EVA T. LÓPEZ SANJUÁN
JESÚS MONTANERO FERNÁNDEZ
M. ÁNGELES MULERO DÍAZ
M. ISABEL PARRA ARÉVALO
BATILDO REQUEJO FERNÁNDEZ
(Editores)

DIVULGATIONES MATHEMATICAE

LI Olimpiada Matemática Española, 2015

MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Presentación

Un sabio y querido profesor nos decía que la Matemática es una dama arisca y bella, que solo muestra sus encantos a quienes porfían con ella.

Cada año, desde hace ya más de cincuenta, decenas de jóvenes a quienes gusta cortejar a la dama, participan en la Olimpiada Matemática, cuya fase nacional tenemos el honor y la responsabilidad de acoger en Extremadura en su quinquagésimo primera edición.

Estas DIVULGATIONES MATHEMATICAE, colección de artículos elaborados por profesores de la Universidad de Extremadura, nacen con el propósito de animar a participantes, acompañantes, y todo el que esté interesado, a aprender un poquito de matemáticas, de su historia, e incluso algunas herramientas para escribir textos matemáticos con gráficas y dibujos.

De la mano de María Luisa Harto, profesora de Filología Latina, descubriremos el origen grecolatino de algunos de los términos más usuales en Matemáticas, como teorema, axioma, corolario, etc.; con ella veremos que las palabras son seres que tienen vida propia.

Establecido el vocabulario que usamos en Matemáticas, corresponde fijar las hipótesis en las que éstas se basan. Juan Antonio Navarro González nos mostrará los axiomas o postulados en los que se han basado las Matemáticas desde la Grecia clásica hasta nuestros días.

Los postulados de Euclides fueron válidos para fundamentar las Matemáticas hasta el siglo XVII, cuando nace el Cálculo Infinitesimal y culmina la revolución científica iniciada en Europa a finales del Renacimiento. Carmen Calvo Jurado nos guiará en una revisión histórica del pensamiento matemático desde el Renacimiento hasta nuestros días y nos mostrará las raíces de las matemáticas en problemas concretos de la ciencia y la tecnología.

La utilidad y aplicabilidad no restan un ápice de belleza y armonía a la matemática que, según el matemático e historiador de las ideas científicas, el extremeño Francisco Vera Fernández de Córdoba (Alconchel, Badajoz, 1888-Buenos Aires, 1967) constituye la forma más perfecta del pensamiento poético. Nuestro experto en Historia de las Ciencias, José M. Cobos Bueno, en *A vueltas con las Matemáticas*, funde algunas reflexiones, fruto de su experiencia y estudios, con pensamientos e ideas de Francisco Vera, de cuya obra es profundo conocedor.

Un buen ejemplo de la belleza de las Matemáticas es el conocido Teorema de los cuatro colores. David Sevilla, además de explicarnos el enunciado y la historia del famoso teorema, propuesto en el siglo XIX y demostrado en 1976 con la ayuda de un ordenador, trata de desvelarnos algunas de las ideas en las que se basa la demostración.

En cuanto a aplicaciones, un área de las matemáticas muy fructífera es la Teoría de Juegos, que estudia el comportamiento estratégico. Uno de sus más reconocidos especialistas es el nobel de economía J.F. Nash (Una mente maravillosa). En *Dos que no cooperan*, Juan Miguel León Rojas nos ofrece una introducción asequible a esta teoría, con ejemplos como el conocido dilema del prisionero.

Para la Teoría de juegos, el póquer ha desempeñado un papel similar al que tuvieron los dados en el nacimiento de la teoría de la probabilidad. Sobre el concepto de probabilidad, María Isabel Parra Arévalo, Jesús Montanero Fernández y Eva López Sanjuán ilustran mediante una serie de ejemplos los conflictos, a veces sorprendentes, que pueden darse entre la aproximación intuitiva a dicho concepto y los cálculos formales más sencillos que se derivan de la aplicación estricta de la teoría. No resulta menos sorprendente el uso de un fenómeno aleatorio tan simple como el lanzamiento de una moneda para calcular integrales definidas (área bajo una curva). Agustín García Nogales nos muestra cómo hacerlo mediante dos procedimientos distintos.

Actualmente, la inmensa mayoría de los textos matemáticos se elaboran con LaTeX, un procesador de textos especialmente diseñado para ello. Fernando Sánchez Fernández nos introduce en el uso del LaTeX desde los primeros pasos y nos presenta también el TikZ, una herramienta de reciente creación que permite introducir gráficos e imágenes de cualquier tipo en un texto LaTeX con alta calidad y de forma sencilla.

Con ayuda del LaTeX, o simplemente de lápiz y papel (herramientas fundamentales, junto con la papelera, para el matemático o el aprendiz de matemático), puedes escribir las soluciones (o los intentos) a la colección de problemas recopilados por Ricardo Faro Rivas con que finalizan estas DIVULGATIONES MATHEMATICAE, cuyo propósito fundamental, confesamos ahora, no es otro que el de retar a todos los lectores a porfiar con la dama. ¿Te atreves?

Carlos Benítez Rodríguez
In Memoriam

Los artículos de este volumen están dedicados a Carlos Benítez, que consagró su vida a cortejar a la dama y a guiar sabiamente a cientos de aspirantes a iniciarse en este cortejo.

El profesor Carlos Benítez fue artífice de la Olimpiada Matemática en la Universidad de Extremadura durante veinticinco años. Por esa razón, la Comisión de Olimpiadas de la Real Sociedad Matemática Española decidió en junio de 2013, concederle la Insignia de Plata de la Olimpiada, que se entregará a sus familiares en esta edición ya que, desgraciadamente, falleció el 7 de marzo de 2014, semanas antes de la celebración de la anterior Olimpiada.

Sirvan estas DIVULGATIONES como pequeño homenaje a Carlos, y como muestra de agradecimiento a su esposa, Esperanza, y a sus hijos, Elena, Esperanza, Carlos y Pablo, por haberlo compartido tan generosamente con nosotros.

A Carlos Benítez Rodríguez,
por todas las flores que derramó sobre nosotros.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015

Índice

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 1–7

El origen clásico de algunas palabras matemáticas

M. Luisa Harto Trujillo

Departamento de Ciencias de la Antigüedad
Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Extremadura
Avda. de la Universidad, 10003 *Cáceres, Spain*

mlharto@unex.es

Normalmente utilizamos las palabras sin darnos cuenta de que, además de ser un recurso lingüístico que nos permite comunicarnos, en realidad, son “seres” que tienen vida propia, pues nacieron en un momento determinado, en una lengua y con un significado concreto pero, sin embargo, si algunas han desaparecido, lo cierto es que muchas -en realidad la mayor parte- han viajado a lo largo del tiempo y del espacio sobreviviendo a todas las guerras y catástrofes que ha vivido la humanidad. Puede haber desaparecido la cultura, la lengua o el imperio que las vio nacer, pero muchas de ellas siguen ahí y, de hecho, todos utilizamos palabras griegas y latinas como *auto*, *curriculum*, *museo*, *diva*, *etcétera*.

Eso sí, en ese largo viaje, las palabras en ocasiones han visto cambiar su forma (por ejemplo, de *magis* a “más”, y de *minus* a “menos”), y a veces también su significado original, pues se aplican a nuevas realidades que antes no existían, o han pasado de un campo semántico a otro (así, el *Cancerbero* era en la mitología clásica el perro Cerbero que vigilaba la puerta del infierno con sus tres cabezas, y ahora es el término que utilizan los comentaristas deportivos para los porteros de fútbol).

También hay palabras que han “engordado” con prefijos y sufijos que les han aportado un nuevo matiz (por ejemplo, si en latín *ducere* era “conducir”, en español no hemos conservado este verbo simple, pero sí tenemos muchos otros formados a partir de la unión de *ducere* y un prefijo: “abducir, reducir, producir, conducir, seducir, inducir . . . ”).

Desde luego, lo que sí podemos afirmar es que en las palabras griegas y latinas está la base del léxico de todas las ciencias actuales, ya sea de la informática, la medicina, la biología, la filosofía, la física, la química, la veterinaria . . . y también las matemáticas. No en vano, en la Grecia y Roma clásicas hubo ilustres matemáticos y todos hemos oído hablar de los descubrimientos y teorías de Pitágoras, Euclides, Arquímedes ..., pero sin embargo, seguramente, no nos hemos detenido a considerar que muchas de las palabras que seguimos empleando hoy en nuestras clases de matemáticas fueron términos ya utilizados por griegos y romanos hace muchos siglos, a veces con el mismo significado, pero a veces no.

Veamos, pues, el viaje experimentado por algunos de estos vocablos matemáticos:

Por ejemplo, el propio término **matemáticas** es griego. Viene del sustantivo *mathema*, que significaba "conocimiento, lección", y ya en el mundo griego se empezó a aplicar relacionado especialmente con lo que hoy entendemos como matemáticas, pero siempre relacionado también con el conocimiento astronómico y filosófico (conjunto que ellos denominaban *mathematiké techne*). A través del latín, y sobre todo a partir del Renacimiento, será cuando el término vaya especializándose con el significado que ahora le damos.

Pero del mundo clásico vienen también otros muchos términos que usamos en este mundo de las matemáticas.

De ellos, algunos se han formado con prefijos y sufijos que les han aportado algún valor:

Así, con el sufijo *-ma* se crearon sustantivos a partir de adjetivos y palabras usuales. Por ejemplo, si *axiós* en griego significaba "algo de peso, de valor", un **axioma** es una verdad de peso, que no necesita demostración. Y si el verbo *theomai* significaba en griego "ver, contemplar", [1] un **teorema** es una proposición demostrable o visible lógicamente partiendo de verdades ya demostradas, mediante ciertas reglas.

Otro sufijo muy usado para la formación de palabras en todos los campos y, por supuesto, también en matemáticas, es el diminutivo latino *-ulus*, que vemos por ejemplo en el término **ángulo**, que significa "doblado, torcido, esquina", y que es un diminutivo formado a partir de una raíz indoeuropea *ank- o ang- que significaba "doblar". [2]

[1] De hecho de ahí viene también la palabra **teatro**, que es el único género literario que contemplamos colectivamente en un escenario, frente a los demás géneros, que son objeto de lectura individual.

[2] De este modo, un ángulo sería etimológicamente igual que el "dobladillo", diminutivo que se usa, por ejemplo, para referirnos al ángulo o doblez que se hace en la ropa para acortarla. Y es muy significativo igualmente que, de esta misma raíz ank- o ang- vienen también términos como **ancla** o **anzuelo**, utensilios marcados en ambos casos por su forma

Partiendo de la explicación de **ángulo**, entendemos que un **triángulo** es el polígono que tiene tres esquinas. Y si nos fijáramos ya en los tipos de triángulos según sus lados, podemos especificar que son **equiláteros** aquellos cuyos lados son iguales (del latín *aequus* "igual", y *latus* "lado"), **isósceles** (del griegos *isós* "igual" y *skeles* "piernas") aquellos que tienen dos piernas o lados iguales, y **escalenos** (del adjetivo griego *skalenós*, que significa "cojo, contrahecho"), aquellos que, efectivamente, al tener tres lados desiguales, parecen estar cojos e inclinados hacia un lado.

Otro diminutivo similar lo tenemos en el término **cálculo**, palabra de significado muy interesante, ya que procede de *calx* "piedra" y del sufijo diminutivo *-ulo*, de manera que su significado real es "piedrecita", que es realmente el significado que se le da en medicina cuando hablamos de los "cálculos de riñón o de vesícula". Y es que para hacer las cuentas, como nuestros antepasados no tenían calculadoras, contaban piedrecitas como las de un ábaco, y de ahí el verbo **calcular**, que sería algo así como "contar piedrecitas", si bien en latín clásico "contar" se decía también *computare* (de *cum* "junto con" y del verbo *puto* "pensar, considerar").

Y otra palabra matemática en la que se aprecia el diminutivo es en **círculo**, diminutivo de *circus* "redondeado".[3]

Pero, además de los vocablos compuestos con los sufijos mencionados, en matemáticas se utilizan también muchos términos compuestos con prefijos clásicos.

Es el caso del prefijo griego *hipo-*, que significa "debajo". Y así, todos hemos oído hablar, por ejemplo, del **epicentro** y del **hipocentro** de un terremoto, que indican el centro del seísmo, ya sea sobre la superficie (*epi-* significa "sobre") o ya en el interior de la tierra (*hipo-* "debajo"). Pero también en matemáticas, hemos oído hablar de la **hipotenusa**, esa diagonal opuesta al ángulo recto de un triángulo rectángulo, y que etimológicamente significa la "sujetada fuertemente desde abajo", ya que si *hipo-* significa, como hemos dicho, "debajo", *teino* es en griego "sujetar", y *-usa* sería el participio femenino del verbo "ser", de manera que, ciertamente, la hipotenusa estaría sujetada desde abajo. No en vano, ese concepto de "abajo" se recoge en los **catetos**, que, formados a partir de la preposición griega (*kata* "abajo"), significan "que

curva.

[3] De esta misma raíz es el adverbio latino *circum*, que significa "alrededor", y que aparece también por ejemplo en términos como **circunferencia** (de *circum* "alrededor" y *fero* "llevar").

caen en perpendicular", ya que la representación de los triángulos en el mundo clásico solía hacerse con la hipotenusa arriba, en horizontal, sujetada por los catetos, situados debajo.

Con ese mismo prefijo, una **hipótesis**, estaría compuesta por el ya citado *hipo-* y por *tesis*, que viene del verbo griego *títhemi* "poner, colocar", de manera que una hipótesis, etimológicamente, es en griego "lo que está puesto debajo, o subyace bajo una tesis". En realidad, por su significado, este término equivale al sustantivo latino *suppositio* o **suposición** (del latín *sub-* "debajo", y *ponere* "poner").[4]

Y de ese mismo verbo *tithemi*, "poner", vendría también el término **apotema**, en el que se ha unido al verbo la preposición griega *apo-*, "desde", de manera que una apotema es la línea "puesta" o trazada desde el centro de un polígono regular a uno de sus lados.

Por otra parte, si como hemos visto, *hipo-* es el prefijo griego que significa "debajo", *hiper-* o su correspondiente latino *-super*, significan "más grande, por arriba", y si tenemos en cuenta también que el verbo *ballo* equivale a "lanzar", entonces una **hipérbola** es algo "lanzado hacia arriba", mientras que una **parábola** sería "algo lanzado o expresado junto a otra cosa", ya que *para-* es una preposición griega que significa "junto a".

Compartiendo la preposición *para-* como componente, encontramos también el término **paralelas** –que une *para-* "junto a", y *allos* "otro"–, de manera que líneas paralelas son, etimológicamente, las que discurren junto a otras.

Ahora bien, esta misma preposición sirve también para enseñarnos cómo puede cambiar el significado de un término, ya que de significar "junto a" y referirse a algo situado junto a otra cosa, *para-* empezó igualmente a significar "algo contrario", ya que estaba junto a otra cosa pero era diferente. Y esa es la explicación, por ejemplo, del término **paradoja**, formado a partir de *para-* con este valor de "contrario a", y del sustantivo griego *doxa* "opinión, creencia"-, de manera que una paradoja es algo que parece contrario a la creencia general.

Vemos, pues, cómo el significado de los términos matemáticos no es **aleatorio**, es decir, no se ha conformado al azar,[5] algo que podemos afir-

[4] Y con el mismo componente de "posición", una **proposición** sería "algo colocado delante o en defensa de lo puesto", ya que es un término formado por el prefijo *pro-* "delante de, a favor de", y del citado *posición*.

[5] El término **aleatorio** viene del latín *alea*, que significa "juego de azar, suerte". No olvidemos la famosa anécdota de Julio César, quien tras pasar el pequeño río del Rubicón, que servía de frontera entre Italia y la Galia, dispuesto a enfrentarse a una guerra civil,

mar también a propósito del término **ecuación**, igualdad matemática con una o más incógnitas, que viene precisamente del término latino *aequus*, que significa "igual".[6]

Ahora bien, si hay algún objeto o elemento propio y característico de las matemáticas, son sin duda los números, que tienen denominaciones originarias también de las lenguas clásicas y que presentan, en algunos casos, derivaciones muy curiosas. Así, el propio término **número** procede de una raíz indoeuropea *nem-*, que significa "distribución, división", y que aparece por ejemplo en la diosa Némesis (que es la diosa griega de la venganza, que distribuye o reparte premios y castigos).

Y, ya concretamente entre los números, si bien no tiene origen clásico, sí podemos decir que la denominación **cero** -del árabe *sifr* "vacío"-, sí viene de las distintas pronunciaciones de este término en la evolución del latín, ya que en bajo latín se decía *zephy̆rum* y en italiano *zero*. El **uno** procede del latín *unus* (de la misma raíz tenemos en inglés *one*). El **dos** de *duo*[7] y, por ejemplo, del latino *tres*, además de venir nuestro cardinal **tres**, o el ordinal **tercero**, viene también curiosamente el término **trivial**, que se refería, en principio, a un cruce en el que confluían tres caminos y en el que, al coincidir la gente, se detenía para contarse trivialidades, es decir, anécdotas, referencias o relatos sin importancia.

Igualmente un cruce, pero en este caso de **cuatro** (*quattuor*) caminos, es el origen de la denominación francesa *carrefour*, o de los términos **cuadrado**, **cuadrilátero** "de cuatro lados" ... Así mismo, otra curiosidad referida a los números y su denominación sería el hecho de que, por ejemplo, nuestra españolísima **siesta**, viene del ordinal *sexta*, ya que era a esta hora a la que descansaban los romanos después de la comida.

En cuanto a los números ordinales a partir de diez, no siempre es fácil ver su origen etimológico, aunque, por ejemplo, **once** viene de *undecim* (*unus* más *decim* o "diez"), **doce** de *duodecim* ("dos" más "diez"), y así sucesivamente.

Otra raíz relacionada con los números es *bis*, que significa "dos veces", de manera que una **bisectriz** sería la línea que divide un ángulo en dos partes iguales partiendo desde su vértice (a *bis*, se le une el verbo *secare* que significa

pronunció la frase: *Alea iacta est* o "la suerte está echada".

[6] De hecho ya lo mencionamos anteriormente a propósito del **triángulo equilátero**, que sería el que tiene los tres lados iguales.

[7] De este término *duo* "dos", vendrían también los términos **duelo** o *bellum* "guerra", origen del adjetivo castellano "bélico", y que aludiría en principio sólo a combates entre dos.

"cortar" en latín -nuestro "segar" en español-, y el sufijo *-trix* que indica en femenino al que hace algo).[8]

¿Y qué relación tiene, por ejemplo, con los números un **hexaedro**? Pues bien, este término viene del número **seis**, que en griego era *hexs* (*sex* en latín) y del sustantivo *hedra*, que significaba "asiento, base", de manera que un hexaedro sería el **poliedro** (*poli* = "muchos") de seis caras iguales.[9]

Y si un **poliedro** tiene muchas caras o bases, un **polígono** tiene varios ángulos o rincones (del griego *gónos* "ángulo")[10] y una **diagonal** (del griego *dia-* "a través") sería etimológicamente aquella línea que atraviesa un ángulo.

Encontramos de este modo aquí un nuevo prefijo *dia* "a través de", que ha formado también términos como **diámetro**, que significa etimológicamente "medida a través o por el medio", ya que **metro** viene del término griego *metron* o "medida".

Por ejemplo, con este mismo origen, algo **simétrico** es algo que comparte la medida (del griego *sin* "con" y *metro*), y la **geometría** es en principio la medida de la tierra (*gea* = "tierra"), ya que ésta es la parte de las matemáticas que estudia las propiedades y medidas de la extensión, y nace de la necesidad de medición de las tierras para pagar los impuestos.

Muy interesante nos parece también el origen del término **perpendicular**, que define a una línea o plano que forma ángulo recto con otro, y que viene del verbo *pendo* "pesar", y del prefijo *per*, que tiene un valor intensivo, de manera que un *perpendiculum* era en latín una plomada o peso, instrumento que permitía pesar perfectamente y trazar líneas rectas. O, relacionado también con la actividad artesanal, estaría el origen del término **prisma**, que viene del verbo griego *prio*, que significa "aserrar".

Valgan estos términos como muestra del origen clásico del vocabulario matemático, aunque, a modo de propina, podríamos incluir para terminar el sustantivo **corolario**, que precisamente significa en griego "propina, regalo"

[8] Si el verbo *secare* significa "cortar", una **secante** será la línea que corta a otra en algún punto, mientras que una tangente (*tango* = "tocar") sería la que toca a otra en algún punto.

[9] Es muy interesante también cómo este mismo término *hedra* "asiento, base" sería el que encontramos en palabras como **cátedra** o **catedral**, ya que una cátedra (de la preposición griega *kata* "debajo" + *hedra* "asiento, base") sería la silla de amplia base en la que se sentaban los profesores y obispos, de manera que hablar *ex cathedra* sería etimológicamente hablar con la autoridad propia de un profesor o un obispo sentados en sus púlpitos o asientos de amplia base, y una catedral sería pues la sede de un obispo.

[10] Y de ahí un **pentágono** tendrá cinco ángulos (*pente* es el equivalente griego al *quinque* latino), **hexágono** "seis", ...

y que en matemáticas, respondiendo a ese origen, implica también una consecuencia que se obtiene de un teorema de forma inmediata o con muy poco esfuerzo, es decir, de regalo, o de propina del teorema.

En conclusión, retomamos la idea que expresábamos al inicio, las palabras –también las de los matemáticos– son seres vivos que han viajado a lo largo del tiempo y del espacio, adquiriendo nuevos matices y significados, aplicándose a nuevas realidades, pero conservando siempre algo de ese sabor clásico, de ese origen que las ha acompañado siempre y que sigue aún hoy, en pleno siglo XXI, haciéndonos sentir herederos de los clásicos.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 9 – 15

Las hipótesis de las Matemáticas

Juan A. Navarro González

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas, s/n, 06006 *Badajoz, Spain*

navarro@unex.es

En la Grecia clásica las Matemáticas se entendían como Geometría, y decir Geometría era también decir definición y demostración. Desde entonces, en Matemáticas todas las afirmaciones han de acompañarse con una demostración, con una serie encadenada de razonamientos absolutamente claros e indudables que nos hagan ver la verdad de tal afirmación.

Pero cada una de nuestras demostraciones hace ver la verdad de un enunciado a partir de ciertas hipótesis, de otras afirmaciones que damos por sentadas en nuestro razonamiento, y que debemos demostrar previamente para ser rigurosos. Afirmaciones que habremos demostrado a partir de otras previas, etc.

Así, nuestras argumentaciones realmente prueban la verdad de muchos enunciados partiendo de algunos enunciados primitivos que damos por sentados, de ciertas hipótesis previas que ponemos como fundamento y base de la teoría. Hipótesis que podemos dejar envueltas en la neblina de la imprecisión, tomándolas como algo obvio y común a todos los hombres, que no detallamos ni llaman nuestra atención, o podemos elevarlas a conciencia y ponerlas de manifiesto en una lista de axiomas o postulados en que basamos nuestra teoría.

Los antiguos griegos pusieron esta última alternativa como el ideal del conocimiento racional y lograron su expresión más acabada en los trece libros de los *Elementos* de Euclides (s. III antes de Cristo), donde se obtienen muchos teoremas de Geometría y Aritmética a partir de cinco postulados [1]:

1. Se puede trazar una línea recta uniendo dos puntos cualesquiera.
2. Toda línea recta se puede prolongar indefinidamente por derecho.
3. Con cualquier centro y cualquier distancia, se puede trazar un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

[1] En estos postulados la línea recta se entienden como lo que hoy llamaríamos segmento finito de una recta, dado el rechazo visceral de los griegos a cualquier entidad infinita.

5. Si una línea recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

Durante casi 2000 años, estos axiomas proporcionaron el marco de referencia en el que se desarrolló la Geometría, que era tanto como decir las Matemáticas, y el único problema que se planteaba acerca de los fundamentos era el de averiguar si el quinto postulado, claramente más farragoso, es o no es una consecuencia lógica de los otros cuatro.

Pero la situación cambió drásticamente en el s. XVII con la introducción del Cálculo Infinitesimal por Leibnitz y Newton, y su consideración de cantidades infinitamente pequeñas; pero no nulas. Cantidades que a menudo se despreciaban en los cálculos, sin que por ello se obtuvieran resultados sólo aproximadamente ciertos, sino absolutamente correctos.

Por ejemplo, siempre podemos encontrar fracciones $\frac{n}{m}$ tan cercanas como queramos a $\sqrt{2}$, de modo que siempre que admitiéramos un error, por pequeño que sea, diríamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. *En Matemáticas no es admisible ningún error, por pequeño que sea.* Y sin embargo, cuando Euler demostró en 1735, usando el Cálculo Infinitesimal, que la suma

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

de los inversos de los cuadrados perfectos es $\frac{1}{6}\pi^2$, tal afirmación es totalmente exacta, sin el más mínimo error; aunque en el camino de su demostración se hayan identificado a menudo cantidades que difieren en una cantidad infinitamente más pequeña, pero no nula.

Los razonamientos del Cálculo Infinitesimal se extendieron rápidamente a casi todas las ramas de las Matemáticas y la Física con un éxito arrollador; pero sus argumentos se salen fuera del marco de los postulados de Euclides. Después de habitar 20 siglos en el acogedor ambiente proporcionado por Euclides, las Matemáticas se vieron arrojadas fuera de él. Se encontraron en una situación en que los principios que fundamentaban sus razonamientos estaban envueltos en oscuridad e imprecisión; a pesar de todos los esfuerzos de Leibnitz por sacarlos a la luz y explicitarlos.

A lo largo del s. XIX se va realizando una aritmetización del Análisis, que permite obtener los conceptos y teoremas del Cálculo Infinitesimal a partir de las propiedades elementales de los números naturales, los números que usamos para contar:

$$0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Los trabajos de Cauchy, Riemann y muchos otros permiten reducir las Matemáticas de su época a la Aritmética más elemental. A su vez, Peano formula en 1889 un sistema de axiomas para los números naturales:

1. El 0 es un número natural.
2. Todo número natural n tiene un siguiente n'.
3. El 0 no es el siguiente de ningún número natural.
4. Si dos números naturales tienen el mismo siguiente, son iguales.
5. *Axioma de inducción.* Sea $\phi(n)$ una afirmación tal que $\phi(0)$ es cierta. Si $\phi(n')$ es cierta siempre que $\phi(n)$ lo es (donde n' es el siguiente de n), entonces $\phi(n)$ es cierta para todo número natural n.

