf{A}_i^*.$$

Demostración. Recordemos por el Lema 3.1.5, que la imagen de todo morfismo k-lineal $\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}$ es un k-espacio vectorial coherente, luego todo morfismo de funtores de k-álgebras $\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}$ factoriza a través de un álgebra cociente $\mathbf{A}_i^*$ de $\mathbf{A}^*$ de dimensión finita. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*(B) &= \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}) = \varinjlim_i \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}_i^*, \mathbf{B})\\ &= \varinjlim_i \operatorname{Spec}\mathbf{A}_i^*(B).\end{aligned}$$

□

Proposición 4.4.5. *Se cumple que*

$\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \operatorname{Spec}\mathbf{B}^*) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{B}^*, \mathbf{A}^*) = \operatorname{Hom}_{\text{coálgebras}}(A, B)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \operatorname{Spec}\mathbf{B}^*) &= \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\varinjlim_i \operatorname{Spec}\mathbf{A}_i^*, \operatorname{Spec}\mathbf{B}^*)\\ &= \varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}_i^*, \operatorname{Spec}\mathbf{B}^*)\\ &\overset{*}{=} \varprojlim_i \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{B}^*, \mathbf{A}_i^*)\\ &= \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{B}^*, \mathbf{A}^*)\end{aligned}$$

donde $\overset{*}{=}$ se debe a que $\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}((\operatorname{Spec} A_i^*)^{\cdot}, F) = F(A_i^*)$, para todo funtor F. □

Proposición 4.4.6. *Se verifica:*

1. $\mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{k}) = \mathbf{A}^*$.
2. *El cierre cuasi-coherente de* $k[\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*]$ *es* $\mathbf{A}$.
3. $\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(A, E)$.

Demostración.

1. Sigamos las notaciones del teorema anterior:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{k}) &= \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\varinjlim_i \operatorname{Spec}\mathbf{A}_i^*, \mathbf{k})\\ &= \varprojlim_i \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}_i^*, \mathbf{k}) \overset{*}{=} \varprojlim_i A_i^* = A^*\end{aligned}$$

donde la igualdad $\overset{*}{=}$ se debe a que $\operatorname{Spec}\mathbf{A}_i^*$ es un funtor representable por A_i^*. Por cambio de base del álgebra base k, obtenemos igualmente que

$$\mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{k})(B) = (A_B)^*.$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_k(k[\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*], \mathbf{E}) &= \operatorname{Hom}_k(\mathbf{E}^*, k[\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*]^*) = \operatorname{Hom}_k(\mathbf{E}^*, \mathbf{A}^*)\\ &= \operatorname{Hom}_k(A, E).\end{aligned}$$

3. De la igualdad $\mathrm{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) = \mathrm{Hom}_k(k[\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*], \mathbf{E})$ y el apartado anterior se obtiene 3.

□

Explícitamente, $\mathbf{A}^* = \mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{k})$, $w \mapsto \tilde{w}$, donde $\tilde{w}(\phi) = \phi(w)$, para todo $\phi \in \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* = \mathbf{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{k})$.

Teorema 4.4.7. *Si* $\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*$ *es un funtor de grupos entonces A es una k-álgebra y se cumple:*

1. $\mathrm{Hom}_{\text{semigrupos}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{B}) = \mathrm{Hom}_{k-\text{álgebras}}(A, B)$*, para toda k-álgebra conmutativa B. Es decir, el cierre cuasi-coherente de funtores de álgebras de* $k[\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*]$ *es* $\mathbf{A}$.

2. Si suponemos que $\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*$ *es un funtor de grupos abelianos entonces A es una k-álgebra conmutativa y* $\mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, G_m) = (\operatorname{Spec} A)^{\cdot}$ *(igualdad que en particular nos dice que* $\operatorname{Spec} A$ *es un k-grupo afín abeliano).*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(\mathbf{A} \otimes_k \mathbf{A})^* = \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \times \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* &\to \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \\ \operatorname{Spec}\mathbf{k} &\to \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \end{aligned}$$

el morfismo de multiplicación y la unidad del grupo. Tomando $\mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(-, \mathbf{k})$, obtenemos los morfismos $\mathbf{A}^* \to (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^*$ y $\mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$. Tomando duales tenemos los morfismos $A \otimes A \to A$ y $k \to A$, que dotan a A de estructura de k-álgebra. Además, como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \times \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \arrow[d, hook] \\ \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \arrow[r] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, el morfismo $\operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \hookrightarrow \mathbf{A}$ es de semigrupos.

1. Dado un morfismo de funtores de semigrupos con unidad $\phi : \operatorname{Spec}\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}$ extiende a un único morfismo de funtores de k-módulos $\tilde{\phi} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, que tenemos que probar que es un morfismo de funtores de k-álgebras: Se cumple que $\tilde{\phi}(a \cdot g) - \tilde{\phi}(a) \cdot \tilde{\phi}(g) = 0$, porque fijando $g \in \operatorname{Spec}\mathbf{A}^*$ es la extensión lineal del morfismo $f(g') := \phi(g' \cdot g) - \phi(g') \cdot \phi(g) = 0$, con $g' \in \operatorname{Spec}\mathbf{A}^*$. Ahora fijando a, la extensión lineal del morfismo $f'(g) = \tilde{\phi}(a \cdot g) - \tilde{\phi}(a) \cdot \tilde{\phi}(g) = 0$ es justamente el morfismo $\tilde{\phi}(a \cdot a') - \tilde{\phi}(a) \cdot \tilde{\phi}(a') = 0$.

2. $$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, G_m) &= \mathbf{Hom}_{\text{semigrupos}}(\operatorname{Spec}\mathbf{A}^*, \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = (\operatorname{Spec} A)^{\cdot}. \end{aligned}$$

□

Explícitamente, $(\operatorname{Spec} A)^{\cdot} = \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*, G_m)$, $x \mapsto \tilde{x}$, donde $\tilde{x}(\phi) = \phi(x)$, para todo $x \in (\operatorname{Spec} A)^{\cdot} \subset \mathbf{A}^*$ y $\phi \in \operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = \mathbf{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{k})$.

Definición 4.4.8. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín abeliano. El funtor $G^* := \operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ se llamará grupo dual de G.*

Observemos que

$$G^* = \operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = \mathbf{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{k}) = \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G^{\cdot}, G_m^{\cdot})$$

y $\mathbf{Hom}_{grupos}(G^{\cdot}, G_m^{\cdot})$ es un funtor de grupos abelianos: $(f \cdot f')(g) := f(g) \cdot f'(g)$, para todo $f, f' \in \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G^{\cdot}, G_m)$ y $g \in G$. Observemos que la inclusión $G^* = \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G^{\cdot}, G_m^{\cdot}) \subset \mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(G^{\cdot}, \mathbf{k}) = \mathbf{A}$ es un morfismo de semigrupos con unidad.

Dado un funtor de grupos abelianos G, denotemos $G^* = \mathbf{Hom}_{grupos}(G, G_m)$.

Proposición 4.4.9. *Si $H = \operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ es un funtor de grupos abelianos entonces $H = H^{**}$.*

Demostración. Tenemos que probar que el morfismo $H \to H^{**}$, $h \mapsto \tilde{h}$, donde $\tilde{h}(f) := f(h)$, para toda $f \in H^* = (\operatorname{Spec} A)^{\cdot}$, es un isomorfismo. Ahora bien, siguiendo las notaciones del párrafo previo a la definición, $f = \tilde{x}$, para cierto $x \in \operatorname{Spec} A$, y $f(h) = \tilde{x}(h) = h(x)$. Es decir, si escribimos $G = \operatorname{Spec} A$, $H = G^*$ y $H^* = G^{**} = G$ (Teorema 4.4.7 2.), el morfismo $H \to H^{**}$ es el morfismo identidad $G^* \to G^*$. □

Teorema 4.4.10. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín abeliano. Entonces,* $\mathbf{A}$ *es el cierre cuasi-coherente de álgebras de $k[G^*]$. Por tanto,*

1. $\operatorname{Hom}_{\text{semigrupos}}(G^*, \mathbf{B}) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(A, B)$, *para toda k-álgebra conmutativa B.*

2. $G^{**} = G$[1].

3. $\operatorname{Hom}_{\text{grupos}}(G_1, G_2) = \operatorname{Hom}_{\text{grupos}}(G_2^*, G_1^*)$.

Demostración.

1. Es consecuencia del Teorema 4.4.7 1.

2. Es consecuencia del Teorema 4.4.7 2.

3. Todo morfismo de grupos $G_1 \to G_2$, tomando $\mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(-, G_m)$ define un morfismo $G_2^* \to G_1^*$. Tomando $\mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(-, G_m)$ obtenemos el morfismo $G_1 \to G_2$ de partida, como es fácil de comprobar. Igualmente, todo morfismo de grupos $G_2^* \to G_1^*$, tomando $\mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(-, G_m)$ define un morfismo $G_1 \to G_2$. Tomando $\mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(-, G_m)$ obtenemos el morfismo $G_2^* \to G_1^*$ de partida.

[1] Este resultado para grupos abelianos finitos, formulado en términos funtoriales, se lo debemos a Carlos Sancho ([26]). Esta sección es un desarrollo de este resultado en el marco de esquemas de álgebras y envolventes lineales.

□

Teorema 4.4.11. *La categoría de grupos abelianos afines $G = \operatorname{Spec} A$ es anti-equivalente a la categoría de funtores* $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ *de grupos abelianos.*

Proposición 4.4.12. *Sean $G_1 = \operatorname{Spec} A_1$ y $G_2 = \operatorname{Spec} A_2$ dos grupos afines conmutativos. Se cumple que*

$$(G_1 \times G_2)^* = G_1^* \times G_2^*.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(G_1 \times G_2)^* &= \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G_1 \times G_2, G_m) \\ &= \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G_1, G_m) \times \mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G_2, G_m) = G_1^* \times G_2^*.\end{aligned}$$

□

Veamos algún ejemplo.

Ejemplo 4.4.13. $G_m^* = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[\mathbf{x}, \mathbf{1}/\mathbf{x}]^* = \operatorname{Spec} \prod_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, *que es igual al funtor de grupos constante*[2] $\mathbb{Z}$. *Dicho de otro modo,* $\mathbf{Hom}_{\text{grupos}}(G_m, G_m) = \mathbb{Z}$, *dado* $\tau : G_m \to G_m$, *existe* $n \in \mathbb{Z}$, *de modo que* $\tau(\alpha) = \alpha^n$.

Obviamente $\mathbb{Z}^* = G_m$. *Puesto que* $\mathbb{Z} = \operatorname{Spec} \prod_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$ *se tiene de nuevo que* $G_m^* = \mathbb{Z}$.

Los esquemas de álgebras cocientes de $\prod_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$ *se obtienen proyectando en unos cuantos factores. Por tanto,* $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* \subset \operatorname{Spec} \prod_{\mathbb{Z}} \mathbf{k} = \mathbb{Z}$ *es un subgrupo si y sólo si* $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = n \cdot \mathbb{Z}$. *Dualmente, los grupos algebraicos cocientes de* G_m *son los epimorfismos* $G_m \to G_m$, $t \mapsto t^n$. *Por tanto, los subgrupos de* G_m *son los* $\mu_n = \{\alpha \in G_m : \alpha^n = 1\} = \operatorname{Spec} k[x]/(x^n - 1) = (\mathbb{Z}/(n))^*$.

Igualmente, $(G_m \times \overset{n}{\cdots} \times G_m)^* = \mathbb{Z} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{Z}$. *Por la teoría de grupos abelianos (o* $\mathbb{Z}$*-módulos), los subgrupos de* $\mathbb{Z} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{Z}$ *son isomorfos a* $\mathbb{Z}^r$ *vía un morfismo inyectivo* ϕ *(digamos de matriz* (n_{ij})*),*

$$\mathbb{Z} \times \overset{r}{\cdots} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{Z}$$

cuyo conúcleo es isomorfo a $\mathbb{Z}^{n-r} \times \mathbb{Z}/(n_1) \times \ldots \times \mathbb{Z}/(n_r)$. *Dualmente los subgrupos de* $G_m \times \overset{n}{\cdots} \times G_m$ *son isomorfos a* $G_m^{n-r} \times \mu_{n_1} \times \ldots \times \mu_{n_r}$ *que es isomorfo al núcleo del epimorfismo*

$$G_m^n \to G_m^r,\ (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1^{n_{11}} \cdot \ldots \cdot t_n^{n_{n1}}, \ldots, t_1^{n_{1r}} \cdot \ldots \cdot t_n^{n_{nr}}).$$

Proposición 4.4.14. *[5, Ch. III, 8.12] La categoría de los grupos algebraicos diagonalizables es anti-equivalente a la categoría de los* $\mathbb{Z}$*-módulos de tipo finito (o grupos abelianos finito generados).*

[2] Tanto $\operatorname{Spec} \mathbf{A}^*$ como $\operatorname{Spec} A$ (si A es una k-álgebra de tipo finito) son funtores que conmutan con límites inductivos, luego para definir un morfismo entre ellos podemos considerarlos como funtores sobre k-álgebras de tipo finito. Además, como conmutan con productos directos, podemos considerarlos como funtores sobre las k-álgebras de tipo finito conexas.

Ejemplo 4.4.15. *Calculemos G_a^*. Supongamos que* $\operatorname{car} k = 0$.

$$\begin{aligned} G_a^*(B) &= \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{k}[\mathbf{x}]^*, \mathbf{B}) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{k}[[\mathbf{z}]], \mathbf{B}) \\ &= \varinjlim_n \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(k[z]/(z^n), B) = \operatorname{rad} B. \end{aligned}$$

Sigamos la notación $G_a^* = \operatorname{rad} \mathbf{k}$. *Explícitamente, asignamos a* $n \in \operatorname{rad} \mathbf{k}$ *el morfismo* $G_a \to G_m$, $\alpha \mapsto e^{\alpha \cdot n}$. *Por último,* $(\operatorname{rad} \mathbf{k})^* = G_a$.

Sea G un grupo finito abeliano. Por definición, $G = \operatorname{Spec} A$ es unipotente si y sólo si A^* es una k-álgebra local racional.

Teorema 4.4.16. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p. Todo grupo abeliano finito G descompone canónicamente como producto directo de un grupo unipotente de dual unipotente, grupos multiplicativos μ_{p^n} y grupos constantes $\mathbb{Z}/(m)$.*

Demostración. G^* es producto directo de un grupo F unipotente por un grupo H diagonalizable. Entonces $G = F^* \times H^*$. H^* es producto directo de $\mathbb{Z}/(m)$. F^* es producto directo de un grupo unipotente (de dual unipotente) por un grupo diagonalizable (de dual unipotente). Ahora bien, un grupo diagonalizable cuyo dual es unipotente ha de contener un único punto (racional), es decir, ha de ser producto directo de μ_{p^n}. □

4.5. Invariantes. Operador de Reynolds

Sea G un funtor de grupos y F un funtor de G-módulos. En esta sección k denotará un anillo.

A veces, denotaremos $g \in G(A)$ simplemente $g \in G$ y dados $f \in F(A)$ y un morfismo de k-álgebras $A \to B$, seguiremos denotando por f a la imagen de éste por el morfismo $F(A) \to F(B)$.

Definición 4.5.1. *Sea F un funtor de G-módulos. Definimos $F(A)^G := \{f \in F(A)$, tales que $g \cdot f = f$ para todo $g \in G\}$.*[3] *Denotamos por F^G el subfuntor de k-módulos de F definido por $F^G(A) := F(A)^G$.*

Si F_1 y F_2 son dos funtores de G-módulos entonces $\mathbf{Hom}_k(F_1, F_2)$ es un funtor de G-módulos ($g * f := g \cdot f(g^{-1} \cdot -)$ para toda $f \in \mathbf{Hom}_k(F_1, F_2)$) y se cumple que

$$\mathbf{Hom}_k(F_1, F_2)^G = \mathbf{Hom}_G(F_1, F_2).$$

Definición 4.5.2. *Diremos que un funtor de G-módulos es un funtor dual de G-módulos si es un funtor de k-módulos dual. Igualmente, diremos que un funtor de $\mathbf{A}^*$-módulos es un funtor dual de $\mathbf{A}^*$-módulos si es un funtor de k-módulos dual.*

[3] Con mayor precisión, $g \cdot f = f$ para todo $g \in G(B)$ y todo morfismo de k-álgebras $A \to B$.

Definición 4.5.3. *Un funtor de grupos G se dice (linealmente) semisimple si para toda sucesión exacta (en la categoría de funtores de k-módulos) de funtores de G-módulos duales*

$$0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$$

entonces

$$0 \to F_1^G \to F_2^G \to F_3^G \to 0$$

es exacta.

Sea, de ahora en adelante, $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. Sea E una representación lineal de G. $\mathbf{E}^G$ es el núcleo de los morfismos

$$\mathbf{E} \underset{T}{\overset{S}{\rightrightarrows}} \mathbf{Hom}_{\text{funtores}}(G^{\cdot}, \mathbf{E}) = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) = \mathbf{A} \otimes_k \mathbf{E}$$

donde $S(e)(g) := g \cdot e$, $T(e)(g) := e$ para todo $e \in E$ y $g \in G$. Por tanto, $\mathbf{E}^G$ es un k-módulo cuasi-coherente ("los invariantes son estables por cambios de base").

Teorema 4.5.4. *La categoría de funtores duales de G-módulos es equivalente a la categoría de funtores duales de $\mathbf{A}^*$-módulos.*

Demostración. Sea $F = G^*$ un funtor dual de G-módulos. Su funtor de endomorfismos $\mathbf{End}_k(F)$ es un funtor de k-álgebras y al mismo tiempo es un funtor dual:

$$\mathbf{End}_k(F) = \mathbf{Hom}_k(F, G^*) = \mathbf{Hom}_k(F \otimes G, \mathbf{k}) = (F \otimes G)^*.$$

Podemos aplicar entonces la Proposición 3.1.14, y por lo tanto

$$\operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(R[G^{\cdot}], \mathbf{End}_k(F)) = \operatorname{Hom}_{k-\text{álgebras}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{End}_k(F)).$$

Es decir, es equivalente dotar a F de estructura de funtor de G-módulos que dotarlo de estructura de funtor de $\mathbf{A}^*$-módulos.

De modo análogo al seguido en el Teorema 4.1.2, se demuestra que los morfismos de funtores de G-módulos entre dos G-módulos F y F' se corresponden con los morfismos de funtores de $\mathbf{A}^*$-módulos entre ellos. $\square$

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín y sea $\Theta : G \to \mathbf{k}$, $g \mapsto 1$ el carácter trivial, que induce la representación trivial $\mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$. $\Theta \in A$ coincide con la unidad de A.

Teorema 4.5.5. *Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$ como esquemas de k-álgebras, siendo la proyección de $\mathbf{A}^*$ en el primer factor $\pi_1 = \Theta$.*

Demostración. Supongamos que G es semisimple. La proyección $\Theta : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ es un morfismo de funtores de G-módulos (o de $\mathbf{A}^*$-módulos) por la izquierda y por la derecha. Tomando invariantes (por la izquierda) obtenemos un epimorfismo $\Theta : \mathbf{A}^{*G} \to \mathbf{k}$. Sea pues $1_i \in \mathbf{A}^{*G}$ tal que $\Theta(1_i) = 1$. Sea $* : \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^{*\circ}$ el morfismo de esquemas de álgebras inducido por el morfismo $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.

Se cumple que $1_d = *(1_i)$ es G-invariante por la derecha y $\Theta(1_d) = 1$. Luego, $w = 1_i \cdot 1_d$ es G-invariante por la izquierda y por la derecha y $\Theta(w) = 1$. Por tanto, $w' \cdot w = w'(1) \cdot w = w \cdot w'$, w es idempotente, tenemos la descomposición en producto de esquemas de álgebras $\mathbf{A}^* = w \cdot \mathbf{A}^* \oplus (1-w) \cdot \mathbf{A}^*$, el morfismo $\mathbf{k} \to \mathbf{A}^*$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot w$ es una sección de Θ, $w \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{k} \cdot w$ y Θ se anula sobre $(1-w) \cdot \mathbf{A}^*$.

Supongamos ahora que $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$, siendo $\pi_1 = \Theta$ y tratemos de probar que G es semisimple.

Sea $w = (1, 0) \in \mathbf{A}^*$, que es G-invariante por la izquierda (y por la derecha). Dado un funtor dual de G-módulos F, se cumple que $w \cdot F = F^G$: Tenemos que $w \cdot F \subseteq F^G$, pues $g \cdot (w \cdot f) = (g \cdot w) \cdot f = w \cdot f$, para toda $g \in G$ y $f \in F$. Recíprocamente, $F^G \subseteq w \cdot F$: Sea $f \in F$ G-invariante. El morfismo $G \to F$, $g \mapsto g \cdot f = f$ extiende a un único morfismo $\mathbf{A}^* \to F$, $w' \mapsto w'(1) \cdot f$, o bien $w' \mapsto w' \cdot f$. Por tanto, $w' \cdot f = w'(1) \cdot f$ y $f = w \cdot f \in w \cdot F$.

Tomar invariantes es exacto por la izquierda. El morfismo $F_2^G \to F_3^G$ es epiyectivo porque lo es el morfismo $F_2^G = w \cdot F_2 \to w \cdot F_3 = F_3^G$. □

En la demostración del Teorema 4.5.5 hemos probado también los siguientes teoremas.

Teorema 4.5.6. *Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si existe una aplicación lineal G-invariante por la izquierda $w : A \to k$ tal que $w(1) = 1$.*

Puede encontrarse este resultado, para k cuerpo y G un grupo algebraico linealmente reductivo en [6] y [26, 7.2].

Teorema 4.5.7. *Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si y sólo si para toda sucesión exacta (en la categoría de funtores de k-módulos) de G-esquemas*

$$0 \to \mathbf{E}_1^* \to \mathbf{E}_2^* \to \mathbf{E}_3^* \to 0$$

la sucesión

$$0 \to \mathbf{E}_1^{*G} \to \mathbf{E}_2^{*G} \to \mathbf{E}_3^{*G} \to 0$$

es exacta.