Pero en la segunda mitad del s. XIX, justo cuando se está terminando de coronar con éxito esta magna empresa, surge la teoría de conjuntos de Cantor, que progresivamente se va situando como el lenguaje más adecuado para desarrollar todas las Matemáticas. Pero es imposible reducir la teoría de conjuntos a los números naturales, y la gran mayoría de los matemáticos nos limitamos a usarla de modo intuitivo, sin clarificar sus principios.

Sin embargo el uso sin restricciones de los conjuntos produce conceptos contradictorios, como es el conjunto U de todos los conjuntos. En efecto, si existiera, el subconjunto $N = \{x \in U \ : \ x \notin x\}$ de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos lleva a contradicción (con un argumento muy similar a la paradoja del puente y la horca que le plantean a Sancho Panza en el capítulo LI de la segunda parte del Quijote):

- Si N es un elemento de N, entonces, por la propia definición de N, tenemos que N no es un elemento de N.

- Si N no es un elemento de N, entonces, como $N \in U$ y $N \notin N$, tenemos que N es un elemento de N.

Justo cuando se está terminando de construir un nuevo ambiente donde desarrollar con claridad y seguridad todas las Matemáticas, éstas vuelven a vivir un desarrollo que las sitúa fuera de él, en un lugar sin cimientos seguros, donde sus principios vuelven a quedar en lo implícito.

Por eso se vuelve necesario precisar en unos axiomas las construcciones con conjuntos que son lícitas, y establecer sus propiedades básicas. En la primera mitad del s. XX se propusieron varios sistemas de axiomas para la teoría de conjuntos, destacando entre ellos la axiomática de Zermelo-Fraenkel:

1. *Axioma de extensionalidad.* Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
2. *Axioma del vacío.* Existe un conjunto $\emptyset$ sin elementos.
3. *Axioma de regularidad.* Todo conjunto no vacío x tiene un elemento $y \in x$ tal que x e y no tienen ningún elemento común, $x \cap y = \emptyset$.
4. *Axioma de especificación.* Dado un predicado $\phi(a)$, para todo conjunto x existe el subconjunto formado por los elementos $a \in x$ que cumplen $\phi(a)$.
5. *Axioma del par.* Dados conjuntos x e y, existe otro conjunto $\{x, y\}$ cuyos elementos son x e y.
6. *Axioma de la unión.* Para cada conjunto x hay un conjunto u cuyos elementos son los elementos de los elementos de x (es decir, existe la unión de todos los conjuntos que son elementos de x).
7. *Axioma de reemplazo.* Dada un predicado $\phi(a, b)$ y un conjunto x, si para cualquier elemento a de x existe el conjunto $y = \{b \mid \phi(a, b)\}$, entonces hay una aplicación $f : x \to z$ tal que $f(a) = y$ (es decir, la imagen de cualquier aplicación definible es un conjunto).
8. *Axioma del conjunto potencia.* Para todo conjunto x existe otro conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de x.
9. *Axioma de infinitud.* Existe un conjunto x tal que $\emptyset \in x$ y tal que si $y \in x$, entonces $y \cup \{y\} \in x$ (es decir, existen conjuntos infinitos).
10. *Axioma de elección.* Sea x un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos, y sea u la unión de los elementos de x. Existe una aplicación $f : x \to u$ tal que $f(y) \in y$ para todo $y \in x$ (es decir, dada una familia de conjuntos no vacíos, podemos elegir un elemento de cada conjunto).

Nótese que, en el axioma de infinitud, el menor subconjunto de x que cumple el axioma

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

es un conjunto que tiene un elemento que es el conjunto vacío, otro que es un conjunto con un único elemento, otro que es un conjunto con dos elementos, otro que es un conjunto con tres elementos, ... Este conjunto claramente puede verse como el de los números naturales, al cual ya se había reducido toda la Matemática clásica. Es asombroso ver cómo la nada o el vacío, en cuanto tiene sentido, es sumamente fértil, y capaz de producir una realidad exuberante más allá de toda imaginación.

Sin embargo, a pesar de que la fundamentación axiomática de la teoría de conjuntos va camino de cumplir un siglo, la gran mayoría de los matemáticos nos limitamos a usar la teoría de conjuntos de modo intuitivo, sin preocuparnos de que todo lo que usamos tenga cabida en tales axiomas (o dándolo por hecho). Raro es encontrar alguno que se los sepa, y más raro aún que los use. La razón de esta desconexión quizás radique en que esta axiomática no termina de recoger bien el uso intuitivo que solemos hacer de los conjuntos, al menos en dos aspectos básicos:

1) Esta axiomática contempla la posibilidad de realizar la unión de dos conjuntos arbitrarios (de ahí el extraño aspecto del axioma de la unión), cuando en realidad siempre realizamos la unión de dos subconjuntos de un conjunto dado. Nunca se realizan uniones e intersecciones sin referencia a un conjunto ambiente o conjunto total en el que estamos trabajando.

2) En esta axiomática los elementos de un conjunto siempre son a su vez conjuntos, con elementos que a su vez son necesariamente conjuntos, etc. (de ahí el absurdo enunciado del axioma de regularidad), cuando en realidad siempre partimos de ciertos conjuntos dados, cuyos elementos nunca consideramos a su vez como conjuntos.

No obstante, a pesar de ello, a finales de los años 30, un grupo de jóvenes matemáticos franceses, bajo el seudónimo colectivo de Nicolás Bourbaki, inició la redacción de unos monumentales *Elementos de Matemática* que, emulando los *Elementos* de Euclides, pretendían desarrollar axiomáticamente todas las bases de las Matemáticas, partiendo de la teoría de conjuntos, y haciendo ver que en realidad todos los objetos que se estudian en Matemáticas son esencialmente conjuntos dotados de ciertas estructuras (operaciones, familias de subconjuntos, ...). Desde 1940 han publicado varios volúmenes [2]:

- *Teoría de conjuntos*
- *Álgebra*
- *Topología general*
- *Funciones de una variable real*

[2] El último de ellos, *Teorías espectrales*, fue publicado en 1983, y presumiblemente marca el final de su proyecto. No obstante, en 1998 apareció un nuevo fascículo del volumen de *Álgebra conmutativa*, y el octavo capítulo del volumen de *Álgebra* ha sido publicado en 2012.

- *Espacios vectoriales topológicos*
- *Integración*
- *Álgebra conmutativa*
- *Variedades diferenciables y analíticas.* (Fascículo de resultados)
- *Grupos y álgebras de Lie*
- *Teorías espectrales*

Desde los años 50 su exigencia de rigor ha sido universalmente aceptada en Matemáticas, junto con el estilo particular en que la expresan, siendo muy diferentes los textos actuales de los prebourbakianos. Este éxito ha vuelto innecesaria la continuación de su obra, pues desde los años 70 casi todos los textos se redactan ya siguiendo sus exigencias.

Sin embargo cada vez es más claro que, aunque el concepto de "conjunto de todos los conjuntos" sea contradictorio, entidades como la totalidad de los conjuntos, y otras similares, son absolutamente necesarias y cruciales en el desarrollo de algunas partes centrales de las Matemáticas, y bajo el nombre de categorías se han ido introduciendo progresivamente por todas sus ramas; sobre todo desde los años 60, que vivieron una auténtica explosión en el uso de la teoría de categorías.

Bourbaki, después de muchas discusiones y con pleno conocimiento de causa, renunció a reiniciar su proyecto poniendo como fundamento la teoría de categorías en lugar de la teoría de conjuntos (lo que le hubiera llevado a tener que reescribir, desde el nuevo punto de vista y con los nuevos fundamentos, todos los volúmenes ya publicados).

Desde entonces nadie se ha atrevido, o no ha sido capaz, de realizar esta empresa. Desde hace más de medio siglo, las Matemáticas viven un tiempo de exilio de la exigencia y aspiración de claridad planteada por el mundo griego, como ya ocurriera en el s. XVIII.

Actualmente el intento más serio, avanzado y prometedor de remediar esta situación es la llamada *Fundamentación Univalente de las Matemáticas* de Vladimir Voevodsky, surgida de la teoría de tipos de homotopía, y que promete proporcionar además la base para un asistente a la demostración, que pueda usarse para comprobar la corrección de las demostraciones formalizadas en él. Voevodsky imagina un futuro no muy lejano en que los matemáticos podrán comprobar la validez de sus demostraciones trabajando dentro del marco de la teoría de tipos univalente, formalizada en un asistente a la demostración por ordenador, y que hacerlo será tan natural para ellos como escribir sus propios trabajos en[3] LaTeX. Los matemáticos que trabajan en este enfoque de los fundamentos mantienen un sitio web y un blog en

`http://homotopytypetheory.org`

que pueden visitar todos aquellos interesados en conocer el que bien pueda ser el próximo paradigma de las matemáticas.

[3] LaTeX es el procesador de textos matemáticos actualmente más extendido en los ambientes universitarios, y que la gran mayoría de los matemáticos usa cotidianamente. El artículo de F. Sánchez, páginas 109 – 115 de este volumen, proporciona una introducción al uso de LaTeX.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 17 – 21

Las Matemáticas, desde la revolución científica hasta la era digital

Carmen Calvo-Jurado

Dpto. de Matemáticas, Escuela Politécnica, Universidad de Extremadura
Avda. de la Universidad, s/n, 10003 *Cáceres, Spain*

ccalvo@unex.es

Resumen: En este artículo se pretende hacer una revisión histórica del pensamiento matemático desde el Renacimiento hasta nuestros días. Se hará mención a figuras notables de este período y al desarrollo de diferentes campos de las matemáticas, haciendo especial hincapié en la matemática aplicada, un área transversal con raíces en problemas concretos de la ciencia y la tecnología.

"El renacimiento hizo posible una revolución
científica que permitió a los eruditos
ver el mundo bajo una luz diferente"

John Desmond Bernal (1901-1971)

La revolución científica iniciada en Europa hacia el final del Renacimiento y que continuó hasta el siglo XVIII con la Ilustración, fue de fundamental importancia en la historia del pensamiento científico. Permitió el nacimiento de una nueva ciencia, moderna, experimental y cuantitativa, donde el ocultismo y el miedo fueron sustituidos por la razón.

Se inició con la publicación en 1543 de dos obras que cambiarían el curso de la ciencia: *De revolutionibus orbium coelestium* (sobre el movimiento de las esferas celestiales) de Nicolás Copérnico (1473-1543) y *De humani corporis fabrica* (de la estructura del cuerpo humano) de Andreas Vesalius (1514-1564). Culminaría con las obras de Galileo Galilei (1564-1642) y Johannes Kepler (1571-1630) y tuvo por colofón el desarrollo del cálculo integral y diferencial por Isaac Newton (1643-1727).

En esta etapa, las matemáticas tuvieron un papel fundamental, dejando de ser lo que los Aristotélicos llamaban una ciencia secundaria que no resultaba útil para interpretar la realidad, de naturaleza abstracta; para convertirse para científicos renacentistas como Leonardo Da Vinci [1] (1452-1519) y Galileo Galilei (1564-1642) en el lenguaje mismo de la realidad.

El llamado *nuevo método*, una actitud nueva ante la ciencia, consistía en investigar la naturaleza con los propios sentidos y expresar las observaciones científicas en un lenguaje matemático exacto. La importancia del razonamiento especulativo cedía terreno ante la experimentación y el método hipotético-deductivo, científico por excelencia. La interpretación de los fenómenos desde una óptica mecanicista, acompañada de una base matemática, se impuso. Así, durante este período, los progresos realizados en las matemáticas son importantísimos: nacen o se renuevan el álgebra, la teoría de los números, el cálculo de probabilidades, la geometría proyectiva y el cálculo infinitesimal. Las matemáticas se aplicarán a las diversas ramas de las ciencias físicas: a la dinámica, a la mecánica celeste y a la óptica. Algunas hechos que estimularon este desarrollo fueron, por ejemplo, el incremento de viajes marítimos y los descubrimientos geográficos que obligaron tanto a desarrollar la construcción naval como a cuestionar el mapa celeste hasta esa fecha; las necesidades bélicas y la búsqueda de precisión y alcance de armas como cañones (estudio de la trayectoria del proyectil), etc; todo ello unido a la divulgación de la numeración arábiga que facilitaba la capacidad operativa y gracias a la imprenta que impulsó la difusión de resultados.

Como colofón a este período, precursor de la ciencia moderna, el 5 de Julio de 1687, Isaac Newton (1642-1727) publica su trabajo *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural), también conocido simplemente como *Principia*, donde recoge fundamentos de mecánica y cálculo infinitesimal. Esta obra marcó un punto de inflexión en la historia de la ciencia y de hecho su autor es considerado como el científico más influyente de la historia.

Durante los tres siglos siguientes, la ciencia y la tecnología, fundamentos de la Revolución Industrial, evolucionaron hasta el punto de que los cambios en la sociedad del siglo XX con respecto al siglo XVII son mucho más significativos que todos los acaecidos a lo largo de miles de años, desde la Edad Antigua. Durante este período, destacan entre otras las figuras de Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), filósofo y rival de Newton en el desarrollo del cálculo infinitesimal o Daniel Benouilli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), en la formulación de problemas

[1] "Ninguna certeza existe donde no es posible aplicar la matematica o en lo que no puede relacionarse con la matematica."

de mecánica usando el nuevo cálculo. Concretamente, durante el siglo XIX las revoluciones industrial, burguesa y democrática traen consigo a Europa la extensión de los estudios científicos e industriales, con el consiguiene aumento de investigadores. Como consecuencia, se produce una estrecha relación entre la física y las matemáticas dando lugar a resultados significativos en *electricidad* y *magnetismo*, donde algunos máximos representantes son Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), André-Marie Ampere (1775-1836), Jean Baptiste Biot (1774-1862), Michael Faraday (1791-1867), J.C. Maxwell (1831-1879) y H.R. Hertz (1857-1894); en *mecánica de fluidos*, disciplina en la que destacan Claude Louis Navier (1785-1836), George Gabriel Stokes (1819-1903), S. Poisson (1781-1840) y J.C. Saint Venant (1797-1886), Lord Kelvin (1824-1907) y H. Helmhotz (1821-1894); *termodinámica*, fundamentada matemáticamente por James Joule (1818-1889), Saadi Carnot (1796-1832) y J.R. Mayer (1814-1878) o *mecánica estadística*, asociada a los nombres de James Clerk Maxwell (1831-1879), L. Boltzmann (1844-1906) y Josiah W. Gibbs (1839-1903).

El siglo XX se inaugura con el planteamiento en el II Congreso Internacional de Matemáticos de los 23 problemas de David Hilbert (1862-1943), que determinarían los principales retos con que se enfrentaban las matemáticas a partir de entonces. No han sido los únicos; otras líneas ubicadas en la física y la ingeniería han venido a complementarlos: la *teoría de la relatividad*, y atendiendo a sus necesidades el *cálculo de probabilidades*; la *mecánica cuántica*, la *aeronáutica*, la *teoría de juegos*, etc. Se produce un desarrollo espectacular de la *matemática aplicada* entendida ésta como un área transversal dentro de las matemáticas con raíces en problemas prácticos de la ciencia y la tecnología. Los proyectos que en ella se plantean tienen en común la modelización del problema, su análisis matemático y aspectos computacionales. Es decir, se trata de una herramienta que en manos de ingenieros y científicos permite analizar datos, realizar diseños, tomar decisiones y comprender modelos.

La construcción de una máquina con capacidad de cálculo de la que carecemos los humanos se materializa en un invento genial en el año 1946. Como matemático, Alan Mathison Turing (1912-1954) aplicó el concepto de algoritmo a los ordenadores digitales y sus investigaciones sobre la relación existente entre máquina y naturaleza dieron lugar a lo que se conoce como *inteligencia artificial*. Durante la segunda guerra mundial y usando sus conocimientos matemáticos, Turing desarrolla el computador *Colossus* que descifra los códigos que los alemanes usaban en sus mensajes, desarrollados gracias a la computadora *Enigma*. En los años siguientes, entra en escena la arquitectura del ordenador con John von Neumann (1903-1957), y se construye el *Eniac* (Electronic Numerical Integrator And Computer) en 1946.

De este modo, y debido fundamentalmente al ordenador, en el siglo XX se produce una ampliación enorme del campo de aplicación de las matemáticas. Gracias al desarrollo del *Análisis Numérico*, a pesar de no ser capaces de obtener expresiones explícitas cerradas para soluciones de problemas, es posible calcularlas y visualizarlas de modo bastante eficaz. Y a la inversa. El ordenador, gracias a las matemáticas, se ha convertido en escenario de experimentación: debido a que el ordenador solo realiza operaciones elementales, todo proceso ha de ser descompuesto para que acabe resultando una secuencia de las mismas:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Actualmente nos encontramos en plena revolución tecnológica; la era digital se extiende a todas las facetas de nuestra vida: con la ofimática, la domótica y la robótica, la informática ya forma parte de todos los detalles de nuestro entorno. De esta forma, nuevos conceptos como modelado, simulación numérica, exploración numérica, visualización, ... acercan las matemáticas pura o aplicada a los más diversos campos de aplicación del siglo actual. Algunos son: *matemática computacional* (métodos numéricos, algoritmos eficientes, aproximación, estimaciones de error, descomposición del dominio, análisis multiescala), *mecánica celeste* (estabilidad y caos en sistemas dinámicos), *teoría de fluidos* (aplicación a la meteorología y la climatología, ingeniería del océano), *aeronáutica*, *diseño óptimo* (construcción de aeronaves más seguras, eficaces y respetuosas con el medio ambiente), *ciencias de la tierra* (las ecuaciones de la extracción de petróleo, de la filltración en los suelos, de la difusión de contaminantes, matemáticas de los fenómenos sísmicos), *ciencias de los materiales* (modelado y simulación de materiales compuestos, materiales magnéticos, polímeros, elasticidad, teoría de la homogeneización, superconductividad), *nanotecnología* (redes ópticas, nanoescalas en medicina, materiales porosos), *ingeniería industrial* (procesos de la siderurgia, altos hornos, prototipos automovilísticos), *comunicaciones* (análisis, simulación, optimización, optimización de la tasa de transmisión, diseño de redes), *matemática discreta* (administración de empresas, programación de tareas, rutas, problemas del tráfico, planificación de redes), *informática* (minería de datos, inteligencia artificial), *automatización y robótica* (visión por computadora y realidad virtual), etc.

Contribuir al diseño y comprensión de todos estos problemas de gran importancia en nuestra vida diaria y enmarcados en la *matemática aplicada*, requiere una gran exigencia científica que hace de las dos matemáticas, pura y aplicada, caras de la misma moneda. Nuevamente, como en siglos pasados, la fuerza motriz de la innovación matemática, es el deseo de entender nuestro entorno. En este sentido, fue Galileo Galilei (1564-1642) quien ya a principios del siglo XVII señalaba este rumbo para la ciencia. De su carta "Il saggiatore" se extrae la cita siguiente:

"La filosofía está escrita en ese gran libro que constantemente
está abierto ante nuestros ojos, el Universo,
pero no puede entenderse a menos que se aprenda primero a comprender
el idioma en que está escrito, a entender sus caracteres.
Está escrito en el lenguaje matemático,
y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas ... "

Referencias

ARTEHISTORIA, `http://www.artehistoria.jcyl.es`, Junta de Castilla y León.

ORTEGÓN GALLEGO, F., *Del ábaco al supercomputador: breve historia de la computación,* Boletín SEMA n^{o} 40, Septiembre de 2007.

VÁZQUEZ, J. L., *Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles.* Gaceta de la Real Soc. Matemática Española, vol. 3 (1), 2000, Págs. 9 – 22.

ZUAZUA, E., *Las Matemáticas del diseño aeronáutico: avances y retos,* Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. `www.divulgamat.net`, Julio 2010.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 23 – 30

A vueltas con las Matemáticas

José M. Cobos

Profesor jubilado (Área de Historia de la Ciencia, Universidad de Extremadura)
cobosbueno42@gmail.com

A Carlos Benítez por su saber hacer

En el libro de la Sabiduría, supuestamente escrito por Salomón, leemos:

"Tú todo lo dispusiste con medida, número, y peso".

Lo que implica que la ciencia ya estaba en la mente de los legisladores. Como para algunos los textos bíblicos son coercitivos, de aquí que esta ciencia haya sido considerada, a lo largo de la historia, como el "coco", como algo inalcanzable, y al matemático como un bicho raro. Claro está que el matemático -el que hace matemáticas- ha sido, es y será, excepto algún que otro caso, que todos conocemos, un animal racional que nace, se reproduce o no y muere. Vamos como cualquiera ser humano.

Hecho este inciso, creemos importante exponer algunas matizaciones. En el Romance del Infante Arnaldos -anónimo del siglo XVI-, se dice:

Allí habló el infante Arnaldos,
bien oiréis lo que dirá:
- Por tu vida, marinero,
digasme ora ese cantar.
Respondióle el marinero,
tal respuesta le fue a dar:
- Yo no digo mi canción
sino a quien conmigo va.

A lo que nuestro entrañable compañero, ya en el parnaso, Carlos Benítez, interpretará:

"esa arisca y encantadora dama [*la matemática*] que, como el marinero, en el *Romance del Infante Arnaldos*, contesta, yo no digo mi canción sino a quien conmigo va".

Porque la matemática, desde los griegos, es armonía, belleza, equilibrio. Además, cada vez que ha existido una crisis en el pensamiento científico la matemática ha sido el único saber que se ha utilizado como asidero.

El escritor y político francés -destacado poeta del romanticismo francés- Alphonse Marie Louis Prat de Lamartine, habló de una

> "liga universal contra los estudios matemáticos",

a lo que responderá el historiador de las matemáticas, el extremeño Francisco Vera Fernández de Córdoba: "... porque no supo ver que la matemática está tejida de armonía y de ritmo, y, en este sentido, constituye la forma más perfecta del pensamiento poético. Un matemático moderno Weierstrass, -acaso el más cerebral de todos- ha dicho que el matemático no es completo si no tiene algo de poeta, y la oposición que encontraba Pascal entre el espíritu geométrico y el mundano, quizá explique el fenómeno social de la ignorancia de los matemáticos respecto de los sentimientos frívolos".

La matemática se ha construido partiendo de lo local y llegando a lo general. Camino que se ha repetido a lo largo de los siglos. Ahora bien, la irrupción del positivismo (siglo XIX), hará que se introduzca la matemática como orden en todo los saberes, conseguirá la matematización de todos los conocimientos. Este hecho fuertemente criticado por tiros y troyanos, tendrá aplicación a lo largo de los años venideros.

Hemos planteado como la matemática va de lo local a lo general. Pues bien que sería la economía mundial si no fuera por la existencia de pueblos paupérrimos (local) que harán que se extienda a la globalización (general).

Es decir que los "pensantes" mundiales no han desaprovechado la oportunidad de aplicar el pensamiento matemático, tal como se había planteado en el positivismo.

Pues bien, a pesar de todo este planteamiento, la Matemática, a partir de sus errores, ha seguido avanzando y considerándose imprescindible para el desarrollo de la humanidad. A la par que los avances matemáticos se ha desarrollado su Historia, con una salvedad importante, esta Historia va perdiendo chovinismo y los hechos científicos se encajan no por los "protagonistas"

-aunque se tendrán en cuenta- sino por sus consecuencias cara al verdadero protagonista el HOMBRE.

Así, para Francisco Vera, "la palabra *Ciencia* no debe tomarse en este libro como sinónima de *Scientia*, sino más bien de *Wissenschaft*", es decir proclama el carácter unitario, orgánico y universal del saber científico. En este carácter unitario también incluye lo que hoy llamamos *filosofía de la ciencia*.

Saber -*Scientia*- es una cosa relativamente sencilla; con tiempo y paciencia se puede llegar a ser erudito o sabio, es decir: a estar enterado de la opinión de los demás o a poseer conocimientos profundos de una disciplina. Pensar ya no es tan sencillo; pero tampoco es difícil si la razón elabora correctamente los conceptos, combina los conceptos en juicios y reúne los juicios en conclusiones. Operar así con los conceptos es pensar, facultad exclusivamente humana que ejercemos cuando queremos adquirir una verdad o adoptar una resolución. En el primer caso -investigación- el éxito está en razón directa del número de relaciones entre los elementos de nuestro pensamiento, y en el segundo -deliberación- el acto se adaptará al fin perseguido si hemos captado finamente el pro y el contra.

Pero obsérvese que, lo mismo en un caso que en otro, utilizamos nuestro saber anterior dirigido a colocar nuestro espíritu en una actitud susceptible de valorar la representación dada por la memoria -haciendo renacer un estado que ya atravesó nuestra conciencia-, o creada con materiales intelectuales preexistentes, enlazados por asociación de ideas.

Ahora bien, puesto que la Ciencia no es algo independiente del hombre, sino una parte de la totalidad de la vida humana y si puede hablarse, en particular de los conocimientos científicos de una cierta sociedad, de un país determinado o de una época dada, la historia de la Ciencia, en general, hay que abordarla en función del conjunto de la vida social y del espíritu del tiempo.

Por lo que la Historia de la Ciencia no puede, por tanto, prescindir del hombre como hombre y como elemento de la Sociedad, ni de los fenómenos políticos, sociales y religiosos que caracterizan cada una de las etapas que ha recorrido la Ciencia en su incesante marcha hacia la perfectibilidad.

Ahora bien, en el estado actual de la Ciencia, en que la acción parece superar la abstracción, la práctica a la teoría y la técnica a la idea, este concepto de Historia de la Ciencia opone su dinamismo al estado actual del pensamiento, que hinca sus raíces en la filosofía de Augusto Comte (siglo XIX).