Supongamos ahora que k es un cuerpo. La sucesión exacta dual $0 \to E_3 \to E_2 \to E_1 \to 0$ de la del teorema puede obtenerse como límite inductivo de sucesiones exactas $0 \to E_{3,j} \to E_{2,j} \to E_{1,j} \to 0$, donde los $E_{i,j}$ son $\mathbf{A}^*$-submódulos de tipo finito (luego $\dim_k E_{i,j} < \infty$) de E_i. La toma de invariantes conmuta con límites proyectivos. Por tanto, en el teorema anterior puede suponerse que E_1, E_2 y E_3 son k-espacio vectoriales de dimensión finita.

Si k es un cuerpo y E es un k-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $\mathbf{E}^*$ es un k-módulo cuasi-coherente.

Teorema 4.5.8. *Sea k un cuerpo y $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. G es semisimple si y sólo si el funtor "tomar invariantes" es exacto sobre la categoría de los G-módulos cuasi-coherentes.*

Definición 4.5.9. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple. Llamaremos integral invariante de G (influidos por la teoría de grupos de Lie compactos), que denotaremos w_G, a la única 1-forma $w_G \in \mathbf{A}^*$ que sea G-invariante por la izquierda y derecha y tal que $w_G(1) = 1$.*

Proposición 4.5.10. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo semisimple y $w_G \in \mathbf{A}^*$ la integral invariante de G. Sea F un funtor dual de G-módulos. Se cumple que:*

1. *$F^G = w_G \cdot F$.*

2. *F descompone de modo único como suma directa de F^G y otro subfuntor de G-módulos, explícitamente*

$$F = w_G \cdot F \oplus (1 - w_G) \cdot F.$$

Demostración.

1. Lo hemos probado en la demostración del Teorema 4.5.5.

2. Como $\mathbf{A}^* = w_G \cdot \mathbf{A}^* \oplus (1 - w_G) \cdot \mathbf{A}^*$ entonces

$$F = \mathbf{A}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} F = w_G \cdot F \oplus (1 - w_G) \cdot F.$$

Si tenemos un isomorfismo de G-módulos $F = F^G \oplus H$, multiplicando por w_G tenemos que $w_G \cdot F = F^G \oplus w_G \cdot H$, luego $w_G \cdot H = 0$, luego $(1 - w_G) \cdot F = (1 - w_G) \cdot H = (w_G + 1 - w_G) \cdot H = H$.

□

Definición 4.5.11. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple y $w_G \in \mathbf{A}^*$ la integral invariante de G. Sea F un funtor dual de G-módulos. Llamaremos operador de Reynolds generalizado de F al morfismo $F \to F^G$, $f \mapsto w_G \cdot f$, que es el único retracto de G-módulos de la inclusión $F^G \hookrightarrow F$.*

Proposición 4.5.12. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín y F, H dos funtores duales de G-módulos.*

1. *$\mathbf{Hom}_k(H, F)$ es un funtor dual de G-módulos.*

2. *Sea G semisimple y w_G su integral invariante. Si $\pi : F \to H$ es un epimorfismo de G-módulos y $s : H \to F$ es una sección de π de k-módulos, entonces $w_G \cdot s$ es una sección de G-módulos de π.*

Demostración.

1. Sólo tenemos que probar que $\mathbf{Hom}_k(H, F)$ es un funtor dual. En efecto, $\mathbf{Hom}_k(H, F) = \mathbf{Hom}_k(H \otimes T, \mathbf{k})$, donde $F = T^*$.

2. Consideremos el epimorfismo de G-módulos (luego de $\mathbf{A}^*$-módulos)

$$\pi_* : \mathbf{Hom}_k(H, F) \to \mathbf{Hom}_k(H, H),\ f \mapsto \pi \circ f.$$

Por tanto, $\pi \circ (w_G \cdot s) = \pi_*(w_G \cdot s) = w_G \cdot \pi_*(s) = w_G \cdot \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

□

Un G-módulo E diremos que es simple si no contiene ningún G-submódulo $E' \subsetneq E$, tal que E' sea un sumando directo como k-módulo de E (esta última condición equivale a que el morfismo $E^* \to E'^*$ sea epiyectivo por el Comentario 2.1.15). Si G es un k-grupo afín semisimple y E es un k-módulo de tipo finito y G-módulo, entonces por la proposición anterior es fácil demostrar que E es suma directa de G-módulos simples.

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín y sea R una k-álgebra.

Definición 4.5.13. *Decimos que R es un G-anillo si G opera en R mediante endomorfismos de k-álgebras. Es decir, el morfismo $G^{\cdot} \to \mathbf{End}_k(\mathbf{R})$ asigna a cada punto $g \in G(A)$ un endomorfismo $g\cdot$ de $R \otimes_k A$ que es morfismo A-lineal y endomorfismo de anillos.*

Definición 4.5.14. *Dado un G-anillo R y un funtor de R-módulos M, decimos que M es un RG-módulo si es G-módulo y dicha estructura es compatible con la de R-módulo:*

$$g(r \cdot m) = g(r) \cdot g(m)$$

para todo $g \in G$, $r \in R$ y $m \in M$.

Dados dos funtores de RG-módulos M y N, consideremos el funtor de homomorfismos $\mathbf{Hom_R}(M, N)$ $\mathbf{R}$-lineales de M en N:

$$\mathbf{Hom_R}(M, N)(A) = \operatorname{Hom}_{R_A}(M_{|A}, N_{|A}),$$

para toda k-álgebra conmutativa A. Obviamente, $\mathbf{Hom_R}(M, N)$ es un subfuntor de k-espacios vectoriales de $\mathbf{Hom}_k(M, N)$. Además, $\mathbf{Hom}_k(M, N)$ es un R-módulo: $(r \cdot f)(m) = r \cdot f(m)$, para todo $m \in M$ y $r \in R$. Es fácil comprobar que $\mathbf{Hom_R}(M, N)$ es un RG-submódulo de $\mathbf{Hom}_k(M, N)$.

Recordemos que aunque $\mathbf{E}$ y $\mathbf{V}$ son funtores de k-módulos cuasi-coherentes, $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ no lo es en general. Así, por ejemplo, si $\dim_k A = \infty$ entonces $\mathbf{A}^*$ no es cuasi-coherente, porque el G-submódulo generado por $1 \in \mathbf{A}^*$ es $\mathbf{A}^*$ que no es de dimensión finita.

Definición 4.5.15. *Dado un R-módulo E, diremos que E es un RG-módulo si* $\mathbf{E}$ *es un funtor de RG-módulos.*

Dados un k-grupo $G = \operatorname{Spec} A$ semisimple y dos RG-módulos (cuasi-coherentes) E, V, Chu, Hu y Kang (en [7]) definen en $\operatorname{Hom}_R(E, V)$ un operador de Reynolds generalizado, mejorando el resultado obtenido por Magid en [20] para el caso en que E y V son R-módulos proyectivos de tipo finito. Utilizan el operador de Reynolds generalizado para probar: si $E = R \cdot E^G$ y es R-módulo proyectivo (respectivamente R-módulo plano), entonces E^G es R^G-módulo proyectivo (respectivamente R^G-módulo plano). Resultados probados en casos particulares por Magid en [20] y por Al-Aubaidy y Naoum en [1].

El problema con que se encuentran estos autores es que si bien $\mathbf{E}$ y $\mathbf{V}$ son G-módulos cuasi-coherentes (con su terminología: la acción de G en E y V es racional) sin embargo $\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ no es cuasi-coherente (con su terminología: G no opera racionalmente en $\mathrm{Hom}_R(E, V)$). Con nuestra terminología tenemos que todos los funtores considerados son obviamente funtores de G-módulos y como veremos de $\mathbf{A}^*$-módulos. El operador de Reynolds generalizado para todo $\mathbf{A}^*$-módulo (no sólo para $\mathrm{Hom}_R(E, V)$) es la multiplicación por la integral invariante $w_G \in \mathbf{A}^*$.

Sabemos que $\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ es un G-submódulo de $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{V})$. Si supiésemos que $\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ es un funtor dual de k-módulos entonces sabríamos que también es un $\mathbf{A}^*$-módulo. Ahora bien, como coincide con el núcleo del morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos (pues son funtores de G-módulos duales)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{V}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Hom}_k(\mathbf{R} \otimes_k \mathbf{E}, \mathbf{V}) \\ f & \mapsto & f_1 - f_2 \end{array}$$

donde $f_1(r \otimes e) := f(r \cdot e)$ y $f_2(r \otimes e) := r \cdot f(e)$, entonces es un $\mathbf{A}^*$-módulo. Además, si $G = \mathrm{Spec}\, A$ es un k-grupo semisimple, $\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, \mathbf{V})^G = w_G \cdot \mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, \mathbf{V})$, porque $s \in \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ es G-invariante si y sólo si $s = w_G \cdot s$. Del mismo modo, con mayor generalidad, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.5.16. *Sean F y F' funtores duales de RG-módulos. Entonces:*

1. $\mathbf{Hom_R}(F', F)$ *es un funtor de $\mathbf{A}^*$-módulos.*

2. *Si $G = \mathrm{Spec}\, A$ es un grupo semisimple, entonces $\mathbf{Hom_R}(F', F)^G = w_G \cdot \mathbf{Hom_R}(F', F)$.*

Proposición 4.5.17. *Sea E un RG-módulo y F un funtor de k-módulos reflexivo que sea RG-módulo. Supongamos además que R y E son k-módulos libres. Entonces*

$$\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, F)$$

es un funtor dual de G-módulos.

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.1.24 que $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F)$ es un funtor reflexivo de G-módulos. $\mathbf{Hom_R}(\mathbf{E}, F)$ coincide con el núcleo del morfismo de funtores reflexivos de G-módulos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, F) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Hom}_k(\mathbf{R} \otimes_k \mathbf{E}, F) \\ f & \mapsto & f_1 - f_2 \end{array}$$

donde $f_1(r \otimes e) := f(r \cdot e)$ y $f_2(r \otimes e) := r \cdot f(e)$. Sólo nos falta probar que es un funtor dual de k-módulos. Ahora bien, el núcleo de todo morfismo entre funtores reflexivos es un funtor dual: Sean F_1 y F_2 funtores reflexivos. Observemos que $\mathbf{Hom}_k(F_1, F_2) = \mathbf{Hom}_k(F_2^*, F_1^*)$. Dado un morfismo $\phi : F_1 \to F_2$, tenemos la sucesión exacta

$$F_2^* \xrightarrow{\phi^*} F_1^* \to \mathrm{Coker}\, \phi^* \to 0.$$

Tomando duales obtenemos que $\mathrm{Ker}\, \phi = (\mathrm{Coker}\, \phi^*)^*$. □

Concluyamos esta sección demostrando las conclusiones de Chu, Hu y Kang en [7].

Proposición 4.5.18. *Sea G un k-grupo afín semisimple. Sea E un R-módulo proyectivo que sea RG-módulo, tal que $E = R \cdot E^G$. Entonces E^G es un R^G-módulo proyectivo.*

Demostración. Consideraremos un epimorfismo de R^G-módulos

$$\oplus R^G \to E^G.$$

Tensorializando por $R \otimes_{R^G}$ obtenemos un epimorfismo $\oplus R \to R \otimes_{R^G} E^G$ de RG-módulos. Componiendo con el epimorfismo $R \otimes_{R^G} E^G \to E$, obtenemos un epimorfismo RG-módulos

$$\oplus R \stackrel{\pi}{\to} E.$$

Sea $s : E \to \oplus R$ una sección de R-módulos de π. Se cumple que $w_G \cdot s \in \mathrm{Hom}_R(E, \oplus R)$ (donde w_G es la integral invariante de G) es una sección de RG-módulos de π: Sabemos que $w_G \cdot s$ es G-invariante, es decir, es un morfismo de RG-módulos. Nos falta probar que es una sección de π, lo cual es consecuencia de la Proposición 4.5.12.

Si tomamos invariantes en $E \stackrel{w_G \cdot s}{\hookrightarrow} \oplus R \stackrel{\pi}{\to} E$ obtenemos

$$E^G \stackrel{w_G \cdot s}{\hookrightarrow} \oplus R^G \stackrel{\pi}{\to} E^G.$$

Luego E^G es un sumando directo de $\oplus R^G$ y es un R^G-módulo proyectivo. $\square$

Antes de probar un resultado análogo para módulos planos, necesitamos un criterio de platitud en términos del funtor de homomorfismos, que reformularemos a partir de un criterio de platitud de Matsumura.

Teorema 4.5.19. *[22, §7, 7.6] Sea A un anillo (conmutativo con unidad) y M un A-módulo plano. Si $a_{ij} \in A$ y $x_j \in M$ (para $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq n$) satisfacen*

$$\sum_j a_{ij} x_j = 0 \text{ para todo } i,$$

entonces existe un natural s y elementos $b_{jk} \in A$, $y_k \in M$ (para $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq k \leq s$) tales que

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0 \text{ para todo } i, k, \text{ y } x_j = \sum_k b_{jk} y_k \text{ para todo } j.$$

Recíprocamente, si la conclusión anterior se cumple para el caso $r = 1$, entonces M es plano.

Este teorema afirma que si M es A-módulo, tal que para todo módulo de presentación finita N (considérese una resolución por libres de tipo finito $L \stackrel{a}{\to} L' \stackrel{\pi}{\to} N \to 0$, y escribamos $a \equiv (a_{ij})$, donde el subíndice i indica la columna y el j la fila) y todo morfismo $\phi : N \to M$ (denótese $\phi \circ \pi \equiv (x_j)$, $x_j \in M$) existe un módulo libre de tipo finito L'' y morfismos $f : N \to L''$ (denótese $f \circ \pi \equiv (b_{jk})$), $g : L'' \to M$ (denótese $g \equiv (y_k)$, con $y_k \in M$) de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & M \\ & L'' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces M es un A-módulo plano.

Proposición 4.5.20. *Sea A un anillo (conmutativo con unidad) y M un A-módulo. Entonces, M es A-módulo plano si y sólo si para todo A-módulo de presentación finita N el morfismo $\varphi : N^* \otimes_A M \to \operatorname{Hom}_A(N, M)$, $\varphi(w \otimes m)(n) := w(n) \cdot m$ es epiyectivo (o isomorfismo).*

Demostración. Veamos que si M es un A-módulo plano entonces $N^* \otimes_A M = \operatorname{Hom}_A(N, M)$. Si N es un A-módulo libre de tipo finito la afirmación es obvia. Sea N un A-módulo de presentación finita y $A^r \to A^s \to N \to 0$ una presentación por módulos libres de tipo finito de N. Concluimos por el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^* \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & (A^s)^* \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, equal] & (A^r)^* \otimes_A M \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(N, M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(A^s, M) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(A^r, M) \end{tikzcd}$$

Supongamos ahora que el morfismo $\varphi : N^* \otimes_A M \to \operatorname{Hom}_A(N, M)$ es epiyectivo, siendo N un A-módulo de presentación finita. Dado un morfismo $\phi \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$, por hipótesis existen $w_i \in N^*$, $m_i \in M$ tales que $\varphi(\sum_i w_i \otimes m_i) = \phi$, lo cual quiere decir que ϕ es la composición del morfismo $N \xrightarrow{(w_1, \ldots, w_s)} A^s$ con el morfismo $A^s \xrightarrow{\cdot(m_1, \ldots, m_s)} M$, luego por el teorema anterior M es un A-módulo plano. $\square$

Proposición 4.5.21. *Sea G un k-grupo afín semisimple. Sea M un R-módulo plano que sea un RG-módulo, tal que $M = R \cdot M^G$. Entonces M^G es R^G-módulo plano.*

Demostración. Según el criterio de platitud anterior, necesitamos probar que para todo R^G-módulo de presentación finita N, el morfismo

$$\operatorname{Hom}_{R^G}(N, R^G) \otimes_{R^G} M^G \to \operatorname{Hom}_{R^G}(N, M^G)$$

es epiyectivo. Puesto que M es R-módulo plano, el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_R(N \otimes_{R^G} R, R) \otimes_R M & \to & \operatorname{Hom}_R(N \otimes_{R^G} R, M) \\ \| & & \| \\ \operatorname{Hom}_{R^G}(N, R) \otimes_R M & & \operatorname{Hom}_{R^G}(N, M) \end{array}$$

es epiyectivo, ya que $N \otimes_{R^G} R$ es un R-módulo de presentación finita. El morfismo

$$\operatorname{Hom}_{R^G}(N,R) \otimes_{R^G} M^G = \operatorname{Hom}_{R^G}(N,R) \otimes_R R \otimes_{R^G} M^G \to \operatorname{Hom}_{R^G}(N,R) \otimes_R M$$

es epiyectivo, luego componiendo con el morfismo anterior se obtiene el epimorfismo

$$\operatorname{Hom}_{R^G}(N,R) \otimes_{R^G} M^G \to \operatorname{Hom}_{R^G}(N,M).$$

Tomando invariantes por G, que es multiplicar por w_G, obtenemos los epimorfismos

$$\begin{tikzcd}
w_G \cdot (\operatorname{Hom}_{R^G}(N,R) \otimes_{R^G} M^G) \arrow[r, "\text{epi}"] \arrow[d, "\text{epi}"] & w_G \cdot \operatorname{Hom}_{R^G}(N,M) \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Hom}_{R^G}(N, w_G \cdot R) \otimes_{R^G} M^G \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}_{R^G}(N, w_G \cdot M) \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Hom}_{R^G}(N, R^G) \otimes_{R^G} M^G & \operatorname{Hom}_{R^G}(N, M^G)
\end{tikzcd}$$

y concluimos que el morfismo $\operatorname{Hom}_{R^G}(N,R^G) \otimes_{R^G} M^G \to \operatorname{Hom}_{R^G}(N,M^G)$ es epiyectivo. □

4.5.1. Algunas aplicaciones del operador de Reynolds

Por su sencillez e importancia damos la demostración de Hilbert y Nagata ([14],[15], [23]) del famoso *Finiteness Theorem of Hilbert.*

Teorema 4.5.22. *Sea G un k-grupo afín semisimple operando en una variedad algebraica $X = \operatorname{Spec} A$. Entonces, $X/\sim := \operatorname{Spec} A^G$ es una variedad algebraica.*

Demostración. Observemos en primer lugar que X es un cerrado de un espacio afín en el que G opera linealmente. Sea $\xi_1, \dots, \xi_m$ un sistema generador de la k-álgebra A. Sea E un G-submódulo de A de dimensión finita, que contenga a $\xi_1, \dots, \xi_m$. El morfismo natural $S^{\cdot}E \to A$ es epiyectivo y tenemos la inmersión cerrada $X \hookrightarrow \mathbf{E}^*$ buscada.

Tenemos que probar que A^G es una k-álgebra de tipo finito. Como la toma de invariantes por un grupo semisimple es exacta, basta probar que $(S^{\cdot}E)^G = (k[x_1, \dots, x_n])^G$ es una k-álgebra de tipo finito.

Sea $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ el ideal generado por $(x_1, \dots, x_n)^G$. Sean $f_1, \dots, f_r \in (x_1, \dots, x_n)^G$ un sistema generador (finito) del ideal I. Podemos suponer que los f_i son homogéneos. Probemos que $k[x_1, \dots, x_n]^G = k[f_1, \dots, f_r]$. En efecto, dada $h \in k[x_1, \dots, x_n]^G$ tenemos que probar que $h \in k[f_1, \dots, f_r]$. Procedamos por inducción sobre el grado de h. Si $\operatorname{gr} h = 0$ entonces $h \in k \subseteq k[f_1, \dots, f_r]$. Sea $\operatorname{gr} h = d > 0$. Podemos escribir $h = \sum_{i=1}^r a_i \cdot f_i$, donde $a_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ son homogéneas de grado $d - \mathrm{gr}(f_i)$ (que es menor que d). Entonces,

$$h = w_G \cdot h = \sum_{i=1}^{r} w_G \cdot (a_i \cdot f_i) = \sum_{i=1}^{r} (w_G \cdot a_i) \cdot f_i.$$

Por hipótesis de inducción, se verifica que $w_G \cdot a_i \in k[f_1, \dots, f_r]$ y concluimos que $h \in k[f_1, \dots, f_r]$. □

Si el grupo no es semisimple, el teorema anterior no es cierto. Se pueden encontrar contraejemplos en [13] y [24].

Lema 4.5.23. *Sea $F : G = \operatorname{Spec} A \to G = \operatorname{Spec} A$ un isomorfismo de k-grupos. Supongamos que G es un grupo semisimple de integral invariante w_G. El morfismo inducido $F : \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^*$ cumple que $F(w_G) = w_G$.*

Demostración. Tenemos el morfismo natural de funtores de k-álgebras $F : k[G^{\cdot}] \to k[G^{\cdot}]$, $F(\sum_i \lambda_i \cdot g_i) = \sum_i \lambda_i F(g_i)$, que componiendo con la inclusión $k[G^{\cdot}] \hookrightarrow \mathbf{A}^*$, define un morfismo de funtores de k-álgebras $k[G^{\cdot}] \to \mathbf{A}^*$, que factoriza a través de un único morfismo de funtores de k-álgebras $F : \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^*$. Entonces $F(w_G) = F(g \cdot w_G) = F(g) \cdot F(w_G)$ e igualmente $F(w_G) = F(w_G \cdot g) = F(w_G) \cdot F(g)$, para todo punto $g \in G$. Por tanto, $F(w_G)$ es G-invariante por la izquierda y por la derecha. Además, $F(w_G)(1) = w_G(F^*(1)) = w_G(1) = 1$. En conclusión, $F(w_G) = w_G$. □

Proposición 4.5.24. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo algebraico afín, $H \subset G$ un subgrupo normal afín y $G/H = \operatorname{Spec} A^H$ el grupo cociente de G por H. Si H y G/H son grupos semisimples entonces G es semisimple.*

Demostración. Sea w_H la integral invariante de H y $w_{G/H}$ la integral invariante de G/H. La composición

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{w_H \cdot} & w_H \cdot A = A^H & \xrightarrow{w_{G/H}} & K \\ a & \mapsto & w_H \cdot a & & \\ & & a' & \mapsto & w_{G/H}(a') \end{array}$$

es la integral invariante de G. Es fácil comprobar que $w_{G/H}(w_H \cdot 1) = 1$, y también lo es comprobar que $w_{G/H} \circ (w_H \cdot)$ es G-invariante, pues $w_H \cdot g = g \cdot w_H$, aplicando el corolario anterior al isomorfismo $F = \tau_g$ de conjugación por g en H. □

Veamos, por último, algunas consecuencias.

Corolario 4.5.25. *Si G es semisimple, entonces lo es por cambio de base $k \hookrightarrow K$.*

Demostración. Que $G = \operatorname{Spec} A$ sea semisimple equivale a que $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$. Al cambiar de cuerpo base $k \hookrightarrow K$, tenemos $(\mathbf{A_K})^* = \mathbf{A_K^*} = (\mathbf{k} \times \mathbf{B}^*)_{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times (\mathbf{B_K})^*$, luego G_K es semisimple. □

Corolario 4.5.26. *El producto directo de dos k-grupos es linealmente semisimple si y sólo si lo es cada uno de ellos.*

Demostración. Por cambio de base y descenso podemos suponer que k es algebraicamente cerrado, caso en el que es consecuencia del Corolario 3.2.23. □

Corolario 4.5.27. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. Si E es un G-módulo semisimple entonces lo es por cambio de base $k \hookrightarrow K$.*

Demostración. Sea $\mathbf{M}^*$ el esquema cociente de álgebras semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$ y $w \in \mathbf{M}^*$ la única 1-forma G-invariante (por la izquierda y la derecha) tal que $w(1) = 1$. Sea $i : V \hookrightarrow E_K$ un G_K-submódulo. Como E es un $\mathbf{M}^*$-módulo entonces E_K es un $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$-módulo, V y $\operatorname{Hom}_K(E_K, V)$ también. Si $\pi : E_K \to V$ es un retracto de K-espacios vectoriales de i, entonces $w \cdot \pi$ es un retracto de G_K-módulos: Para todo $g \in G_K$, $g \cdot w \cdot \pi = w \cdot \pi$, es decir, $w \cdot \pi$ es un morfismo de G_K-módulos. Para todo $g \in G_K$ se cumple que $g \cdot \pi$ es un retracto de i, es decir, $(g \cdot \pi) \circ i = \mathrm{Id}$. Por tanto, $(w' \cdot \pi) \circ i = w'(1) \cdot \mathrm{Id}$, para toda $w' \in \mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$. En conclusión, $w \cdot \pi$ es un retracto de G_K-módulos de i.

Ahora ya es fácil concluir que E_K es un G_K-módulo semisimple. □

Corolario 4.5.28. *Si $G = \operatorname{Spec} A$ es un k-grupo afín entonces $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{I}^*$ y G_u son (conceptos) estables por cambio de cuerpo base.*

Demostración. M es el $\mathbf{A}^*$-submódulo semisimple maximal de A. Por el corolario anterior M_K es un submódulo semisimple de A_K. Luego $\mathbf{M}^*_{\mathbf{K}}$ es un cociente del esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*_{\mathbf{K}}$. Por la Proposición 3.2.21 concluimos que $\mathbf{M}^*$ cambia de base.

Si $\mathbf{M}^*$ cambia de base entonces $\mathbf{I}^*$ también. Como $G_u = G \cap (1 + \mathbf{I}^*)$ entonces G_u cambia de base (observemos que el funtor de puntos de la intersección es la intersección de los funtores de puntos y que para todo k-grupo afín G, el funtor de puntos de G_K es la restricción del funtor de puntos de G a la categoría de K-álgebras). □

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un grupo algebraico liso sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathbf{E}^*$ un G-módulo. Entonces $e \in E^{*G}$ si y sólo si $g \cdot e = e$ para todo punto racional g de G: Sea e tal que $g \cdot e = e$ para todo punto racional g de G. Considérese el morfismo de esquemas $f : G \to \mathbf{E}^*$, $g \mapsto g \cdot e$. La subvariedad $f^{-1}(e)$ de G contiene todos los puntos racionales de G, luego por el teorema de los ceros de Hilbert $f^{-1}(g) = G$ y $e \in E^{*G}$. Dado un G-módulo E y $e \in E$, recordemos que e está incluido en un G-módulo finito, luego $e \in E^G$ si y sólo si $g \cdot e = e$ para todo punto racional g de G.

Sea ahora $V = \operatorname{Spec} A$ una $\mathbb{R}$-variedad algebraica lisa y conexa, y $v \in V$ un punto $\mathbb{R}$-racional. Si una función (algebraica) f se anula en todo los puntos $\mathbb{R}$-racionales de V entonces $f = 0$. En efecto, procedamos por inducción sobre la dimensión de V. Basta probar que f se anula en un entorno abierto de $v \in V$. Si $\dim V = 1$ entonces el número de puntos $\mathbb{R}$-racionales es infinito (el número de puntos de una variedad diferenciable de dimensión 1 es infinito). Por la teoría de dimensión f sólo se anula en un número finito de puntos de V, salvo que $f = 0$.

Supongamos que $\dim V > 1$. Si $f \neq 0$ existe una hipersuperficie $H \equiv g = 0$ no singular en v, transversal a $f = 0$. Considerando un entorno abierto U de v y tomando $V = U$, podemos suponer que H es lisa en todo punto y conexa. Ahora bien, f se anula en todos los puntos $\mathbb{R}$-racionales de H, luego por hipótesis de inducción f es nula en H, lo que contradice que $f = 0$ y H sean transversales.

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un $\mathbb{R}$-grupo algebraico conexo y $\mathbf{E}^*$ un G-módulo. De nuevo, $e \in E^{*G}$ si y sólo si $g \cdot e = e$ para todo punto racional g de G.

Corolario 4.5.29. *Todo grupo de Lie G compacto es semisimple.*

Demostración. G es semisimple si y sólo si lo es la componente conexa de la identidad, ya que el conúcleo es un grupo finito reducido, luego semisimple (en característica cero).

Sea pues $G = \operatorname{Spec} A$ un $\mathbb{R}$-grupo algebraico afín conexo, que considerado como variedad diferenciable sea una variedad diferenciable compacta. Existe una n-forma de volumen diferenciable (y algebraica) G-invariante (donde $n = \dim G$).

Sea la aplicación $w : A \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_G f \cdot w^n$, que está bien definida porque $w(f) < \infty$, ya que G es compacto. Si definimos $w' := \dfrac{w}{\int_G w^n}$, entonces $w' : A \to \mathbb{R}$, $1 \mapsto 1$ es la aplicación buscada. □

Corolario 4.5.30. *El grupo especial ortogonal $SO(k)$ es semisimple (en característica 0).*

Demostración. Por cambio de base y descenso se puede suponer que $k = \mathbb{R}$. Ahora bien, $SO(\mathbb{R})$ es semisimple porque es un grupo de Lie compacto. □

Corolario 4.5.31. *El grupo ortogonal $O(k)$ es semisimple.*

4.5.2. Representación inducida

Sea $\mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ un morfismo de funtores de k-álgebras entre esquemas de k-álgebras y E un $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente. Llamaremos *inducido* de E, y lo denotaremos $\operatorname{Ind}_{\mathbf{A}^*}^{\mathbf{B}^*}(E)$, al $\mathbf{B}^*$-módulo cuasi-coherente representante del funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*}(-, E)$, es decir,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}^*}(V, \operatorname{Ind}_{\mathbf{A}^*}^{\mathbf{B}^*}(E)) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*}(V, E)$$

para todo $\mathbf{B}^*$-módulo V.

Proposición 4.5.32. *Se cumple que* $\operatorname{Ind}_{\mathbf{A}^*}^{\mathbf{B}^*}(E) = (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*)^*$.

Demostración. Observemos que

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}^*}(\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*, \mathbf{V}^*) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{E}^*, \mathbf{V}^*)$$

para todo esquema de $\mathbf{B}^*$-módulos (por la derecha) $\mathbf{V}^*$. Luego

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}^*}(\mathbf{V}, (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*)^*) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$$

para todo $\mathbf{B}^*$-módulo (por la izquierda) V.

Observemos que $(\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*)^*$ es cuasi-coherente: El dual de la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{E}^* \otimes_k \mathbf{B}^* \otimes_k \mathbf{A}^* & \to & \mathbf{E}^* \otimes_k \mathbf{B}^* & \to & \mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^* & \to & 0 \\ w \otimes b \otimes a & \mapsto & wa \otimes b - w \otimes ab & & & & \end{array}$$

es la sucesión exacta

$$0 \to (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*)^* \to \mathbf{E} \otimes_k \mathbf{B} \to \mathbf{E} \otimes_k \mathbf{B} \otimes_k \mathbf{A}.$$

□

Observemos que $(\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*)^* = \mathbf{Hom}_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{B}^*, \mathbf{E})$, y para éste también es sencillo probar la proposición anterior.

Proposición 4.5.33. *Se verifica que* $\operatorname{Ind}_{\mathbf{A}^*}^{\mathbf{B}^*}(E)^* = \overline{\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*}$ *y es el representante en la categoría de esquemas de* $\mathbf{B}^*$*-módulos del funtor* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{E}^*, -)$.

Demostración. Por el Ejemplo 2.2.8,

$$\overline{\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*} = (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{A}^*} \mathbf{B}^*)^{**} = \operatorname{Ind}_{\mathbf{A}^*}^{\mathbf{B}^*}(E)^*.$$

□

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín, $H = \operatorname{Spec} B \subset G$ un subgrupo cerrado y E un H-módulo. Llamaremos *representación inducida*, y lo representaremos por $\operatorname{Ind}_H^G(E)$, al G-módulo representante del funtor $\operatorname{Hom}_H(-, E)$. Es decir,

$$\operatorname{Hom}_H(V, E) = \operatorname{Hom}_G(V, \operatorname{Ind}_H^G(E))$$

para todo G-módulo V.

Proposición 4.5.34. *Se cumple que*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_H^G(E) &= (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{B}^*} \mathbf{A}^*)^* = \mathbf{Hom}_{\mathbf{B}^*}(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) \\ &= \mathbf{Hom}_{k[H^\cdot]}(k[G^\cdot], \mathbf{E}) = (A \otimes E)^H \end{aligned}$$

donde H opera en $A \otimes E$ como sigue: $h \cdot (a \otimes e) := a \cdot h^{-1} \otimes h \cdot e$.

Demostración. La primera igualdad es inmediata de la equivalencia categorial de la categoría de los G-módulos cuasi-coherentes y la categoría de los $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes ($G = \operatorname{Spec} A$), para todo G.

Para probar $\mathbf{Hom}_{\mathbf{B}^*}(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) = \mathbf{Hom}_{k[H^\cdot]}(k[G^\cdot], \mathbf{E})$, en primer lugar tenemos que $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) = \mathbf{Hom}_k(k[G^\cdot], \mathbf{E})$ por ser $\mathbf{A}^*$ el "cierre dual" de $k[G^\cdot]$ (Teorema 2.3.4). Si $\mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$ es un morfismo de $\mathbf{B}^*$-módulos, al componer con $k[G^\cdot] \hookrightarrow \mathbf{A}^*$, tenemos $k[G^\cdot] \to \mathbf{E}$ morfismo de $k[H^\cdot]$-módulos porque ambos morfismos lo son.

Sea $f : k[G^{\cdot}] \to \mathbf{E}$ un morfismo de $k[H^{\cdot}]$-módulos. Por ser de funtores de k-espacios vectoriales sabemos que factoriza vía $\mathbf{A}^*$, y seguimos llamando f al morfismo $\mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$. Sea el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}^* & \to & \mathbf{E} \\ b & \mapsto & f(b \cdot g) - b \cdot f(g) \end{array}$$

para $g \in G$ fijo. Al componer con $k[H^{\cdot}] \hookrightarrow \mathbf{B}^*$ tenemos el morfismo

$$\begin{array}{rcl} k[H^{\cdot}] & \to & \mathbf{E} \\ h & \mapsto & f(h \cdot g) - h \cdot f(g) = 0 \end{array}$$

luego $\mathbf{B}^* \to \mathbf{E}$ también es el morfismo nulo y se verifica $f(b \cdot g) = b \cdot f(g)$ para todo $g \in G$ y todo $b \in \mathbf{B}^*$.

Si ahora fijamos $b \in \mathbf{B}^*$ y consideramos $\mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$, $a \mapsto f(b \cdot a) - b \cdot f(a)$, el morfismo inducido $k[G^{\cdot}] \hookrightarrow \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$ es de nuevo nulo, luego $\mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$ también y $f(b \cdot a) = b \cdot f(a)$ para todo $a \in \mathbf{A}^*$ y todo $b \in \mathbf{B}^*$, luego $f : \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}$ es morfismo de $\mathbf{B}^*$-módulos.

Por último, por argumentos similares a los anteriores se tiene que

$$\mathbf{Hom}_{k[H^{\cdot}]}(k[G^{\cdot}], \mathbf{E}) = \mathbf{Hom}_{k[H^{\cdot}]}(\mathbf{A}^*, \mathbf{E})$$

y como

$$\mathbf{Hom}_{k[H^{\cdot}]}(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}) = (\mathbf{Hom}_k(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}))^H = (A \otimes_k E)^H$$

ya está probada la última igualdad. □

Proposición 4.5.35. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín, $H = \operatorname{Spec} B \subset G$ un subgrupo cerrado. Si $G/H = \operatorname{Spec} C$ es una variedad afín entonces el funtor sobre la categoría de H-módulos, $\operatorname{Ind}_H^G(-)$, es exacto.*

Demostración. El morfismo $C \to A$ es fielmente plano por [28, 14.1]. Por tanto, el funtor $E \rightsquigarrow \operatorname{Ind}_H^G(E) = (A \otimes_k E)^H$ es exacto si y sólo si lo es el funtor $E \rightsquigarrow A \otimes_C (A \otimes_k E)^H$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} A \otimes_C (A \otimes_k E)^H &= (A \otimes_C A \otimes_k E)^H = \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(G \times_{G/H} G, \mathbf{E})^H \\ &= \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(G \times H, \mathbf{E})^H = \operatorname{Hom}_{\text{funtores}}(G, \mathbf{E}) \\ &= A \otimes_k E. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.36. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple, $H = \operatorname{Spec} B \subset G$ un subgrupo cerrado. Si $G/H = \operatorname{Spec} C$ es una variedad afín entonces H es semisimple.*

Demostración. Tenemos que probar que la toma de invariantes por H es un funtor exacto. Sea E un H-módulo y consideremos k con la estructura de G-módulo trivial. De la igualdad

$$E^H = \operatorname{Hom}_H(k, E) = \operatorname{Hom}_G(k, \operatorname{Ind}_H^G(E)) = (\operatorname{Ind}_H^G(E))^G$$

se deduce que la toma de invariantes por H es la composición del funtor $\mathrm{Ind}_H^G(-)$ (exacto por la proposición anterior) con el funtor "tomar invariantes por G" (exacto por ser G semisimple). Por tanto, la toma de invariantes por H es un funtor exacto. □

4.5.3. Semisimplicidad de Sl_n y Gl_n

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y sea la k-álgebra finita $A = \mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E) = \mathrm{End}_k(E\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k E)$, donde E es un k-espacio vectorial de dimensión finita m. Los elementos $\sigma \in S_n$ del grupo n-simétrico operan en A permutando los factores y se obtiene que

$$\sigma(T_1 \otimes \ldots \otimes T_n) = T_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes T_{\sigma(n)}.$$

Sea $A^{S_n} =< a \in A \,|\, \sigma(a) = a \,\forall\, \sigma \in S_n >$.

En característica cero el morfismo

$$\begin{array}{ccc} S^n(\mathrm{End}_k(E)) & \to & \mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E) \\ T_1 \cdot \ldots \cdot T_n & \mapsto & \dfrac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{\sigma\in S_n} T_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes T_{\sigma(n)} \end{array}$$

establece un isomorfismo entre $S^n(\mathrm{End}_k(E))$ y $(\mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E))^{S_n}$ cuyo inverso es π, donde $\pi : \mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E) \to S^n(\mathrm{End}_k(E))$ es el morfismo de paso al cociente.

Proposición 4.5.37. *La k-álgebra $S^n(\mathrm{End}_k(E))$ es un álgebra semisimple.*

Demostración. Puede demostrarse que $B = S^n(\mathrm{End}_k(E))$ es un álgebra semisimple, por ser el álgebra conmutadora del álgebra semisimple $k[S_n^{\cdot}]$ en $A = \mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E)$.

Vamos a probar que la métrica de la traza de A restringida a B tiene radical nulo, lo que implicará que B es semisimple.

Recordemos que dada una métrica T_2 sobre un espacio vectorial E, la polaridad ϕ de la métrica restringida a un subespacio $E' \subset E$ es la composición $E' \hookrightarrow E \xrightarrow{\phi} E^* \twoheadrightarrow E'^*$. En nuestro caso este morfismo es la composición

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E))^{S_n} & \hookrightarrow & \mathrm{End}_k(E)\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E) \\ & & \downarrow \phi \\ S^n(\mathrm{End}_k(E)^*) & \twoheadleftarrow & \mathrm{End}_k(E)^*\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k \mathrm{End}_k(E)^* \end{array}$$

pues si $\dim_k F < \infty$ entonces $(F^*\otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k F^*)^{S_n} = (S_k^n F)^*$.

Si fijamos una base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de E ($\dim_k E = m$), entonces una base de $\mathrm{End}_k(E) = M_m(k)$ es $\{\delta_{ij}\}_{1\leq i,j\leq m}$, donde δ_{ij} es la matriz cuyos coeficientes son nulos salvo en la posición ij que es 1, i.e., se corresponde con el endomorfismo de E que aplica el vector e_j de la base al vector e_i y los demás vectores en el cero. A partir de esta base se construye una base de $S^n(\mathrm{End}_k(E))$:

$$\{\delta_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_n j_n}\}_{1\leq i_1\leq \ldots\leq i_n\leq m, 1\leq j_1\leq\ldots\leq j_n\leq m}.$$

Un elemento de esta base por el morfismo $B \hookrightarrow A$ se transforma en

$$\delta_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_n j_n} \mapsto \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \delta_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \delta_{i_{\sigma(n)} j_{\sigma(n)}}.$$

Si aplicamos el morfismo $\phi : A \to A^*$ a este elemento de B visto en A, obtenemos que

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \delta_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \delta_{i_{\sigma(n)} j_{\sigma(n)}} \mapsto m^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} w_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes w_{j_{\sigma(n)} i_{\sigma(n)}}$$

donde $\{w_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ es la base dual de $\{\delta_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ en $\mathrm{End}_k(E)^*$. Por último, si pasamos al cociente $A^* \to B^*$ tenemos

$$m^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} w_{j_{\sigma(1)} i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes w_{j_{\sigma(n)} i_{\sigma(n)}} \mapsto m^n \cdot w_{j_1 i_1} \cdot \ldots \cdot w_{j_n i_n}.$$

Así pues, la polaridad de la métrica de la traza de A restringida a B es un isomorfismo, luego $rad(T_{2|_B}) = 0$.

Sea ahora R el radical del álgebra B y comprobemos que $R \subseteq rad(T_{2|_B})$: dados $r \in R$ y $b \in B$, $T_2(r, b) = tr(h_{r \cdot b}) = 0$ pues $r \cdot b \in R$ que es ideal nilpotente de B. Como $rad(T_{2|_B}) = 0$ entonces $R = 0$ y B es álgebra semisimple. $\square$

M_n es semisimple.

Consideremos la k-variedad algebraica afín M_n, cuyos puntos en una k-álgebra B es el semigrupo de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en B. Su anillo de funciones algebraicas es $A = k[x_{11}, \ldots, x_{nn}] = S^{\cdot}(\mathrm{End}_k(E)^*) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\oplus} S^n(\mathrm{End}_k(E)^*)$, y la clausura de esquemas de su linealización es

$$\mathbf{A}^* = \overline{k[M^{\cdot}_n]} = \prod_{n \in \mathbb{N}} (S^n \mathbf{End}_k(\mathbf{E})^*)^* = \prod_{n \in \mathbb{N}}^{n} (\mathbf{End}_k(\mathbf{E}) \otimes_k \overset{n}{\ldots} \otimes_k \mathbf{End}_k(\mathbf{E}))^{S_n}.$$

Aunque M_n es un esquema de semigrupos y no de grupos, $k[M^{\cdot}_n]$ es un funtor de k-álgebras y su cierre de esquemas de álgebras es $\mathbf{A}^*$. El morfismo natural explícito

$$M^{\cdot}_n \to \mathbf{A}^*, \ \tau \mapsto (1, \tau, \tau \otimes \tau, \tau \otimes \tau \otimes \tau, \ldots)$$

muestra que para que sea un morfismo de semigrupos la (única) estructura de funtores de álgebras de $\mathbf{A}^*$ es la del producto directo de las álgebras (que ya hemos tratado) $(\mathbf{End}_k(\mathbf{E}) \otimes \overset{n}{\ldots} \otimes \mathbf{End}_k(\mathbf{E}))^{S_n}$. Puede hablarse igualmente de M_n-módulos. De nuevo, se cumple que la categoría de $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes equivale a la categoría de M_n-módulos. $\mathbf{A}^*$ es un álgebra semisimple en virtud de la proposición anterior, luego todo $\mathbf{A}^*$-módulo y todo M_n-módulo son semisimples.

Proposición 4.5.38. *Consideremos la acción natural del grupo lineal Gl_n en M_n y denotemos A_{M_n} el anillo de funciones de M_n. Se cumple que*

$$(A^*_{M_n})^{Gl_n} = \prod_m Z(k[S_m]).$$

Demostración. Sea π_m la composición de los morfismos obvios

$$\prod_r S^r \mathrm{End}_k(E) \to S^m \mathrm{End}_k(E) \hookrightarrow \mathrm{End}_k(E) \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathrm{End}_k(E) = \mathrm{End}_k(E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E)$$

y $M_n = \mathrm{End}_k(E) \to \mathrm{End}_k(E) \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathrm{End}_k(E)$, la asignación $g \mapsto g \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes g$. El diagrama

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{End}_k(E) \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathrm{End}_k(E) \\ & \overline{k[M_n^{\cdot}]} = \prod_r S^r \mathrm{End}_k(E) \arrow[u, "\pi_m"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, luego por el Teorema 2.3.5, $S^m \mathrm{End}_k(E)$ se identifica con la imagen de $k[M_n]$ en $\mathrm{End}_k(E) \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathrm{End}_k(E)$, que coincide con la imagen de $k[Gl_n]$.