Para el pensamiento actual, la Ciencia es considerada como una colección de recetas, como si lo que llamamos *hecho científico* fuera el encuentro *casual* de algunos datos sensibles en vez de un lazo de unión *causal* entre estos datos en un cierto orden de ideas, que supone siempre una labor mental sobre los datos objetivos y subjetivos que la Ciencia puede distinguir relativamente, pero no de una manera absoluta. Es decir, se limita todo lo posible el alcance de las ideas y, al rechazar lo que éstas tienen de imaginativo, cae en el error de Ernesto Mach, que sólo vio en la Ciencia una descripción de hechos obtenida siguiendo la línea del mínimo esfuerzo: es decir una economía de pensamiento, tesis que se conecta con la lógica de Hilbert. No se olvide que en los días que corren, de forma análoga a lo que ocurrió en el siglo XIX, todas las disciplinas, incluso los que parecen más alejadas del pensamiento puro -como la *Política*, el *Derecho* y la *Sociología*-, tienden a matematizarse, es decir: a construirse *more geométrico* la manera de la ética spinozista.

Con arreglo al pensamiento imperante, las teorías científicas sólo tienen un interés práctico: pero si queremos más, si nuestra ansia de saber no se encuentra satisfecha y abrimos el diafragma de las posibilidades de pensamiento, tendremos que romper la armadura lógica de la Ciencia e investigar las razones íntimas de la evolución de las ideas; y entonces veremos que la aplicación de todos los productos de la mente humana giran en torno a dos polos: el empirismo y el racionalismo, es decir, que frente a quienes subestiman la parte activa de la inteligencia en la elaboración de los conceptos, se alzan los que sostienen que las ideas generales no corresponden a entidades del mundo inteligible que se presentarían como datos inmediatos del pensamiento, sino que tales ideas generales se derivan de las percepciones sensibles por medio de asociaciones y abstracciones; pero tanto en un caso como en otro encontraremos siempre la fe en la unidad de la razón humana, lo mismo en las verdades que en los errores, lo que nos obliga a considerar el error no como una monstruosidad o manifestación fenoménica de la teratología mental, sino como la negación de la verdad, necesaria, a veces, para el descubrimiento de la verdad misma.

Quizás no nos lo hemos planteado, pero se pueden contemplar con absoluta independencia una tabla de Van Eyck, un lienzo de Velázquez, un cartón de Goya y una acuarela de Fortuny, como se pueden leer sin reminiscencias un soneto de Shakespeare, una égloga de Garcilaso, un poema de Rubén Darío y un romance de García Lorca; se pueden admirar, sin advertir analogías, una métopa de Fidias, un mármol de Miguel Ángel, una talla de Alonso Cano y un bronce de Rodin, como se pueden oír sin recuerdos anteriores una romanza de Mendelssohn, una sinfonía de Beethoven, un nocturno de Chopin y una serenata de Albéniz. Todos estos nombres son nombres inmortales, con la gubia y con la pluma han cuajado una emoción independiente de toda emoción anterior, porque la emoción es personal, corporal y somática.

Pero no ocurre con los científicos, porque la Ciencia, al margen de la carne, es una cadena cuyos eslabones se suceden en estrecha ligazón, de tal modo que cada uno recuerda el anterior y es como un trozo prolongado de sí mismo. Los elementos firmes de la cosmogonía de Platón, por ejemplo, se encuentran luego en Aristóteles y reaparecen en Santo Tomás de Aquino y después en Kant, cuya influencia llega hasta los días actuales: las ideas renacentistas que cristalizan en Galileo, actúan sobre Kepler, y las leyes en que este genio encerró el Universo se modifican en manos de Newton, pero conservando su misma estructura y su misma esencia, para ser modificadas, a su vez, por Einstein, pero de tal modo que no se comprende a Einstein sin Newton, ni a Newton sin Kepler, ni a Kepler sin Galileo, ni a Galileo sin Copérnico, ni a Copérnico sin Zacut, ni a Zacut sin Alfonso X, ni a Alfonso X sin Azarquiel, ni a Azarquiel sin Ptolomeo, ni a Ptolomeo sin Aristarco, ni a Aristarco sin los anónimos pastores lejanos que observaron por primera vez el cielo azul de Mesopotamia, lo que hace que la Historia de la Ciencia deje de ser una curiosidad de erudito para asumir la categoría de explicación de las representaciones lógicas del Universo, cada vez más complejas y mas unitarias a un tiempo mismo, que construye el espíritu humano con el instrumento del progreso del pensamiento: Ciencia pura, que es el pan de los elegidos.

Pero hay que tener en cuenta que la historia de la Matemática lejos de ser una simple curiosidad de erudito, es una disciplina que asume el rango de explicación lógica de los hechos que caen bajo su jurisdicción, que, en cuanto sucesos humanos, no se producen porque sí, de un modo arbitrario, sino cuándo deben producirse, ni han salido perfectos por un acto de la mente humana, sino que son el resultado de una elaboración colectiva, a veces multisecular, sintetizada en un momento feliz por un hombre que no es, generalmente, el que da nombre al descubrimiento, pues que ya se ha comprobado documentalmente que la mayor parte de las denominaciones personales son históricamente falsas. El teorema de Pitágoras es de los caldeos, el binomio de Newton es de Omar Khayyam, el axioma de Arquímides es de Eudoxio de Cnido, la ecuación de Pell es de Brahmagupta, la fórmula de Cardano es de Tartaglia, el teorema de Varignon es de Stevin, la curva de Viviani es de Menelao, el problema de Potenot es de Thales de Mileto, la combinatoria de Leibniz es de Raimundo

Lulio, el teorema de Guldin es de Pappo, etc., etc.

La Matemática, como todas las disciplinas científicas, ni estuvo ni está, ni estará nunca -afortunadamente- en una situación definitiva, sino en perpetua movilidad y en constante revisión. Nacen unas teorías que son reemplazadas por otras, las cuales, a su vez, ceden el paso a otras y así sucesivamente; y lo único que hasta ahora podemos afirmar es la ausencia de contradicciones permanentes porque siempre que se ha presentado una antinomia de esta clase se ha visto después que tal conflicto sólo denunciaba la existencia de una verdad desconocida que, luego de descubierta, lo hacía desaparecer.

Tampoco se puede juzgar cada etapa del pensamiento matemático con arreglo a ideas posteriores a su tiempo, porque esto, en vez de ser una interpretación científica de los datos históricos, sería un anacronismo deshonesto y un abuso de confianza, sino que hay que colocarse, siempre, en el momento en que aparece la teoría, pero no seguir con todo rigor el orden cronológico porque si bien es verdad que el historiador tiene el deber imperativo de no prescindir del tiempo, no lo es menos que los hechos humanos -y la Matemática es un conjunto de éstos- se verifican con independencia de nuestras artificiales divisiones cronológicas y, por tanto, sujetarse dócilmente a ellas es sacrificar la visión panorámica a detalles que sólo interesan al erudito y al especialista, y aunque la erudición y la especialidad son, desde luego, útiles y hasta indispensables, su exclusividad es una de las calamidades de los días que corren porque la hipertrofia de la primera convierte la Ciencia en un museo de cosas muertas y la de la segunda impide ver las conexiones que hacen de aquélla un todo orgánico, como lo entendió la antigua Grecia que nos ha dado el ejemplo de lo que debe ser la verdadera cultura.

Es preciso que la fe en un porvenir mejor que el momento actual ponga sordina en el estruendo presente y suavice las asperezas implacables de la realidad diaria; pero tenemos que extraer esta fe de la cultura general que vivifica y no de la especialidad y de la erudición que anquilosan el espíritu e impiden el crecimiento del idealismo necesario para el progreso ético, más importante que el científico, aunque esta afirmación parezca una herejía a quienes colocan la ciencia al margen de los valores olvidando que las técnicas que la aplican a rebajar la condición moral del hombre o a someterlo a consideraciones de raza, idioma o religión, son técnicas malditas.

En el Evangelio según san Juan. Se narra un encuentro de Jesús con los judíos: “Si os mantenéis en mi Palabra (Verdad), seréis verdaderamente mis discípulos, y conoceréis la verdad y la verdad os hará libres".

Pues bien, aunque sepamos que nunca hemos de poseer la Verdad, no debemos desmayar ni entregarnos al pesimismo, que es estéril, sino seguir trabajando con fe, con entusiasmo para que quienes nos sucedan puedan trabajar, a su vez, y acrecentar la herencia que les dejemos, y así sucesiva e indefinidamente con la mirada puesta en una última meta inaccesible, a fin de que la Humanidad sea mejor en cada una de las etapas del camino que tiene que recorrer por los siglos de los siglos.

Se ha pretendido escribir una aportación que, sin pedantescos alardes de erudición ni censurables concesiones al que Rubén Darío llamó vulgo municipal y espeso, refleje objetiva y serenamente la evolución del pensamiento científico a lo largo de los últimos años hasta los días días actuales, y pueda ser leída e interpretada por todas las personas, y aunque mi edad me permitirá no sobrevivir a la deshumanización total del hombre que realizan actualmente quienes, borrachos de poder, están pidiendo a la Ciencia nuevos instrumentos de degradación, convirtiendo en secretos de estado los resultados de ciertas investigaciones; prohibiendo la libre discusión de los mismos, a pesar de internet, y el intercambio de ideas entre los sabios sin distinción de nacionalidades ni de razas; vigilando la actividad científica con criterio policíaco y catalogando con morbosa delectación el acervo que la Ciencia traspasa al intervencionismo, porque ignoran que tal poder sólo se consigue renunciando al amor, como la adoración al Diablo, a quien Santa Teresa de Jesús compadecía porque *está condenado a no poder amar*; y el amor, ha dicho Gabriela Mistral, es *lo que está en el beso y no es el labio*, la fuerza misteriosa que *mueve el sol y las estrellas* que saluda Dante en el primer soneto de la *Vita Nuova*, y no el científico tableteo de normas, leyes, etc., científicamente construidas y científicamente manejadas para anular científicamente a los hombres.

Hace más de ochenta años Ortega y Gasset escribió en *La rebelión de las masas* estas palabras: "... me sorprende la ligereza con que al hablar de la técnica se olvida que su víscera cordial es la ciencia pura, y que las condiciones de su perpetuación involucran las que hacen posible el puro ejercicio científico. ¿Se ha pensado en todas las cosas que necesitan seguir vigentes en las almas para que pueda seguir habiendo de verdad *hombres de ciencia*? ¿Se cree en serio que mientras haya dólares habrá ciencia? Esta idea en que muchos se tranquilizan no es sino una prueba más de primitivismo".

El tiempo ha convertido en realidad la profecía del filósofo español y, como se apuntó anteriormente, el que esto escribe no ha de conocer la deshumanización del hombre -cada día más semejante a un robot- y si no hay un movimiento universal, se asistirá a la destrucción total de los valores morales en nombre de una Ciencia que quieren que se hable en imperativo en vez de hablar en presente de indicativo.

Actualmente la Historia de la Ciencia pretende pues, abarcar la totalidad del desarrollo de la Ciencia hasta los días cruciales que estamos viviendo, dignos de los lamentos de Ezequiel, siguiendo la clásica periodización -cuadrícula convencional y caprichosa- que, empleando una frase de Ortega, *se incrusta como a martillo en el cuerpo continuo de la Historia*, porque es cómoda; pero no debe buscarse en ella el catálogo de todas las obras científicas que se han escrito, ni la citación nominal de *todos* los hombres superiores al nivel medio, lo cual es compatible con una visión *total* de la Ciencia.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 31 – 47

El teorema de los cuatro colores

David Sevilla

Departamento de Matemáticas, Centro U. de Mérida, U. de Extremadura
Avda. de Santa Teresa de Jornet, 38, 06800 *Mérida (Badajoz), Spain*
sevillad@unex.es

Resumen: El famoso teorema de los cuatro colores, un problema propuesto en el siglo XIX, fue demostrado en 1976 por Appel y Haken de manera muy controvertida: una parte de la demostración era tan larga que tenía que ser comprobada con un ordenador, algo inaceptable para una parte de la comunidad matemática. En este artículo veremos en líneas generales la demostración.

1. Breve historia del teorema de los cuatro colores

El teorema de los cuatro colores viene a decir que todo mapa se puede colorear con cuatro colores de manera que dos países contiguos siempre tengan colores distintos[1] (luego seremos un poco más precisos). Este resultado, a pesar de hablar sobre colorear mapas, tiene mucho más interés para los matemáticos que para los cartógrafos. En efecto, ¿por qué limitarse a cuatro colores si eso complica el proceso de coloreado, cuando más colores no suponen ningún problema técnico? Para que te hagas una idea, en [1] puedes ver algunas maneras de colorear mapas siguiendo criterios prácticos. Así que estamos hablando de un problema teórico, matemático, de enunciado sencillo pero difícil de resolver; el tipo de problemas que más nos atraen a quienes disfrutamos con las matemáticas.

El problema data, al menos en los registros existentes, del siglo XIX. En 1852 Francis Guthrie presentó el problema a su hermano Frederick, quien lo consultó con De Morgan (conocido matemático y lógico), con quien trabajaba; a partir de ese momento se publicitó el problema en algunas revistas de sociedades matemáticas, lo que generó interés debido a su sencillo enunciado y su aparente simplicidad (solo aparente, claro).

¿Pero es cierto el teorema de los cuatro colores? ¿No está claro que es falso, como en la Figura 2, donde nos hacen falta cinco?

Podríamos producir así mapas que necesitaran diez (o mil) colores ... pero no, las claves aquí son las definiciones de región y adyacencia:

[1] En este artículo usaremos letras para representar los distintos colores.

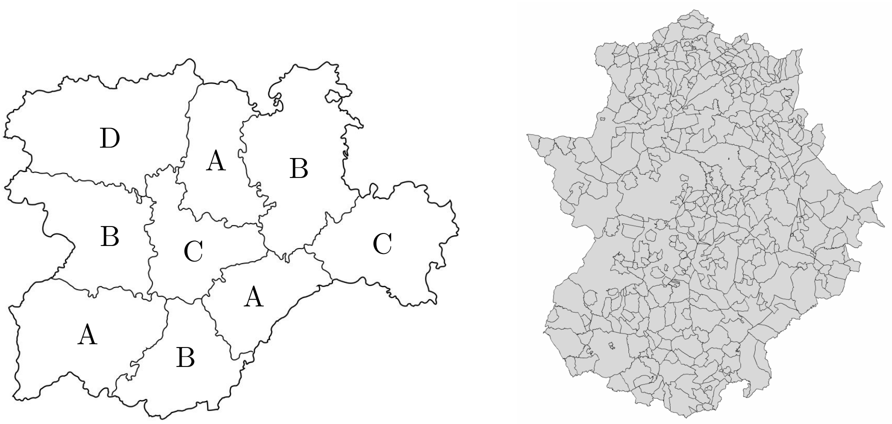


Figura 1: A la izquierda un mapa coloreado con cuatro colores y que no se puede colorear con menos (¿por qué no? Pista: fíjate en la “C” central y las regiones que la rodean). A la derecha uno que quizás también se pueda colorear con solo cuatro, aunque no esté nada claro.

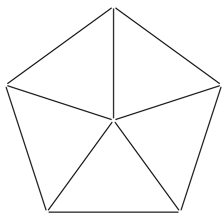


Figura 2: cinco regiones se encuentran en un punto, luego hacen falta cinco colores. ¿O no?

- dos regiones solo se consideran adyacentes si comparten un trozo de frontera, no solo un punto;
- una región no puede tener varios trozos, debe ser un solo trozo conexo.

Con la primera especificación, en el mapa de la Figura 2 cada región tiene solo dos vecinos, y los mapas construidos de esa manera se pueden colorear con dos o con tres colores (dependiendo de si el número de regiones es par o impar). Las dos condiciones juntas imposibilitan crear ejemplos con muchas regiones donde cada una toca a las demás.

Algunos matemáticos ilustres se interesaron por el problema, pero nadie consiguió resolver el enigma hasta que en 1879 Alfred Kempe publicó una demostración [8]. Finalmente quedaba claro: todo mapa se podía colorear con cuatro colores.

Una década más tarde, Percy Heawood descubrió un error en la demostración de Kempe [7]. No estaba todo perdido; por lo menos se podían salvar los muebles usando el trabajo de Kempe para demostrar, de manera inmediata, que con cinco colores siempre se podía. Pero ¿¿y con cuatro??

Imagínate que demuestras un resultado matemático importante. Intenta calcular el efecto en tu vida, y lo que pasa once años después cuando alguien descubre un error en tu demostración.

El caso es que la “demostración” de Kempe ya contenía los elementos fundamentales que se usarían en posteriores intentos y avances, incluida la demostración de Appel y Haken en 1976 que comentaremos en este artículo. Veamos cuáles son.

2. De mapas a grafos

El aspecto más importante es la *modelización matemática* del problema, es decir, la abstracción para eliminar los aspectos no relevantes. Por ejemplo, está claro que el tamaño del mapa o la forma de los bordes de las regiones no importan; solo importa qué regiones hay y cuáles son los vecinos de cada una.

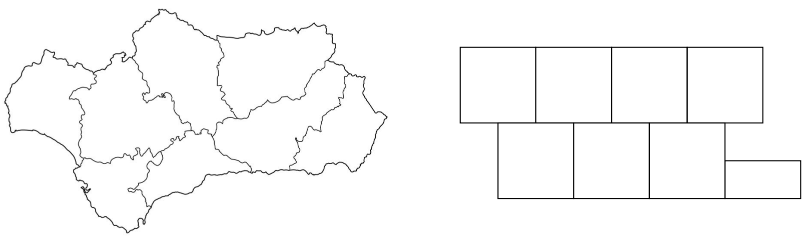


Figura 3: estos dos mapas se colorean igual.

Por tanto, nuestro problema de mapas se puede representar en la teoría de grafos: dado un grafo (una colección finita de vértices y una colección de aristas uniendo pares de vértices[2]), ¿podemos colorear los vértices de manera que dos vértices unidos por una arista tengan colores distintos?

A continuación iniciamos un razonamiento por contradicción. Suponiendo

[2] Nuestra definición de grafo no permite ningún bucle (arista de un vértice a sí mismo) ni múltiples aristas entre un par de vértices.

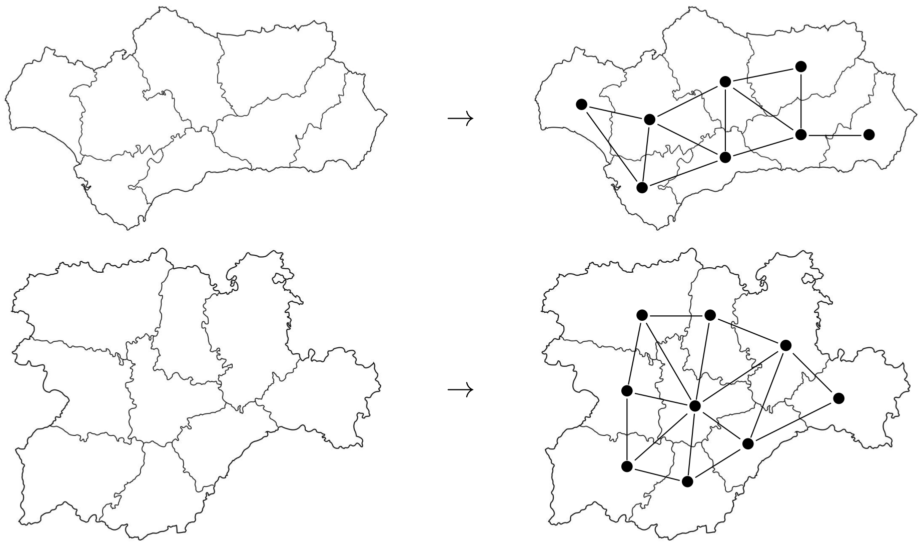


Figura 4: colorear mapas es lo mismo que colorear vértices de grafos.

que el teorema es falso (es decir, existe un grafo para el que no bastan cuatro colores, un *contraejemplo*), debería existir un grafo no coloreable (con cuatro colores) con un número mínimo de vértices, lo que llamaremos un *contraejemplo mínimo*. Es decir, existe un grafo no coloreable tal que cualquier grafo con menos vértices sí es coloreable.

Para demostrar el teorema (en adelante lo abreviaremos T4C) razonaremos sobre ese contraejemplo mínimo, hasta llegar a la conclusión de que no puede existir, luego nuestra suposición (que el teorema es falso) no puede ser verdad.

La idea de Kempe para demostrar que no hay contraejemplo mínimo se divide en dos pasos:

1. se demuestra que todo grafo tiene algún vértice conectado con cinco o menos vértices;
2. analizando la posible existencia de vértices con uno, dos, tres, cuatro o cinco "vecinos" se descubre que todas ellas son imposibles.

El número de vecinos de un vértice (es decir, aquellos conectados a él por una arista) se llama el *grado* de ese vértice. Si un vértice se llama v, lo denotaremos grado(v).

¿Cómo se comprueba que no puede haber vértices de un cierto grado en un contraejemplo mínimo? Hagámoslo para el caso de grado tres (los casos

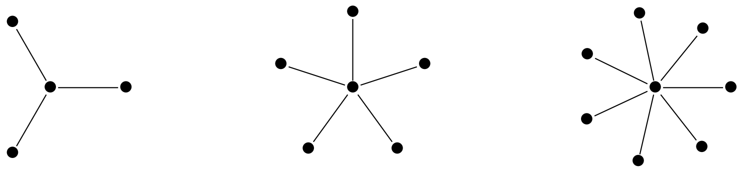


Figura 5: vértices de grados tres, cinco y siete respectivamente.

de grados uno y dos son similares). Si un contraejemplo mínimo tuviera un vértice de grado tres, podríamos quitar ese vértice para conseguir un grafo que sería coloreable (porque tendría menos vértices que el contraejemplo mínimo). Ahora bien, si tomamos una coloración de ese grafo más pequeño, siempre podemos volver a poner el vértice quitado coloreándolo de manera compatible con sus vecinos: en efecto, como solo tiene tres vecinos, hay algún color que no se ha usado en ellos y podemos pintar el vértice quitado de ese color.

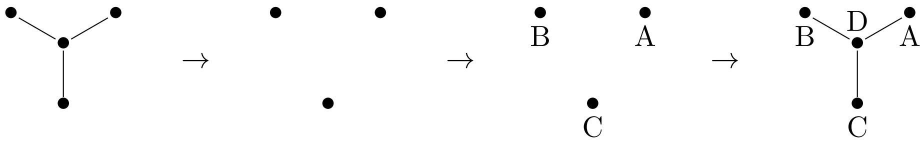


Figura 6: coloreando un vértice de grado tres.

El caso de grado cuatro empieza igual pero se complica porque al colorear el resto del grafo podríamos estar usando los cuatro colores en los cuatro vecinos del vértice y no nos sobraría ningún color para el vértice central. Kempe encontró una manera de cambiar una coloración de ese tipo de manera que "nos ahorremos" un color entre los cuatro vecinos, y así poder colorear el vértice de grado cuatro (en el argot el método se llama de *cadenas de Kempe*). Por lo tanto, tampoco hay vértices de grado cuatro en ningún contraejemplo mínimo.

Desgraciadamente, Kempe creyó que las cadenas que le sirvieron en el caso de grado cuatro también resolvían el caso de grado cinco. Pero se equivocó. Cuando Heawood descubrió el error de Kempe, al menos consiguió usar el método de las cadenas para probar que el caso de grado cinco se podía colorear con cinco colores, estableciendo así "el teorema de los cinco colores".

Por cierto, Heawood contribuyó también de otra manera muy interesante al problema de colorear mapas: dando resultados acerca del número de colores necesario para mapas dibujados en superficies distintas de la esfera.[3]

Como se ha comentado antes, los pasos que acabamos de ver dieron sus frutos mucho tiempo después. Veamos ahora cómo refinar estos argumentos.

3. Condiciones sobre grafos y triangulaciones planas

Aunque hasta ahora no lo hemos necesitado, hay una condición muy importante que cumplen los grafos correspondientes a mapas (en el plano): son grafos planos, lo que quiere decir que sus aristas se pueden dibujar sin intersecciones.

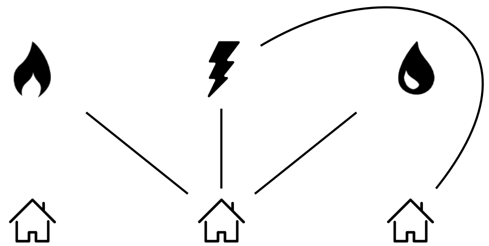


Figura 7: el famoso problema de conectar tres casas con tres compañías sin que haya intersecciones se basa en el hecho de que el grafo llamado $K_{3,3}$ no es plano.

Busca un método para producir un grafo plano, es decir sin autointersecciones, a partir de cualquier mapa dado. Recuerda que en nuestra definición un grafo no tiene más de una arista uniendo un par de vértices. Puede que te inspire la Figura 4.

Para deducir que todo grafo plano tiene algún vértice de grado menor o igual que cinco, Kempe se basó en la fórmula más importante relativa a grafos planos, la fórmula de Euler[4]

$$V - A + C = 2$$

donde V es el número de vértices, A es el número de aristas, y C es el número de caras (incluyendo la cara infinita que rodea al grafo). Supongamos además

[3] Colorear mapas dibujados en un plano es lo mismo que colorear mapas dibujados en una esfera; basta imaginar un trozo acotado del plano envolviendo a una esfera, y al revés, una esfera a la que se le quita un trozo para luego aplanarla.

[4] Se suele decir que la teoría de grafos comenzó con la resolución de Euler en 1735 del problema de los puentes de Konigsberg, véase `http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg`.

que el grafo es una triangulación, es decir, que todas sus caras son triángulos (tienen tres aristas). Dado un grafo que no sea una triangulación, es fácil convertir cada cara no triangular en varios triángulos; no importa cómo lo hagamos. Ojo, la cara infinita del grafo también hay que triangularla.