Por tanto,

$$(\mathrm{End}_k(E) \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathrm{End}_k(E))^{Gl_n} = \mathrm{End}_{k[Gl_n]}(E^{\otimes m}) = \mathrm{End}_{S^m \mathrm{End}_k(E)}(E^{\otimes}) = k[S_m]$$

por la Proposición 1.1.26, ya que $C_{k[S_m]}(\mathrm{End}_k(E^{\otimes m})) = S^m \mathrm{End}_k(E)$. Por último,

$$(S^m \mathrm{End}_k(E))^{Gl_n} = (\mathrm{End}_k(E) \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathrm{End}_k(E))^{Gl_n, S_m} = k[S_m]^{S_m} = Z(k[S_m]).$$

□

Sl_n es semisimple.

La k-variedad algebraica afín Sl_n, cuyos puntos en una k-álgebra B es el grupo de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en B y determinante 1, es el cerrado de $M_n = \mathrm{Spec}\, k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ definido por los ceros del ideal $(det(x_{ij}) - 1)$. Su anillo de funciones es $k[x_{11}, \dots, x_{nn}]/(det(x_{ij}) - 1)$ y la inclusión $Sl_n \subset M_n$ se traduce en anillos en la epiyección de Sl_n-módulos

$$k[x_{11}, \dots, x_{nn}] \to k[x_{11}, \dots, x_{nn}]/(det(x_{ij}) - 1).$$

Para probar que Sl_n es un grupo semisimple, es decir, que todo Sl_n-módulo es semisimple, basta probar que $k[x_{11}, \dots, x_{nn}]/(det(x_{ij}) - 1)$ es semisimple. Sabemos que $k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ es un M_n-módulo semisimple; si comprobamos que sus M_n-submódulos simples coinciden con los Sl_n-submódulos simples, entonces $k[x_{11},\dots,x_{nn}]$ será suma directa de Sl_n-módulos simples y por tanto $k[x_{11},\dots,x_{nn}]/(det(x_{ij})-1)$ también.

Sea $V \subset S^r(\mathrm{End}_k(E)^*) \subset k[x_{11},\dots,x_{nn}]$ un M_n-submódulo simple (en particular, es un Sl_n-submódulo) y supongamos que existe un Sl_n-submódulo $V' \subset V$. Sea $G_m = \mathrm{Spec}\,[x,1/x]$ el grupo multiplicativo, cuyo funtor de puntos en una k-álgebra B es el grupo de los invertibles de B, y vamos a pensarlo dentro de M_n como los múltiplos no nulos de la matriz identidad. Dado un $\lambda \in G_m$ opera en un producto simétrico $W_1 \cdot \ldots \cdot W_r$ de formas lineales sobre $\mathrm{End}_k(E)$ operando en cada una de ellas: $\lambda * (W_1 \cdot \ldots W_r) = (\lambda * W_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda * W_r)$. Sobre un elemento w_{ij} de la base de $\mathrm{End}_k(E)^*$ un $\lambda \in G_m$ opera por la fórmula

$$(\lambda * w_{ij})(A) = w_{ij}(A \cdot \lambda) = \lambda \cdot a_{ij} = (\lambda w_{ij})(A), \quad A \in \mathrm{End}_k(E)$$

luego opera en V (y en V') de la forma $\lambda * v = \lambda^r \cdot v$. Así pues, G_m y Sl_n dejan estable V'.

Sea $\mathrm{End}_{V'}(V)$ la subvariedad cerrada de $\mathrm{End}_k(E)$ cuyos puntos es el conjunto de endomorfismos de V que dejan estable V'. Si consideramos el morfismo natural $f : M_n \to \mathrm{End}_k(V)$ (V es un M_n-módulo) entonces $f^{-1}(\mathrm{End}_{V'}(V))$ es la subvariedad cerrada de M_n, cuyos puntos son las matrices que dejan estable V'.

Como $G_m \cdot Sl_n$ es denso en M_n, tenemos que M_n también deja estable V', es decir, V' es un M_n-submódulo de V, luego $V' = V$ y V es un Sl_n-submódulo simple.

Gl_n es semisimple.

Sea ahora la k-variedad algebraica afín $Gl_n = \mathrm{Spec}\, k[x_{11},\dots,x_{nn}]_{det(x_{ij})}$, cuyos puntos en una k-álgebra B es el grupo de las matrices invertibles con coeficientes en B. Consideremos la sucesión exacta de morfismos de grupos

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mu_n & \to & G_m \times Sl_n & \to & Gl_n & \to & 1 \\ & & \xi & \mapsto & (\xi, \xi^{-1}) & & & & \\ & & & & (\lambda, A) & \mapsto & \lambda \cdot A & & \end{array}$$

Puesto que el producto directo de grupos semisimples es semisimple y el cociente también lo es, Gl_n es un grupo semisimple.

Las representaciones irreducibles de Gl_n son las representaciones irreducibles de $G_m \times Sl_n$ en las que μ_n opera por la identidad. Las representaciones irreducibles de $G_m \times Sl_n$ son el producto tensorial de las representaciones irreducibles de G_m por las de Sl_n. Sea $\{E_i\}_i$ el conjunto de las representaciones simples de Sl_n (módulo isomorfismos). Extendamos la acción de Sl_n en cada E_i a una acción de Gl_n sobre éstos. Denotamos $L = \bigwedge^n E$ (suponemos que Gl_n es el grupo de endomorfismos lineales de E), entonces $\{E_i \otimes L^{\otimes m}\}_{i,m}$ es el conjunto de las representaciones simples de Gl_n.

4.5.4. Métrica canónica. Producto de convolución

Veamos que si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras separable, entonces en $\mathbf{A}$ hay definida una métrica no singular de modo natural.

En $M_n(k)$ tenemos definida la métrica de la traza: $\langle T, S\rangle =$ "la traza del la matriz $T \circ S$". Si B es un álgebra de Azumaya ($B \otimes_k \bar{k} = M_n(\bar{k})$, siendo $\bar{k}$ el cierre algebraico de k) por descenso tenemos definida una métrica que seguimos llamando métrica de la traza. Si B es una k-álgebra finita separable entonces es producto de álgebras de Azumaya, y tenemos de modo natural la métrica producto en B, que llamaremos en esta sección métrica de la traza .

Dar una métrica en $\mathbf{A}$ equivale a definir un morfismo $\mathbf{A} \stackrel{\phi}{\to} \mathbf{A}^*$, que será su polaridad asociada. $\mathbf{A}^* = \prod \mathbf{A}_i^*$, donde A_i^* son k-álgebras de Azumaya. $\mathbf{A} = \oplus \mathbf{A}_i$. Los (iso)morfismos $\mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i^*$ definen la inyección obvia $\phi : \oplus \mathbf{A}_i \to \prod \mathbf{A}_i^*$.

Propiedades. Este morfismo $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^*$ verifica que:

- es morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos por la izquierda y por la derecha, por ser cada polaridad $\mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i^*$ morfismo de $\mathbf{A}_i^*$-módulos por la izquierda y por la derecha;

- es una métrica simétrica, $\phi(a)(b) = \phi(b)(a)$, ya que la métrica de la traza de cada $\mathbf{A}_i^*$ lo es;

- es un morfismo inyectivo, es decir, la métrica que define es no singular, por serlo la métrica de la traza de cada $\mathbf{A}_i^*$;

- la imagen de ϕ es densa en $\mathbf{A}^*$: En efecto el morfismo natural $\underset{i}{\oplus} \mathbf{E}_i \to \prod_i \mathbf{E}_i$ es denso, es decir, $\overline{\underset{i}{\oplus} \mathbf{E}_i} \to \prod_i \mathbf{E}_i$ es epiyectivo, porque el morfismo dual es un morfismo inyectivo entre módulos cuasi-coherentes ya que $\underset{i}{\oplus} E_i^* \to \prod_i E_i^*$ es inyectivo.

- la imagen de ϕ es el $\mathbf{A}^*$-submódulo cuasi-coherente (pues es isomorfo a $\mathbf{A}$) máximo de $\mathbf{A}^*$: sea $w = (w_i)_{i \in I} \in \prod A_i^*$ un elemento tal que $w_i \neq 0$ para infinitos índices i. Los elementos $(\ldots, 0, w_i, 0, \ldots) = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots) \cdot w$ pertenecen al $\mathbf{A}^*$-submódulo generado por w, luego éste es un $\mathbf{A}^*$-módulo de dimensión infinita y w no puede pertenecer a ningún $\mathbf{A}^*$-submódulo cuasi-coherente (si perteneciese a alguno, entonces estaría incluido en algún $\mathbf{A}^*$-submódulo suyo de dimensión finita).

Teorema 4.5.39. *Sea $\mathbf{A}^*$ un esquema de álgebras separable. Si en $\mathbf{A}$ hay definida una métrica simétrica $T_2 = \langle -, -\rangle$, $\mathbf{A}^*$-lineal, (i.e., $T_2(a \cdot w, a') = T_2(a, w \cdot a')$, para todo $a, a' \in \mathbf{A}$ y $w \in \mathbf{A}^*$), entonces la métrica T_2 es, salvo un factor de $Z(\mathbf{A}^*)$, la métrica natural ϕ.*

Demostración. La polaridad $T_2 : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^*$ es un morfismo de $\mathbf{A}^*$-módulos, por la izquierda y por la derecha. Por tanto, T_2 aplica cada sumando $\mathbf{A}_i$ en cada $\mathbf{A}_i^*$. Sean $\phi_i, T_i : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i^*$ las restricciones de ϕ y T_2 sobre cada $\mathbf{A}_i$. El morfismo $T_i \circ \phi_i^{-1} : \mathbf{A}_i^* \to \mathbf{A}_i^*$ es un morfismo de $\mathbf{A}_i^*$-módulos por la izquierda y por la derecha. Ahora bien, los morfismos de $\mathbf{A}_i^*$-módulos de $\mathbf{A}_i^*$ por la izquierda son las homotecias por elementos de $\mathbf{A}_i^*$, si imponemos además que sea morfismo de $\mathbf{A}_i^*$-módulos por la derecha, entonces es una homotecia por elementos de $Z(\mathbf{A}_i^*)$. Así pues, $T_i = z_i \cdot \phi_i$, con $z_i \in Z(\mathbf{A}_i^*)$. Como $Z(\mathbf{A}^*) = \prod_i Z(\mathbf{A}_i^*)$ se concluye fácilmente. □

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple. Supongamos por sencillez que k es un cuerpo algebraicamente cerrado. $\mathbf{A}^* = \prod_I \mathbf{End}_k(\mathbf{E}_i)$, donde $\{E_i\}_{i\in I}$ (módulo isomorfismos) son las representaciones irreducibles de G. El morfismo de la traza $\mathbf{A}_i^* = \mathbf{End}_k(\mathbf{E}_i) \to \mathbf{A}_i$ aplica la unidad 1_i de $\mathbf{A}_i^*$ en χ_{E_i}, pues $\operatorname{tr}(1_i \cdot g) = \chi_{E_i}(g)$. Por tanto, $\phi(\chi_{E_i}) = 1_i$. Como $1_i \cdot 1_j = \delta_{ij} \cdot 1_i$ obtenemos que

$$\langle \chi_{E_i}, \chi_{E_j} \rangle = \delta_{ij}.$$

Como $\mathbf{A}^*$-módulo $\mathbf{A}$ está generado por los χ_{E_i}, pues $\operatorname{Im}\phi$ está generado por los 1_i.

A es isomorfo a $\operatorname{Im}\phi$ como $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda y por la derecha. Recordemos que la integral invariante w_G de G se corresponde con 1_i, siendo $E_i = k$ la representación trivial de G. Por tanto, como $w_G \cdot 1_j = 0$, si E_j no es la representación trivial, y $w_G \cdot 1_i = 1$, si $E_i = k$ es la representación trivial, entonces $w_G \cdot \chi_{E_j} = 0$ si E_j no es la representación trivial, y $w_G \cdot \chi_{E_i} = 1$, si $E_i = k$ es la representación trivial. Recordemos que $\chi_{E\oplus E'} = \chi_E + \chi_{E'}$. Por tanto,

$$w_G \cdot \chi_E = \dim_k E^G.$$

Sea $* : A \to A$, $a \mapsto a^*$ el morfismo inducido en los anillos por el morfismo de paso al inverso de G. Si E es una representación de G, consideraremos E^* también como G-módulo por la izquierda: $(g * w)(e) = w(g^{-1} \cdot e)$. Se cumple que $\chi_E^* = \chi_{E^*}$, pues la traza de $g^{-1} \in G$ operando en E es igual a la traza de g operando en $\mathbf{E}^*$ (que opera por el inverso transpuesto de g).

Teorema 4.5.40. *Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un grupo semisimple y $w_G \in A^*$ su integral invariante. El morfismo*

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}^*, \ a \mapsto w_G(a^* \cdot -)$$

donde $w_G(a^* \cdot -)(a') = w_G(a^* \cdot a')$ coincide con la métrica natural de A.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^*$, $a \mapsto w_G(a^* \cdot -)$ es un morfismo de G-módulos por la izquierda y por la derecha:

$$w_G((g\cdot a)^* \cdot -) \overset{*}{=} w_G(a^* \cdot g^{-1} \cdot -) \overset{**}{=} w_G((a^* \cdot g^{-1} \cdot -)\cdot g) = w_G(a^* \cdot - \cdot g) = g\cdot(w_G(a^* \cdot -)),$$

donde $\stackrel{*}{=}$ se debe a que

$$(g \cdot a)^*(g') = a({g'}^{-1} \cdot g) = a((g^{-1} \cdot g')^{-1}) = a^* \cdot g^{-1}(g),$$

y $\stackrel{**}{=}$ se debe a que $g \cdot w_G = w_G$.

Del mismo modo se comprueba que es morfismo de G-módulos por la derecha.

Podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Sólo nos falta probar que los $\{\chi_{E_i}\}$, donde $\{E_i\}_i$ son las representaciones irreducibles de G, son ortonormales:

$$w_G(\chi^*_{E_i} \cdot \chi_{E_j}) = w_G(\chi_{E_i^* \otimes E_j}) = w_G \cdot \chi_{E_i^* \otimes E_j} = \dim_k \operatorname{Hom}_G(E_i, E_j) = \delta_{ij}.$$

□

Expresemos con $\langle -, - \rangle$ la métrica canónica definida en A. Dados $a, b \in A$, tenemos que $\langle a, b \rangle = \phi(a)(b) = w_G(a^* \cdot b)$. Si denotamos $w_G = \int dg$ entonces,

$$\langle a, b \rangle = \int a(g^{-1}) \cdot b(g)\, dg.$$

La imagen del morfismo $\phi : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{A}^*$ es un ideal bilátero, luego un subanillo, aunque sin unidad: $(\dots, 1, 1, 1, \dots) \notin \oplus \mathbf{A}_i^* = \operatorname{Im} \phi$.

Definición 4.5.41. *Mediante la identificación $\mathbf{A} \stackrel{\phi}{\simeq} \operatorname{Im} \phi$, el producto del subanillo induce en $\mathbf{A}$ un producto, que se llama producto de convolución.*

Sean $a, b \in A$, $w' = \phi(a)$, $w'' = \phi(b)$ y denotemos el producto de convolución por $*$. Entonces

$$a * b = \phi^{-1}(w' \cdot w'') = w' \cdot \phi^{-1}(w'') = w' \cdot b.$$

Por tanto, $(a*b)(x) = (w' \cdot b)(x) = b(x \cdot w') = (x \cdot w')(b) = w'(b \cdot x) = w_G(a^* \cdot (b \cdot x))$. Si denotamos $w_G = \int dg$ entonces

$$(a * b)(x) = \int a(g^{-1}) \cdot b(x \cdot g)\, dg.$$

Ilustremos esta definición con un ejemplo.

Ejemplo 4.5.42. *El semigrupo con unidad $M_n = \operatorname{Spec} k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ es semisimple, luego en $A = k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ tenemos un producto de convolución, definido de la siguiente manera:*

Denotemos por δ_{ij} la matriz cuyo coeficiente ij es 1 y todos los demás son nulos. Es fácil comprobar que $\phi^{-1}(\delta_{ij}) = x_{ji}$. Entonces

$$x_{ij} * x_{i'j'} = \phi^{-1}(\phi(x_{ij}) \cdot \phi(x_{i'j'})) = \phi^{-1}(\delta_{ji} \cdot \delta_{j'i'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j' \\ x_{i'j} & \text{si } i = j' \end{cases}$$

En general, $\phi^{-1}(\delta_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{i_rj_r}) = x_{j_1i_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_ri_r}$ *y se tiene*

$$(x_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_rj_r}) * (x_{i'_1j'_1}\cdot\ldots\cdot x_{i'_rj'_r}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ r\neq s \\ \dfrac{1}{r!}\sum\limits_{\sigma\in S_r}(x_{i'_1j_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot x_{i'_rj_{\sigma(r)}})\cdot\delta_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)},j'_1,\ldots,j'_r} & si\ r=s\end{cases}$$

donde la última "delta" es una delta de Kronecker (generalizada).

Teorema 4.5.43. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Si en $\mathbf{A}$ hay definida una métrica simétrica $T_2=\langle -,-\rangle$, $\mathbf{A}^*$-lineal, $\langle a\cdot w, a'\rangle = \langle a, w\cdot a'\rangle$, que es no singular sobre toda subcoálgebra finita, entonces $\mathbf{A}^*$ es separable y la métrica es, salvo un factor de $Inv\,(Z(\mathbf{A}^*))$, la métrica natural ϕ.*

Demostración. Sea $\mathbf{M}\subset\mathbf{A}$ el submódulo semisimple maximal, $\mathbf{M}=\oplus\mathbf{A}_i$, donde los $\mathbf{A}_i^*$ son álgebras simples. Además, los $\mathbf{A}_i$ tienen estructura de coálgebra, luego por hipótesis la polaridad de la métrica $\langle -,-\rangle$ restringida a $\mathbf{A}_i$ es un isomorfismo.

La descomposición de $\mathbf{M}=\oplus\mathbf{A}_i$ es ortogonal, pues $\mathbf{A}_i\perp\mathbf{A}_j$: para $w=(1,0)\in\mathbf{A}_i^*\times\mathbf{A}_j^*$ se verifica que

$$\langle a_i,a_j\rangle = \langle a_i\cdot w, a_j\rangle = \langle a_i, w\cdot a_j\rangle = \langle a_i, 0\rangle = 0$$

Por tanto, la polaridad es inyectiva sobre $\mathbf{M}$ y podemos descomponer $\mathbf{A}=\mathbf{M}\oplus\mathbf{M}^\perp$, donde $\mathbf{M}^\perp$ es un $\mathbf{A}^*$-submódulo porque la métrica es $\mathbf{A}^*$-lineal. Puesto que todos los $\mathbf{A}$-módulos simples están en $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^\perp=0$ y $\mathbf{A}=\mathbf{M}$, es decir, $\mathbf{A}^*=\mathbf{M}^*$ es semisimple, luego $\mathbf{A}^*$ es un esquema de álgebras separable porque k es algebraicamente cerrado. □

4.5.5. Integral invariante de Sl_n, de Gl_n y de O_n

Por las secciones anteriores sabemos que

$$Sl_n = \operatorname{Spec} k[x_{11},\ldots,x_{nn}]/(det(x_{ij})-1),$$

$$Gl_n = \operatorname{Spec} k[x_{11},\ldots,x_{nn},\frac{1}{det(x_{ij})}]$$

y

$$O_n = \operatorname{Spec} k[x_{11},\ldots,x_{nn},\frac{1}{det(x_{ij})}]/(\sum x_{ik}x_{jk}-\delta_{ij})$$

son grupos semisimples, luego para cada uno existe una integral w invariante por la acción del grupo y tal que $w(1)=1$. Esta sección la vamos a dedicar al cálculo de estas formas lineales.

Integral invariante de Sl_n. Sea $A = k[x_{11}, \dots, x_{nn}]/(det(x_{ij}) - 1)$ el anillo de funciones del grupo lineal especial. Sabemos que $\mathbf{A}^*$ descompone en producto directo de álgebras simples, siendo una de ellas la correspondiente a la representación trivial

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \cdot w_{Sl_n} \times \mathbf{B}^*.$$

Se verifica que $\mathbf{k} \cdot w_{Sl_n} = \mathbf{A}^{*Sl_n}$, luego debemos calcular los invariantes de $\mathbf{A}^*$ por Sl_n. La integral invariante, w_{Sl_n}, es la forma lineal invariante por Sl_n unívocamente determinada por la ecuación $w_{Sl_n}(1) = 1$.

Denotemos $A_{M_n} = k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ el anillo de funciones algebraicas de M_n. Como $Sl_n \subset M_n$ tenemos

$$\mathbf{A}^* = \overline{k[Sl_n^\cdot]} \subset \overline{k[M_n^\cdot]} = \mathbf{A}^*_{M_n}.$$

Calcularemos primero los invariantes de $\overline{k[M_n^\cdot]}$ por la acción de Sl_n y luego calcularemos los que pertenecen a $\mathbf{A}^*$. Puesto que A_{M_n} es un Sl_n-módulo semisimple, descompone en la suma directa

$$A_{M_n} = A_{M_n}^{Sl_n} \oplus (\bigoplus_i S_i),$$

donde S_i son Sl_n-submódulos simples, pero ya no Sl_n-invariantes. Tomando dual tenemos que

$$\overline{k[M_n^\cdot]} = \mathbf{A}^*_{M_n} = (\mathbf{A}_{M_n}^{Sl_n})^* \times (\prod_i \mathbf{S}_i^*) = (\mathbf{A}^*_{M_n})^{Sl_n} \times (\prod_i \mathbf{S}_i^*)$$

pues si un grupo opera en un módulo trivialmente, en su dual opera del mismo modo, y viceversa.

Sea ϕ la métrica canónica de A_{M_n} (o cualquier otra multiplicada por un invertible de $Z(\mathbf{A}^*_{M_n})$). La polaridad $\phi : \mathbf{A}_{M_n} = \mathbf{A}_{M_n}^{Sl_n} \oplus \mathbf{B} \to (\mathbf{A}_{M_n}^{Sl_n})^* \times \mathbf{B}^*$, que es un morfismo de Sl_n-módulos, cumple que

$$\phi(\mathbf{A}_{M_n}^{Sl_n}) \subset (\mathbf{A}_{M_n}^{Sl_n})^* = (\mathbf{A}^*_{M_n})^{Sl_n}$$

y $\phi(\mathbf{B}) \subset \mathbf{B}^*$. Como

$$\overline{\phi(\mathbf{A}_{M_n})} = \mathbf{A}^*_{M_n},$$

entonces $\overline{\phi(\mathbf{A}_{M_n}^{Sl_n})} = (\mathbf{A}^*_{M_n})^{Sl_n}$. Calculemos pues $A_{M_n}^{Sl_n}$.