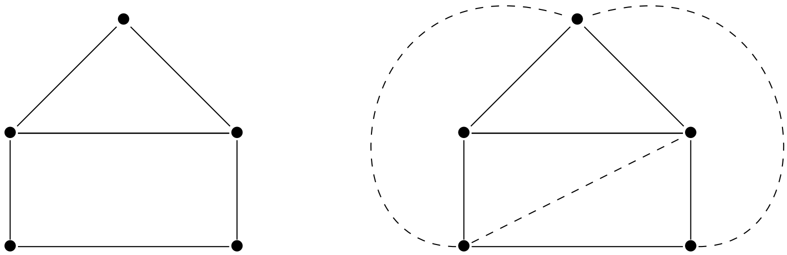


Figura 8: El grafo de la izquierda es plano luego cumple la fórmula de Euler ($5 - 6 + 3 = 2$). Añadiendo tres aristas se convierte en triangulación plana ($5 - 9 + 6 = 2$); las dos aristas exteriores triangulan la cara infinita, que antes era un pentágono.

Hay que fijarse en un detalle. Hemos partido de un mapa, lo hemos convertido en grafo, y cambiamos el grafo añadiendo aristas. ¿Esto no está cambiando el mapa que quiero colorear? La respuesta es no, porque las aristas son restricciones, y añadir algunas significa "geográficamente" que algunos países no adyacentes tendrán que tener colores diferentes. Es decir, me lo voy a poner más difícil a mí mismo/a; pero en cualquier caso una coloración más restrictiva sigue valiendo para el mapa original. La Figura 9 muestra un ejemplo.

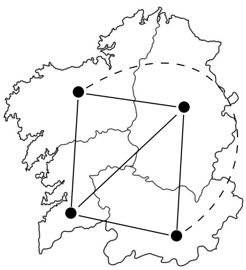


Figura 9: Al triangular hemos añadido una nueva restricción: las regiones noroeste y sudeste tienen que ser de distinto color aunque en el mapa original no sean adyacentes.

¿Y qué ganamos con exigir que sean triangulaciones? Pues que ahora hay una relación exacta entre el número de caras y el de aristas: si contamos el número de aristas en cada cara y sumamos obtenemos $3C$, pero así hemos contado dos veces cada arista, luego $3C = 2A$ (ejemplo en la Figura 8 derecha). Uniendo esto a la fórmula de Euler obtenemos

$$V - A/3 = 2 \qquad \text{o bien} \qquad 6V - 2A = 12\,.$$

Hemos multiplicado por seis porque vamos a usar esa fórmula a continuación. Supongamos que a cada vértice v le asignamos el valor $6 - \mathrm{grado}(v)$; por ejemplo un vértice de grado 4 tendrá el valor 2, y un vértice de grado 7 tendrá el valor -1. ¿Cuánto valen todos los vértices juntos? Sumando,

$$\sum_{v\in G} 6 - \mathrm{grado}(v) = 6V - \sum_{v\in G} \mathrm{grado}(v) \overset{(*)}{=} 6V - 2A = 12$$

(la igualdad $(*)$ es cierta porque si sumamos todos los grados de los vértices estamos contando el número de extremos de todas las aristas, que es $2A$). Es decir, da lo mismo qué triangulación tengamos (grande o pequeña, sencilla o complicada), el valor total siempre es 12. Este tipo de condiciones generales, válidas para cualquier grafo (con tal de ser una triangulación plana), son valiosas; en un momento veremos una aplicación.

Ahora llegamos a una conclusión, que también obtuvo Kempe: debe existir un vértice de grado menor o igual que cinco. ¿Por qué? Simplemente porque el valor total del grafo es positivo, luego algún vértice tiene que aportar una contribución positiva; pero los únicos vértices con $6 - \mathrm{grado}(v) > 0$ son aquellos con $\mathrm{grado}(v) < 6$. De hecho, debe haber al menos doce vértices de grado cinco en todo el grafo, u otras combinaciones de grados menores; desgraciadamente no podemos decir dónde pueden estar.

A continuación veremos cómo ir más allá con estas ideas, pudiendo extraer información mucho más rica sobre qué nos podemos encontrar dentro de una triangulación plana.

4. Más allá: el método de la descarga

El *método de descarga*, una colección de bellos razonamientos, se ha aplicado a varios teoremas de la teoría de grafos, desde que Heesch lo introdujera como parte de sus intentos de demostración del T4C. Para ver en qué consiste pongamos como objetivo mejorar un poco el resultado de Kempe con el que hemos terminado la sección anterior: demostremos que si una triangulación plana tiene grado mínimo cinco (es decir, no hay vértices de grado cuatro o menos) entonces hay algún vértice de grado cinco conectado por una arista a otro de grado cinco o seis. Usando la notación ⓝ para indicar un vértice de grado n, siempre habrá una ⑤—⑤ o bien una ⑤—⑥.

El método se llama "de la descarga" porque la idea evoca el concepto de carga eléctrica a nivel atómico, donde los electrones de un objeto se mueven entre átomos cercanos. Funciona así: se asigna una carga a cada vértice de acuerdo a un criterio que elijamos, se deja que las cargas se desplacen entre vértices de acuerdo con unas reglas que también hemos de determinar, y se analiza la distribución de carga final. Partimos de una triangulación plana cualquiera sin vértices de grado menor que 5:

1. A cada vértice v le asignamos $6 - \text{grado}(v)$, como hicimos antes.
2. Ahora las cargas se mueven de la siguiente manera: cada vértice de grado 5 da $1/5$ de carga a cada uno de sus vecinos.

Como hemos empezado con una carga total positiva (igual a 12 como vimos antes), al final también debemos tener carga positiva, luego algún vértice debe terminar con carga positiva (no pueden haberse *descargado* todos). ¿En qué situaciones hay carga positiva final?

- Un vértice de grado 5 tiene carga inicial $6 - 5 = 1$ y la reparte entre sus vecinos, luego acabará sin carga si no recibe de ningún vecino, y con carga positiva si tiene algún vecino de grado 5 que le dé una parte de la suya.
- Un vértice de grado 6 empieza sin carga, y termina con carga positiva si y solo si tiene algún vecino de grado 5.
- Un vértice de grado 7 empieza con carga -1, y solo puede terminar con carga positiva si tiene seis o siete vecinos de grado 5. Pero entonces en el heptágono que rodea al vértice habrá dos de grado 5 consecutivos, luego conectados (aquí usamos por segunda vez que estamos en una triangulación; la primera vez fue al calcular que la carga total es 12).
- Un vértice de grado ≥ 8 empieza con una carga demasiado negativa, no podrá terminar con carga positiva por muchos vecinos de grado 5 que tenga.

En [10, Cap. 11] podéis encontrar otros ejemplos, incluida la demostración de que un posible contraejemplo al T4C debería tener algún vértice de grado 6 o 7.

El interés del método de la descarga es que de una información global (el grafo es una triangulación plana) hemos llegado a una información local (hay una ⑤—⑤ o bien una ⑤—⑥ en el grafo). Hemos obtenido lo que se llama un *conjunto inevitable* de configuraciones, porque cualquier triangulación plana tiene que contener alguna configuración de la lista $\left\{ ⑤—⑤, ⑤—⑥ \right\}$. En la siguiente sección veremos cómo se comprueba cada una de las configuraciones de cara al T4C.

5. Configuraciones reducibles: descartando casos

Casi todos los intentos relevantes de demostración del T4C, incluida la demostración de Appel y Haken, han seguido en general la estrategia de Kempe: encontrar un conjunto inevitable y demostrar que cada configuración de ese conjunto no puede aparecer en un contraejemplo mínimo, por lo que tal contraejemplo no puede existir y el teorema es cierto. Una configuración que no puede aparecer en un contraejemplo mínimo se llama *reducible*. Con la terminología que hemos visto, el T4C se puede demostrar así:

Encuentra un conjunto inevitable de configuraciones reducibles.

¿Cómo se demuestra que una configuración es reducible? Razonando como al final de la Sección 1: si una configuración aparece en un contraejemplo mínimo, al quitarla obtenemos un grafo con menos vértices (por tanto coloreable). Si resulta que todas las coloraciones de ese grafo más pequeño se pueden completar cuando volvemos a poner la configuración en su sitio, entonces el contraejemplo mínimo también se puede colorear, contradicción.

La clave para estudiar la reducibilidad de una configuración es determinar cuántos vértices rodean a esa configuración en el grafo y cómo están conectados a ella; a esto lo llamaremos el *anillo* de la configuración. Ese anillo es lo que conecta nuestra configuración con el grafo más pequeño que sí podríamos colorear. Para determinarlo usamos una vez más que estamos trabajando con triangulaciones en el plano, es decir, se cumple lo siguiente: si tres vértices A, B, C cumplen que hay una arista AB y hay otra arista BC, entonces también hay una arista AC. Veamos ejemplos de anillos en las Figuras 10 y 11.

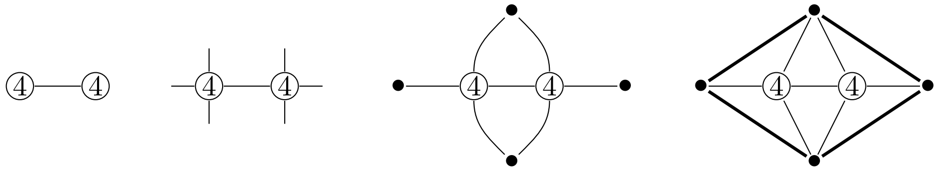


Figura 10: El anillo de una configuración 4—4 paso a paso. 1. Dibujamos la configuración. 2. Dibujamos los principios de las aristas restantes en los vértices. 3. Las terminamos, añadiendo vértices nuevos de manera que se creen triángulos siempre que sea posible; por ejemplo las dos aristas que salen hacia arriba desde los dos vértices 4 tienen que unirse para formar un triángulo. 4. Cerramos los triángulos con los vértices de alrededor, creando un anillo de cuatro vértices.

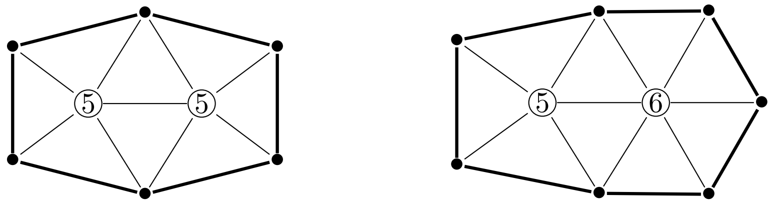


Figura 11: Los anillos de las dos configuraciones que aparecieron al final de la sección anterior son un hexágono y un heptágono.

Ahora recordemos que ser reducible significa que cualquier coloración del grafo resultante de quitar la configuración se puede extender a ella. ¿Qué información tenemos sobre ese grafo más pequeño? Conocemos cómo se conecta con la configuración, pues eso es precisamente el anillo que hemos aprendido a determinar. Ahora podemos seguir este esquema:

1. Tomamos una posible coloración del anillo.
2. Si se puede extender al interior, pasamos a otra.
3. Si no se puede extender, usamos el método de cadenas de Kempe o alguno similar para ver cómo podríamos cambiar el coloreado por otro que sí se extienda al interior.
4. Si encontramos una coloración del anillo que no se extiende y que no se puede arreglar, la configuración de partida no es reducible. Por otra

parte, si toda coloración del anillo se extiende o se puede modificar para que se extienda, la configuración sí es reducible.

Un ejemplo muy sencillo es la configuración ③ que ya discutimos antes; básicamente solo hay una manera de colorear el anillo triangular, que se puede extender al vértice (ver Figura 6). Otro ejemplo es la configuración ④; el anillo de cuatro vértices se puede colorear esencialmente de tres maneras (con dos, tres o cuatro colores) y solo la tercera manera da problemas, pero como hemos comentado brevemente ese caso se modifica mediante las cadenas de Kempe para usar solo tres colores. Por tanto el vértice central se puede colorear siempre.

En definitiva, Kempe demostró que el conjunto {③, ④, ⑤} es inevitable, y que ③ y ④ son reducibles; se equivocó al intentar demostrar que ⑤ es reducible.

En la demostración de 1976 de Appel y Haken fue precisamente para la reducibilidad de las configuraciones para lo que se usó el ordenador, porque el número de coloraciones era demasiado grande para hacerlo a mano, como veremos en un momento.

¿Cuántos casos hace falta comprobar (en principio) si el anillo que rodea a una configuración dada tiene 12 vértices?

6. El método de la descarga para demostrar el T4C

Veamos lo que hicieron Appel y Haken exactamente con el método de la descarga. Como sabemos, hay que imponer una distribución inicial de carga (con un total que no depende del grafo) y unas reglas de movimiento de cargas. Ellos partieron de la distribución inicial que hemos visto en este artículo[5] (multiplicada por 60 para evitar fracciones después), y fueron añadiendo reglas de descarga para ajustar el conjunto inevitable, de manera que todos sus miembros fueran reducibles. Un trabajo muy minucioso y delicado, cuyo resultado final fueron los dos artículos [2] y [3].

El primer artículo tiene sesenta y dos páginas en las que explican el proceso de descarga y demuestran algunos resultados relativos a él; aproximadamente un tercio del artículo consiste en tablas que lo ilustran gráficamente. Por ejemplo, hablan de descargas "de corto alcance" y "de largo alcance" y utilizan símbolos para vértices de grados 5 a 11, así como otros para vértices de grados

[5] La fórmula $6 - \text{grado}(v)$ es habitual en la literatura. En otros problemas se utiliza una generalización en la que se asigna carga también a las caras en función del número de vértices.

≥ 5, ≥ 6, para pares de vértices adyacentes de grados ≥ 6 pero no ambos 6, etc.

Figura 12: una *descarga de largo alcance* [2], la imagen da una idea de la complejidad. El vértice central tiene grado 7 y el que está debajo de él tiene grado 5.

El segundo artículo, de setenta y siete páginas, consiste en más de un ochenta por ciento en figuras, con una discusión sobre cómo demostrar la reducibilidad de cada configuración. El total de configuraciones es mil novecientas treinta y seis. La figura siguiente muestra parte de una de las páginas. Los vértices marcados con ● tienen grado cinco, los marcados con ○ grado siete, los marcados con □ grado ocho y los marcados con ▽ grado nueve; los vértices sin símbolo tienen grado seis.

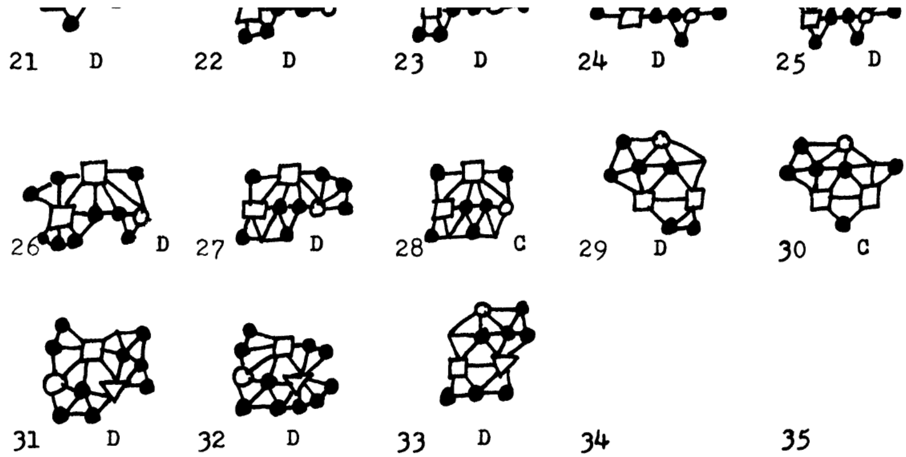


Figura 13: parte de una de las muchas figuras de [3]

La comprobación de cada caso por ordenador fue costosa en términos de tiempo; hay que recordar que por aquel entonces no era común llevar un ordenador en la mochila o en el bolsillo (prueba a buscar en Google "computers 1976" para hacerte una idea). Como ocurre ahora, el uso de los ordenadores más potentes se gestionaba adjudicando cuotas de uso, y los dos matemáticos recurrieron a ratos sueltos de inactividad para los cálculos. En la actualidad eso sería probablemente imposible, ya que el uso de los grandes ordenadores se controla y distribuye minuciosamente: tiempo = dinero.

Los autores también discuten el siguiente asunto. La "demostración" de Kempe partía de tres configuraciones muy simples; sin embargo la demostración de 1976 contiene una larga lista de configuraciones y otra de reglas de descarga. ¿Era necesario algo tan complicado? Pues bien, el primero de los dos artículos contiene una argumentación de tipo probabilístico sobre el tipo de conjuntos inevitables que podría esperarse que aparecieran Ellos argumentan que es muy poco probable que haya un conjunto inevitable donde todas las configuraciones tengan anillos con doce o menos vértices, y citan un resultado que imposibilita los conjuntos inevitables donde todos los anillos tengan once o menos vértices. Con esto, la gran complejidad de su resultado parece más razonable.

7. Epílogo

Una buena parte de la comunidad matemática no aceptó el que un problema clásico se acabara resolviendo con la ayuda de un ordenador; al fin y al cabo una demostración en matemáticas es un encadenamiento de pasos lógicos simples que cualquiera puede comprobar, y el trabajo hecho por el ordenador no es comprobable en ese sentido. En realidad la demostración presentada era en parte razonamiento matemático clásico y en parte líneas de código. Una frase que circuló a consecuencia decía que una buena demostración matemática es como un poema, pero ¡esta es un listín telefónico![6]. Mucha otra gente dio por buena la demostración; al fin y al cabo hay demostraciones matemáticas tan complicadas que solo unas pocas personas en todo el mundo pueden entenderlas.

Había errores en el trabajo original de Appel y Haken (cosa comprensible si pensamos en los muchos casos *a mano* en el método de descarga), que fueron resueltos sucesivamente, hasta la publicación de un libro por parte de los dos autores en 1989 [4]. Aun así se ha seguido trabajando para simplificar la demostración. En 1997 [9] simplificó la demostración hasta un conjunto inevitable de 633 configuraciones (un apéndice de menos de diez páginas),

[6] A good mathematical proof is like a poem—this is a telephone directory!

con solo 32 reglas de descarga en lugar de las más de 300 originales. Esto fue posible gracias a la mejora de algunos lemas técnicos, exluyendo así muchos posibles casos al analizar la descarga. Los intentos de simplificar todavía más la demostración no han cesado; probablemente hay gente que tiene la esperanza de encontrar una demostración asequible a la mente humana.

Otro esfuerzo de comprobación ha consistido en repetir los cálculos por ordenador para confirmar que no ha habido errores de programación (¡o de hardware!). Destaca en ese sentido el trabajo de Gonthier [6] para implementar la demostración en el sistema formal Coq [5]. El interés es el siguiente: cuando escribimos un programa de ordenador para calcular algo (por ejemplo comprobar casos como parte de una demostración), nuestro programa solo vale para hacer ese cálculo. Eso hace que sea difícil contrastar su correcto funcionamiento. Por otra parte, Coq permite implementar multitud de demostraciones (se reducen a sus pasos lógicos elementales hasta un cierto nivel de detalle y el sistema las comprueba), por lo que demostrar algo allí certificaría que la demostración es correcta siempre y cuando nos fiemos del núcleo de Coq. Ahora bien, como este sistema formal ha sido revisado concienzudamente y además se ha usado para demostrar resultados diversos en distintos ordenadores, es aún más razonable creerse la demostración del T4C.

Para terminar, me gustaría poner sobre la mesa los aspectos más filosóficos del uso de ordenadores en matemáticas. Para ello cito brevemente al profesor Doron Zeilberger [11], conocido matemático y acérrimo defensor del uso de ordenadores en matemáticas, más allá del que solemos hacer como simples calculadoras muy sofisticadas. Los originales en inglés están enlazados en la bibliografía.

La primera cita es sobre la aparente complejidad de la demostración del T4C, o mejor dicho sobre una cierta definición de complejidad.

> Entiendo perfectamente el T4C. En realidad es una demostración de una línea salvo por una comprobación rutinaria. Dice que un cierto conjunto de configuraciones reducibles es inevitable. Solo hacen falta unos minutos para entender las definiciones, y para convencerse de que la existencia de ese conjunto implica el T4C. Análogamente, para entender una demostración por ordenador de que un cierto entero de 400 dígitos es compuesto lo único que hace falta es comprender que si es un producto de dos enteros mayores que uno entonces es compuesto. No sé, ni me importa, cómo encontró la factorización el ordenador, y creo que puede multiplicar dos números y comprobar si lo que se dice es cierto. [13]

La segunda es sobre la idea la fiabilidad humana.

> Tengo una meta-demostración de que el último teorema de Fermat es trivial. Después de todo, un simple humano (aunque sea uno con mucho talento en relación a otros humanos), con una RAM minúscula, poco espacio de disco, y una circuitería muy poco fiable, lo hizo. Así que cualquier teorema que pueda demostrar un humano es, *ipso facto*, completamente trivial (desde luego, esto ya lo sabía Richard Feynman, quien dijo en "Surely You're Joking Mr. Feynman", p. 70, que los matemáticos solo pueden demostrar cosas triviales, porque todo teorema que se demuestre es trivial). [12]

La última es su deseo de que no se encuentre una demostración del T4C al estilo clásico.

> Si los humanos siguen intentando encontrar demostraciones humanas, y fallan, eso aumentará la probabilidad de que el T4C sea profundo de verdad. Por otra parte, si algún humano demuestra mañana el T4C, solo con lápiz y papel, estaría muy bien para quien lo demostrara, porque se haría famoso instantáneamente, pero muy deprimente para nuestra cultura matemática en general. Significaría que quizás los humanos somos tan triviales que quizás ni siquiera somos capaces de formular y conjeturar resultados profundos. [13]

Agradecimientos

Los mapas mudos han sido tomados de `commons.wikimedia.org` bajo licencias compatibles. En particular la Figura 1 derecha es de Emilio Gómez Fernández (`Extremadura_municipalities.png`) bajo licencia CC BY-SA-3.0. Las imágenes de la Figura 7 son iconos de Freepik en `www.flaticon.com` bajo licencia CC BY-3.0.

Referencias

[1] `http://colorbrewer2.org`

[2] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable, Part I: Discharging.* Illinois J. Math. 21:3 (1977), 429–490.

[3] K. Appel, W. Haken, J. Koch, *Every planar map is four colorable, Part II: Reducibility*. Illinois J. Math. 21:3 (1977), 491–567.

[4] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable*. Con la colaboración de J. Koch. Contemporary Mathematics, 98. 1989, American Mathematical Society.

[5] `https://coq.inria.fr`, véase también `http://en.wikipedia.org/wiki/Coq`.

[6] G. Gonthier, *Formal proof—the four-color theorem*. Notices Amer. Math. Soc. 55:11 (2008), 1382–1393.

[7] P.J. Heawood, *Map-Colour Theorem*. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 24 (1890), 332–338.

[8] A.B. Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours*. Amer. J. Math. 2:3 (1879), 193–200.

[9] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, *The four-colour theorem*. J. Combin. Theory Ser. B 70:1 (1997), 2–44.

[10] R.A. Wilson, *Graphs, colourings and the four-colour theorem*. 2002, Oxford University Press.

[11] Página web de D. Zeilberger: `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg`.

[12] D. Zeilberger, *Opinion 36: Don't Ask: What Can The Computer do for ME?, But Rather: What CAN I do for the COMPUTER?* (1999). `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion36.html`

[13] D. Zeilberger, *Opinion 51: It is Important to Keep Looking for Non-Computer Proofs of the Four-Color Theorem, But Not For the "Usual" Reasons* (2003). `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion51.html`

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 49 – 82

Dos que no cooperan

Juan-Miguel León-Rojas

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura
Avda. de la Universidad, 10003 *Cáceres, Spain*

jmleon@unex.es

Vencer al invencible

«Conocí a uno que tenía ocho años y cuyos triunfos en el juego de "par e impar" atraían la admiración general. El juego es muy sencillo y se juega con bolitas. Uno de los contendientes oculta en la mano cierta cantidad de bolitas y pregunta al otro: "¿Par o impar?" Si éste adivina correctamente, gana una bolita; si se equivoca, pierde una. El niño de quien hablo ganaba todas las bolitas de la escuela. Naturalmente, tenía un método de adivinación que consistía en la simple observación y en el cálculo de la astucia de sus adversarios. Supongamos que uno de éstos sea un perfecto tonto y que, levantando la mano cerrada, le pregunta: "¿Par o impar?" Nuestro colegial responde: "Impar", y pierde, pero a la segunda vez gana, por cuanto se ha dicho a sí mismo: "El tonto tenía pares la primera vez, y su astucia no va más allá de preparar impares para la segunda vez. Por lo tanto, diré impar." Lo dice, y gana. Ahora bien, si le toca jugar con un tonto ligeramente superior al anterior, razonará en la siguiente forma: "Este muchacho sabe que la primera vez elegí impar, y en la segunda se le ocurrirá como primer impulso pasar de par a impar, pero entonces un nuevo impulso le sugerirá que la variación es demasiado sencilla, y finalmente se decidirá a poner bolitas pares como la primera vez. Por lo tanto, diré pares." Así lo hace, y gana. Ahora bien, esta manera de razonar

del colegial, a quien sus camaradas llaman "afortunado", en ¿qué consiste si se la analiza con cuidado?
—Consiste —repuse— en la identificación del intelecto del razonador con el de su oponente.
—Exactamente —dijo Dupin—. Cuando pregunté al muchacho de qué manera lograba esa total identificación en la cual residían sus triunfos, me contestó: "Si quiero averiguar si alguien es inteligente, o estúpido, o bueno, o malo, y saber cuáles son sus pensamientos en ese momento, adapto lo más posible la expresión de mi cara a la de la suya, y luego espero hasta ver qué pensamientos o sentimientos surgen en mi mente o en mi corazón, coincidentes con la expresión de mi cara." Esta respuesta del colegial está en la base de toda la falsa profundidad atribuida a La Rochefoucauld, La Bruyère, Maquiavelo y Campanella.
—Si comprendo bien —dije— la identificación del intelecto del razonador con el de su oponente depende de la precisión con que se mida la inteligencia de este último».

Edgar Allan Poe [1] (pp. 524-525).

Parece indudable que el interés de un juego en el que puede obtenerse un beneficio o una pérdida, es no perder. Pongámonos en la situación de tener que enfrentarnos a este niño redicho y sabiondo, aunque a la vez, tan exacerbantemente perspicaz y clarividente. ¿Cuál sería nuestra estrategia para no perder?

La teoría de juegos

«El ajedrez no es un juego. Es una forma muy precisa y particular de cálculo. Quizá no puedas obtener las soluciones[1], pero en

[1] Solo en las cuatro primeras jugadas de una partida de ajedrez, los dos jugadores disponen de más de 318 mil millones de posibles movimientos. Debido a esta «explosión combinatoria», ni siquiera uniendo la potencia de cálculo de todos los ordenadores existentes, en la actualidad, en nuestro planeta, podríamos calcular la solución al «juego» del ajedrez. Por cierto, ya que esto tratará sobre cooperación, no está de más conocer las propuestas de *computación voluntaria* («altruismo computacional», en palabras de Jordi Vallverdú [2]) —*cfr.* BOINC (*Berkeley Open Infrastructure for Network Computing* [Infraestructura Abierta de Berkeley para la Computación en Red]) (`http://boinc.berkeley.edu/`), con proyectos como SETI@home (`http://setiathome.ssl.berkeley.edu/`), dedicado a la búsqueda de inteligencia extraterrestre (¿recuerda el lector la película *Contact*, protagonizada por Jodie Foster?) o Folding@home, dedicado a simular plegamientos proteicos relevantes para enfer-

teoría hay una solución, un procedimiento correcto para cualquier posición. Sin embargo, los juegos reales no son en absoluto así. El mundo real tampoco. La vida real consiste en echar faroles, en llevar a cabo pequeñas tácticas para engañar al otro, en preguntarse qué va a pensar el otro que voy a hacer. Y sobre este tema se ocupan los juegos de mi teoría».

John von Neumann, en respuesta a
Jacob Bronowski, mientras circulaban por Londres en taxi.

Ni de esos juegos, a los que se refiere John von Neumann en la cita, como el ajedrez —que en definitiva no es más que un tres en raya, pero de dimensiones descomunales—, ni de los juegos electrónicos o videojuegos —de los que algunos ejemplos «modernos» fueron *Tennis for two* (1958) de William Higinbotham (¡con un osciloscopio!), *Spacewar!* (1961) de Steve «Slug» Russell, Martin «Shag» Graetz y Wayne Wiitanen o *Pong* (1972), partido clásico de tenis ya en máquina en bar, de Nolan Kay Bushnell—[2], trata, en principio, la teoría de juegos. Y matizamos «en principio», porque las dimensiones descomunales del ajedrez hacen, sin embargo, que posea interés para la teoría actual.

Los juegos de salón, dependientes, no solo del arte de los jugadores, sino también de factores aleatorios (las manos de naipes, los dados, etc.) han sido y son una fuente inagotable de inspiración para la teoría. Podríamos afirmar, sin temor a equivocarnos, que para la teoría de juegos, el *póquer* —cuyo primer modelo fue propuesto por John von Neumann en 1928 [3]— ha desempeñado un papel similar al que desempeñaron los dados en el nacimiento de la teoría de la probabilidad[3].

Los actuales *juegos de rol*[4] —cuyo origen son los *juegos de guerra* del siglo

---

medades como Alzheimer, Huntington o cáncer (`http://folding.stanford.edu/home/`)—.

[2] Algunos, más «modernos», pueden encontrarse en `http://www.digitalgamearchive.org/games.php`.

[3] Por cierto, que en el caso del póquer, la teoría de juegos recomienda farolear cuando las manos son muy malas —*cfr.* Binmore [4] (p. 51)—.

[4] Por lo general, en cualquier situación social que pueda modelizarse como un juego, y más si es repetitivo, es imprescindible una correcta *asignación de roles*, con sus deberes y responsabilidades, así como las reglas referentes a formación de *coaliciones* —con respecto a las cuales no está de más recordar un par de cosas; primero, la paremia «Dos es compañía, tres es multitud» (*cfr.* `http://cvc.cervantes.es/lengua/refranero/ficha.aspx?Par=58558&Lng=0`); segundo, que es mejor fomentar vínculos entre ellas que combatirlas, trazando estrategias que impidan su formación o que las deshagan—.

XVIII— se muestran muy interesantes por su representación de situaciones socioculturales y económicas. Uno de los más conocidos es *Dragones y mazmorras* (1972), de Gary GIGAX, inspirado en *El señor de los anillos* de John Ronald Reuel TOLKIEN.

Los juegos que trata la teoría reflejan situaciones en las se interrelacionan dos o más individuos, a los que también podríamos llamar *decisores.* La *finalidad* de la teoría de juegos es ayudarnos a comprender y modelar tales situaciones. Podríamos decir que *la teoría de juegos es la teoría general del comportamiento estratégico.*

ALGUNAS IDEAS BÁSICAS SOBRE LA TEORÍA DE JUEGOS surgieron muy temprano en la historia, pero, el mayor desarrollo se produjo en la década 1920-1930, con los trabajos de Emile Félix Edouard Justin BOREL y con la publicación en 1928 de un artículo de John VON NEUMANN. Y quizás la fecha decisiva de comienzo, fue 1944, cuando VON NEUMANN y Oskar MORGENSTERN publican *The theory of games and economic behavior* [5].

Desde 1950, ha sido creciente el número de campos en los que se ha utilizado la teoría de juegos: *negociación colectiva*, *economía*, *elaboración de presupuestos (gastos de defensa, educación, sanidad...)*, *ciencias políticas*, *psicología*, *biología*, *planificación estratégica militar*, *filosofía social*, etc.

A modo de ejemplo, el *juego de los bienes públicos*, en el que cada uno de los jugadores, en secreto, elige cuántas de sus fichas quiere poner en el bote público. El número de fichas del bote público se multiplica por un factor —mayor que uno y menor que el número de jugadores— y el pago resultante se divide por partes iguales entre todos los participantes. Un caso particular interesante de bien público es el *conocimiento.* Existe una conciencia social de que todo despilfarro supone *escasez*[5]. El despilfarro de conocimiento, si realmente fuese posible, no generaría escasez —que yo aprenda algo no obliga a que tú no puedas aprenderlo—, sino *abundancia* —que yo aprenda algo incrementa la

[5] Por ejemplo, todo el desperdicio de comida en crianza de animales: según un informe del Consejo Mundial de Alimentación (CMA) de la Organización de Naciones Unidas (ONU), bastaría destinar entre un 10 y un 15 por ciento del grano destinado a la alimentación del ganado, para erradicar el hambre humana —*cfr.* Robert J.A. GOODLAND et ál. [6], vía Jorge RIECHMANN [7] (p. 41)—. Para más despilfarros públicos, véase `http://www.despilfarropublico.com/`.

probabilidad de que yo genere más conocimiento en un futuro—[6,7].

El *juego del ultimátum*, el *juego del dictador*, el *juego del gallina* y muchos otros juegos son usados como punto de partida de modelizaciones de situaciones sociales, culturales o económicas. Cuando se modelizan estas situaciones hay que prestar atención a muchos detalles. Por ejemplo, la existencia de jugadores con características «singulares», como los *polizones* (*free-riders*) —quienes se benefician de bienes, recursos y servicios comunes sin contribuir a su mantenimiento (semejantes a los *holgazanes* en los grupos de trabajo)— o los *obligados contribuyentes* (*force-riders*) —quienes contribuyen al mantenimiento de bienes, recursos y servicios comunes sin beneficiarse de ellos; por ejemplo, los pacifistas que pagan por la defensa de su país o los ecologistas por proyectos contra el medioambiente—.

En 1994, y en reconocimiento a la gran influencia en tantos campos que ha tenido la teoría de juegos, fue concedido el premio Nobel de Economía a tres grandes teóricos de los juegos: John Charles HARSANYI, John Forbes NASH (Jr.) y Reinhard SELTEN.

La vida del segundo de ellos, de NASH, aparece relatada, por ejemplo, en el libro de Sylvia NASAR, *Una mente prodigiosa* [8] y más recientemente, en *The essential John Nash* [9], de autor el propio NASH. Su vida ha sido llevada al cine, en la película *A beautiful mind*, traducida como «Una mente maravillosa», del director Ron HOWARD, siendo Russell CROWE el actor elegido para interpretar el papel de John Forbes NASH (Jr.) El éxito alcanzado por la película y las peculiaridades y avatares de su vida, han hecho que el público se interese por sus contribuciones a la teoría de juegos, aportaciones que fundamentalmente se centran en la *teoría del equilibrio estratégico* y en los *modelos de negociación* (tanto desde el punto de vista axiomático como desde el punto de vista estratégico).

UN *juego de matriz* ESTÁ DETERMINADO POR UNA MATRIZ, la *matriz del juego* o *matriz de pagos* (*rendimientos* o *beneficios*), cada una de sus filas representando la elección de un jugador F (filas) y cada una de sus columnas

[6] Estamos convencidos de que el conocimiento debería estar en el dominio público, en quintaesencia porque a) *el conocimiento nuevo solo es posible a partir de conocimiento anterior* y en esencia porque b) *tú no eres el único en el mundo* y porque c) *puedes ayudar a incrementar el conocimiento de los demás y ellos pueden ayudar a incrementar el tuyo.* Sin embargo, esto debería ser una opción para cualquiera que genere nuevo conocimiento y no una obligación. Por otra parte, note el lector que la cultura supone mucho más que conocimiento, aunque eso no significa que no deba perseguirse la *cultura libre*.

[7] Un grupo de profesores de la escuela pública de Madrid han iniciado la construcción libre de libros de texto para ESO y bachillerato, *Textos Marea Verde*: `http://textosmareaverde.blogspot.com.es/`.

representando la elección de un jugador C (columnas), elección simultánea y mutuamente desconocida. En los juegos de matriz, que F escoja la fila i y C la columna j significa que C debe pagar a F la cantidad a_{ij} (si $a_{ij} < 0$, entonces es F quien paga a C la cantidad $-a_{ij}$). Un juego de matriz (bidimensional) es un caso particular de *juego de suma cero* (entre dos jugadores) —la suma de las ganancias de ambos jugadores es cero (lo que gana uno es lo que pierde el otro y viceversa)—. El jugador F (resp. C) puede elegir siempre la misma fila (resp., columna) —a hacer esto se le denomina usar una *estrategia pura*— o bien puede escoger una u otra fila (resp., columna) con una determinada probabilidad —esto es, utilizar una *estrategia mixta*—. Sea, por ejemplo, la matriz de pagos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, el 3 es a la vez un mínimo de fila y un máximo de columna. Se dice que 3 es un *punto de silla* para A. Si para un juego de matriz, existe un punto de silla, se dice que el juego está *determinado estrictamente*. Se demuestra (teorema de von Neumann) que si a_{ij} es un punto de silla, existe una estrategia óptima para F y otra para C, dos estrategias puras, elegir la fila i y elegir la columna j, respectivamente. Eliminar previamente las filas y columnas recesivas, facilita la búsqueda de puntos de silla —se dice de una fila que es una *fila recesiva* precisamente si está dominada por otra, p. ej., la fila 1 en el juego anterior, ya que $1 < 3$ y $2 < 4$; así, la única fila que no es recesiva es la segunda y la única columna que no es recesiva es la primera—.

Un juego se describe por sus *reglas* (lo que cada uno puede hacer y cuando puede hacerlo), por sus *estrategias* (los planes de acción para cada situación posible del juego) y por sus *pagos* (las cantidades que los jugadores ganan o pierden en una situación particular del juego). Una vez conocidas las reglas, las estrategias y las ganancias y pérdidas, podemos pensar en hallar las mejores estrategias. Por lo general, las mejores estrategias para un jugador dependen de lo que haga el resto de jugadores. Si una de tales mejores estrategias no depende del resto, se llama *estrategia dominante*. La *mejor estrategia* o respuesta para un jugador es aquella que, dadas las estrategias del resto de jugadores, maximiza los pagos al jugador.

El *equilibrio de Nash* se alcanza cuando la elección de cada jugador es la mejor respuesta a las elecciones de los demás jugadores. Es decir, cuando cada jugador responde con su mejor estrategia. Como en un equilibrio de Nash, la estrategia elegida por cada jugador es su mejor estrategia, los jugadores carecen de incentivos para cambiar de estrategia.

Los jugadores pueden *alcanzar el equilibrio de Nash*, básicamente de dos formas. Una manera —*eductiva*— en la que los jugadores alcanzan el equilibrio pasa por razonamientos extraordinariamente profundos, que casi seguramente comenzarían «si él piensa que yo pienso que él piensa que ...», o sea, supone que los jugadores «piensan todo de antemano». Otra manera —*evolutiva*— corresponde a pensar que los jugadores ajustan su conducta por tanteo, a medida que juegan. La posición del jugador humano suele ser intermedia entre lo eductivo y lo evolutivo.

En realidad, en muchas situaciones coexisten *múltiples equilibrios de Nash*, y el verdadero problema es el de la selección del equilibrio «más equilibrado». Ténganse en cuenta las palabras de Nash: «cualquier teoría normativa del comportamiento racional podrá considerarse acabada, cuando proporcione un medio para seleccionar un único punto de equilibrio para cada juego». El problema es que para esta selección se necesita información extra, es decir, información proveniente de fuera del juego en sí. De procedimientos para realizar esta selección tratan los trabajos de John Charles Harsanyi y Reinhard Selten [10].

Un típico ejemplo de juego con múltiples equilibrios de Nash involucra a dos amigas —por ejemplo, Marina y Sara— que desean salir juntas una noche. Se plantean dos posibilidades: ir a una fiesta o al cine. Marina quiere ir a la fiesta, pero Sara quiere ir al cine. Lo realmente importante, lo que ellas valoran, es hacer algo juntas. Se trata de un *juego de suma no nula*, en el que cada jugador tiene su propia matriz de pagos (en este ejemplo, *unidades de felicidad*). Podemos, sin embargo, representarlas conjuntamente en una matriz de pares de pagos, correspondiendo las primeras componentes a Marina y las segundas a Sara:

		Sara	
		Fiesta	Cine
Marina	Fiesta	(2,1)	(-2,-2)
	Cine	(-2,-2)	(1,2)

Esta matriz muestra que el juego tiene dos equilibrios de Nash, uno en el que ambas van a la fiesta, y otro en el que ambas van al cine[8].

[8] En la teoría este juego se conoce como *Batalla de los sexos* —*cfr.* Robert Duncan Luce y Howard Raiffa [11] y Anatol Rapoport [12]—. Un tercer equilibrio de Nash viene dado por una estrategia mixta probabilística. En el caso en que se reitere el juego, la alternancia entre elecciones podría ser una *solución social*. Al hablar del poder de cada jugador sería preferible emplear términos positivos como la fuerza del amor, de la amistad o de la bondad —sepa el lector, por curiosidad, que para el grado de bondad de una acción individual, Francis Hutcheson, en su obra *Inquiry into the Original of Our Ideas of Beauty and Virtue* (1725), propone la siguiente fórmula: bondad $= \frac{\text{bien público}\pm\text{interés privado}}{\text{capacidad natural para hacer el bien}}$ (*cfr.* John D. Barrow[13], p. 308)—; muchos autores, sin embargo, emplearán términos negativos,

En palabras de Juan Luis Arsuaga [15], famoso por sus trabajos en Atapuerca —*cfr.* Arsuaga y Martínez [16]— y el descubrimiento del *Homo antecesor*, Nash «trata de ver cómo es posible que los individuos cooperen entre sí». Y observe el lector que Arsuaga habla de individuos, que no de seres humanos.
De hecho, la teoría de juegos cada vez cobra un papel más protagonista en biología, antropología y etología, y en especial a la hora de explicar la *evolución de la vida* en nuestro planeta. No sólo debemos pensar en el proceso de selección natural propuesto por Charles Darwin [17], quien a fin de cuentas, sólo hablaba de individuos, sino que la teoría de juegos, y en particular la dedicada a juegos entre varios individuos, en los que se contemple la posibilidad de cooperación entre ellos, nos ayuda a comprender el proceso de selección natural de grupos, y el porqué del triunfo de algunos de ellos. Quizás uno de los máximos ponentes de todo ello sea John Maynard Smith [18].

Y cómo no, la teoría de juegos parece fundamental para entender la *sociología* y la *filosofía social*. Los teóricos de los juegos están seguros de poder demostrar que hasta el individuo más egoísta (ya se sabe, esa persona que define al propio egoísta como todo aquél o aquella que no piensa en ella), puede sacar provecho de *cooperar con los demás*, si no a corto plazo, seguro que sí a medio o largo plazo. Para ello, los investigadores estudian los equilibrios de juegos que los jugadores juegan una y otra vez (juegos con repetición).

La teoría de la elección racional

> *«Un jugador no puede razonar: Yo soy racional, luego que yo adopte el argumento A le convierte en un argumento racional. Por tanto mi oponente hará lo mismo que haga yo. Esto pone el carro delante del caballo. Un argumento no es racional porque es aceptado por una persona racional. Por el contrario, una persona es racional porque él o ella solo acepta argumentos racionales».*
>
> Ken Binmore (1994, p. 304).

En teoría de juegos, se conoce como *nivel de seguridad* de un jugador en un juego al mayor beneficio o pago esperado que puede asegurarse con

hablando del poder de amenaza de cada jugador como determinante de la solución final —*cfr.* Josep María Colomer [14] (cap. 7) al modelizar varias situaciones sucedidas durante el intento de golpe de Estado del 23 de febrero de 1981, por ejemplo, el «juego» entre el Rey y los capitanes generales; alternativas del Rey y de los capitanes generales: [Sí] o [No] apoyar el golpe; Matriz [Rey,capitanes generales] según Colomer: $[\text{Sí}, \text{Sí}] = (3, 4)$, $[\text{Sí}, \text{No}] = (1, 1)$, $[\text{No}, \text{Sí}] = (2, 2)$, $[\text{No}, \text{No}] = (4, 3)$—.

independencia de lo que haga el resto de jugadores. Para calcular su nivel de seguridad, un jugador debe considerar el peor de los casos, o sea, debe suponer que cualquiera de los otros jugadores será capaz de predecir su estrategia y que actuará para minimizar su beneficio.

Pero, ¿por qué ha de suponer que el resto de jugadores quiere perjudicarle? ¿No resulta más coherente suponer que cualquier jugador actuará para maximizar su beneficio en vez de hacerlo para minimizar el de sus contrarios?

Puede que no siempre. Por ejemplo, un juego de dos jugadores en los que los intereses de ambos sean diametralmente opuestos entre sí. En tal caso, maximizar el beneficio de uno equivale a minimizar el beneficio del otro. Estos juegos estrictamente competitivos se conocen en la teoría como *juegos de suma cero*. A primera vista, por poner un ejemplo, podríamos pensar en el póquer o en el backgammon. Sin embargo, la realidad es que depende del entorno donde se jueguen. En algunos casinos, la banca se queda con un 10 por ciento de las apuestas. Por otro lado, hemos de considerar si los jugadores tienen o no aversión al riesgo o las pérdidas. Si no la tienen, es decir, si son neutrales al riesgo y las pérdidas, podemos considerar estos juegos como de suma nula. Por ejemplo, es una buena hipótesis si tales juegos se juegan en familia. Pero, en general, no deberían ser considerados como juegos de suma nula, pues las personas muestran aversión al riesgo.

En realidad, parece que lo que debe suponerse sobre la racionalidad del jugador o decisor es lo que suele entenderse por *hipótesis de racionalidad del decisor*, a saber, que debe estar en posesión de una hipótesis de comportamiento coherente, en el sentido de que *la alternativa elegida por un decisor debe ser, al menos, tan buena, de acuerdo a sus preferencias, como cualquier otra alternativa disponible*. Pensemos que, por ejemplo, en Economía, al modelar la interacción consumidor-productor, la hipótesis de racionalidad del consumidor implica que solo piense en el conjunto de aquellos bienes de consumo que pueda permitirse —esto es, que se olvide del «cuento de la lechera»—. Por otro lado, suponer que el productor es racional implica que cualquier acción que emprenda generará, a corto, medio o largo plazo, un beneficio igual o mayor que cualquiera de las otras acciones posibles.

Por otra parte, está comprobado experimentalmente que si a un conjunto de acciones, entre las que uno tenía claro cual elegir, se le añade una acción no deseable, a veces ocurre que produce tal efecto en nuestro esquema mental, que cambia de manera significativa nuestro criterio último para elegir, y cambiamos nuestra elección, escogiendo una acción peor que la que inicialmente teníamos en mente —*cfr.* Matthew Rabin [19] (p. 38), [13] (cap. 91)—. Por ejemplo, en un bar donde sólo ofrecen dos bocadillos, de tortilla española y de jamón, observamos que un cliente «siempre » pide el de jamón, por lo que deducimos que prefiere el jamón a la tortilla española. Un buen día, se ofrece un tercer bocadillo: de lomo. Y precisamente, ese día, observamos que el mismo cliente pide el bocadillo de tortilla española. La «pregunta del millón»: ¿es racional deducir que las elecciones del cliente son inconsistentes con la hipótesis de racionalidad? En otras palabras, *el ser humano no siempre actúa racionalmente*[9,10].

Estas imperfecciones del modelo de la elección racional, de naturaleza humana, son bien conocidas, por ejemplo, por los teóricos de la publicidad, que las aprovechan para diseñar *campañas publicitarias* específicas que modifiquen las preferencias del consumidor a favor de los productos promocionados.

Si hay más de un decisor, entonces debemos hablar de la *hipótesis de racionalidad múltiple entre decisores*, en el sentido de que ellos, como un todo, posean una hipótesis de comportamiento coherente: *la alternativa elegida por ellos, debe ser, al menos, tan buena, de acuerdo a sus preferencias, como cualquier otra alternativa disponible.*

Ante múltiples decisores, podemos hablar de *coaliciones* —*cfr.* nota a pie núm. 4—, de *consensos* —Miguel Fernández Pérez [21] (p. 556) distingue tres zonas de racionalidad: la zona de racionalidad obvia (consenso espontáneo), incluida en la zona de racionalidad restringida (consenso dialogado), incluida esta última en la zona de racionalidad opcional (consenso previo sobre procedimiento para situaciones de disenso)— y de *masa* —en la que la racionalidad, habitualmente es cuestionada—.

[9] Aunque sí *metarracionalmente*, por ejemplo, unas elecciones y tres candidatos A, B y C; entre votar a A o a B, preferimos votar a B, pero entre votar a A, B o C, preferimos votar a A, porque B se aliaría con C y no queremos saber nada de C —el «juego» de las coaliciones en las tríadas (*cfr.* Theodore Caplow [20])—.

[10] Además de esto, es usual cometer errores de *autosingularización*, por ejemplo, pensar que somos distintos de la media (aritmética) —aunque esto simplemente puede ser debido a ser más inteligente; está demostrado que, por lo general, las personas más inteligentes tienden al individualismo, al pensamiento independiente y al desacuerdo con los que piensan distinto de ellas (de ahí, por ejemplo, que, aparentemente, no sea nada bueno promover a personas de inteligencia elevada para cargos políticos con responsabilidad social)—.

El dilema del prisionero

Imaginemos una situación de compraventa o trueque[11], en la que el intercambio, deba producirse, vaya usted a saber el porqué, en secreto, sin llegar a conocernos. Se designan dos sitios, uno para cada trocador, donde cada uno depositará su mercancía, de manera que el otro pueda pasar posteriormente a recogerla. Además, se acuerda nunca más volver a saber el uno del otro. En tales condiciones, la tentación de no depositar nuestra mercancía —de ganar algo a cambio de nada— es enorme. Sin embargo, si ambos trocadores piensan de esta manera, saldrán con las manos vacías.

Son precisamente la *teoría de la elección racional* —o sea, el hecho de que nos comportemos como decisores o jugadores racionales— y el concepto de *equilibrio de Nash* —en la forma eductiva de alcanzarlo (es decir, «pienso que piensa que pienso que piensa que ...»)—, las que nos ayudan a concluir que debemos depositar nuestra mercancía[12].

La manera en la que hemos contado el dilema se inspira en el planteamiento popularizado por Douglas Richard Hofstadter [25, 26]. La formulación original de este dilema, más difícil de entender, se debe a Merrill Meeks Flood y Melvin Dresher, en enero de 1950, y está publicado en la memoria de investigación de Flood [27], en 1952. Allí aparece con el nombre de dilema número 3: «*a non-cooperative pair*» (dos que no cooperan). El nombre y planteamiento como el *dilema del prisionero* se debe a Albert William Tucker (1905-1995), quien en una conferencia sobre teoría de juegos, dirigida a psicólogos, en mayo de 1950, expuso las ideas de Flood y Dresher, inventándose una historia, que en la versión actualmente en boga, se cuenta más o menos tal como sigue. Se detiene a dos delincuentes, compañeros de una misma banda, que son encarcelados. Cada prisionero está aislado, sin posibilidad de comunicarse con el otro. Al carecer de pruebas suficientes para condenarles por la acusación

[11] La historia evolutiva humana ha reflejado el *trueque* o *intercambio* como uno de los rasgos sociales más fuertes, conducentes al establecimiento de contratos —*cfr.* Edward Osborne Wilson [22] (p. 569)—. Más allá del trueque está el concepto de *ayuda mutua*, reflejado por ejemplo en el libro *El apoyo mutuo* de Piotr Alekséyevich Kropotkin [23] o en la lengua de los indios tirió, de Surinam, con la expresión *e-pah-wah-nah* (algo así como «tú me echas una mano a mí y yo te la echo a ti») —*cfr.* John McCarry [24] (p. 51)—. El liberalismo, por el contrario, prima al individuo sobre el colectivo. Democracias liberales frente a democracias «populares», indiferencia frente a compromiso, representatividad frente a participación, además de aquellos que defienden puntos intermedios en estos contrastes. Todo un repertorio de estrategias (¿racionales?) para la búsqueda del *óptimo social*.

[12] En la práctica, además, dependerá de la cultura a la que pertenece cada jugador, de si en dicha cultura se actúa desde la *presunción de honestidad* o desde la presunción de deshonestidad.

principal, el juez piensa en condenarles por un cargo menor, con un año de prisión a cada uno. Mas el jefe de policía tiene una idea, que admitida por el juez, consiste en ofrecer a cada prisionero el siguiente pacto. Si testifica contra el otro, quedará libre, mientras que al otro se le condena por tres años, al poder acusarle por el cargo principal. Pero, si los dos prisioneros testifican el uno contra el otro, entonces se condenará a ambos a dos años.