La sucesión exacta de grupos

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & Sl_n & \subset & Gl_n & \to & Gl_n/Sl_n = G_m & \to & 1 \\ & & & & T & \mapsto & det(T) & & \end{array}$$

nos indica que

$$G_m = \operatorname{Spec}\left(k[x_{11}, \dots, x_{nn}, \frac{1}{det(x_{ij})}]\right)^{Sl_n} = \operatorname{Spec} k[det(x_{ij}), \frac{1}{det(x_{ij})}]$$

luego

$$k[x_{11},\dots,x_{nn}]^{Sl_n} = k[x_{11},\dots,x_{nn}] \cap k[det(x_{ij}), \frac{1}{det(x_{ij})}] = k[det(x_{ij})]$$

y por tanto

$$(\mathbf{k}[\mathbf{x_{11}},\dots,\mathbf{x_{nn}}]^*)^{Sl_n} = \mathbf{k} \times \mathbf{k}\cdot\phi(\mathbf{det}(\mathbf{x_{ij}})) \times \dots, \times \mathbf{k}\cdot\phi(\mathbf{det}(\mathbf{x_{ij}})^{\mathbf{r}}) \times \dots$$

Recordemos que denotábamos por δ_{ij} la matriz de coeficientes nulos, salvo el ij que vale 1. Como aplicación lineal sobre $k[x_{ij}]$, δ_{ij} coincide con $\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \mid_0$:

$$\phi(x_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \mid_0,$$

y en general

$$\phi(x_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_m j_m}) = \frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial x_{j_1 i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_{j_m i_m}} \mid_0 .$$

Según esto, como el determinante de las funciones x_{ij} es un polinomio homogéneo de grado n,

$$\phi(det(x_{ij})) = \frac{1}{n!} det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ji}}\right) \mid_0 = \frac{1}{n!} det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) \mid_0 .$$

Del mismo modo,

$$\phi(det(x_{ij})^r) = \frac{1}{(rn)!} det^r\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) \mid_0 .$$

Sea $D = det\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$ (llamado *operador* Ω u *operador de Cayley*) y denotemos $D_0^r = D^r \mid_0$. Tenemos que

$$(\mathbf{k}[\mathbf{x_{11}},\dots,\mathbf{x_{nn}}]^*)^{Sl_n} = \mathbf{k} \times \mathbf{k}\cdot D_0 \times \dots \times \mathbf{k}\cdot D_0^r \times \dots$$

Calculemos ahora las $\tilde{w} \in (\mathbf{k}[\mathbf{x_{11}},\dots,\mathbf{x_{nn}}]^*)^{Sl_n}$ tales que se anulan sobre el ideal $I = (det(x_{ij}) - 1)$. Como $\tilde{w}$ es Sl_n-invariante, tenemos que $\tilde{w} \cdot w_{Sl_n} = \tilde{w}$. Por tanto, $\tilde{w}(I) = 0$ si y sólo si $\tilde{w}(w_{Sl_n} \cdot I) = \tilde{w}(I^{Sl_n}) = 0$.

Por tanto, si $\tilde{w}$ se anula sobre las funciones

$$det^n(x_{ij}) - det^{n-1}(x_{ij})$$

para todo $n \geq 0$, entonces $\tilde{w} = w_{Sl_n}$ si exigimos $\tilde{w}(1) = 1$. Sea $\tilde{w} = \lambda_0 + \lambda_1 D_0 + \ldots + \lambda_r D_0^r + \ldots$ tal que se anula sobre las funciones anteriores. Eso significa que

$$\lambda_1 D_0(det(x_{ij})) - \lambda_0 = 0,$$

$$\lambda_2 D_0^2(det^2(x_{ij})) - \lambda_1 D_0(det(x_{ij})) = 0,$$
$$\dots$$
$$\lambda_i D_0^i(det^i(x_{ij})) - \lambda_{i-1} D_0^{i-1}(det^{i-1}(x_{ij})) = 0.$$

Si $\tilde{w}(1) = \lambda_0 = 1$, entonces

$$\lambda_1 = \frac{1}{D_0(det(x_{ij}))},$$
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 D_0(det(x_{ij}))}{D_0^2(det^2(x_{ij}))} = \frac{1}{D_0^2(det^2(x_{ij}))},$$
$$\dots$$
$$\lambda_i = \frac{1}{D_0^i(det^i(x_{ij}))}.$$

Luego

$$\boxed{w = \sum_i \frac{D_0^i}{D_0^i(det^i(x_{ij}))}}$$

Sólo falta determinar el valor de $D_0^i(det^i(x_{ij})) \in k$.

Lema 4.5.44. *Se cumple que* $D(det^r(x_{ij})) \in k[x_{11}, \dots, x_{nn}]^{Sl_n}$.

Demostración. Dado $S \in Sl_n$, consideremos el morfismo de traslación $\tau_S : M_n \to M_n$, $A \mapsto S \circ A$. Este morfismo induce un morfismo natural entre los anillos de funciones $\tau : k[x_{11}, \dots, x_{nn}] \to k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$, $f \mapsto f \circ \tau_S^{-1}$. A su vez éste induce un morfismo natural entre los módulos de derivaciones $Der = Der_k(k[x_{ij}], k[x_{ij}])$, $\tau' : Der \to Der$, $D \mapsto \tau \circ D \circ \tau^{-1}$.

Es fácil comprobar que

$$\tau'\left(\frac{\partial}{\partial x_{rs}}\right) = \left[S \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i,j}\right]_{sr}.$$

También es fácil comprobar que dadas n-derivaciones $D_1, \dots, D_n$, $\tau((D_1 \circ \dots \circ D_n)(f)) = (\tau'(D_1) \circ \dots \circ \tau'(D_n))(\tau(f))$. Por tanto,

$$\tau(D(det^r(x_{ij}))) = \left|\left(\tau'\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)\right)\right| (\tau(det^r(x_{ij}))) = \left|S \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i,j}\right| (det^r(x_{ij}))$$
$$= |S| \cdot D(det^r(x_{ij})) = D(det^r(x_{ij})).$$

□

Lema 4.5.45. *Se verifica que*

$$D(det^r(x_{ij})) = \mu_{r,n} \cdot det^{r-1}(x_{ij})$$

donde

$$\mu_{r,n} = r \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (r+n-1) = \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!}.$$

Dolgachev llega al mismo resultado en [11, 2.1].

Demostración. $D(det^r(x_{ij}))$ es un polinomio homogéneo de grado $n \cdot (r-1)$ invariante por el especial lineal, luego es igual a $\mu_{r,n} \cdot det^{r-1}(x_{ij})$. Calculemos $\mu_{r,n}$.

Procedamos por inducción sobre n. Para $n = 1$ el lema es obvio. Hagamos módulo $(x_{ij} - \delta_{ij})_{i,j}$ en $k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$. En tal caso $\mu_{r,n} \cdot det^{r-1} = \mu_{r,n}$. Denotemos $det^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}$ el menor del complementario de las columnas $i_1, \dots, i_r$ y filas $j_1, \dots, j_r$. Igualmente, denotemos $D^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}$ el determinante de las parciales correspondientes a las variables del menor anterior. Como siempre, x_{ij} denota el elemento de la fila i y la columna j.

$$
\begin{aligned}
\mu_{r,n} &\equiv D(det^r) \equiv D((\sum_i (-1)^{1+i} \cdot x_{i1} \cdot det^1_i)^r) \\
&\equiv D(x_{11}^r \cdot (det^1_1)^r + r \cdot \sum_{i \neq 1} x_{11}^r \cdot (-1)^{1+i} \cdot x_{i1} \cdot (det^1_1)^{r-1} \cdot det^1_i + \dots) \\
&\equiv r \cdot D^1_1 (det^1_1)^r + r \cdot \sum_{i\neq 1} D^1_i ((det^1_1)^{r-1} \cdot det^1_i) \\
&\equiv r \cdot (\mu_{r,n-1} + \sum_{i \neq 1} D^1_i ((det^{1i}_{1i})^{r-1} \cdot det^1_i)) \\
&\equiv r \cdot (\mu_{r,n-1} + \sum_{i\neq 1} \sum_{j \neq 1} D^{1,j}_{i,1} ((det^{1i}_{1i})^{r-1} \cdot det^{1i}_{i1})) \\
&\equiv r \cdot (\mu_{r,n-1} + \sum_{i \neq 1} \frac{1}{r} D^1_1 ((\sum_{j\neq 1} (-1)^{i+j} \cdot x_{ij} \cdot det^{1j}_{1i})^r)) \\
&\equiv r \cdot (\mu_{r,n-1} + \sum_{i\neq 1} \frac{1}{r} D^1_1((det^1_1)^r)) \\
&\equiv r \cdot (\mu_{r,n-1} + \frac{n-1}{r} \cdot \mu_{r,n-1}) = (r+n-1) \cdot \mu_{r,n-1}.
\end{aligned}
$$

□

Luego
$$D^r(det^r(x_{ij})) = \mu_r \cdot \mu_{r-1} \cdot \ldots \cdot \mu_1.$$

Toda representación lineal de Sl_n es un submódulo de una suma directa de la representación regular (es decir, del anillo de funciones de Sl_n). El anillo de funciones de Sl_n es un cociente del anillo de funciones de M_n. Por último el anillo de funciones de $M_n = \mathrm{End}_k(E)$ está contenido en una suma directa de $E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E$. Calculemos los invariantes de Sl_n operando en estos espacios vectoriales.

Proposición 4.5.46. *Sea Sl_n el grupo especial lineal de los endomorfismos lineales de E ($\dim E = n$). Consideremos la acción natural de Sl_n en $E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E$, $g \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = g \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes g \cdot v_m$. Se cumple que:*

1. $(E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)^{Sl_n} = \Lambda^n E$.

2. $$(E\otimes \overset{nm}{\cdots} \otimes E)^{Sl_n} = \sum_{\sigma\in S_{nm}} \sigma(\Lambda^n E\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \Lambda^n E)$$

   donde $\sigma\in S_{nm}$ opera en $E\otimes \overset{nm}{\cdots} \otimes E$ permutando los factores.

3. $(E\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E)^{Sl_n} = 0$ *si m no es múltiplo de n.*

Demostración. Recordemos que el morfismo natural del grupo de matrices en su álgebra envolvente se expresa como sigue

$$\mathbf{End}_k(E) \to \prod_m S^m\mathbf{End}_k(\mathbf{E}), \quad g\mapsto (g\cdot \overset{m}{\cdots} \cdot g)_m.$$

La operación natural de $\mathrm{End}_k(E)$ en $E\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E$ extiende a una única estructura de $\prod_m S^m\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$-módulo, que es proyectar $\prod_m S^m\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ en el factor m-ésimo, $S^m\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$, y hacer operar éste en $E\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E$ vía su inclusión en $\mathbf{End}_k(E)\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \mathbf{End}_k(E)$, es decir,

$$(g_1\cdot\ldots\cdot g_m)\cdot(v_1\otimes\ldots\otimes v_m) = \frac{1}{m!}\cdot\sum_{\sigma\in S_m} g_{\sigma(1)}(v_1)\otimes\ldots\otimes g_{\sigma(m)}(v_n).$$

1. Tenemos que calcular $w_{Sl_n}\cdot(E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E) = D\cdot(E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)$. Fijada una base de E, $\{e_1,\ldots,e_n\}$, observemos que $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ se corresponde con la matriz δ_{ij} que aplica el vector e_j en e_i y los demás vectores en el cero. Ahora es claro que $D\cdot e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_n} = \frac{1}{n!}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_n}$, es decir, multiplicar por D es un múltiplo del operador de hemisimetrización.

2. La componente de grado $r = nm$ de w_{Sl_n} es salvo escalares D^m, que es igual salvo escalares a $\sum\limits_{\sigma\in S_{nm}} \sigma\circ(D\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes D)\circ\sigma^{-1}$. Luego,

   $$(E\otimes \overset{nm}{\cdots} \otimes E)^{Sl_n} \subseteq \sum_{\sigma\in S_{nm}} \sigma(\Lambda^n E\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes \Lambda^n E).$$

   La inclusión inversa es obvia.

3. $w_{Sl_n}\in \prod_r S^r\mathrm{End}_k(E)$ y sus "componentes" de grado r son nulas cuando r no es múltiplo de n.

□

Podemos calcular la dimensión de $(E\otimes \overset{nm}{\cdots} \otimes E)^{Sl_n}$:

$$\begin{aligned}
\dim_k(E\otimes \overset{nm}{\cdots} \otimes E)^{Sl_n} &= w_{Sl_n}\cdot \chi_{E\otimes\overset{nm}{\cdots}\otimes E} = \frac{D^m}{D^m(\det^m)}(\chi_E^{nm}) \\
&= \frac{D^m}{D^m(\det^m)}((x_{11}+\overset{n}{\cdots}+x_{nn})^{nm}) \\
&= \frac{D^m}{D^m(\det^m)}(x_{11}^m\cdot\ldots\cdot x_{nn}^m\cdot\frac{(mn)!}{m!^n}) \\
&= \frac{(mn)!}{D^m(\det^m)}.
\end{aligned}$$

Integral invariante de Gl_n. Sea $A=\operatorname{Spec} k[x_{|1},\ldots,x_{nn},\frac{1}{det(x_{ij})}]$ el anillo de funciones del grupo lineal. Como en el caso anterior, $(\mathbf{A}^*)^{Gl_n}=\mathbf{k}\cdot w_{Gl_n}$, donde w_{Gl_n} es la forma lineal sobre A tal que es Gl_n-invariante y $w_{Gl_n}(1)=1$. Pero por otra parte, $(\mathbf{A}^*)^{Gl_n}=((\mathbf{A}^*)^{G_m})^{Sl_n}$, luego primero calcularemos $(\mathbf{A}^*)^{G_m}=(\mathbf{A}^{G_m})^*$ y entre esas formas lineales, buscaremos las invariantes por Sl_n.

El grupo multiplicativo opera sobre una función x_{ij}^r de grado r así: $\lambda * x_{ij}^r=\lambda^r\cdot x_{ij}^r$, luego las funciones invariantes son los polinomios homogéneos de grado $n\cdot r$ cociente por $det^r(x_{ij})$:

$$A^{G_m}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\frac{\{\text{ polinomios homogéneos de grado } n\cdot r\}}{det^r(x_{ij})}.$$

Buscamos las formas lineales $w: A^{G_m}\to k$ invariantes por Sl_n. Para cada $r\in\mathbb{N}$ esta forma restringida a $\left\{\frac{p_{n\cdot r}(x_{ij})}{det^r(x_{ij})}\right.$, donde $p_{n\cdot r}(x_{ij})$ es un polinomio homogéneo de grado $n\cdot r$ $\}$, debe ser Sl_n-invariante. Puesto que las funciones $det^r(x_{ij})$ ya son invariantes por Sl_n, w_{Gl_n} restringida a los polinomios homogéneos de grado $n\cdot r$, que llamaremos w_r, debe ser Sl_n-invariante. Como $w_r\in$ (polinomios homogéneos de grado $n\cdot r)^*=(S^{r\cdot n}\operatorname{End}_k(E)^*)^*=S^{r\cdot n}\operatorname{End}_k(E)\subset\prod_i S^i\operatorname{End}_k(E)=k[x_{11},\ldots,x_{nn}]^*$, para que sea Sl_n-invariante debe ser $w_r=\alpha_r\cdot D^r$. Si además w debe ser 1 sobre $1=\dfrac{det^r(x_{ij})}{det^r(x_{ij})}\in A^{G_m}$, eso equivale a que $1=w_r(det^r(x_{ij}))=\alpha_r\cdot D^r(det^r(x_{ij}))$, luego $\alpha_r=\dfrac{1}{D^r(det^r(x_{ij}))}$ y

$$w_r=\frac{D^r}{D^r(det^r(x_{ij}))}=\frac{D^r}{\mu_r\cdot\ldots\cdot\mu_1}.$$

La integral invariante w_{Gl_n} de Gl_n que hemos determinado[4], como forma lineal

[4]Marcel Bökstedt comprueba en *"Notes on Geometric Invariant Theory"* (disponible en la dirección de internet `http://home.imf.au.dk/marcel/GIT/GIT.ps`) que la integral así definida es el operador de Reynolds del grupo lineal, y afirma que Cayley, en cierto sentido, ya la había obtenido.

sobre A es

$$w_{Gl_n}\left(\frac{p(x_{ij})}{det^s(x_{ij})}\right) = w_{Gl_n}\left(\dots + \frac{p_{n\cdot s}(x_{ij})}{det^s(x_{ij})} + \dots\right) = w_s\left(\frac{p_{n\cdot s}(x_{ij})}{det^s(x_{ij})}\right)$$
$$= \frac{D^s(p_{n\cdot s}(x_{ij}))}{D^s(det^s(x_{ij}))}.$$

Integral invariante de O_n. Sea T_2 una métrica simétrica no singular sobre un espacio vectorial E de dimensión n. Sea O_n el subgrupo del grupo lineal de las simetrías de T_2. En la variedad algebraica $S^2\mathbf{E}^*$ de las métricas simétricas, independientemente de la base escogida de E, podemos definir (salvo un factor constante multiplicativo) la función det que asigna a cada métrica su determinante. Así pues, podemos considerar el abierto $S^2\mathbf{E}^* - (det)_0$. La sucesión de morfismos de variedades

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & O_n & \to & Gl(E) & \to & S^2\mathbf{E}^* - (det)_0 & \to & 1 \\ & & & & S & \mapsto & S^t \circ T_2 \circ S & & \end{array}$$

muestra que $S^2\mathbf{E}^* - (det)_0$ es la variedad cociente de $Gl(E)$ por el subgrupo ortogonal O_n (operando O_n en $Gl(E)$ por la izquierda). Fijando una base en E, diremos que $k[x_{11},\dots,x_{nn},\frac{1}{det(x_{ij})}]$ es el anillo de funciones de $Gl(E)$ y $k[y_{i\leq j},\frac{1}{det(y_{ij})}]$ el anillo de funciones de $S^2\mathbf{E}^* - (det)_0$. Entre anillos tenemos el morfismo inducido

$$\begin{array}{ccc} k[y_{i\leq j},\frac{1}{det(y_{ij})}] & \hookrightarrow & k[x_{11},\dots,x_{nn},\frac{1}{det(x_{ij})}] \\ y_{rs} & \mapsto & [(x_{ij})^t \circ T_2 \circ (x_{ij})]_{rs} \\ det(y_{ij}) & \mapsto & det(x_{ij})^2 \cdot det\, T_2. \end{array}$$

Las funciones algebraicas de $Gl(E)$ invariantes por O_n se identifican con las funciones algebraicas de $S^2\mathbf{E}^* - (det)_0$. Por tanto, en el morfismo $\mathbf{End}_k(\mathbf{E}) \to S^2\mathbf{E}^*$, $S \mapsto S^t \circ T_2 \circ S$, las funciones de $S^2\mathbf{E}^*$ se identifican con las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ invariantes por O_n (por la derecha).

Expresemos estas igualdades sin fijar bases. Hemos definido el morfismo

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{End}_k(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E} & \longrightarrow & S^2\mathbf{E}^* \\ w \otimes e & \mapsto & C^{3,5}_{2,4}(w \otimes e \otimes T_2 \otimes e \otimes w) \\ & & = T_2(e,e) \cdot w \otimes w \end{array}$$

que induce un morfismo entre los anillos de funciones $S^\cdot(S^2E) \to S^\cdot(\mathrm{End}_k(E)^*)$, que se expresa explícitamente como sigue

$$S^2E \to S^2(\mathrm{End}_k(E)^*), \quad s \mapsto \overline{T_2 \otimes s}$$

(pensamos $S^2(\mathrm{End}_k(E)^*)$ como cociente de $E^*\otimes E\otimes E^*\otimes E = E^*\otimes E^*\otimes E\otimes E$). En general,

$$\begin{array}{ccc} S^m(S^2E) & \longrightarrow & S^{2m}(\mathrm{End}_k(E)^*) \\ s_1\cdot\ldots\cdot s_m & \mapsto & \overline{T_2\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes T_2\otimes s_1\otimes\ldots\otimes s_m} \end{array}$$

(pensamos $S^{2m}(\mathrm{End}_k(E)^*)$ como cociente de $(E^*\otimes E)\otimes \overset{2m}{\cdots}\otimes (E^*\otimes E) = E^*\otimes \overset{2m}{\cdots}\otimes E^*\otimes E\otimes \overset{2m}{\cdots}\otimes E$).

De modo equivalente calculemos las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ que son O_n-invariantes por la izquierda.

La sucesión de morfismos de variedades

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & O_n & \to & Gl(E) & \to & S^2\mathbf{E}-(det)_0 & \to & 1 \\ & & & & S & \mapsto & S\circ T^2\circ S^t & & \end{array}$$

muestra que $S^2\mathbf{E}-(det)_0$ es la variedad cociente de $Gl(E)$ por el subgrupo ortogonal O_n (operando O_n en $Gl(E)$ por la derecha).

De nuevo, las funciones de $S^2\mathbf{E}$ se identifican con las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ invariantes por O_n (por la izquierda).

Hemos definido el morfismo

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{End}_k(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^*\otimes\mathbf{E} & \longrightarrow & S^2\mathbf{E} \\ w\otimes e & \mapsto & C^{3,5}_{2,4}(e\otimes w\otimes T^2\otimes w\otimes e) \\ & & = T^2(w,w)\cdot e\otimes e \end{array}$$

que induce un morfismo entre los anillos de funciones $S^{\cdot}(S^2E)\to S^{\cdot}(\mathrm{End}_k(E)^*)$, que se expresa explícitamente como sigue

$$S^2E^*\to S^2(\mathrm{End}_k(E)^*),\quad \omega\mapsto\overline{\omega\otimes T^2}$$

(pensamos $S^2(\mathrm{End}_k(E)^*)$ como un cociente de $E^*\otimes E\otimes E^*\otimes E = E^*\otimes E^*\otimes E\otimes E$). En general,

$$\begin{array}{ccc} S^m(S^2E^*) & \longrightarrow & S^{2m}(\mathrm{End}_k(E)^*) \\ \omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_m & \mapsto & \overline{\omega_1\otimes\ldots\otimes\omega_m\otimes T^2\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes T^2} \end{array}$$

(pensamos $S^{2m}(\mathrm{End}_k(E)^*)$ como cociente de $E^{*2m}\otimes E^{2m}$). Por tanto, los invariantes de $S^{2m}(\mathrm{End}_k(E)^*)$ por la acción de O_n por la izquierda y por la derecha son

$$\begin{aligned} &\langle\overline{\sigma(T_2\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes T_2)\otimes\sigma'(T^2\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes T^2)}\rangle_{\sigma,\sigma'\in S_{2m}} \\ &=\langle\overline{(T_2\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes T_2)\otimes\sigma'(T^2\otimes \overset{m}{\cdots}\otimes T^2)}\rangle_{\sigma'\in S_{2m}}. \end{aligned}$$

Sea A_{O_n} el anillo de funciones algebraicas de O_n y A_{M_n} el anillo de funciones algebraicas de M_n. Por tanto, la componente r-ésima $[w_{O_n}]_r$ de la integral invariante de O_n, $w_{O_n} \in A^*_{O_n} \subset A^*_{M_n} = \prod_r S^r \mathrm{End}_k(E)$ es

$$[w_{O_n}]_r = \sum_{\sigma \in S_{2m}} \lambda_\sigma \cdot \overline{(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)} \qquad \text{si } r = 2m,$$

$$[w_{O_n}]_r = 0 \qquad \text{si } r = 2m+1.$$

Proposición 4.5.47. *Consideremos la acción natural de O_n en $E \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes E$, $g \cdot (e_1 \otimes \cdots \otimes e_r) = g \cdot e_1 \otimes \ldots \otimes g \cdot e_r$. Se cumple que:*

1. $(E \otimes \overset{2m+1}{\cdots} \otimes E)^{O_n} = 0$.
2. $(E \otimes \overset{2m}{\cdots} \otimes E)^{O_n} = \langle \sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2) \rangle_{\sigma \in S_{2m}}$.

Demostración.

1. $w_{O_n} \cdot (E \otimes \overset{2m+1}{\cdots} \otimes E) = [w_{O_n}]_{2m+1} \cdot E^{\otimes 2m+1} = 0 \cdot E^{\otimes 2m+1} = 0$.
2. $[w_{O_n}]_{2m} = \sum_{\sigma \in S_{2m}} \lambda_\sigma \cdot \overline{(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)}$ y tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} &\overline{(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)} \\ &= \frac{1}{(2m)!} \sum_{\sigma' \in S_{2m}} \sigma'(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \sigma'\sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2) \end{aligned}$$

vía la inclusión $S^{2m}\mathrm{End}_k(E) \subset E^{*\otimes 2m} \otimes E^{\otimes 2m}$. Además, $E^{*\otimes 2m} \otimes E^{\otimes 2m}$ opera en $E^{\otimes 2m}$ contrayendo cada forma lineal con el correspondiente vector.

Por tanto,

$$(E^{\otimes 2m})^{O_n} = w_{O_n} \cdot E^{\otimes 2m} = [w_{O_n}]_{2m} \cdot E^{\otimes 2m} \subseteq \langle \sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2) \rangle_{\sigma \in S_{2m}}.$$

La inclusión inversa es obvia.

□

Consideremos la inclusión $S_m \hookrightarrow S_{2m}$, que asigna a cada $\sigma \in S_m$ la permutación que seguimos denotando por σ definida por $\tilde{\sigma}(2i) = 2\sigma(i)$, $\tilde{\sigma}(2i-1) = 2\sigma(i)-1$, para todo $1 \leq i \leq m$. Sea $(S_2 \times \overset{m}{\cdots} \times S_2)$ el subgrupo de S_{2m} generado por las permutaciones $(2i-1, 2i)$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Para todo $\tau \in (S_2 \times \overset{m}{\cdots} \times S_2) \rtimes S_m$, se cumple que $\tau(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2) = T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2$. Por tanto, dados $\tau, \tau' \in (S_2 \times \overset{m}{\cdots} \times S_2) \rtimes S_m$, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \sigma(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)} &= \overline{\tau(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \sigma\tau'(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)} \\ &= \overline{(T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2) \otimes \tau^{-1}\sigma\tau'(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)}. \end{aligned}$$

Dado $\sigma \in S_{2m}$ existen $\tau, \tau' \in (S_2 \times \overset{m}{\cdots} \times S_2) \rtimes S_m$ tal que $\tau\sigma\tau'$ permuta los números impares entre sí (y los pares entre sí), es más podemos suponer que sobre los impares es la identidad. Por tanto,

$$\{\overline{T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2 \otimes T^2_{1\sigma(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma(m)}}\}_{\sigma \in S_m}$$

forman un sistema generador de las funciones de M_n invariantes por la izquierda y por la derecha, y denotamos por $T^2_{1\sigma(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma(m)}$, $\tau(T^2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2)$, donde $\tau(2i-1) = 2i-1$ y $\tau(2i) = 2\sigma(i)$. Ahora dado $\sigma' \in S_m \subset S_{2m}$ igualmente obtenemos que

$$\begin{aligned} &\overline{T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2 \otimes T^2_{1\sigma(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma(m)}} \\ &= \overline{T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2 \otimes T^2_{1\sigma'\sigma\sigma'^{-1}(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma'\sigma\sigma'^{-1}(m)}}. \end{aligned}$$

Dados $\sigma, \sigma' \in S_m$ diremos que $\sigma \sim \sigma'$ si y sólo si σ y σ' son conjugados entre sí. Por tanto,

$$\{\overline{T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2 \otimes T^2_{1\sigma(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma(m)}}\}_{[\sigma] \in S_m/\sim}$$

forman un sistema generador de las funciones de M_n invariantes por la izquierda y por la derecha. Es más, forman una base, como vamos a ver.

Consideremos el morfismo $S^2E \to \mathrm{End}_k(E)$, ${T'}^2 \mapsto {T'}^2 \circ T_2$, que asigna a cada métrica ${T'}^2$ el endomorfismo asociado (a la pareja $T^2, {T'}^2$). Es bien conocido que dos métricas son isométricas (respecto a T_2) si y sólo si sus endomorfismos asociados son equivalentes. Por tanto, la órbita del endomorfismo asociado a una métrica ${T'}^2$ (por la acción por conjugación del grupo lineal) corta en S^2E en la órbita de ${T'}^2$ por la acción del grupo ortogonal de T_2. Además las órbitas de todos los endomorfismos asociados (por la acción por conjugación del grupo lineal) recubren el conjunto de los endomorfismos diagonalizables, que contienen un abierto no vacío. Como consecuencia se obtiene que las funciones de M_n invariantes (por la acción por conjugación del grupo lineal) están incluidas en las funciones de S^2E invariantes por el grupo ortogonal.

Componiendo los morfismos $\mathbf{End}_k(\mathbf{E}) \to S^2\mathbf{E} \to \mathbf{End}_k(\mathbf{E})$, $T \mapsto TT^2T^t \mapsto TT^2T^tT_2$, tenemos que las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ invariantes por la acción por conjugación del grupo lineal (que hemos calculado en la Proposición 4.5.38) se inyectan en las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ invariantes por la izquierda y por la derecha por la acción del grupo ortogonal. Explícitamente,

$$\begin{tikzcd} \overline{Id^*_{1\sigma(1)} \otimes \dots \otimes Id^*_{m\sigma(m)}} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, equal, "Not."'] & \overline{T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2 \otimes T^2_{1\sigma(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma(m)}} \arrow[d, equal, "Not."'] \\ \tilde{\sigma} & a_\sigma \end{tikzcd}$$

Ahora es claro que la inyección es una epiyección, es decir, las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ invariantes por la acción por conjugación del grupo lineal se identifican con las funciones de $\mathbf{End}_k(\mathbf{E})$ invariantes por la izquierda y la derecha por la acción del grupo ortogonal.

Hemos calculado las $\tilde{w} \in \mathbf{A}^*_{M_n}$ que son O_n-invariantes por la izquierda y por la derecha. Para calcular la integral invariante w_{O_n} de O_n nos falta imponer que $\tilde{w}(I) = 0$, donde I es el ideal de funciones de M_n que se anulan en O_n. Ahora bien, como $w_{O_n} \cdot \tilde{w} \cdot w_{O_n} = \tilde{w}$, tenemos que $\tilde{w}(I) = \tilde{w}(w_{O_n} \cdot I \cdot w_{O_n})$ y $w_{O_n} \cdot I \cdot w_{O_n}$ son las funciones de M_n que son O_n-invariantes por la izquierda y por la derecha que se anulan en O_n. Las cuales se identifican con el ideal I' de las funciones de M_n invariantes por la acción por conjugación del grupo lineal que se anulan en $Id \in M_n$.

Por la Proposición 4.5.38, $A^{Gl_n}_{M_n} = \underset{m}{\oplus} k[S_m]^{S_m}$, donde

$$k[S_m]^{S_m} = < \tilde{\sigma} >_{[\sigma] \in S_m/\sim} \subset S^m(\mathrm{End}_k(E))^*.$$

Tenemos que $w_{O_n} \cdot I \cdot w_{O_n}$ se identifica con

$$I' = \underset{m}{\oplus} < 1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}(Id_1)} >_{[\sigma] \in S_m/\sim}$$

donde $Id_1 = Id \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes Id$. Si σ es producto de r ciclos disjuntos (incluidos los ciclos de orden 1) es fácil comprobar que $\tilde{\sigma}(Id_1) = n^r$.

Denotemos $w_\sigma \overset{Not}{=} \overline{T_2 \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T_2 \otimes T^2_{1\sigma(1)} \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes T^2_{m\sigma(m)}} \in S^m\mathrm{End}_k(E)$. Encontrar $w_{O_n} = 1 + \sum\limits_{m>0} \sum_{\sigma \in S_m/\sim} \lambda_\sigma \cdot w_\sigma$ cumpliendo $w_{O_n}(I) = 0$ equivale a resolver para cada m el sistema de ecuaciones (variando $\sigma' \in S_m/\sim$)

$$(\sum_{\sigma \in S_m/\sim} \lambda_\sigma w_\sigma)\left(\frac{a_{\sigma'}}{\tilde{\sigma}'(Id_1)}\right) = 1.$$

Si denotamos $\lambda_{\sigma\sigma'} = \dfrac{w_\sigma(a_{\sigma'})}{\tilde{\sigma}'(Id_1)}$, entonces

$$(\lambda_\sigma)_{\sigma \in S_m/\sim} = (\lambda_{\sigma\sigma'})^{-1}_{\sigma,\sigma' \in S_m/\sim} \cdot (1, \ldots, 1).$$

Demos los tres primeros términos de w_{O_n}:

$$\begin{aligned} w_{O_n} &= 1 + \frac{\overline{T_2 \otimes T^2}}{n} \\ &+ \frac{(-3n-6) \cdot \overline{T_2 \otimes T_2 \otimes T^2 \otimes T^2} + (3n^2+3n+3) \cdot \overline{T_2 \otimes T_2 \otimes T^2_{12} \otimes T^2_{21}}}{n^4 + n^3 + n^2 - 3n} \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Apéndice A

Extensiones de esquemas de álgebras

A.1. Extensiones de módulos

La teoría del descenso fielmente plano (véase [28], por ejemplo), dice que dado un "haz" E en R, los haces E' sobre R que por cambio de base fielmente plano $R \to S$ son isomorfos a E_S están clasificados por $H^1(S/R, Aut(E))$. Si en vez de considerar morfismos fielmente planos "como recubrimientos abiertos", se consideran otro tipo de morfismos "convenientes", se pueden desarrollar de modo equivalente otras teorías de descenso.

Sea $\mathcal{C}_N$ la categoría de A-módulos sobre N, es decir, la categoría cuyos objetos son A-módulos R, dotados de un morfismo fijado de A-módulos $N \to R$, y los morfismos entre dos objetos $N \to R$ y $N \to R'$ son los morfismos de A-módulos $f : R \to R'$ que hacen el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] & & R' \\ & N \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Dados I y R objetos de $\mathcal{C}_N$ diremos que un morfismo $R \to I$ es un *recubrimiento* si es inyectivo. Dado un recubrimiento $N \to I$ y E un objeto de $\mathcal{C}_N$, denotemos $E_I := E \oplus_N I$. Observemos que dados E, E' objetos de $\mathcal{C}_N$, un morfismo $E \to E'$ es isomorfismo si y sólo si $E_I \to E'_I$ es isomorfismo.

Diremos que un funtor covariante aditivo F sobre $\mathcal{C}_N$ es un *haz* si para todo recubrimiento $R \to I$, la sucesión

$$F(R) \to F(I) \rightrightarrows F(I \oplus_R I)$$

es exacta, es decir, F es exacto por la izquierda. Dado un recubrimiento $R \to I$, tenemos la sucesión exacta

$$R \longrightarrow I \rightrightarrows I \oplus_R I \rightrightarrows\!\!\!\!\to I \oplus_R I \oplus_R I \dots$$

Denotemos por $I^{\cdot}(R)$ el complejo (de cocadenas) diferencial recién definido. Definimos $H^{\cdot}(I/R, F)$ como la cohomología $H^{\cdot}(F(I^{\cdot}(R)))$.

Proposición A.1.1. *Sea I un módulo inyectivo, $R \to I$ un recubrimiento y F un haz sobre $\mathcal{C}_N$. $H^1(I/R, F)$ coincide con el primer funtor derivado (por la derecha) de F en R.*

Demostración. Consideremos el complejo $R \dashrightarrow I^{\cdot}(R)$ recién definido. Resolvamos este complejo por inyectivos, $I'(R) \dashrightarrow I'(I^{\cdot})$. El bicomplejo $F(I'(I^{\cdot}))$ tiene la primera fila y la primera columna acíclicas, ya que tanto I como $I'_0(R)$ son inyectivos. F es exacto por la izquierda. Estas condiciones son suficientes para asegurar que

$$H^1(I/R, F) := H^1(F(I^{\cdot}(R))) = H^1(F(I'(I^{\cdot}(R)))) = H^1(F(I'(R))) =: R^1F(R).$$

□

Sean M y N dos A-módulos. Dada una sucesión exacta de A-módulos

$$0 \to N \to E \to M \to 0$$

diremos que E es una *extensión de A-módulos de M por N*. Un ejemplo de extensión es la *extensión trivial* $E = N \oplus M$, con los morfismos obvios $N \hookrightarrow N \oplus M$, $N \oplus M \to M$.

Dadas dos extensiones E y E' de M por N, diremos que un morfismo de A-módulos $E \to E'$ es un *isomorfismo de extensiones* si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & N & \to & E' & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

Vamos a clasificar las extensiones de módulos de M por N, módulo isomorfismos.

Dar una extensión E de M por N es dar E objeto de $\mathcal{C}_N$ con $N \to E$ inyectivo y donde fijamos el conúcleo M del morfismo $N \to E$.

Si E' es una extensión de M por N y $E_I \to E'_I$ es un isomorfismo (en $\mathcal{C}_I$), entonces E es una extensión de M por N (de modo que $E_I \to E'_I$ es un isomorfismo de extensiones).

Si $N \to I$ es un recubrimiento, I un A-módulo inyectivo y E una extensión de M por N, entonces E_I es isomorfa a la extensión trivial (de M por I).

Los automorfismos de extensiones de E, que son los automorfismos (en $\mathcal{C}_N$) de E que inducen el morfismo identidad en M, se identifican con $\operatorname{Hom}_A(M, N)$: dado un automorfismo de extensiones $f : E \to E$, se define $h : M \to N$, $m = \bar{e} \mapsto h(m) = e - f(e)$, y dado un morfismo de A-módulos $h : M \to N$, se define $f : E \to E$, $e \mapsto e - h(\bar{e})$. En general, los automorfismos de extensiones de E_I se identifican con $\mathrm{Hom}_A(M, I)$.

Los objetos R de $\mathcal{C}_N$ los podemos considerar como haces $\tilde{R}$ en $\mathcal{C}_N$: $\tilde{R}(I) := R \oplus_N I$. Y los cambios de base definen los cambios de base naturales de haces: Dado un morfismo $f : N \to I$ y un haz F en $\mathcal{C}_N$ definimos f^*F en $\mathcal{C}_I$ por $f^*F(Q) := F(Q)$. Dado un haz G en $\mathcal{C}_I$, definimos f_*G en $\mathcal{C}_N$ por $f_*G(Q) := G(Q \oplus_N I)$. Se cumple que $f^*\tilde{R} = \widetilde{R_I}$ y $f_*\tilde{R}' = \tilde{R}'$.

$\mathrm{Aut}_M(\tilde{E}) = \mathrm{Hom}_A(M, -)$, donde $\mathrm{Aut}_M(\tilde{E})$ es el funtor definido sobre $\mathcal{C}_N$ de la siguiente manera

$$\mathrm{Aut}_M(\tilde{E})(I) = \mathrm{Aut}_{M,\mathcal{C}_I}(E \oplus_N I) = \mathrm{Hom}_A(M, I).$$

Por tanto, al ser $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ un funtor exacto por la izquierda,

$$H^1(I/N, \mathrm{Aut}_{\tilde{M}}(\tilde{E})) = Ext^1_A(M, N)$$

si I es un A-módulo inyectivo. Ahora ya, con los mismos cálculos de la teoría de descenso fielmente plano, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema A.1.2. *[16, III, 2.4] Hay tantas extensiones de módulos de M por N, módulo isomorfismos, como elementos de $Ext^1_A(M, N)$.*

A.2. Extensiones de $\mathbf{A}^*$-módulos

En esta sección utilizaremos concisamente los argumentos cohomológicos y la teoría del descenso en el contexto de los esquemas de módulos.

Proposición A.2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un funtor de k-álgebras, sea $\mathcal{C}_{Mod}$ la categoría de funtores de $\mathcal{A}$-módulos y sea $\mathcal{C}_{Vect}$ la categoría de los funtores de k-espacios vectoriales. El funtor "olvidar la estructura de $\mathcal{A}$-módulo" $\phi : \mathcal{C}_{Mod} \to \mathcal{C}_{Vect}$, $M \rightsquigarrow M$ tiene un funtor adjunto, que es $\mathrm{Ad}(\phi) : \mathcal{C}_{Vect} \to \mathcal{C}_{Mod}$, $M \rightsquigarrow \mathbf{Hom}_k(\mathcal{A}, M)$. Es decir, si M es un $\mathcal{A}$-módulo y N es un funtor de k-espacios vectoriales se cumple que*

$$\mathrm{Hom}_k(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathbf{Hom}_k(\mathcal{A}, N)). \tag{A.1}$$

Denotemos $R^0 := \mathrm{Ad}(\phi) \circ \phi$, i.e., $R^0(M) = \mathbf{Hom}_k(\mathcal{A}, M)$. El morfismo $Id : M \to M$ define un morfismo natural $M \to R^0(M) = \mathbf{Hom}_k(\mathcal{A}, M)$ mediante la ecuación (A.1). Si aplicamos R^0 a este morfismo obtenemos un nuevo morfismo $R^0(M) \to R^0(R^0(M)) = \mathbf{Hom}_k(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}, M)$ además del natural, y así sucesivamente obtendremos el complejo

$$M \longrightarrow R^0(M) \rightrightarrows R^0(R^0(M)) \substack{\textstyle\rightarrow\\[-1ex]\textstyle\rightarrow\\[-1ex]\textstyle\rightarrow} \cdots.$$

Denotemos $M \dashrightarrow R^\cdot(M)$ este complejo, que es exacto: El morfismo identidad $Id : \mathrm{Ad}(\phi)(N) \to \mathrm{Ad}(\phi)(N)$ define por adjunción un morfismo canónico $(\phi \circ \mathrm{Ad}(\phi))(N) \to N$, luego tenemos morfismos canónicos $\phi(R^i(M)) \to \phi(R^{i-1}(M))$ que resultan ser unos operadores de homotopía (o una homotopía contractiva) del complejo $\phi(M) \to \phi(R^{\cdot}(M))$. Por lo tanto, este complejo es homotópico a cero y $M \to R^{\cdot}(M)$ es exacto por ser ϕ un funtor fielmente exacto (es decir, una sucesión es exacta si y sólo si lo es al aplicarle ϕ).

Si aplicamos ϕ a $R^{\cdot}(M)$ obtenemos un complejo escindido, e igualmente si aplicamos R^0.

Sea $\mathcal{C}_M$ la categoría de los funtores de $\mathcal{A}$-módulos sobre M, es decir, sus objetos son los funtores de $\mathcal{A}$-módulos R dotados de un morfismo $M \to R$ y los morfismos entre dos objetos $M \to R$ y $M \to R'$ son los morfismos de $\mathcal{A}$-módulos $f : R \to R'$ tales que $M \to R \xrightarrow{f} R'$ es el morfismo $M \to R'$. Dado $R^0(M)$ denotemos por $C^{\cdot}(M)$ el siguiente complejo

$$M \dashrightarrow R^0(M) \rightrightarrows R^0(M) \oplus_M R^0(M) \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; R^0(M) \oplus_M R^0(M) \oplus_M R^0(M) \ldots$$

que es de nuevo exacto (y k-escindido). Además, $R^0(C^{\cdot}(M)) = C^{\cdot}(R^0(M))$ y $R^{\cdot}(C^{\cdot}(M))$ es un bicomplejo de columnas y filas exactas.

Si S es un funtor covariante aditivo de $\mathcal{C}_M$ exacto por la izquierda,

$$H^1(R^0(M)/M, S) := H^1(S(C^{\cdot}(M))) = H^1(S(R^{\cdot}(C^{\cdot}(M)))) = H^1(S(R^{\cdot}(M))).$$

Si ahora consideramos $\mathcal{A} = \mathbf{A}^*$, entonces $R^0(M) = A \otimes_k M$ y resulta ser un $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente inyectivo, porque $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(-, A \otimes_k M) = \mathrm{Hom}_k(-, M)$ es exacto en la categoría de los $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes. Por lo tanto $R^{\cdot}(M)$ es una resolución de M por $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes inyectivos.