Se trata de un *juego de suma no nula*, siendo su matriz de pagos:

	B testifica	B no testifica
A testifica	(2,2)	(0,3)
A no testifica	(3,0)	(1,1)

Si son racionales, cada prisionero argumentará que si testifica, se reduce en 1 año su condena, independientemente de lo que haga el otro (pues si el otro no testifica, al quedar libre, no cumple el año de condena; mientras que si el otro testifica, le condenan a 2 años, en vez de a 3). Por otro lado, si no testifica, puede que el otro también lo haga, con lo que le condenan a 2 años, pero puede que el otro no testifique, con lo que le condenarían a 3 (o sea, que no tiene la posibilidad de una condena de 1 año y mucho menos la de quedar libre). De esta manera eductiva, cada prisionero concluye que lo mejor es testificar, con lo que son condenados a 2 años cada uno.

Sin embargo, observando la matriz anterior, lo mejor que pueden hacer ambos prisioneros es no testificar, para obtener así una condena de solo 1 año.

Por lo que despertó, y sigue despertando, tanto interés este dilema, es porque los prisioneros han mostrado un *comportamiento racional.* Han llegado eductivamente al punto de equilibrio de NASH, que en este caso es que ambos testifiquen. Y es un punto de equilibrio de NASH, porque al día siguiente, una vez condenados a los 3 años, cuando se despierten y piensen lo que han hecho, no se arrepentirán de la decisión tomada, dada la opción que han visto que ha tomado su compañero.

Lo que resulta más curioso es lo que se deduce: que el equilibrio de NASH —que se alcanza cuando la elección de cada jugador es la mejor respuesta a las elecciones de los demás jugadores— no tiene por qué ser el desenlace más favorable de un juego.

Y lo que despierta aún más interés, en campos tan diversos como la filosofía, biología, sociología, ciencias políticas y en economía, así como en la propia teoría de juegos, es su interpretación psico-social y las implicaciones que conlleva. El hecho de testificar puede interpretarse racionalmente como una *defraudación*, pues el que testifica defrauda a su compañero. Asimismo, el no testificar es interpretable racionalmente como una *cooperación*. El equilibrio de NASH se alcanza cuando ambos defraudan. Y sin embargo, lo más favorable es que cooperen[13].

La pregunta es, ¿por qué no se ven incitados a elegir lo más favorable? La respuesta es sencilla, porque a pesar de mucho educir, sus pensamientos son egoístas; porque la meta de cada uno es obtener el máximo beneficio personal. Porque no piensan en el *bienestar colectivo de la sociedad* formada por ellos dos. Porque se rigen por el principio del máximo egoísta. Porque no son «gemelos»[14,15].

La comunidad de los iguales

PERO ES QUE NOS HAN EDUCADO TAL QUE ASÍ. Colaborar, comunicar ideas, discutirlas hasta llegar a un consenso, no se contempla habitualmente en los planes de estudio. Al contrario: «no habléis», «no os paséis ningún mensaje», «no ayudéis al compañero», etc. Interesa, por lo general, la evaluación del rendimiento individual. Y esto no debería ser así. Los estudiantes deberían trabajar en equipo, deberían aprender a explicarse con claridad, a alentar y criticar, a negociar, en definitiva, a jugar.

El *juego de la vida* es un juego en equipo, no hay que menospreciar la iniciativa propia, pero hay que promover valores de cooperación, respeto, tolerancia y apertura respecto a la diversidad de opiniones y opciones.

En el juego de la vida solo hay un equipo, el de todos los seres vivos.

Sin embargo, queda mucho tiempo para que todos los seres humanos formen

---

[13] Así ocurrió en el caso de la legalización del Partido Comunista de España (PCE) el 9 de abril de 1977, modelizado por Josep María COLOMER [14] (cap. 5) como un juego de dilema del prisionero con Adolfo SUÁREZ y Santiago CARRILLO como protagonistas —alternativas de SUÁREZ: [Sí] o [No] legalizar el PCE; alternativas de CARRILLO: [Sí] o [No] aceptar la reforma; Matriz [SUÁREZ,CARRILLO] según COLOMER: [Sí, Sí] = (3, 3), [Sí, No] = (1, 4), [No, Sí] = (4, 1), [No, No] = (2, 2)—.

[14] Decía Baruch SPINOZA «¿Qué ocurriría si un hombre no corriera el peligro presente de morir por traidor? [...] Si la razón pudiera recomendar esto, lo recomendaría a todos los hombres».

[15] Puro egoísmo alimentado por el aislamiento. John D. BARROW [13] (cap. 22) relata el caso de dos habitaciones de hotel con la calefacción de cada una conectada al termostato de la otra, por lo que cuando el huésped de una habitación bajaba su termostato, el de la otra subía el de la suya, calentándose la habitación del que bajaba el termostato y enfriándose la del que lo subía. Y como bien apunta seguidamente, problemas medioambientales pueden tener un origen similar: si encendemos aires acondicionados, aumentamos el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera, lo que hará que esta retenga más el calor del sol, lo que incrementará nuestra necesidad de refrescarnos.

parte realmente de una comunidad en la que todos sean iguales. La historia de la igualdad entre los diferentes colectivos de seres humanos es la historia de la discriminación entre ellos, en todo caso, siempre injustificada.

Esta historia es la historia de la esclavitud, de las discriminaciones *por motivos racistas, antisemitas u otra clase de discriminación referente a la ideología, religión o creencias, la etnia, raza, o nación a la que pertenezca, su sexo u orientación sexual, o la enfermedad o minusvalía que padezca* (Código Penal Español, art. 22.4).

Es la historia de la marginación, de la intolerancia y de la xenofobia.

Y es una historia reciente.

Es la historia del aborrecible *apartheid* sudafricano y del execrable holocausto nazi.

Hasta hace apenas 40 años existían seres humanos, cuya igualdad con el resto no era reconocida por ninguna ley, ni siquiera en los países más desarrollados. Se trataba de aquellos seres humanos que sufrían una discapacidad intelectual[16]. No es hasta 1971, cuando se aprueba una primera declaración de la ONU, que se refuerza y complementa con una segunda declaración en 1975; declaraciones por las que se considera, al fin, a estas personas iguales al resto de seres humanos (aunque sus derechos deban ser salvaguardados por guardianes humanos no discapacitados intelectualmente).

LAS MUJERES SIGUEN MARGINADAS EN MUCHOS LUGARES DEL PLANETA. No hace tanto, por ejemplo, que se aprobó en Alemania su posibilidad de nombramiento para cargos públicos. Otro ejemplo: en España, no es hasta 1966, cuando se permite a la mujer ser jueza. La primera mujer juez, Concepción Carmen Venero, fue nombrada en 1971 juez del Tribunal de Menores, cargo, según el *Diario de Madrid* de entonces, que «entra de lleno en las características, cualidades y aptitudes con que la feminidad ha sido milenariamente adornada» —*cfr.* Julio IGLESIAS DE USSEL y Juan José RUÍZ RICO [28] (Cap. VIII, p. 160)—.

La desigualdad en el trabajo entre hombres y mujeres es más que patente, y eso ocurre en todos los países. El futuro del trabajo pasa por considerar la perspectiva de las mujeres —*cfr.* Arantxa RODRÍGUEZ, Begoña GOÑI y Gurutze MAGUREGI [29]—. Aunque creamos a Jean ONIMUS[17] y a tantos

[16] Actualmente parece que la denominación políticamente correcta es: seres humanos con *necesidades intelectuales especiales.*

[17] Los vaticinios sobre el fin del trabajo resuenan de constante en nuestros oídos —*cfr.* Jeremy RIFKIN [30]—. No es hasta comienzos del siglo XIX, con pensadores como François Maria Charles FOURIER o Claude-Henri de Rouvroy, Conde de SAINT-SIMON, cuando se ensalza el trabajo. FOURIER defiende su necesidad psicológica: «el trabajo bien entendido

otros, cuando afirman que en el futuro no habrá que trabajar, o al menos muy poco, al haber conseguido que todas las tareas rutinarias sean realizadas por máquinas. Aún así, llegar a ello pasa por la igualdad laboral efectiva entre mujeres y hombres.

La riqueza básica que generan las familias en las sociedades, suele producirse, con demasiada frecuencia, en condiciones que Marilyn WARING califica de esclavitud [37]. La vital importancia de las funciones que realiza la mujer hace que la decadencia de la familia, observada en multitud de países, sea algo verdaderamente preocupante.

Pero «marginadas» es un término muy suave. En muchas sociedades, las reglas que rigen la familia son profundamente patriarcales, con prácticas como asesinato de niñas nada más nacer, debido a la pobreza de la «familia» donde tuvo la desgracia de nacer y a que al ser niña, en un futuro, su casamiento deberá ir acompañado de dote; asesinatos por dote (las muertes «accidentales» de esposas que no pagaron la dote que prometieron); asesinato mediante lapidación, por haber mantenido relaciones sexuales fuera del matrimonio (aunque ella esté soltera); sentencias de ejecución de violación múltiple, por adulterio cometido por algún familiar varón; sumisión sexual forzosa; circuncisión femenina; matrimonios contratados por los padres, incluso desde antes de nacer; prohibición de enamorarse sin permiso de los padres o de la tribu.

A todo ello hay que unir la discriminación y la explotación de la mujer.

Parece que se olvida que la mujer es una pieza necesaria sin la cual no existiríamos. Todo el mundo tiene una madre. No hay úteros artificiales. Sin las mujeres no hay niños. Sin las mujeres no existe el futuro. Porque sin niños no hay futuro. Quizás en el futuro proliferen los úteros artificiales —y nos alegraremos, porque bastante sufren las mujeres en el parto, además de los peligros que conlleva—. Pero actualmente no es así.

Los juegos tampoco han sido impermeables a estas detestables conductas.

---

responde a una necesidad y nos realiza como personas». SAINT-SIMON sentencia que «la nación más feliz es la que cuenta con menos desocupados». Pierre-Joseph PROUDHON, Georg Wilhelm Friedrich HEGEL y Karl Heinrich MARX afirman que el trabajo es la esencia del hombre, su principal medio de expresión y realización. ONIMUS defiende, como ya hicieran Ivan ILLICH [31] (p. 63), Herbert MARCUSE [32] (en el prólogo) o Henri-Louis BERGSON [33] (p. 232), las actividades libres, la liberación del peso del trabajo, de las tareas más esclavizantes y repetitivas, la liberación de la rutina «metro, curro y sueño» —*cfr.* Jean ONIMUS [34] (p. 154)—. Pero ONIMUS va más allá; en contra de pensamientos tan catastrofistas como los de Pierre THUILLIER [35], defiende la mutación de la sociedad industrial en una sociedad plena de satisfacciones y liberada prácticamente del peso del trabajo, soportado ampliamente por automatismos. Esto ya había sido sostenido en 1950 por Teilhard DE CHARDIN [36] (p. 222) —citado por ONIMUS [34], p. 61—.

Con un mínima búsqueda por la red, encontramos juegos repugnantes sobre terrorismo, racismo, etc. Existe también una infinidad de juegos en los que las mujeres son meros objetos sexuales o pueden ser agredidas fácilmente —*cfr.* Amnistía Internacional [38]—.

Y toda esta historia, no se nos olvide, es nuestra historia. Permítasenos recordar el «imperativo categórico» de Enmanuel Kant: *uno debe actuar solo de acuerdo con principios de los que se pueda desear que lleguen a ser leyes universales*[18]. Es decir, aplicables a uno mismo. Conclusión: no desees para el otro, lo que no quieras para ti.

Pero falta mucho para que esté completo el marco institucional mundial necesario para una sociedad mundial justa. Paul Streeten, economista experto en desarrollo, destaca las siguientes innovaciones institucionales [40]:

a) un banco internacional, encargado de coordinar los mercados financieros y la liquidez internacional;
b) un servicio de deuda nacional, para resolver la crisis de deuda del Tercer Mundo;
c) un cuerpo coordinador de las inversiones a gran escala duraderas;
d) un fondo internacional de inversiones, encargado de canalizar los excedentes de los países ricos hacia los países pobres, de manera que sea beneficioso para ambas partes;
e) un foro de la energía, con la participación de productores y consumidores, a la búsqueda de una estructura estable de precios;
f) un organismo de protección mundial del medio ambiente;
g) un sistema de estabilización de los precios de los bienes;
h) una entidad mundial que limite los monopolios y las prácticas restrictivas;
i) un impuesto internacional sobre la renta o sobre el consumo, para su redistribución hacia los países pobres;
j) un organismo internacional e independiente que garantice la eficacia de esta ayuda;
k) un sistema de derecho internacional más desarrollado y más vinculante.

Claro que por pensar, en realidad, de lo que se trataría, es de que al igual que somos tolerantes olvidando bastante de nuestra individualidad para vivir en sociedad, también lo seamos con las demás especies, y, rechazando de una vez por todas nuestra vil arrogancia, sin sentido ni fundamento alguno, consigamos la gran meta de vivir en sociedad con el resto de los seres vivos.

[18] Una primera formulación: «actúa solo de acuerdo con una máxima que puedas considerar simultáneamente como una ley universal»; una segunda: «actúa de tal modo que nunca trates a la humanidad, en tu persona o en la persona de otro, como un simple medio sino siempre también como un fin». —*cfr.* Ben Dupré [39] (pp. 76-79)—.

Pero seamos realistas: pretender ampliar esta comunidad a los grandes primates, como defienden en su libro, Paola CAVALIERI y Peter SINGER [41], es un objetivo a largo plazo, a muy largo plazo; y pretender ampliarla a otros seres vivos, es, sencillamente, una utopía. Aunque confiamos en que nunca sea una ucronía. La justicia, como la estabilidad y el equilibrio, solo es una cuestión de tiempo.

¿Y qué podemos decir sobre los pueblos nativos? Tantas tribus han sido desposeídas, esclavizadas y exterminadas, que se pierde la cuenta. Los indios de América del Norte, deportados, confinados en «reservas»; los aborígenes australianos, cazados por los británicos; la población india brasileña, diezmada. Perviven más de 150 millones de indígenas en 60 países y en ninguno son respetados —*cfr.* Survival (`http://www.survival.es/`)—.

Por todo ello, no debe sorprendernos el resultado del *dilema del prisionero*. El egoísmo forma parte de nuestra visión actual del mundo. Ni siquiera la persona más desprendida lo es del todo. Forma parte de nuestro ser, del misterio de los misterios, de nuestra evolución como individuos y como sociedad.

El dilema iterado del prisionero

Imagine ahora que deseamos que la compraventa o trueque puntual, de la que hablábamos en el ejemplo anterior, se convierta en una relación estable de tipo proveedor-cliente o proveedor-proveedor, respectivamente. Se desea una relación regular, por ejemplo, mensual, durante toda la vida. Mantengamos la condición de que no pueden conocerse, y que, a tal efecto, se siguen depositando las mercancías en lugares diferentes, previamente designados.

De pronto, su proveedor le falla un mes. ¿Qué hará usted? ¿Fingirá no haberse dado cuenta y depositará su mercancía el mes siguiente, como si nada hubiese pasado? ¿O le pagará con la misma moneda, siendo usted el que no deposite la mercancía el mes siguiente?

Quizás sea Robert AXELROD, de la Universidad de Michigan, quien más ha estudiado la iteración del dilema del prisionero, es decir, que los jugadores interactúen más de una vez, y que cada «encuentro» se rija por las reglas del dilema del prisionero —*cfr.* AXELROD [42]—. De 1980 datan sus primeros experimentos por ordenador que simulaban el dilema iterado. No obstante, hemos de decir que el experimento de FLOOD y DRESHER, de enero de 1950, también era un dilema iterado del prisionero.

AXELROD pidió a varios especialistas en teoría de juegos, psicólogos, sociólogos, expertos en ciencias políticas, filósofos y economistas, que aportaran estrategias que creyesen la mejor o las mejores para el dilema iterativo del prisionero. Cada dilema se evaluaba según la siguiente matriz de pagos (puntos):

	Cooperar	Defraudar
Cooperar	(3,3)	(0,5)
Defraudar	(5,0)	(1,1)

Cada dilema iterativo constaba de 200 dilemas de un solo lance, por lo que un jugador podía ganar entre 0 y 1000 puntos, que corresponderían al dilema iterado en el que se enfrentaba la estrategia *siempre cooperar* —independientemente de lo que haga la otra—, contra la estrategia *siempre defraudar* —también independientemente de lo que haga la otra—. Observe el lector, que si dos jugadores cooperaban siempre, ganarían 600 puntos cada uno.

La estrategia ganadora fue *tit for tat* —que podría traducirse por «donde las dan, las toman», «ojo por ojo», «represalia equivalente», «tal para cual», «toma y daca» o cualquier expresión similar—, propuesta por el psicólogo y filósofo de la Universidad de Toronto, Anatol Rapoport. Esta estrategia coopera en el primer dilema, y en lo sucesivo, hace lo mismo que haya hecho el otro jugador en el dilema precedente.

Veamos un *ejemplo de dilema iterado* para los siguientes jugadores:

Jugador A: Actúa según la estrategia *tit for tat* precisa, es decir, coopera en el primer dilema, y en lo sucesivo, hace lo mismo que haya hecho el otro jugador en el dilema precedente.

Jugador B: Actúa según una estrategia *tit for tat* imprecisa; coopera en el primer dilema, y en lo sucesivo, considera lo que haya hecho el otro jugador en el dilema precedente, de manera que, si ha defraudado, B defrauda, mientras que si ha cooperado, B defrauda, con una probabilidad 1/10, en los dilemas consecutivos a la cooperación del otro jugador. Esta estrategia fue enviada por Johann Joss, un matemático de Zurich.

Un ejemplo de dilema iterado, entre estos dos jugadores, A y B, se aprecia en el siguiente cuadro:

	Iteración																
Jugador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	… n	…
A	C	C	C	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	… D	…
B	C	C	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	D	… D	…

En el cuarto dilema, debido a la probabilidad de defraudar, B defrauda. Como consecuencia de ello, A defrauda en el quinto dilema. Sin embargo, B

coopera en el quinto. A partir de aquí la situación se va alternando, pues la defraudación de A en el quinto, implica la defraudación de B en el sexto, la cual implica la defraudación de A en el séptimo, etc., mientras que la cooperación de B en el quinto, implica la cooperación de A en el sexto, y ésta, a su vez, la cooperación de B en el séptimo, etc. La tiesura de las estrategias por las que se rigen A y B, hace que no sean capaces de salir de esta alternancia. Súbitamente, B defrauda en el decimoquinto dilema. A partir de ahí, podríamos decir que la relación termina, pues debido, de nuevo a la rigidez de sus estrategias, ambos jugadores siempre defraudarán.

Observe el lector que en las 15 primeras ocasiones en las que puede considerarse que han interactuado realmente, A ha cooperado 9 veces y B solo 8. Esto hace que la ganancia de B haya sido mayor que la de A. En concreto, según la matriz de pagos anterior, B ha ganado 40, mientras que A ha ganado 38. Pero esto no es significativo. Si en vez de ser tan rígidas sus estrategias, hubiesen sido más flexibles, seguramente habrían iniciado una estrategia de cooperación mutua para siempre. En principio, la estrategia de B de defraudar con un $1/10$ de probabilidad lo que intenta, aunque eso sí, de manera muy ingenua, es tantear al contrario, para así recabar información sobre su comportamiento. Falla en que no utiliza la información que extrae. Si B se hubiese dado cuenta de que A responde cooperando a toda cooperación, y defraudando a toda defraudación, seguramente hubiese modificado su estrategia, a la misma de A.

Axelrod llama *cumplidoras* (*nice*) a aquellas estrategias que nunca defraudan sin que lo hayan hecho sus contrarias. Axelrod concluye la importancia de ser cumplidor, esto es, de *no ser el primero en defraudar*, y de *saber perdonar*. Publicadas sus conclusiones, Axelrod convocó un segundo torneo, de mucha mayor envergadura, informando detalladamente de todo lo referente al primer torneo (todas las estrategias que participaron, posiciones en las que quedaron, etc.). Axelrod había elaborado torneos entre subconjuntos de estrategias de las presentadas (torneos subjuntivos). Había descubierto por ejemplo que *tit for two tats* (estrategia cumplidora que tolera dos defraudaciones antes de defraudar una sola vez) habría ganado el primer torneo. También les envió el desarrollo de todos estos torneos subjuntivos. Cualquier persona podía presentar la estrategia que quisiese. Solo una persona presentó *tit for tat*, su creador, Anatol Rapoport. Y, de nuevo, *tit for tat* ganó.

La estrategia *tit for two tats*, que habría ganado el primer torneo, de haberse presentado, quedó en la posición vigésimo cuarta. El éxito de una estrategia depende del ambiente en el que interactúe. ¿Hay una estrategia óptima para todos los ambientes posibles? Parece ser que no. Axelrod [42] denomina *estrategias robustas* a aquellas estrategias capaces de tener éxito en una amplia variedad de ambientes. *Tit for tat* es una estrategia robusta. ¿Hay una estrategia robusta mejor que *tit for tat*? Se desconoce.

Axelrod argumentaba que, del primer torneo, algunos habían sacado en claro que «había que ser cumplidor y saber perdonar», mientras que otros deducían que «si había otros dispuestos a cumplir y a perdonar, ¿por qué no intentar sacar ventaja de esto?» *Tit for tat* es una estrategia que responde a las defraudaciones con defraudaciones, respondiendo a las provocaciones. La mesura con la que *tit for tat* coopera y defrauda, parece ser la clave de su éxito. Esta mesura consigue inducir a sus contrincantes a comportarse de modo que ambos consigan buenos resultados. Lo que sí parece claro, a raíz de la victoria de *tit for tat*, es que hay que responder a las provocaciones, así que, «*hay que ser cumplidor, saber perdonar, y responder a las provocaciones*». Axelrod llama *cooperativas* a aquellas estrategias que cumplan estos tres rasgos.

Una observación: por si fuera poco la sencillez del diseño de *tit for tat*, note el lector que esta estrategia no puede vencer ningún dilema iterado del prisionero. A lo más, empatará. Venció el torneo, *sin vencer a ninguno de sus rivales*.

La estrategia *tit for tat* cumple, a la perfección, estos tres preceptos[19]. No obstante, esto no significa que *tit for tat* sea la «mejor» estrategia. Anatol Rapoport, su creador, en una carta dirigida a Axelrod, le advertía que no enfatizara tanto su estrategia. Decía que su estrategia era demasiado brusca en la respuesta a la provocación. De hecho, en un torneo posterior celebrado en la Universidad de Indiana, con múltiples ambientes, hubo estrategias que vencían a *tit for tat*. Eso sí, eran variantes suyas.

Pero quizás sea la tercera fase de los experimentos de Axelrod, la que más interés haya despertado, sus *torneos evolutivos*, torneos de «selección natural artificial». Axelrod parte de interpretar un dilema iterativo del prisionero como una pauta de comportamiento, como una forma de personalidad. Axelrod plantea un dilema iterativo del prisionero que a su vez se iteraba. Tras cada dilema iterativo del prisionero, las estrategias se clonaban, dependiendo el número de clones de la puntuación obtenida en el dilema iterativo precedente.

[19] En 1947, John von Neumann, uno de los padres de la teoría de juegos, del que ya hablamos anteriormente, defendía atacar por sorpresa a Rusia (también opinaba igual el filósofo y matemático Bertrand Russell). «Si me propone usted bombardearles mañana, yo le contesto, ¿por qué no hoy? Si dice usted que hoy a las cinco de la tarde, yo le digo, ¿por qué no a la una?» —*cfr.* Clay Blair [43] (p. 96)—. Observe el lector que, pensando en paralelo con el dilema iterado del prisionero, von Neumann y Russell abogaban por ser los primeros en «defraudar» (negando, por tanto, la primera de las conclusiones de Axelrod).

Aunque al principio parecieron tener éxito algunas estrategias defraudadoras, a medida que transcurrían las generaciones, su éxito era cada vez menor. De nuevo, *tit for tat* venció[20].

Tras todos estos experimentos, AXELROD [42] responde a tres preguntas clave:

a) *Viabilidad inicial*: ¿cómo puede comenzar la cooperación en un mundo de defraudación incondicional? AXELROD demuestra que un solo organismo cooperativo moriría, pero que pequeños enjambres de cooperadores conseguirían propagarse.
b) *Robustez*: ¿cómo han de ser las estrategias para tener éxito en ambientes imprevisibles y mudables? Han de ser cooperativas —es decir, cumplir los tres rasgos defendidos anteriormente— y claras.
c) *Estabilidad*: ¿podrá la cooperación protegerse frente a la defraudación? AXELROD demostró que la relación cooperación–defraudación es asimétrica: *un mundo de defraudadores puede ser invadido y conquistado por enjambres de cooperadores, pero un mundo de cooperadores, nunca puede ser conquistado por enjambres de defraudadores*, independientemente del tamaño y número de estos últimos.

VENCER AL INVENCIBLE (Y 2)

DE ACUERDO AL RELATO DE POE, con el que comenzábamos, la matriz de pagos de jugar cualquiera de nosotros contra tal niño tan repelente es:

		Niño repelente	
		«pares»	«nones»
Cualquiera	«pares»	(-1,1)	(1,-1)
de nosotros	«nones»	(1,-1)	(-1,1)

Pongámonos en el peor de los casos; la clarividencia del niño es tal que raya en la adivinación, ya que, hagamos lo que hagamos, siempre acierta nuestra jugada. En este caso, obviamente el peor de los posibles, ¿cómo no perder contra tal engendro? La clave la menciona, más adelante, POE [1] (p. 527):

> *«Se equivoca usted. Lo conozco bien, y sé que es ambas cosas. Como poeta y matemático es capaz de razonar bien, en tanto que como mero matemático hubiera sido capaz de hacerlo y habría quedado a merced del prefecto».*

[20] Chris MEREDITH [44] explora la extrema relevancia de *Tit for tat* como estrategia cooperativa en la evolución de las especies, en particular en la humana.