Podemos desarrollar la teoría de extensiones de $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes de modo totalmente análogo a como hemos desarrollado la teoría de extensiones de A-módulos.

Sea E una extensión de $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes del $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente $\mathbf{M}$ por el $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente $\mathbf{N}$. Los automorfismos de extensiones de $\mathbf{E}$ se identifican con $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(M, N)$. Si N es un $\mathbf{A}^*$-módulo inyectivo entonces $E = N \oplus M$. Por los argumentos estándar de la teoría del descenso obtenemos el siguiente teorema.

Teorema A.2.2. *Las extensiones de $\mathbf{A}^*$-módulos de M por N, módulo isomorfismos de extensiones, están clasificadas por el grupo $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{A}^*}(M, N)$.*

Demostración. Las extensiones de $\mathbf{A}^*$-módulos de M por N están clasificadas por el grupo

$$H^1(R^0(N)/N, \mathrm{Aut}_{\tilde{M}}(\widetilde{M \oplus N})) = H^1(R^0(N)/N, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(M, -)),$$

ya que dada una extensión $0 \to N \to E \to M \to 0$ de $\mathbf{A}^*$-módulos y dado el morfismo inyectivo $N \to R^0(N)$, al hacer la suma amalgamada sobre N obtenemos una nueva extensión

$$0 \to R^0(N) \to E \oplus_N R^0(N) \to M \to 0$$

que es isomorfa a la trivial ya que $R^0(N)$ es un $\mathbf{A}^*$-módulo inyectivo.

Puesto que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(M,-)$ es un funtor exacto por la izquierda,

$$H^1(R^0(N)/N, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(M,-)) = H^1(\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(M, R^{\cdot}(N))) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{A}^*}(M,N).$$

□

Dado un morfismo de funtores de k-álgebras $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ y un $\mathbf{A}^*$-módulo cuasi-coherente E denotemos por $E^\chi := \{e \in E \mid w \cdot e = \chi(w) \cdot e \; \forall w \in \mathbf{A}^*\}$. Denotaremos $H^{\cdot}(\chi, E)$ a los funtores derivados del funtor $E \mapsto E^\chi$. Hagamos notar que

$$E^\chi = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*}(k, E)$$

luego $H^{\cdot}(\chi, E) = \mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathbf{A}^*}(k, E)$.

Sea $G = \mathrm{Spec}\, A$ un k-grupo y E un G-módulo. $H^{\cdot}(G,E)$ se define como los funtores derivados del funtor $E \rightsquigarrow E^G$. El morfismo $G \to \{1\}$, $g \mapsto 1$ define un morfismo $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ y se verifica $E^G = E^\chi$. Por el Teorema 4.1.2 es cierta la siguiente proposición.

Proposición A.2.3. $H^{\cdot}(G,E) = H^{\cdot}(\chi, E) = \mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathbf{A}^*}(k,E)$.

Corolario A.2.4. *[26, 8.6] Sea $G = \mathrm{Spec}\, A$ un k-grupo afín. Las extensiones de G-módulos de k por N están clasificadas por $H^1(G,N)$.*

Demostración. Las extensiones de G-módulos de k por N están clasificadas por $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{A}^*}(k,N) = H^1(G,N)$. □

Dualmente, consideremos la categoría de esquemas de $\mathbf{A}^*$-módulos por la derecha (es decir, $\mathbf{A}^{*\circ}$-módulos por la izquierda). Dado un $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha $\mathbf{V}^*$, tendremos la resolución por esquemas de $\mathbf{A}^*$-módulos proyectivos de $\mathbf{V}^*$

$$\ldots \mathbf{V}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^* \rightrightarrows \mathbf{V}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^* \to \mathbf{V}^* \tag{A.2}$$

donde los morfismos son

$$\mathbf{V}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^* \bar{\otimes} \overset{n}{\ldots} \bar{\otimes} \mathbf{A}^* \to \mathbf{V}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^* \bar{\otimes} \overset{n-1}{\ldots} \bar{\otimes} \mathbf{A}^*$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \mapsto a_0 \otimes a_1 \otimes \overset{i}{\ldots} \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$$

para $0 \leq i \leq n-1$ y $a_0 \in V^*$. Así que tenemos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^*}(E,V) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{V}^*, \mathbf{E}^*).$$

($\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^*}(E,V)$ está considerado en la categoría de $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes y $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{V}^*, \mathbf{E}^*)$ en la categoría de esquemas de $\mathbf{A}^{*\circ}$-módulos.)

Supongamos que $\mathbf{V}^* = \mathbf{A}^*$, que es también un $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda, es decir, precisando, es un $\mathbf{A}^* \bar{\otimes}_k \mathbf{A}^{*\circ}$-módulo. Entonces la ecuación (A.2) se transforma en una resolución de $\mathbf{A}^*$ por esquemas de $\mathbf{A}^* \bar{\otimes}_k \mathbf{A}^{*\circ}$-módulos, que escinde como sucesión de $\mathbf{A}^*$-módulos por la derecha. Dado un morfismo de k-álgebras $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$, cada $\mathbf{A}^*$-módulo por la izquierda $\mathbf{E}^*$ se puede ver como un $\mathbf{A}^* \bar{\otimes}_k \mathbf{A}^{*\circ}$-módulo, donde $\mathbf{A}^*$ opera por la derecha a través de χ. Se verifica que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{E}^*) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^*}(\mathbf{k}, \mathbf{E}^*).$$

Supongamos que E es un G-espacio vectorial de dimensión finita, entonces

$$H^i(G,E) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^*}(k,E) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*,\mathbf{E}).$$

A.3. Extensiones de álgebras

Sean B y A dos k-álgebras (no necesariamente conmutativas) y sea $B \to A$ un epimorfismo de k-álgebras, de modo que el núcleo es un ideal I tal que $I^2 = 0$, y por tanto I es un A-módulo por la izquierda y por la derecha, es decir, un $A \otimes_k A^\circ$-módulo. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to I \to B \to A \to 0$$

y decimos que B es una *extensión de álgebras de A por el $A \otimes_k A^\circ$-módulo I*. Un ejemplo de extensión de álgebras de A por I es $A \oplus I$, donde $(a,i)\cdot(a',i') := (aa', ai' + ia')$, y se llama *extensión trivial de A por I*.

Si B' es otra extensión de álgebras de A por I, diremos que un morfismo de k-álgebras $\phi : B \to B'$ es un *isomorfismo de extensiones de álgebras* si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & B' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Diremos que una aplicación $D \in \mathrm{Hom}_k(A,I)$ es una *derivación* de una k-álgebra A en un $A\otimes_k A^\circ$-módulo I si se verifica que $D(ab) = (Da)b + a(Db)$ para todo $a, b \in A$. Denotaremos $\mathrm{Der}_k(A,I)$ al conjunto de todas las derivaciones de A en I.

Proposición A.3.1. *Sea Δ el núcleo del morfismo $A \otimes_k A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$. Se verifica que*

$$\mathrm{Der}_k(A,I) = \mathrm{Hom}_{A\otimes A^\circ}(\Delta, I).$$

Demostración. Δ como $A = A \otimes 1$-módulo está generado por los elementos de la forma $da = a \otimes 1 - 1 \otimes a$. Dada una derivación $D : A \to I$, entonces $A \otimes_k A \to I$, $a \otimes b \mapsto (Da)b$ restringida a Δ es un morfismo de $A \otimes_k A^\circ$-módulos que explícitamente es $\Delta \to I$, $adb \mapsto aDb$.

Recíprocamente, el morfismo $d : A \to \Delta$, $a \mapsto da := a \otimes 1 - 1 \otimes a$ es una derivación. Dado un morfismo de $A \otimes_k A^\circ$-módulos $\phi : \Delta \to I$, entonces $\phi \circ d : A \to I$, $a \mapsto \phi(da)$ es una derivación. Además se comprueba que ambas asignaciones son inversas entre sí. □

Proposición A.3.2. *Sea B una extensión de álgebras de A por el $A \otimes_k A^\circ$-módulo I. Entonces,*

$$Aut_{\text{ext.álg.}}(B) = Der_k(A,I).$$

Demostración. Es inmediato de comprobar que las asignaciones

$$\mathrm{Der}_k(A, I) \to \mathrm{Aut}_{\text{ext.álg}}(B), \quad D \mapsto \mathrm{Id} + D$$

donde $(\mathrm{Id} + D)(b) = b + D(\bar{b})$, siendo $\bar{b}$ la imagen de b en A, y

$$\mathrm{Aut}_{\text{ext.álg.}}(B) \to \mathrm{Der}_k(A, I), \quad \phi \mapsto D_\phi$$

donde $D_\phi(\bar{b}) = b - \phi(b)$, son inversas entre sí. □

Proposición A.3.3. *Denotemos por Δ_B el núcleo del morfismo $B \otimes_k B \to B$, $b \otimes b' \mapsto bb'$ y Δ_A el núcleo del correspondiente morfismo $A \otimes_k A \to A$. Dada la extensión de álgebras $0 \to I \to B \to A \to 0$ se tiene la sucesión exacta de diferenciales*

$$0 \to I \xrightarrow{d} \Delta_B \otimes_{B \otimes B^\circ} (A \otimes A^\circ) \to \Delta_A \to 0 \tag{A.3}$$

donde $di := \overline{i \otimes 1 - 1 \otimes i}$ para todo $i \in I$.

Demostración. Si tomamos $\mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(-, M)$ en la ecuación (A.3) se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M) \to \mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(I, M).$$

Por tanto, sólo falta probar que d es un morfismo inyectivo. Sea $s : A \to B$ una sección de k-espacios vectoriales del epimorfismo $\pi : B \to A$. La aplicación $\Delta_B \otimes_{B \otimes B^\circ} (A \otimes A^\circ) \to I$, $\overline{\sum_i b_i \otimes b'_i} \mapsto \sum_i (b_i - s(\pi(b_i))) \cdot b'_i$ es un retracto de d. □

Dar un isomorfismo de extensiones de B en la extensión trivial equivale a dar una derivación $D : B \to I$ de modo que D sobre I sea el morfismo identidad. Si I es un $A \otimes_k A^\circ$-módulo inyectivo y tomamos $\mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(-, I)$ en la sucesión exacta de diferenciales de la proposición anterior, entonces el morfismo $\mathrm{Der}_k(B, I) \to \mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(I, I)$ es epiyectivo y existe una derivación $D : B \to I$ de modo que sobre I es el morfismo identidad. En conclusión, si I es un $A \otimes_k A^\circ$-módulo inyectivo entonces B es isomorfa a la extensión trivial.

Ahora queremos clasificar las extensiones de álgebras de A por el $A \otimes_k A^\circ$-módulo I, módulo isomorfismos. Sea $\mathcal{C}_I$ la categoría de $A \otimes_k A^\circ$-módulos que contienen a I, es decir, la categoría cuyos objetos son $A \otimes_k A^\circ$-módulos M dotados de un morfismo de $A \otimes_k A^\circ$-módulos $I \to M$. Dados dos objetos $I \to M$, $I \to M'$ los morfismos de $\mathcal{C}_I$ de M en M' son los morfismos de $A \otimes_k A^\circ$-módulos $\phi : M \to M'$ que hacen el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi"] & & M' \\ & I \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Dados dos $A \otimes_k A^\circ$-módulos R, Q objetos de $\mathcal{C}_I$, diremos que un morfismo $R \to Q$ es un *recubrimiento* de R si es un morfismo inyectivo. Un funtor covariante aditivo F de $\mathcal{C}_I$ diremos que es un *haz* si para todo recubrimiento $R \to Q$, la sucesión

$$F(R) \to F(Q) \rightrightarrows F(Q \oplus_R Q)$$

es exacta. Dado un morfismo inyectivo $R \hookrightarrow Q$ tenemos la sucesión exacta

$$R \longrightarrow Q \rightrightarrows Q \oplus_R Q \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; Q \oplus_R Q \oplus_R Q \quad \dots$$

Denotemos por $Q^{\cdot}$ el complejo diferencial recién definido. Se define $H^{\cdot}(Q/R, F) := H^{\cdot}(F(Q^{\cdot}))$.

Dado un morfismo de $A \otimes_k A^\circ$-módulos $\phi : I \to R$, tenemos el morfismo $\mathcal{C}_I \to \mathcal{C}_R$, $M \mapsto M_R = R \oplus_I M$. Dada una extensión de álgebras B de A por I, entonces B_R es una extensión de álgebras de A por R.

Sea $\tilde{B}$ el haz de álgebras en $\mathcal{C}_I$ definido por $\tilde{B}(R) := B_R$, que contiene el haz de ideales $\tilde{I}$, definido por $\tilde{I}(R) = R$, cuyo conúcleo es el haz de álgebras constante A. El haz de automorfismos de álgebras de $\tilde{B}$, $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathrm{B}})$, que son la identidad sobre $\tilde{I}$ y A, coincide con $\mathrm{Der}_k(A, -) = \mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(\Delta, -)$. Por tanto, dado un módulo inyectivo Q y una inyección $I \hookrightarrow Q$, tenemos que $H^1(Q/I, \mathrm{Aut}(\tilde{B})) = \mathrm{Ext}^1_{A \otimes A^\circ}(\Delta, I) = \mathrm{Ext}^2_{A \otimes A^\circ}(A, I)$, donde la última igualdad se deduce de tomar $\mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(-, I)$ en la sucesión exacta $0 \to \Delta \to A \otimes_k A \to A \to 0$. Como consecuencia tenemos el siguiente teorema.

Teorema A.3.4. *Las extensiones de álgebras de A por I están clasificadas por* $\mathrm{Ext}^2_{A \otimes A^\circ}(A, I)$.

Demostración. $Q = \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A^\circ, I)$ es un $A \otimes A^\circ$-módulo inyectivo, porque $\mathrm{Hom}_{A \otimes A^\circ}(-, Q) = \mathrm{Hom}_k(-, I)$. Por tanto, toda extensión B de álgebras de A por Q es trivial.

Sea B la extensión trivial, entonces

$$\{\text{Clases de extensiones de } A \text{ por } I\} = H^1(Q/I, \mathrm{Aut}(\tilde{B})) = \mathrm{Ext}^2_{A \otimes A^\circ}(A, I).$$

□

A.4. Extensiones de esquemas de álgebras

Desarrollemos la teoría de extensiones de esquemas de álgebras de modo totalmente análogo a como hemos desarrollado la teoría de extensiones de álgebras.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ funtores de k-álgebras y $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un morfismo epiyectivo, de modo que el núcleo es un funtor de ideales $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}^2 = 0$, es decir, es un $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ$-módulo. Se dice que $\mathcal{B}$ es una *extensión de funtores de álgebras de $\mathcal{A}$ por el $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ$-módulo $\mathcal{I}$* (supondremos además que el morfismo $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tiene una sección k-lineal). Tenemos pues la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to 0.$$

Si $\mathcal{C}$ es otra extensión de funtores de álgebras de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{I}$, diremos que un morfismo de funtores de k-algebras $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un *isomorfismo de extensiones de álgebras* si el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{I} & \to & \mathcal{B} & \to & \mathcal{A} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \mathcal{I} & \to & \mathcal{C} & \to & \mathcal{A} & \to & 0 \end{array}$$

es conmutativo.

Proposición A.4.1. *Sea Δ el núcleo del morfismo $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \otimes b \mapsto ab$. Se verifica que*

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{A}, \mathcal{I}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\circ}(\Delta, \mathcal{I}).$$

Proposición A.4.2. *Sea $\mathcal{B}$ una extensión de funtores de álgebras de $\mathcal{A}$ por el $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ$-módulo $\mathcal{I}$. Dar un automorfismo de extensiones de $\mathcal{B}$ es equivalente a dar una derivación de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{I}$, es decir,*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{ext.álg.}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Der}_k(\mathcal{A}, \mathcal{I}).$$

Proposición A.4.3. *Denotemos por $\Delta_{\mathcal{B}}$ el núcleo del morfismo $\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $b \otimes b' \mapsto bb'$ y $\Delta_{\mathcal{A}}$ el núcleo del correspondiente morfismo $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Dada la extensión de álgebras (k-linealmente escindida) $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to 0$ se tiene la sucesión exacta de diferenciales (k-linealmente escindida)*

$$0 \to \mathcal{I} \xrightarrow{d} \Delta_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}} \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ \to \Delta_{\mathcal{A}} \to 0$$

donde $di := \overline{i \otimes 1 - 1 \otimes i}$ para todo $i \in I$.

Sea $\mathcal{B}$ una extensión de funtores de álgebras de $\mathcal{A}$ por el $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ$-módulo $\mathcal{I}$. Dar un isomorfismo de extensiones de álgebras de $\mathcal{B}$ en la extensión trivial $\mathcal{T} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{I}$ ($m_i \cdot m_j = 0\ \forall\, m_i, m_j \in \mathcal{I}$) es equivalente a dar una k-derivación $D : \mathcal{B} \to \mathcal{I}$ tal que D en $\mathcal{I}$ es el morfismo identidad; las asignaciones son, dada una derivación $D : \mathcal{B} \to \mathcal{I}$, el isomorfismo $\phi(b) = \bar{b} + D(b)$, donde $\bar{b}$ es la imagen de b en $\mathcal{A}$, y dado un isomorfismo $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \oplus \mathcal{I}$, la derivación $D_\phi(b) = \phi(b) - \bar{b}$. Supongamos que $\mathcal{I} = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ, \mathcal{N})$. Si aplicamos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\circ}(-, \mathcal{I}) = \mathrm{Hom}_k(-, \mathcal{N})$ a la sucesión exacta de diferenciales (k-linealmente escindida)

$$0 \to \mathcal{I} \to \Delta_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}^\circ} \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ \to \Delta_{\mathcal{A}} \to 0$$

asociada a la sucesión exacta $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to 0$, obtenemos que el morfismo $Der_k(\mathcal{B}, \mathcal{I}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\circ}(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ es una epiyección. Por lo tanto existe una derivación $D : \mathcal{B} \to \mathcal{I}$ tal que en $\mathcal{I}$ es la identidad. En resumen, si $\mathcal{I} = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}^\circ, \mathcal{N})$ entonces $\mathcal{B}$ es isomorfo a la extensión trivial.

Por tanto, la extensiones de funtores de álgebras de $\mathcal{A}$ por el $\mathcal{A}\otimes_k\mathcal{A}^\circ$-módulo $\mathcal{I}$ están clasificadas por

$$H^1(R^0(\mathcal{I})/\mathcal{I}, Aut_{\mathrm{ext.álg.}}(\widetilde{\mathcal{A} \oplus \mathcal{I}})) = H^1(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\circ}(\Delta_{\mathcal{A}}, R^{\cdot}(\mathcal{I}))).$$

Vamos a clasificar ahora las extensiones de esquemas de álgebras.

Teorema A.4.4. *Las extensiones de esquemas de k-álgebras de un esquema de k-álgebras $\mathbf{A}^*$ por un esquema de $\mathbf{A}^* \otimes_k \mathbf{A}^{*\circ}$-módulos $\mathbf{V}^*$ están clasificadas por el grupo*

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{V}^*) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{A}^*\bar{\otimes}\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{V}, \mathbf{A}).$$

Demostración. Las extensiones de esquemas de álgebras de $\mathbf{A}^*$ por $\mathbf{V}^*$ están clasificadas por el grupo

$$H^1(R^\circ(\mathbf{V}^*)/\mathbf{V}^*, \mathrm{Aut}_{\text{ext.álg.}}(\widetilde{\mathbf{A}^* \oplus \mathbf{V}^*})) = H^1(\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(\Delta_{\mathbf{A}^*}, R^{\cdot}(\mathbf{V}^*))).$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(-, R^{\cdot}(\mathbf{V}^*))$ a la sucesión exacta k-escindida

$$0 \to \Delta_{\mathbf{A}^*} \to \mathbf{A}^* \otimes_k \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^* \to 0$$

y luego tomando cohomología tenemos

$$H^1(R^\circ(\mathbf{V}^*)/\mathbf{V}^*, \mathrm{Aut}_{\text{ext.álg.}}(\widetilde{\mathbf{A}^* \oplus \mathbf{V}^*})) = H^2(\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*, R^{\cdot}(\mathbf{V}^*))).$$

Denotemos $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^*\bar{\otimes}_k\mathbf{A}^{*\circ}$. $R^i(\mathbf{V}^*) = (V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i+1})^*$ es $\mathbf{B}^*$-módulo vía el último factor. Se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}^*}(\mathbf{A}^*, (V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i+1})^*) = (V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i} \otimes_k \mathbf{A}^*)^*.$$

La diferencial del complejo $\bigoplus\limits_i (V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i-1} \otimes_k \mathbf{A}^*)^*$, en grado i, es el morfismo dual del morfismo $d : V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i} \otimes_k \mathbf{A}^* \to V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i-1} \otimes_k \mathbf{A}^*$, siendo

$$\begin{aligned} d(v \otimes b_1 \otimes \dots b_i \otimes a) =& v \cdot b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_i \otimes a - v \otimes b_1 \cdot b_2 \otimes \dots \otimes b_i \otimes a + \dots \\ &+ (-1)^i \cdot v \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{i-1} \otimes b_i \cdot a. \end{aligned}$$

De nuevo,

$$(V \otimes_k \mathbf{B}^{*\otimes i} \otimes_k \mathbf{A}^*)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}^*}(V, R^{i+1}(A))$$

y concluimos que

$$\begin{aligned} H^2(\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*, R^{\cdot}(\mathbf{V}^*))) &= H^2(\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(V, R^{\cdot}(A))) \\ &= \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A}^{*\circ}}(V, A). \end{aligned}$$

□

Sea $G = \mathrm{Spec}\, A$ un k-grupo y sea E un G-espacio vectorial tal que $\dim_k E < \infty$.

Definición A.4.5. *Denotemos por $1 + E$ el grupo algebraico $\mathrm{Spec}\, S^{\cdot} E^*$, cuyo funtor de puntos es $\mathbf{E}$. Dada una sucesión exacta de k-grupos afines*

$$1 \to 1 + E \to G' \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

tal que $g' \cdot (1 + e) \cdot g'^{-1} = 1 + g(e)$ para todo $g' \in G'$ y $e \in E$ (donde $g = \pi(g')$) diremos que G' es una extensión de grupos de G por E.

Observemos que el morfismo $G \to 1$ induce un morfismo de esquemas de k-álgebras $\chi : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$.

Teorema A.4.6. *El conjunto de extensiones de grupos de G por E, módulo isomorfismos, es igual al conjunto de extensiones de álgebras de $\mathbf{A}^*$ por el $\mathbf{A}^* \otimes_k \mathbf{A}^{*\circ}$-módulo E, módulo isomorfismos (donde $\mathbf{A}^*$ opera en E por la derecha vía χ).*

Demostración. Por [16, VI, 10.3] o [26, 8.8], el conjunto de extensiones de grupos de $G = \operatorname{Spec} A$ por E, módulo isomorfismos, es igual a $H^2(G, E) = \operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}^*}(k, E) = \operatorname{Ext}^2_{\mathbf{A}^* \bar{\otimes} \mathbf{A}^{*\circ}}(\mathbf{A}^*, \mathbf{E})$, que coincide con el conjunto de extensiones de álgebras de $\mathbf{A}^*$ por el $\mathbf{A}^* \bar{\otimes}_k \mathbf{A}^{*\circ}$-módulo E, módulo isomorfismos. □

Demos explícitamente la correspondencia entre las extensiones de grupos de $G = \operatorname{Spec} A$ por E y las extensiones de álgebras de $\mathbf{A}^*$ por E.

Sea $\mathbf{B}^*$ una extensión (singular) de álgebras de $\mathbf{A}^*$ por E, es decir, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathbf{E} \to \mathbf{B}^* \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}^* \to 0$$

donde $E^2 = 0$. Si consideramos la inclusión $G \subset \mathbf{A}^*$, entonces $\pi^{-1}(G)$ es una extensión de grupos de G por $E \overset{L}{\simeq} \pi^{-1}(1)$, donde $L(e) := 1+e$ (E es $\mathbf{A}^*$-módulo por la derecha vía χ, luego es G-módulo por la derecha trivialmente).

Recíprocamente, sea una extensión de grupos $1 \to M \to G' \xrightarrow{\pi} G \to 1$ donde $M = 1 + E$. Consideremos la inclusión $\mathbf{E} \to k[G']$, $e \mapsto (1 + e) - 1$, donde $(1 + e) \in M$. Denotemos $e = (1 + e) - 1 \in k[G']$. Sea

$$I = (\lambda g' \cdot e - \pi(g')(\lambda e))_{g' \in G', \lambda \in k, e \in \mathbf{E}}$$

el funtor de ideales biláteros de $k[G'^{\cdot}]$. Entonces se verifica que el núcleo del epimorfismo natural $k[G'^{\cdot}]/I \to k[G^{\cdot}]$ es $\mathbf{E}$. Tomando clausuras, si denotamos $\mathbf{B}^* = \overline{k[G'^{\cdot}]/I}$, tenemos una extensión de álgebras

$$0 \to \mathbf{E} \to \mathbf{B}^* \to \mathbf{A}^* \to 0.$$

Ambas asignaciones son inversas entre sí.

Apéndice B

Límites inductivos y proyectivos

Describimos dos nociones categoriales útiles en álgebra conmutativa. Las dos son duales la una de la otra, aunque no lo sean sus desarrollos.

Definición B.1. *Sea I un conjunto ordenado. Diremos que es filtrante decreciente si para cada par $i, j \in I$ existe algún $k \in I$ que cumple que $k \leq i$ y $k \leq j$.*

Definición B.2. *Sea I un conjunto filtrante decreciente. Un conjunto de objetos $\{M_i\}_{i\in I}$ de una categoría $\mathcal{C}$, junto con morfismos $f_{ij} : M_i \to M_j$ para cada $i \leq j$, diremos que es un sistema proyectivo de objetos de $\mathcal{C}$ si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f_{ii} = \mathrm{Id}$ para todo $i \in I$;*
2. *$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ siempre que $i \leq j \leq k$.*

Definición B.3. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ un sistema proyectivo de objetos. Diremos que M objeto de $\mathcal{C}$ (si existe) es el límite proyectivo de este sistema proyectivo, y lo denotaremos $\lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i$, si se cumple la siguiente igualdad funtorial:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i) = \{(f_i) \in \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} \circ f_i \text{ para todo } i \leq j\}.$$

Si $\lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i$ existe, entonces el morfismo $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i, \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i)$ define morfismos $\phi_i : \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i \to M_i$ de modo que

1. $\phi_j = f_{ij} \circ f_i$;
2. dados $\{(f_i) \in \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} \circ f_i$ para todo $i \leq j\}$, entonces existe un morfismo $f : N \to \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i$ de modo que $f_i = \phi_i \circ f$.

Se tiene también el recíproco, es decir, si existe un objeto M de $\mathcal{C}$ y morfismos $\phi_i : M \to M_i$ verificando estas dos condiciones, entonces $M = \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i$.

Vamos aver ahora que en dos categorías con las que siempre trabajamos, existen los límites proyectivos.

Teorema B.4. *En la categoría de conjuntos los límites proyectivos existen, explícitamente*

$$\lim_{\overleftarrow{i}} M_i = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$$

y $\phi : \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i \to M_i,\ \phi((m_j)) = m_i$.

Demostración. Denotemos $M = \{(m_i) \in \prod\limits_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j$ para todo $i \leq j\}$. Dados $\{(f_i) \in \prod\limits_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} \circ f_i$ para todo $i \leq j\}$, entonces la aplicación $f : N \to M$, $f(n) = (f_i(n))$ está bien definida y cumple que $f_i = \phi_i \circ f$.

Recíprocamente, dado $f : N \to M$, las aplicaciones $f_i = \phi_i \circ f$ cumplen que $f_j = f_{ij} \circ f_i$ para todo $i \leq j$.

Puesto que ambas asignaciones son inversas entre sí, hemos concluido. □

Teorema B.5. *En la categoría de A-módulos los límites proyectivos existen, explícitamente*

$$\lim_{\overleftarrow{i}} M_i = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$$

y $\phi : \lim\limits_{\overleftarrow{i}} M_i \to M_i,\ \phi((m_j)) = m_i$.

Demostración. La demostración es similar a la anterior. □

Dado un sistema proyectivo $\{M_i, f_{ij}\}$ de objetos de una categoría $\mathcal{C}$, entonces $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i), f_{ij_*}\}_{i \in I}$ forma un sistema proyectivo de conjuntos.

Proposición B.6. *Se verifica que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \lim_{\overleftarrow{i}} M_i) = \lim_{\overleftarrow{i}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i).$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \lim_{\overleftarrow{i}} M_i) &= \{(f_i) \in \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} \circ f_i \text{ para todo } i \leq j\} \\ &= \lim_{\overleftarrow{i}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i)\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la definición de límite proyectivo, y la segunda a la construcción del límite proyectivo de conjuntos. □

Definición B.7. *Un morfismo f entre dos sistemas proyectivos de módulos $\{M_i, f_{ij}\}$ y $\{N_i, g_{ij}\}$, con el mismo conjunto ordenado de índices, es una familia de morfismos $f_i : M_i \to N_i$ tales que $f_j \circ f_{ij} = g_{ij} \circ f_i$ cuando $i \leq j$.*

Todo morfismo f entre dos sistemas proyectivos induce morfismos $\varprojlim_i M_i \to N_i$, que inducen a su vez un morfismo $\hat{f} : \varprojlim_i M_i \to \varprojlim_i N_i$, el cual está explícitamente definido por $\hat{f}((m_i)) = (f(m_i))$.

Definición B.8. *Diremos que una sucesión de morfismos de sistemas proyectivos de módulos $\{M_i'\} \to \{M_i\} \to \{M_i^{''}\}$ es exacta si lo es la sucesión $M_i' \to M_i \to M_i^{''}$ para todo i.*

Ahora enunciamos un resultado sobre la exactitud de tomar límites proyectivos.

Proposición B.9. *La toma de límites proyectivos es un funtor exacto por la izquierda. Es decir, si $0 \to \{M_i'\} \to \{M_i\} \to \{M_i^{''}\}$ es una sucesión exacta de sistemas proyectivos de A-módulos, entonces la sucesión de A-módulos*

$$0 \to \varprojlim_i M_i' \to \varprojlim_i M_i \to \varprojlim_i M_i^{''}$$

es exacta.

Demostración. Es una comprobación sencilla, puesto que conocemos explícitamente como se construyen los límites proyectivos de módulos. □

Pasemos ahora la definición de límite inductivo, que es la noción dual de límite proyectivo.

Definición B.10. *Sea I un conjunto ordenado. Diremos que es filtrante creciente si para cada par $i, j \in I$ existe algún $k \in I$ que cumple que $k \geq i$ y $k \geq j$.*

Definición B.11. *Sea I un conjunto filtrante creciente. Un conjunto de objetos $\{M_i\}_{i \in I}$ de una categoría $\mathcal{C}$, junto con morfismos $f_{ij} : M_i \to M_j$ para cada $i \leq j$, diremos que es un sistema inductivo de objetos de $\mathcal{C}$ si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f_{ii} = \mathrm{Id}$ para todo $i \in I$;*
2. *$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ siempre que $i \leq j \leq k$.*

Definición B.12. *Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ un sistema inductivo de objetos. Diremos que M objeto de $\mathcal{C}$ (si existe) es el límite inductivo de este sistema inductivo, y lo denotaremos $\varinjlim_i M_i$, si se cumple la siguiente igualdad funtorial:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_i M_i, N) = \{(f_i) \in \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \mid f_i = f_j \circ f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\}.$$

Si $\lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i$ existe, entonces el morfismo $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i, \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i)$ define morfismos $\phi_i : M_i \to \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i$ de modo que

1. $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$;
2. dados $\{(f_i) \in \bigoplus\limits_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \mid f_i = f_j \circ f_{ij}$ para todo $i \leq j\}$, entonces existe un morfismo $f : \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i \to N$ de modo que $f_i = f \circ \phi_i$.

Se tiene también el recíproco, es decir, si existe un objeto M de $\mathcal{C}$ y morfismos $\phi_i : M_i \to M$ verificando estas dos condiciones, entonces $M = \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i$.

Vamos a ver ahora que en dos categorías con las que siempre trabajamos, también existen los límites inductivos.

Teorema B.13. *En la categoría de conjuntos los límites inductivos existen, explícitamente*

$$\lim_{\substack{\to \\ i}} M_i = \{\coprod_i M_i / \sim \ \mid m_i \sim m_j \textit{ si existe un } k \textit{ de modo que } f_{ik}(m_i) = f_{jk}(m_j)\}$$

y $\phi_j : M_j \to \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i$, $\phi_j(m_j) = \bar{m}_j$.

Demostración. Denotemos $M = \coprod\limits_i M_i / \sim$. Dados $\{(f_i) \in \prod\limits_i \mathrm{Hom}(M_i, N) \mid f_i = f_j \circ f_{ij}$ para todo $i \leq j\}$, entonces la aplicación $f : M \to N$, $f(\bar{m}_i) = f_i(m_i)$ está bien definida y cumple que $f_i = f \circ \phi_i$.

Recíprocamente, dada una aplicación $f : M \to N$, las aplicaciones $f_i = f \circ \phi_i$ cumplen que $f_i = f_j \circ f_{ij}$ para todo $i \leq j$.

Estas asignaciones son inversas entre sí, luego hemos concluido. □

Teorema B.14. *En la categoría de A-módulos los límites inductivos existen, explícitamente*

$$\lim_{\substack{\to \\ i}} M_i = \{\coprod_i M_i / \sim \ \mid m_i \sim m_j \textit{ si existe un } k \textit{ de modo que } f_{ik}(m_i) = f_{jk}(m_j)\}$$

y $\phi_j : M_j \to \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} M_i \to M_i$, $\phi_j(m_j) = \bar{m}_j$.

Demostración. Sencilla a partir de la demostración anterior, sólo falta comprobar que los conjuntos definidos son A-módulos y los morfismos definidos de A-módulos. □

Dado un sistema inductivo $\{M_i, f_{ij}\}$ de objetos de una categoría $\mathcal{C}$, entonces $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N), f_{ij^*}\}_{i \in I}$ forma un sistema proyectivo de conjuntos.

Proposición B.15. *Se verifica que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim_{\substack{\to \\ i}} M_i, N) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N).$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_i M_i, N) &= \{(f_i) \in \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \mid f_i = fj \circ f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\} \\ &= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N)\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la definición de límite inductivo, y la segunda a la construcción del límite proyectivo de conjuntos. □

Definición B.16. *Un morfismo f entre dos sistemas inductivos de módulos $\{M_i, f_{ij}\}$ y $\{N_i, g_{ij}\}$, con el mismo conjunto ordenado de índices, es una familia de morfismos $f_i : M_i \to N_i$ tales que $f_j \circ f_{ij} = g_{ij} \circ f_i$ cuando $i \leq j$.*

Todo morfismo f entre dos sistemas inductivos induce morfismos $M_i \to \varinjlim_i N_i$, que inducen a su vez un morfismo $f : \varinjlim_i M_i \to \varinjlim_i N_i$, el cual está explícitamente definido por $f(\bar{m}_i) = \overline{f_i(m_i)}$.

Definición B.17. *Diremos que una sucesión de morfismos de sistemas inductivos de módulos $\{M_i'\} \to \{M_i\} \to \{M_i''\}$ es exacta si lo es la sucesión $M_i' \to M_i \to M_i''$ para todo i.*

Ahora enunciamos un resultado sobre la exactitud de tomar límites inductivos.

Proposición B.18. *La toma de límites inductivos es un funtor exacto. Es decir, si $0 \to \{M_i'\} \xrightarrow{f_i} \{M_i\} \xrightarrow{g_i} \{M_i''\} \to 0$ es una sucesión exacta de sistemas inductivos de A-módulos, entonces la sucesión de A-módulos*

$$0 \to \varinjlim_i M_i' \xrightarrow{f} \varinjlim_i M_i \xrightarrow{g} \varinjlim_i M_i'' \to 0$$

es exacta.

Demostración.

1. $(g \circ f)(m_i') = g(\overline{f_i(m_i')}) = \overline{g_i(f_i(m_i'))} = 0$.
2. Si $g(\bar{m}_i) = 0$ entonces $\overline{g_i(m_i)} = 0$. Por tanto existe un k tal que $0 = f_{ik}''(g_i(m_i)) = g_k(f_{ik}(m_i))$. Luego si $f_{ik}(m_i) = f_k(m_k')$, por tanto $\bar{m}_i = \overline{f_k(m_k')} = f(\bar{m}_k')$.
3. Obviamente g es epiyectiva: dado $\bar{m}_i'' \in \varinjlim_i M_i''$, entonces existe m_i tal que $g_i(m_i) = m_i''$ y $g(\bar{m}_i) = \bar{m}_i''$.
4. Por último f es inyectiva: si $0 = f(\bar{m}_i{}') = \overline{f(m_i')}$, entonces existe un k tal que $f_{ik}(f_i(m_i')) = 0$. Por tanto $f_i(f_{ik}'(m_i')) = 0$ y $f_{ik}'(m_i') = 0$ porque f_i es inyectiva. Luego $\bar{m}_i' = 0$.

□

Por último un enunciado sobre el límite inductivo y el producto tensorial que para límites proyectivos, sin embargo, no es cierto.

Proposición B.19. *El límite inductivo de A-módulos conmuta con el producto tensorial. Es decir,*

$$(\varinjlim_i M_i) \otimes_A N = \varinjlim_i (M_i \otimes_A N).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A((\varinjlim_i M_i) \otimes_A N, R) &= \mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, \mathrm{Hom}_A(N, R)) \\
&= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(M_i, \mathrm{Hom}_A(N, R)) \\
&= \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(M_i \otimes_A N, R) \\
&= \mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i (M_i \otimes_A N), R).
\end{aligned}$$

□

Los límites que aquí hemos definido y cuyas propiedades se han estudiado son de conjuntos filtrados de objetos, aunque no es la única forma de tratarlos. En el Apéndice 6 de [12] se puede encontrar las definiciones de límites inductivos y proyectivos de categorías pequeñas (es decir, aquellas cuyos objetos forman un conjunto) de una categoría inicial. Aunque posteriormente se introduce el concepto de categoría filtrada, el desarrollo que se hace de las nociones de límite inductivo y proyectivo es, a priori, sobre un conjunto de objetos de una categoría sin más exigencias sobre su indexación o sobre los morfismos que pueda haber entre ellos. Concretamente en nuestro Teorema 2.2.2 es ésta la definición de límites inductivos en la que pensamos, más general que la que aquí hemos tratado. En el resto de la memoria, sin embargo, son las nociones desarrolladas en este apéndice las que se utilizan.

Bibliografía

[1] AL-AUBAIDY, W.K., NAOUM, A.G., *Actions of finite groups on commutative rings*, Tamkang J. Math. **34** (2003) 201-212.

[2] ÁLVAREZ, A., SANCHO, C., SANCHO, P., *Algebra schemes and their representations*, J. Algebra **296/1** (2006) 110-144.

[3] ÁLVAREZ, A., SANCHO, P., *Inverse limit of Grassmannians*, preprint N. 85, U. de Extremadura (2004)

[4] BLYTH, T.S., *Categories*, Longman, Harlow, 1986.

[5] BOREL, A., *Linear Algebraic Groups*, Grad. Texts in Math., vol. 126, Springer-Verlag, Nueva York, 1991.

[6] BRION, M., SCHWARZ, G.W., *Théorie des invariants et géometrie des variétés quotients*, Travaux en cours, vol. 61, Hermann, París, 2000.

[7] CHU, H., HU, S.-J., KANG, M.-C., *A variant of the Reynolds operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (2005) 2865-2871.

[8] DEMAZURE, M., GABRIEL, P., *Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups*, Math. Stud., vol. 39, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[9] DEMAZURE, M., GROTHENDIECK, A., *SGA 3 Tome I*, Lecture Notes in Math., vol. 151, Springer-Verlag, Nueva York, 1970.

[10] DIEUDONNÉ, J., *Introduction to the Theory of Formal Groups*, Pure and Applied Matehmatics, vol. 20, Dekker, Nueva York, 1973.

[11] DOLGACHEV, I.,*Lectures on invariant theory*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 296, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[12] EISENBUD, D.,*Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., vol. 150, Springer-Verlag, Nueva York, 1995.

[13] FREUDENBERG, G., *A Survey of counterexamples to Hilbert's fourteenth problem*, Serdica Math. J. **27** (2001) 171-192.

[14] HILBERT, D., *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. **36** (1890) 473-534.

[15] HILBERT, D., *Über die rollen Invariantensysteme*, Math. Ann. **42** (1893) 313-373.

[16] HILTON, P.J., STAMMBACH, U., *A Course in Homological Algebras*, Grad. Texts in Math., vol. 4, Springer-Verlag, Nueva York, 1971.

[17] JANTZEN, J.C., *Representations of Algebraic Groups*, Academic Press, Orlando, 1987.

[18] KNUS, M.A., OJANGUREN, M., *Théorie de la Descente et Algèbres d'Azumaya*, Lecture Notes in Math., vol. 389, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[19] LANG, S., *Algebra*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1965.

[20] MAGID, A.R., *Picard groups of rings of invariants* J. Pure Appl. Algebra **17** (1980) 305-311.

[21] MAC LANE, S., *Homology*, Springer-Verlag, Berlín, 1963.

[22] MATSUMURA, H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[23] NAGATA, M., *Invariants of a group in an affine ring*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963/1964) 369-377.

[24] NAGATA, M., *On the* 14*-th problem of Hilbert*, Amer. J. Math. **81** (1959) 766-772.

[25] PIERCE, R.S., *Associative Algebras*, Grad. Texts in Math., vol. 88, Springer-Verlag, Nueva York, 1982.

[26] SANCHO DE SALAS, C., *Grupos algebraicos y teoría de invariantes*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2001.

[27] SERRE, J. P., *Linear Representations of Finite Groups*, Grad. Texts in Math., vol. 42, Springer-Verlag, Nueva York, 1977.

[28] WATERHOUSE, W.C., *Introduction to Affine Group Schemes*, Grad. Texts in Math., vol. 66, Springer-Verlag, Nueva York, 1979.

[29] WEYL, H., *Classical Groups*, Princeton University Press, Nueva Jersey, 1973.

Tabla de notaciones

$Sem_K(E)$	*grupo de automorfismos semilineales del K-espacio vectorial E*
$C_A(B)$	*álgebra conmutadora de A en B*
$Z(A)$	*centro del álgebra A*
A°	*álgebra opuesta de A*
$\bar{A}$	*álgebra semisimple maximal de A*
R	*radical del álgebra A*
$k[G]$	*álgebra envolvente de G*
χ_E	*carácter de E*
$\mathbf{E}$	*módulo cuasi-coherente*
$\mathbf{E}^*$	*esquema de módulos*
$\mathbf{A}^*$	*esquema de álgebras*
$\mathbf{M}^*$	*esquema de álgebras cociente semisimple maximal de $\mathbf{A}^*$*
$\mathbf{I}^*$	*radical de $\mathbf{A}^*$*
$\operatorname{Inv}\mathbf{A}^*$	*invertibles de $\mathbf{A}^*$*
$\operatorname{Spec}_{max}\mathbf{A}^*$	*conjunto de esquemas de ideales biláteros maximales de $\mathbf{A}^*$*
$Z(F)$	*centro del funtor de álgebras F*
$\bar{F}$	*clausura de esquemas de módulos del funtor de módulos F*
$\hat{F}$	*compleción del funtor de espacios vectoriales F*
$\tilde{F}$	*clausura de esquemas de álgebras del funtor de álgebras F*

$\mathbf{Hom}_R(F, F')$	*funtor de homomorfismos de R-módulos de F en F'*
$R[X^\cdot]$	*funtor de R-módulos asociado al R-esquema X*
$\mathrm{Der}_k(F, M)$	*k-derivaciones de F en M*
Δ_F	*núcleo del morfismo $F \otimes F \to F$, $a \otimes b \mapsto ab$*
$\rtimes$	*producto semidirecto*
G_u	*radical unipotente de G*
w_G	*integral invariante de G*
$\bar{\otimes}$	*producto tensorial en la categoría de esquemas de módulos*
$\tilde{\otimes}$	*producto tensorial en la categoría de esquemas de álgebras*

Índice alfabético