En efecto, lo mejor que se puede hacer —como matemático— es *no razonar en absoluto.*

Pero, ¿cómo se hace eso? Por ejemplo, introduciendo azar en nuestro proceso de decisión, de modo que, no solo podamos utilizar una *estrategia pura*, «escogemos "pares"» o «escogemos "nones"», sino también una *estrategia mixta*, esto es, «escogemos "pares" con una probabilidad p» o «escogemos "nones" con una probabilidad $1 - p$»[21].

De este modo, ante nuestra estéril inteligencia, incapaz de producir ninguna ocurrencia conveniente, podríamos recurrir, por ejemplo, a lanzar una moneda, y sacar pares siempre que salga cara. Como suponemos que el niño no puede predecir el resultado del lanzamiento de una moneda, entonces, en media, cada uno ganará la mitad de las veces. Pero observemos, que no solo no perderemos, sino que *tampoco ganaremos*, independientemente de lo bien o mal que juegue el niño[22].

Como norma general, cuanto más hábil sea nuestro contrincante, si nos vemos obligados a jugar, ¿deberemos usar un procedimiento aleatorio? Las matemáticas concluyen que, siempre que no queramos perder, *casi siempre.*

Consenso y bienestar social

Son muy conocidos tres problemas en los procedimientos de votación: la generación de *circuitos* (intransividades), que el método de votación sea *dictatorial* y la posibilidad de *manipular* el resultado (proponer una estructura de preferencia que no es la real, sino la más ventajosa para favorecer a una alternativa o candidato determinado).

Los seres humanos tomamos conciencia de la propiedad transitiva sobre los siete u ocho años —*cfr.* Ross Vasta, Marshall M. Haith y Scott A. Miller [45] (pp 268-269)—. A partir de ahí, comenzamos a jugar, conscientemente, con ella[23]. *Piedra, papel o tijeras* («Roca, papel, tijeras», RPT) es un ejemplo de

[21] Es decir, usamos un instrumento aleatorio para elegir una de las estrategias puras posibles.

[22] Y, por cierto, ¿qué hacemos si sospechamos que la moneda está sesgada o simplemente para asegurar que no lo está? Lanzamos la moneda dos veces, redefiniendo «cara» como «cara-cruz» y «cruz» como «cruz-cara», hasta que obtengamos una de las dos secuencias (si sale «cara-cara» o «cruz-cruz», lanzamos otra vez la moneda) —obsérvese que si la probabilidad de que salga «cara» es p, la de que salga «cara-cruz» es $p(1 - p)$ y la de que salga «cruz-cara» es $(1 - p)p$, esto es, la misma— (según Barrow [13] (cap. 69), esto lo ideó John von Neumann).

[23] ¿Y los animales? Sara J. Shettleworth concluye, tras diversas experiencias, que las palomas y los chimpancés siguen un esquema transitivo de preferencias —*cfr.* Shettle-

juego (de suma nula) que ha ilustrado en múltiples ocasiones la intransitividad. Lo juegan dos jugadores. Cada uno oculta una de sus manos. El juego consiste en sacar piedra (roca) (puño cerrado), papel (mano abierta con los dedos extendidos) o tijeras (los dedos índice y medio forman una V). Las reglas son sencillas: R gana a T, T a P y P a R. Es inmediato el ciclo intransitivo de preferencias: R $\succ$ T $\succ$ P $\succ$ R —*cfr.* Mauricio SOTO [47]—[24].

Kenneth O. MAY [49] —*vía* Douglas John WHITE [50] (pp. 32-33)—, cita el caso de un piloto al que se sometió a tres situaciones de elección: llamas o metal ardiente, metal ardiente o caída, caída o llamas. Su estructura de preferencias fue intransitiva: prefirió las llamas al metal ardiente, éste a la caída y ésta a las llamas. Ello se debió a que focalizó su atención de manera diferente en cada situación: calor, soporte y probabilidad de muerte, respectivamente.

Supongamos que las estructuras de preferencias de los nueve miembros de un jurado sobre tres candidatos, Ángel Cristina y Victoria, son las siguientes. Tres opinan que Ángel $\succ$ Cristina $\succ$ Victoria, dos que Cristina $\succ$ Victoria $\succ$ Ángel, otros dos, que Victoria $\succ$ Cristina $\succ$ Ángel, uno, que Victoria $\succ$ Ángel $\succ$ Cristina y otro, que Ángel $\succ$ Victoria $\succ$ Cristina.

Simon LHUILIER —*cfr.* Pierre MOESSINGER [51]—, propone elegir el candidato que sea el mejor para más de la mitad de votantes, y si esto no es posible, elegir el candidato que haya sido propuesto por la mayoría de votantes en primer o en segundo lugar. En el ejemplo anterior, elegiríamos a Cristina, pues ha sido propuesta 7 veces en primer o segundo lugar, mientras que Victoria ha sido propuesta 6 veces, y Ángel, 5 veces.

Un ejemplo, para el que el método de LHUILIER no decide es el siguiente. Imaginemos los anteriores tres candidatos, y un jurado tripartito, de tal manera que las estructuras de preferencia u opiniones individuales de los miembros del jurado hubiesen sido: $\big[$Ángel $\succ$ Cristina $\succ$ Victoria$\big]$, $\big[$Cristina $\succ$ Victoria

---

WORTH [46] (transparencia número 38).

[24] Marcus du SAUTOY [48] (p. 140) relata cómo las casas de subastas Sotheby's y Christie's acordaron jugarse a piedra, papel o tijeras, una sola vez, la subasta de una colección de Cézanne y Van Gogh. Sotherby's contrató a un equipo de analistas que concluyeron que lo mejor era jugar al azar. Christie's preguntó a una niña de 11 años, hija de un empleado, que argumentó: «Todo el mundo supone siempre que vas a elegir piedra, y por eso eligen papel. Lo que hay que hacer es elegir tijeras». Ganó Christie's. La repetición en el tiempo de este juego tan simple permite modelizar situaciones de desacuerdo permanente resultantes de las continuas alternancias de opinión entre diferentes grupos sociales y la consecuente posible no consolidación de una alternativa (correspondiente a la intransitividad subyacente). Incluso existiendo una pluralidad de opciones o corrientes de pensamiento elegibles y sustentables —*cfr.* Josep María COLOMER [14] (p35 y ss.)—. Si bien, que esto desemboque en un conflicto, incluso armado, dependerá del *sentido común* humano más que de la teoría de juegos.

$\succ$ Ángel] y [Victoria $\succ$ Ángel $\succ$ Cristina]. En este caso, el método de LHUILIER asigna dos puntos a cada uno de los tres candidatos.

La regla de decisión por mayoría no es, como uno podría pensar la mejor forma de agregar las voluntades individuales. Fue Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat CONDORCET quien, hace más de doscientos años, señaló la posible existencia de ciclos en las preferencias, de intransitividades —dificultad conocida actualmente como «paradoja del voto» o «efecto CONDORCET». Una manera de evitar caer en ella es aplicar el *procedimiento de BLACK y COOMBS* [52] y se basa en la condición de unimodalidad aplicada a las opiniones individuales subjetivas que hace que éstas se reduzcan a una clase de opiniones compatibles o respetuosas con un cierto orden objetivamente definido en el conjunto de alternativas —*cfr.* Rafael INFANTE [53] (cap. 30, pp. 6-12)—. El problema con esta solución es la necesidad de que exista tal orden objetivo. Por ejemplo, si se debatiese sobre la elección de un precio de venta al público, las alternativas estarán ordenadas según el orden numérico natural. Si se barajasen los precios, en euros, $A = 18$, $B = 20$, $C = 22$ y $D = 25$, entonces, no podríamos, por ejemplo, considerar el orden de preferencia subjetivo: $B \succ A \succ D \succ C$, pues al ser B el preferido y estar C más próximo a B que D, C debería ser preferido a D.

CONDORCET propone contar todos los votos por pares. Observemos que, en ambos ejemplos, la estrategia de CONDORCET genera la estructura intransitiva de preferencias: Ángel $\succ$ Cristina $\succ$ Victoria $\succ$ Ángel. En efecto, en el primer ejemplo: Ángel $\succ$ Cristina (5 votos), Cristina $\succ$ Ángel (4 votos), Ángel $\succ$ Victoria (4 votos), Victoria $\succ$ Ángel (5 votos), Cristina $\succ$ Victoria (5 votos) y Victoria $\succ$ Cristina (4 votos). Y en el segundo: Ángel $\succ$ Cristina (2 votos), Cristina $\succ$ Ángel (1 voto), Ángel $\succ$ Victoria (1 voto), Victoria $\succ$ Ángel (2 votos), Cristina $\succ$ Victoria (2 votos) y Victoria $\succ$ Cristina (1 voto).

MUCHO SE HA ESCRITO Y SE SIGUE ESCRIBIENDO sobre *agregación de preferencias individuales*. Kenneth Joseph ARROW (premio Nobel de Economía en 1972, en parte por estos estudios), con toda seguridad fue el primero en aportar una luz clara sobre estas cuestiones. Su enfoque es axiomático. Exigió un conjunto de cinco axiomas, que deberían satisfacer toda constitución —*función de bienestar social*, es el nombre matemático—, es decir, todo método que asigne una ordenación de preferencias u *opinión colectiva* a cada una de las posibles configuraciones de preferencias individuales.

Los cinco axiomas de ARROW son [54]:

1) *Axioma de universalidad.* ARROW argumentaba que las constituciones de los países, o de las uniones entre países, deben tener carácter universal, en el

sentido de que mediante su normativa, la sociedad debe ser capaz de agregar cualquiera de las configuraciones de preferencia que pueda presentarse. Es un carácter previsor universal. Por ejemplo, esta consideración cobra importancia en este momento de la historia de la Unión Europea, cuando se dan los primeros pasos para desarrollar la Constitución Europea.

2) *Axioma de unanimidad* (o de *asociación positiva de valores individuales y sociales*). Es admitir la idea de que la preferencia social debe reflejar las preferencias individuales. Si cada uno de los individuos prefiere x a y, entonces, el colectivo debe preferir x a y.
3) *Axioma de determinación por pares* (o de *independencia de alternativas irrelevantes*). La preferencia que cada individuo otorgue a x e y debe permanecer invariable frente a las preferencias de los individuos respecto de otras alternativas. Por ello, y admitido el axioma anterior, la preferencia colectiva respecto de x e y, deberá también permanecer invariable frente a las preferencias individuales respecto de otras alternativas.
4) *Axioma de completitud* (o de *soberanía ciudadana*). Para todo par de alternativas, o bien, x es preferida a y, o bien, y es preferida a x, o ambas, es decir, son indiferentes.
5) *Axioma de transitividad.* La relación de preferencia ha de ser transitiva, esto es, si x es preferida a y, e y es preferida a z, entonces, x es preferida a z.

Pues bien, Arrow consigue demostrar que las únicas constituciones que satisfacen estos cinco axiomas son dictatoriales, entendiendo por dictador cualquier individuo con poder para imponer a la sociedad su preferencia estricta sobre cualquier par de alternativas.

Para demostrar su «teorema de imposibilidad», Arrow añadió un sexto, el *axioma de ordenación no dictatorial* (ningún individuo es dictador), y probó que no existe constitución capaz de satisfacer simultáneamente los seis axiomas. Se deduce, pues, lo dicho.

Para un inicio sabroso en este tema recomendamos la lectura del excelente artículo *Decisiones racionales colectivas* de Douglas H. Blair y Robert A. Pollack [55].

Ejemplos susceptibles de manipuleo son los siguientes.

Ejemplo 1. En un acto de elección, supongamos cuatro candidatos a ser contratados: Ángel, Cristina, Luis y Victoria. Supongamos que la comisión de contratación, formada por tres individuos, cada uno con su propio criterio C_1, C_2 y C_3, respectivamente, ha decidido en cada estructura de preferencias, se asignase cuatro puntos al primero, tres al segundo, dos al tercero y uno al cuarto. Ángel, Cristina y Victoria tienen como «padrinos» respectivamente, a C_1, C_2 y C_3. Luis, aunque tiene un curriculum ligeramente mejor, está desasistido, así que no cuenta. ¡Lo sentimos! Esa es la realidad. Todo ello es de dominio público (información previa). Si C_1 y C_2 votan racionalmente, entonces, sólo cambiarán el 3 por el 4 en Ángel y Victoria. Ante esto, el candidato de C_2, Cristina, no puede ganar (pues Ángel o Victoria, alguno de los dos, recibirá al menos dos puntos), sin embargo, C_2 puede decidir si gana Ángel o Victoria, según asigne valores a x, y, z.

	C_1	C_2	C_3
Ángel	4	x	3
Cristina	2	4	2
Luis	1	y	1
Victoria	3	z	4

Es decir, al conocer el método de cálculo de puntuaciones finales, cualquier miembro del jurado, podría tomar una actitud parcial, de favoritismo hacia algún candidato. Cualquier miembro de un jurado, si dispone de información previa, tiene la posibilidad de votar en función del método de votación elegido y no de sus preferencias. A esto se refiere el término *manipulación*[25]. Allan Gibbard demostró la imposibilidad de encontrar un procedimiento de votación que sea a la vez no dictatorial y no manipulable [56] (p. 587): «Todo esquema de votación no dictatorial con al menos tres posibles resultados está sujeto a la manipulación individual».

Ejemplo 2. Para el próximo reclutamiento, en la organización X deciden proponer dos pruebas estructuradas (los entrevistadores proporcionan una lista estable de cuestiones), que contienen cuestiones de respuesta de elección múltiple, cuestiones de profundidad (desarrollo de temas), cuestiones interactivas de descripción de conductas (¿qué harían los entrevistados en tal o cual supuesto o simulación?) y de tensión (que provocan a los entrevistados, inspeccionando su grado de paciencia). Lo novedoso, creen en X, es que el número de cuestiones lo determinan los candidatos (esto mide su potencial de aceptación de riesgo, de atrevimiento). La dinámica de las pruebas es ir solicitando cuantas cuestiones deseen, se atrevan y se arriesguen a fallar. El candidato A, en la primera, solicita 6 (falla en la 6) y en la segunda, 19 (falla al principio 7 seguidas). El candidato B, en la primera, solicita 14 (falla las 4, 9, 10) y en la segunda, 6. Los porcentajes de aciertos son:

[25] Cuidado querido lector con aquellos que te intentarán convencer de que no es tal el manipuleo sino solo negociación.

	Primera prueba	Segunda prueba
A	5 de 6	7 de 19
B	11 de 14	2 de 6

Por pruebas[26], $A \succ B$, mientras que en el global, $A \prec B$. En efecto, como en la primera prueba $\frac{5}{6} > \frac{11}{14}$ y en la segunda, $\frac{7}{19} > \frac{2}{6}$, $A \succ B$. Sin embargo, en el global, $\frac{12}{25} < \frac{13}{20}$, por lo que $A \prec B$. En otras palabras, que si no se fijan reglas de antemano (en este caso, elección por pruebas o según el global), podrá haber manipuleo del resultado por parte de quien establece dichas reglas o coordina el proceso[27].

Ejemplo 3 —adaptado de [58] (pp. 51-52)—. Imaginemos ahora que hay cuatro candidatos: A, B, C y D y un comité de selección de 5 miembros, S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5, cuyas preferencias son:

Miembro	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Ordenación	A	A	C	D	B
d e preferencias	B	D	B	C	C
	C	C	A	A	A
	D	B	D	B	D

Por mayoría simple, se seleccionaría A (le votan S_1 y S_2). Pero, ¿y si se propone elegir de dos en dos de forma eliminatoria (como un torneo de tenis)? Ganaría C. En efecto, en el enfrentamiento entre A y B, gana A, 3 a 2; entre A y C, gana C, 2 a 3 y entre C y D, gana C, 3 a 2.

Ejemplo 4 —adaptado de [13] (cap. 14)—. Imaginemos ahora a 5 personas P_1, P_2, P_3 y P_4 y P_5 que deben decidir sobre la aprobación de 3 cuestiones, C_1, C_2 y C_3, siendo sus preferencias:

	C_1	C_2	C_3
P_1	Sí	Sí	No
P_2	No	Sí	Sí
P_3	Sí	No	Sí
Mayoría $\{P_1, P_2, P_3\}$	Sí	Sí	Sí

[26] Enfoque individualista (por pruebas) de una acción colectiva (evaluación global del candidato).

[27] Obsérvese la relación de esto con los promedios. Estamos tan habituados a utilizarlos que a veces no nos damos cuenta de que los usamos mal inadvertidamente o de que otros los usan mal adrede. Con los promedios se pueden camuflar mentiras y medias verdades —para saber cómo lo hacen, en general en Estadística, puede verse Darrell Huff [57]—.

	C_1	C_2	C_3
P_4	No	No	No
P_5	No	No	No
Mayoría $\{P_4, P_5\}$	No	No	No
Mayoría $\{P_1 \ldots P_5\}$	No	No	No

Si juntamos las preferencias expuestas en pos de una decisión final, para cada una de las tres cuestiones existe una mayoría de 3 a 2 a favor del No, por lo que ninguna de las cuestiones seguirá hacia adelante. Lo inquietante es que *una mayoría de personas*, P_1, P_2 y P_3 (3 de 5), *opinan lo contrario a la decisión final tomada en la mayoría de las cuestiones* (2 de 3).

El juego de la vida

Los juegos sociales repetitivos entre humanos no son de azar sino de estrategia. En ellos la *falacia del jugador* no es válida[28] —las rachas no son casualidades—, pues sí que influyen el polietismo —diferentes roles sociales— y los múltiples mecanismos sociales —la sinceridad, la honestidad, la humildad, la confianza, la hipocresía, la decepción, etc.—, oscilando el resultado entre el protagonismo y el ostracismo —«In medio stat virtus, quando extrema sunt vitiosa» (Horacio)—.

El farol es una estrategia usada en múltiples juegos —clásicos como *bridge*, *espadas*, *mus* o *póquer*; más modernos, como *Condottiere, palabras cruzadas (Scrable) o stratego*—. El faroleo es un tipo particular de manipuleo. Y también está ampliamente presente en el *juego de la vida*. El *Confíe en nosotros, somos expertos* —*cfr.* Sheldon Rampton y John Stauber [59], clásico acerca de la creación de la opinión pública en los Estados Unidos—, en su mejor versión de falacia por autoridad (*argumento ad verecundiam*), está de moda en la pasarela de facundias de políticos al uso. La *hipnosis colectiva* que produce la televisión —*cfr.* Santiago Camacho [60] (pp. 146-149)— y símiles, cataliza el entontecimiento de la ciudadanía y su inversión en masa espectadora del desfile, contribuyendo a la transformación de la opinión pública en la no-opinión de una masa. A esto se añade la aparente inevitabilidad de que siempre que esté regida por una élite dirigente, la sociedad sustentará una televisión pública que será manipulada políticamente por dicha élite. Y es que la masa responde muchísimo más a emociones que a razonamientos. Fisiológicamente se consi-

[28] Esto es, *no es cierto* que en el *juego repetitivo de confianza* de la relación entre dos personas, A y B, a medida que aumenta el número de veces que A ha apoyado a B, se incrementa la probabilidad de que la siguiente vez no le apoye.

gue atontarnos, durmiendo nuestra corteza cerebral (nuestro razonamiento) y haciendo predominar a nuestro sistema límbico (nuestras emociones) —las técnicas de la programación neurolingüística (PNL) tan en boga son más de lo mismo, meros manipuleos—. Pero manipular es agredir y a traición. *Todo manipuleo es una agresión* y nuestro deber y derecho es de defensa (igual que nos defendemos de los faroles en juegos con faroleo). El método de actuación para frustrar las intentonas de manipuleo que nos propone Philippe Breton [61] (p. 41 y ss. y cap. 5) consta de tres competencias: la *objetivación de las emociones*, para uno mismo y para el otro, la *escucha activa*, también tanto del otro como de uno mismo y la *afirmación argumentada del punto de vista propio*. Por ejemplo, esos políticos que atacan esta última competencia, las afirmaciones argumentadas de nuestros puntos de vista, con retales de su penosa demagogia tales como: «Sabemos que no comparten nuestras ideas, pero utilícenos para echar por fin de una patada a tanto político corrupto. Con nosotros, al menos se producirá un cambio radical» —*cfr.* Breton [61] (pp. 92-93)—. Ser demagogo es extremadamente sencillo y ante la masa, sin duda, rentable. Ser veraz es difícil y frecuentemente desesperanzador, impopular e infecundo.

Aunque los clásicos defiendan el predominio del egoísmo en el curso evolutivo de la generosidad en los individuos, estudios recientes sobre asunción de roles (*role-taking*), generosidad y cooperación como el de Carlos J. Leighton [62], muestran la presencia de conductas pro-sociales en edades tempranas, lo cual debiera aprovecharse para fomentar la implantación de la cooperación en el fenotipo humano, lo que brindaría la certeza al imperativo kantiano[29], lográndose trocar la cooperación en fermento impulsor de la fluidez social. Factores como la confianza, el valor compartir, el uso de estrategias no miopes, los juegos con cooperación, las interacciones negociadoras, las intermediaciones bienintencionadas, la comunicación, los gestos, la prudencia, la moderación de los temperamentos, la aversión a romper las hostilidades, se muestran esenciales para la convivencia. Por eso debemos luchar por su integración desde edades tempranas en el proceso de enseñanza-aprendizaje: (re)educar desde la confianza, desde el compartir, desde el uso de estrategias no miopes, etc.[30] No olvidemos que el juego y la imitación son son los mecanismos básicos del aprendizaje tanto humano como de otras especies animales. Sin embargo, uno de los problemas aparentes es que el ser humano identifica estas variables co-

[29] *Cfr.* nota a pie núm. 18.

[30] Por ejemplo, la confianza y el compartir como referentes comunes, válidos universalmente, sin necesidad de comunicación; lo que en teoría de juegos se conoce como *puntos focales* o *puntos de Schelling* —*cfr.* Thomas Crombie Schelling [63]—.

mo obligaciones para la vida en sociedad y no como consustanciales. Prima entre nosotros el interés particular (como individuo o grupo) sobre el colectivo, obligándonos a la observación de dichos parámetros en busca de equilibrios de unas fuerzas que han brotado de lo no comunal por causa de nuestro egoísmo. Sucumbimos a la tentación de la jugada individualmente ganadora. Porque incluso el egoísmo, engalanado con una supuesta inteligencia, se viste en no pocas ocasiones de altruismo. La realidad es que la panoplia de estrategias vivas en el *juego político* y en los *sistemas de gobierno* imperantes y mayoritariamente propugnados no entiende ni de reglas —incesante e impunemente quebrantadas—, ni de ética —constantemente rehuida— ni de personas —permanentemente vilipendiadas—. Los jugadores del juego político deben actuar con transparencia y limpieza, con sinceridad, publicidad y comunicación con el resto de jugadores —*cfr.* Carlos Climent [64] (p. 208)—. Esto se extiende a cualquier *«juego» de convivencia*, al *«juego» social* y en definitiva al *«juego» de la vida*, debiendo todos ser juegos limpios, claros, transparentes, sin manipuleos, sin engaños, sin artificios, sin tergiversaciones[31]. Ojalá los humanos nos percatemos pronto de que las reglas del *gran juego*, el de la vida, son tanto los derechos como los deberes sociales y que ambos son connaturales.

Diciembre de 2014, Cáceres, Extremadura (ES-EX), España.

Referencias

[1] E. A. Poe. La carta robada. En: *Cuentos*, páginas 514–534. Alianza, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1983.

[2] J. Vallverdú. *¡Hasta la vista, baby!: Un ensayo sobre los tecnopensamientos.* Anthropos, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 2011.

[3] J. von Neumann. Zur theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100:295–320, 1928.

[4] K. Binmore. *Teoría de juegos.* McGraw-Hill, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1994.

[5] J. von Neumann y O. Morgenstern. *The theory of games and economic behavior.* Princenton University Press, Princenton, Nueva Jersey (US-NJ), Estados Unidos, 1944. Disponible en: `https://archive.org/details/theoryofgamesand030098mbp`.

[31] También al juego de la vida más íntimo, el *juego de la vida de un solo jugador*, nosotros y nuestra vida (y si no, pregúntese el lector por qué hay tantos libros de autoayuda).

[6] R. J. A. Goodland, C. Watson, y G. Ledec. *Environmental management in tropical agriculture.* Westview Press, Boulder, Colorado (US-CO), Estados Unidos, 1984.

[7] J. Riechmann. *Comerse el mundo: sobre ecología, ética y dieta.* Ediciones del Genal, Málaga, Andalucía (ES-AN), España, 2005.

[8] S. Nasar. *Una mente prodigiosa.* Mondadori, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 2001.

[9] J. F. Nash (Jr.). *The essential John Nash.* Princenton University Press, Princenton, Nueva Jersey (US-NJ), Estados Unidos, 2001.

[10] J. C. Harsanyi y R. Selten. *A general theory of equilibrium selection in games.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts (US-MA), Estados Unidos, 1988.

[11] R. D. Luce y H. Raïffa. *Games and decisions: Introduction and critical survey.* John Wiley and Sons, Nueva York, Nueva York (US-NY), Estados Unidos, 1957.

[12] A. Rapoport. *Two-person Game Theory: The essential ideas.* University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan (US-MI), Estados Unidos, 1966.

[13] J. D. Barrow. *El salto del tigre.* Crítica, Barcelona, ES-CT, España, 2009.

[14] J. M. Colomer. *La transición a la democracia: el modelo español.* Anagrama, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 1998.

[15] J. L. Arsuaga. *El enigma de la esfinge: La causa, el curso y el proceso de la evolución.* Areté, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 2001.

[16] J. L. Arsuaga y I. Martínez. *La especie elegida. La larga marcha de la evolución humana.* Temas de Hoy, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1988.

[17] C. Darwin. Del origen de las especies por medio de la selección natural o la conservación de las razas favorecidas en la lucha por la vida, 1859. (P. ej.: *El origen de las especies*, Alba Libros, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1998).

[18] J. M. Smith. *Evolution and the theory of games.* Cambridge University Press, Cambridge, Cambridgeshire (GB-CAM), Reino Unido, 2001. (Octava reimpresión. Publicado por vez primera en 1982).

[19] M. Rabin. Psychology and economics. *Journal of Economic Literature*, 36:11–46, 1998.

[20] T. Caplow. *Dos contra uno: teoría de coaliciones en las tríadas.* Alianza, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1974.

[21] M. Fernández Pérez. *Las tareas de la profesión de enseñar. Práctica de la racionalidad curricular: Didáctica aplicable.* Siglo XXI de España Editores, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1994.

[22] E. O. Wilson. *Sociobiología: la nueva síntesis.* Omega, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 1980.

[23] P. A. Kropotkin. *El apoyo mutuo.* Madre Tierra, Móstoles, Madrid (ES-MD), España, 1970.

[24] J. McCarry. Surinam. *National Geographic Magazine España*, 6(6):34–51, junio 2000.

[25] D. R. Hofstadter. Torneos computarizados del dilema del preso que sugieren cómo evoluciona la conducta cooperativa. *Investigación y Ciencia*, 82:108–114, julio 1983.

[26] D. R. Hofstadter. *Metamagical themes: Questing for the essence of mind and pattern.* Basic Books, Nueva York, Nueva York (ES-NY), Estados Unidos, 1985.

[27] M. M. Flood. Some experimental games. Informe Técnico RM-789, Research Memory, Rand Corporation, Santa Mónica, California (US-CA), Estados Unidos, 1952.

[28] J. Iglesias de Ussel y J. J. Ruíz Rico. Mujer y Derecho. En: *Liberación y utopía.* Akal, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1982.

[29] A. Rodríguez, B. Goñi, y G. Maguregi. *El futuro del trabajo. Reorganizar y repartir desde la perspectiva de las mujeres.* Bakeaz - Centro de Documentación y Estudios de la Mujer (CDEM), Bilbao, País Vasco (ES-PV), España, 1996.

[30] J. Rifkin. *The end of work: The decline of the global labor force and the dawn of the post-market era.* G.P. Putnam's Sons, Nueva York, Nueva York (US-NY), Estados Unidos, 1995.

[31] I. Illich. *Deschooling society.* Harper & Row, Nueva York, Nueva York (US-NY), Estados Unidos, 1972.

[32] H. Marcuse. *Eros et civilisation.* Éd. de Minuit, París, Isla de Francia (FR-J), Francia, 1963.

[33] H.-L. Bergson. *Les deux sources de la morale et de la religion.* Alcan, París, Isla de Francia (FR-J), Francia, 1932.

[34] J. Onimus. *Cuando el trabajo se acaba.* Acento, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1998.

[35] P. Thuillier. *La Grande Implosion.* Fayard, París, Isla de Francia (FR-J), Francia, 1995.

[36] T. De Chardin. *La place de l'homme dans la nature.* Albin Michel, París, Isla de Francia (FR-J), Francia, 1996.

[37] M. Waring. *If women counted: A new feminist economics.* Macmillan, Londres, Inglaterra (ENG), Reino Unido, 1989.

[38] A. Internacional. *Con la violencia hacia las mujeres no se juega.* Amnistía Internacional, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 2004. Disponible en: `http://www.amnistiacatalunya.org/edu/pdf/videojocs/04/vid-04-12.pdf`.

[39] B. Dupré. *50 cosas que hay que saber sobre filosofía.* Ariel, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 2010.

[40] P. Streeten. The evolution of development thought: Facing up to global interdependence. En: M. Ekins, Paul y Max-Neef (Ed.), *Real-Life Economics.* Routledge, Londres, Inglaterra (ENG), Reino Unido, 1992.

[41] P. Cavalieri y P. E. Singer. *El proyecto «Gran Simio ». La igualdad más allá de la humanidad.* Trotta, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1998.

[42] R. Axelrod. *La evolución de la cooperación.* Alianza, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1996.

[43] C. Blair (Jr.). Passing of a great mind. *Life*, 42(8):89–104, febrero 1957.

[44] C. Meredith. Tit for tat. *ABC Science*, abril 1998. Recuperado el 25 de noviembre de 2014 de `http://www.abc.net.au/science/articles/1998/04/23/2119397.htm`.

[45] R. Vasta, M. M. Haith, y S. A. Miller. *Child psychology: the modern science.* John Wiley and Sons, Nueva York, Nueva York (US-NY), Estados Unidos, 1999.

[46] S. J. Shettleworth. Transitive inference in animals? En: *Introduction to Learning (Lecture outlines for week 8, November 2, 1999: Can animals count?).* Department of Psychology. University of Toronto, Toronto, Ontario (CA-ON), Canadá, 1999. (Disponible en: `http://www.psych.utoronto.ca/~courses/260f/`).

[47] M. Soto. Rock, scissors, and paper: A survey of violations of transitivity. Disponible en: `http://ibrarian.net`, 2002.

[48] M. d. Sautoy. *Los misterios de los números.* Acantilado, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 2012.

[49] K. O. May. Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns. *Econometrica*, 22(1):1–13, 1954.

[50] D. J. White. *Teoría de la Decisión.* Alianza, Madrid, Madrid (ES-MD), España, segunda edición, 1979.

[51] P. Moessinger. La procédure de vote de Simon Lhuilier. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 14(54):25–32, 1976.

[52] D. Black. *The theory of commitees and elections.* Kluwer, Boston, Massachusetts (US-MA), Estados Unidos, 1958.

[53] R. Infante. *Teoría de la Decisión.* Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 1978.

[54] K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values.* John Wiley and Sons, Nueva York, Nueva York (US-NY), Estados Unidos, 1951.

[55] D. H. Blair y R. A. Pollack. Decisiones racionales colectivas. *Investigación y Ciencia*, 85:64–72, octubre 1983.

[56] A. Gibbard. Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, 41:587–601, 1973.

[57] D. Huff. *Cómo mentir con Estadísticas.* Crítica, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 2011. (Ilustrado por Irving Geis; la 1ª ed. es de 1954).

[58] J. M. Colomer. *El arte de la manipulación política. Votaciones y teoría de juegos en la política española.* Anagrama, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 1990.

[59] S. Rampton y J. Stauber. *Trust us, we're experts. How industry manipulates science and gambles with your future.* Tarcher/Putnam, Nueva York, Nueva York (US-NY), Estados Unidos, 2001.

[60] S. Camacho. *Calumnia, que algo queda.* La Esfera de los Libros, Madrid, Madrid (ES-MD), España, 2006.

[61] P. Breton. *Argumentar en situaciones difíciles.* Paidós Ibérica, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 2005.

[62] C. J. Leighton. *El desarrollo social en los niños pequeños. Egocentrismo y altruismo.* Gedisa, Barcelona, Cataluña (ES-CT), España, 1992.

[63] T. C. Schelling. *The strategy of conflict.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (US-MA), Estados Unidos, 1960.

[64] C. Climent. *La sociedad esencial. La democracia entre el altruismo y el autoritarismo.* Tirant lo Blanch, Valencia, Comunidad Valenciana (ES-VC), España, 2007.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 83 – 92

Intuición y probabilidad

M.I. Parra Arévalo, J. Montanero Fernández, E. López Sanjuán

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas, s/n, 06006 *Badajoz, Spain*
mipa@unex.es

Resumen: Todos poseemos ciertas nociones intuitivas acerca de la probabilidad que suelen ser acertadas. Sin embargo, en algunas ocasiones, los cálculos formales contradicen claramente las aproximaciones intuitivas, dando lugar a conocidas paradojas como las que recopilamos a continuación.

Según el diccionario de la lengua española, intuición es la facultad de comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonamiento. En Filosofía se define como la percepción íntima e instantánea de una idea o una verdad que aparece como evidente a quien la tiene. En nuestra vida cotidiana son muchas las situaciones en las que la intuición supone un buen atajo para aprender y tomar decisiones pero, a veces, conduce a errores sistemáticos y predecibles cuando se trata de estimar la probabilidad de un suceso. Tversky y Kahneman (1974) iniciaron el estudio de los atajos intelectuales con los que la mayoría de las personas tendemos a manejarnos a la hora de estimar probabilidades, sorprendiéndoles el escaso uso de los conceptos y herramientas formales del Cálculo de Probabilidades, incluso por parte de personas familiarizadas con el mismo.

1. La lógica contra la intuición

Ilustraremos el conflicto entre la intuición y el Cálculo de Probabilidades mediante algunos problemas relativamente conocidos.

La paradoja del cumpleaños

A nadie le sorprende que el resultado del lanzamiento de una moneda sea cruz. Sin embargo, sí puede sorprendernos que en una reunión de 23 personas dos de ellas cumplan años el mismo día. Esto no debería ser así, puesto que la probabilidad del segundo suceso es incluso algo mayor que la del primero.

Efectivamente, si denotamos por n al número de personas en una reunión, la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día viene determinada por la siguiente función que converge rápidamente a 1:

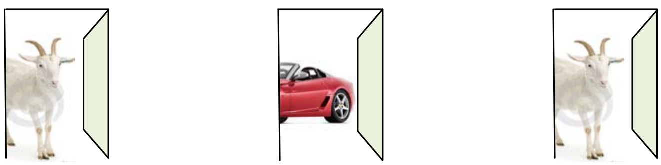
$$P(n) = 1 - \frac{\dfrac{365!}{(365-n)!}}{365^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Desde un punto de vista intuitivo podríamos concluir precipitadamente que 23 días es una cantidad demasiado pequeña para esperar repeticiones, habida cuenta de que el año consta de 365 días. Así sería si esperáramos que el cumpleaños de una persona cualquiera coincidiera con el de una persona concreta, pues la probabilidad de que esto suceda es $1-(364/365)^{n-1}$. Sin embargo, las repeticiones pueden darse entre dos personas cualesquiera, que pueden combinarse de $n(n-1)/2$ formas diferentes. Si nos preguntamos cuántas personas debe haber en una reunión para estar seguros de que dos de ellas cumplen años el mismo día, mucha gente respondería que 366, y estarían en lo cierto. Pero lo curioso es que bastan 57 personas para poder afirmar tal cosa con una probabilidad de acierto superior al 99 %.

La paradoja del cumpleaños tiene aplicaciones prácticas en el campo de la criptografía, es decir, para la protección de datos. Por ejemplo, para generar colisiones en una función aleatoria perfecta (función hash) de n bits, con una probabilidad aproximada del 50 %, se requieren $2^{n/2}$ intentos.

Problema de Monty Hall

Está basado en el concurso de televisión estadounidense *Let's Make a Deal*, emitido entre 1963 y 1986, y fue bautizado con el nombre de su presentador. El concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente. Resulta un buen ejemplo para mostrar intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicionada. El problema original fue planteado por Selvin (1975 a,b). La formulación más conocida del problema, debida a Bohl, Liberatore y Nydick (1995), es la siguiente:



Supongamos que en un concurso debes escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche y, detrás de las otras, sendas cabras; tras escoger una puerta, digamos la n° 1, el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre a propósito

> otra, digamos la nº 3, de manera que aparezca una cabra; entonces te pregunta: ¿Prefieres cambiar a la puerta nº 2? La cuestión es si cambiar de elección te beneficia, te perjudica o es indiferente.

A primera vista, podría parecer indiferente el cambiar o no de puerta, porque el coche no se va a mover. Concretamente, puede dar la impresión de que, al eliminar una puerta sin premio, la puerta elegida inicialmente tiene ahora un 50 % de probabilidad de esconder el coche. Esa la solución a la que parece conducirnos la intuición. Sin embargo, la respuesta correcta es que, en términos probabilísticos, nos beneficia cambiar sistemáticamente de puerta. Podemos razonarlo de la siguiente manera:

La probabilidad de que el concursante escoja en su primera oportunidad la puerta que oculta el coche es de 1/3, por lo que ésa sería su probabilidad de ganarlo si decide no cambiar de puerta. ¿Qué cambia cuando el presentador muestra una cabra tras una de las otras dos puertas?

- Si el jugador había escogido inicialmente la puerta que contenía el coche, el presentador puede abrir cualquiera de las otras dos puertas sin premio y, al cambiar, el jugador pierde el coche. Ello ocurrirá pues con probabilidad 1/3.
- Si el jugador había escogido una puerta tras la que había una cabra en su primera opción, lo cual ocurre con probabilidad 2/3, el presentador sólo puede abrir la puerta que contiene la otra cabra, de manera que la puerta que no abrió el presentador tiene que contener necesariamente el coche. El jugador gana con seguridad al cambiar de puerta.

Podemos razonar de manera análoga para probar que, si el jugador decide jugarse a cara o cruz si cambia o no de puerta, la probabilidad de ganar el coche es de 1/2. En definitiva, el razonamiento formal es tan correcto como sencillo, pero hemos de reconocer que a duras penas logra prevalecer sobre algún mecanismo de nuestro cerebro que intenta persuadirnos para que no cambiemos de puerta o, en todo caso, lo echemos a suertes. De hecho, éstas son las decisiones por las que optan la mayoría de las personas, por no decir todas, excepto aquéllas que se sientan y echan las cuentas, e incluso en ese último caso puede quedar la sensación de haber dejado algún cabo suelto.

Este ejemplo ilustra claramente cómo muchas de nuestras decisiones no están regidas por la lógica sino por otros factores como, por ejemplo, el miedo. Efectivamente, la típica renuencia a cambiar de puerta sin más, sin ni siquiera echarlo a suertes, puede deberse al temor a ser responsable de perder un coche que ya podría estar en nuestro poder, aunque sea poco probable. En la práctica, para cambiar de puerta es necesario vencer ese miedo irracional mediante una especie de acto de fe en la lógica. Presentamos para los más incrédulos un pequeño programa en R que permite simular n resultados de las tres posibles alternativas: mantener siempre la elección inicial, cambiar siempre la elección inicial o elegir al azar si mantenemos la puerta elegida inicialmente o cambiamos. Así, quien lo desee podrá comprobar empíricamente que las probabilidades estimadas de ganar el coche se aproximan a los valores 1/3, 2/3 y 1/2, respectivamente. De todas formas, dichosos los que crean sin haber visto.

```
n=1000
# Simulamos qué puerta contiene el coche
pcoche=sample(3,n,replace=T)
# Simulamos qué puerta elige el concursante
pelegida=sample(3,n,replace=T)
# Estimamos la probabilidad de ganar el coche sin cambiar
sum(pcoche==pelegida)/n
[1] 0.368
# Qué puerta abrirá el presentador
pabierta=ifelse(pcoche==pelegida,(pcoche+sample(c(0,1)))%%3+1,6-(pcoche+pelegida))
# Si el concursante cambia siempre de puerta
pcambio=6-(pelegida+pabierta)
# Estimamos la probabilidad de ganar el coche cambiando
sum(pcoche==pcambio)/n
[1] 0.632
# Estimamos la probabilidad de ganar el coche decidiendo al azar
# si cambiar de puerta o no, en cada oportunidad
pcambioa=ifelse(sample(c(0,1),n,replace=T),pelegida,pcambio)
# Estimamos la probabilidad de ganar el coche
sum(pcoche==pcambioa)/n
[1] 0.501
```

Un problema análogo conocido como el de los tres prisioneros fue publicado por Gardner (1959), aunque su versión hace el proceso de elección explícito.

Problema de los tres prisioneros

Es formalmente equivalente al problema de Monty Hall, aunque con una formulación más dramática, pues sustituye el coche y la cabra por la libertad y la ejecución, respectivamente.

> Tres presos, A, B y C, están encerrados en celdas separadas. El gobernador ha seleccionado gentilmente a uno de ellos al azar para ser perdonado. El alcaide sabe cuál de ellos es pero no puede decirlo. El prisionero A le pide al alcaide conocer la identidad de uno de los otros dos presos que van a ejecutar:

- Si B ha sido indultado, dame el nombre de C.
- Si C ha sido indultado, dame el nombre de B.
- Si he sido indultado yo, lanza una moneda para decidir si darme el nombre de B o de C.

> Supongamos, por ejemplo, que el alcaide le comunica a A que B va a ser ejecutado. La respuesta complace al prisionero A porque intuye que su probabilidad de sobrevivir ha subido de 1/3 a 1/2. Muy contento, confiesa su secreto a C, quien al escuchar la noticia se siente aún más feliz, porque razona que A conserva una probabilidad de 1/3 de ser el indultado, pero la suya ha subido a 2/3.

También se considera equivalente a la Paradoja de la Caja de Bertrand, presentada en su libro "Calcul des Probabilités", en 1888. De hecho, posiblemente esté basado en la misma.

Pillow Problems

Lewis Carroll, en su libro *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and a Tangled Tale Reading*, plantea 13 cuestiones de tipo probabilístico, algunas de los cuales son claros ejemplos de problemas cuya solución contradice nuestra intuición. Un ejemplo:

> Problema 5: Una bolsa contiene una bola, de la que se sabe que es blanca o negra. Se introduce una nueva bola de color blanco, se agita la bolsa, y se extrae una bola al azar, que resulta ser blanca. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que saquemos otra bola blanca?

Podría parecer que, como el contenido de la bolsa tras realizar todas las operaciones es idéntico al inicial, también lo serán las probabilidades, es decir, 1/2. De nuevo, se trata de un error, ya que la probabilidad de sacar una bola de color blanco es 2/3. Dejamos al lector la deducción de este valor.

Otro ejemplo del libro es el siguiente:

> Problema 72: Una bolsa contiene dos bolas de las cuales no se sabe nada excepto que cada una es de color blanco o negro. Determínese el color de ambas, sin necesidad de extraer ninguna de la bolsa.

Lewis Carroll da una solución aparentemente seria de este problema afirmando que la bolsa contiene una bola de cada color, cosa que no tiene por qué ser cierta, evidentemente, y lo remata con la frase literal: *"To the casual reader it may seem abnormal, even paradoxical, but I would have such a reader ask himself, candidly, the question Is not Life a Paradox?"*

El caso es que su demostración es tan extraña que resulta casi imposible razonar en qué falla exactamente, por lo que no descartamos que, en esa ocasión, el autor de *Alicia en el país de las maravillas* se hubiera excedido en el consumo de alguna seta alucinógena.

Paradoja de Parrondo

Se trata de un problema más complejo que los anteriores. En 1996, el físico Juan Manuel Parrondo tradujo al lenguaje de los juegos de azar un fenómeno que se producía en un campo de los motores brownianos: una molécula celular sometida a dos impulsos aleatorios hacia la izquierda puede moverse inopinadamente hacia la derecha. De forma análoga, dos juegos de azar justos o incluso perdedores pueden dar lugar al combinarlos a un juego ganador (Harmer y Abbott, 1999 a,b).

> Consideremos dos juegos perdedores, donde la ganancia o pérdida de jugador es de una unidad:
>
> Juego A: consiste en el simple lanzamiento de una moneda sesgada, con una probabilidad de ganar de $1/2 - \alpha$.
>
> Juego B: en este juego hay dos monedas sesgadas distintas: la moneda 1, cuya probabilidad de ganar es $1/10 - \alpha$, y la moneda 2, con una probabilidad de ganar de $3/4-\alpha$. Si la ganacia acumulada del jugador es múltiplo de tres, lanza la moneda 1; en caso contrario lanza la moneda 2.

Podríamos pensar que jugar al segundo juego es beneficioso para el jugador, ya que, aparentemente, usamos la moneda 2 con probabilidad 2/3. Sin embargo, esto no es lo que ocurre, puesto que la elección de la moneda depende del resultado de las tiradas anteriores, siendo menos probable que la ganancia acumulada sea $\dot{3}+1$. Parrondo demuestra mediante el uso de cadenas de Markov que la probabilidad de ganar al segundo juego está entre 1/3 y 1/2, concidiendo con 1/2 cuando $\alpha = 0$. Por tanto, se trata de otro juego perdedor. Tenemos pues dos juegos en los que acabaremos perdiendo a la larga. Pero Parrondo descubre que al combinar ambos juegos de cierta manera podemos ganar. En concreto, si se juegan en secuencias de dos en dos (AABBAABB ...), o cuando se salta al azar de un juego al otro, la tendencia se inclina a nuestro favor.

El juego primero, a pesar de usar una moneda "mala", redistribuye el uso de las monedas del segundo juego, haciendo que se use más la moneda "buena".

Cabe citar aquí a Stephen Hawking: *"No sólo Dios juega definitivamente a los dados sino que además a veces los lanza donde no podemos verlos."*

2. Algunas falacias en los juegos de azar

Los ejemplos anteriores podrían considerarse como problemas especiales diseñados para generar conflictos entre la razón y la intuición, una especie de trucos con distintos grados de sofisticación. No obstante, la confrontación entre la lógica y la intuición queda patente también en los juegos de azar más populares. La propia popularidad de los mismos evidencia pues la supremacía de la segunda sobre la primera.

Falacia del jugador

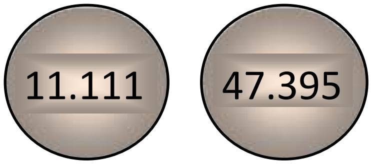
También denominada falacia de Montecarlo, debido a un hecho inusual acontecido en el Casino de Montecarlo el 18 de agosto de 1913. Ese día, en el juego de la ruleta francesa, la bola cayó en números de color negro 26 veces seguidas. A lo largo de una serie consecutiva de tiradas, los jugadores perdieron mucho dinero apostando a rojo, convencidos que no podía seguir saliendo negro una vez más. Desde un punto de vista lógico, deberíamos razonar que, si suponemos que se dan las condiciones de simetría adecuadas, una secuencia de 20 negros seguidos es tan probable como cualquier otra y, por lo tanto, no debería condicionar nuestra apuesta en la jugada 21. No obstante, una persona que no esté dispuesta a asumir la hipótesis de simetría de la ruleta y cuyo único conocimiento acerca de la misma es que ha proporcionado 20 negros en las últimas 20 veces que ha rodado, puede verse inducida a pensar que la ruleta está trucada, lo cual le conduciría a apostar de nuevo por el negro. Pero eso es justo lo contrario de lo que hizo la mayoría, arrastrada por la creencia de que ya tocaba rojo para compensar.

Este tipo de convicciones están fuertemente arraigadas incluso entre personajes de contrastada (aunque intermitente) lucidez, como el mismísimo Don Quijote, que dice literalmente: "*Todas estas borrascas que nos suceden son señales de que presto ha de serenarse el tiempo y han de sucedernos bien las cosas, porque no es posible que el mal ni el bien sean durables, y de aquí se sigue que, habiendo durado mucho el mal, el bien ya está cerca.*"

También Edgar Allan Poe argumentaba por el estilo en el epílogo de la narración detestivesca *El misterio de Marie Roget*, afirmando que, si al lanzar un dado se sacaban cinco doses seguidos, la probabilidad de sacar otro dos en la sexta tirada era inferior a 1/6, se entiende que por un misterioso fenómeno de compensación.

La lotería de Navidad

El ejemplo más pintoresco de juego de azar es el de lotería de Navidad, un evento al parecer inmejorable para dar rienda suelta a nuestra superstición con independencia del nivel económico o cultural. Veamos un ejemplo: ¿en cuál de los dos números de lotería que aparecen debajo invertirías los 20 euros que cuestan un décimo de lotería de Navidad?



Aunque entendemos perfectamente que ambos número son equiprobables, sabemos que casi nadie invertiría 20 euros en el número de la izquierda, ¿no es cierto? Es otro ejemplo de la escasa fe que solemos profesar hacia nuestra lógica. En este caso, rechazamos ese número porque su secuencia de cifras, con cinco unos seguidos, nos resulta más extraña que la del número de la derecha. Como ya hemos comentado antes, nuestro comportamiento ante los juegos de azar suele fundamentarse en la creencia de que existe una especie de ley de compensación, que en realidad no podría explicarse sin la presencia de una divinidad especializada en tal cometido. Esa ley parece ser quebrantada drásticamente por el número de la izquierda, pero no por el de la derecha. Obviamente, lo que ocurre es que números como el de la izquierda hay muy pocos entre 0 y 99.999 (concretamente 10), mientras que números como el de la derecha hay muchos y, a la hora de tomar una decisión, esta numerosa categoría se identifica y confunde en nuestro cerebro con el número que aparece en pantalla. Es decir, nuestra intuición nos convence de que ese número sí es de los que tocan porque se asemeja estéticamente a otros que tocaron en años anteriores, y por eso nos decantaríamos por él.

En todo caso, dado que tenemos 100.000 números y todos ellos son equiprobables, no deberíamos apostar por ninguno de los dos. Pero el hecho es que juegan a la lotería aproximdamente treinta y tres millones de españoles. ¿Cuáles pueden ser las causas de tal éxito? Proponemos aquí tres posibles factores: primero y como ya hemos apuntado, un deficiente procesamiento por parte de nuestra mente de números grandes como el 100.000. De hecho, si el sorteo se realizara entre un millón de bolas, nuestra actitud ante el mismo sería idéntica porque, en lo que respecta a la toma de decisiones, nuestro cerebro no distingue bien entre ambos números, sino simplemente les adjudica la etiqueta de "mucho". En segundo lugar, debemos recalcar la eficacia de las campañas publicitarias a la hora que propagar el miedo: miedo a que toque algún número que declinamos comprar en su momento o al que hemos apostado en años anteriores; miedo, o mejor dicho pánico, a que le toque a la gente que te rodea pero no ti, y que, además, te veas obligado a proclamar ante los medios de comunicación que, aunque no te ha tocado, te alegras por tus compañeros. Porque precisamente es ése el tercer factor: el afán de los medios por localizar y entrevistar a los pocos individuos que han resultado premiados, generando en el espectador la falsa impresión de que la lotería toca con cierta facilidad. Sería didáctico que en algún telediario se entrevistara uno por uno a los perdedores, pues nos ayudaría a entender lo grande que es el número 100.000, y no digamos el número 33.000.000. Efectivamente, si dedicáramos unos 20 segundos a cada perdedor el telediario duraría aproximadamente un par de décadas, sin contar con los deportes y la publicidad.

3. La ley de Murphy

Este último apartado no guarda ninguna relación con el el Cálculo de Probabilidades, sino que trata únicamente sobre un aspecto particular de la condición humana: el fatalismo. Edward A. Murphy Jr. fue un ingeniero aeroespacial estadounidense que, a finales de la década de los cuarenta, formuló una serie de enunciados derrotistas que se resumen así: si algo es susceptible de salir mal, saldrá mal. De esta ley podemos extraer muchos corolarios aunque destacamos dos: que en los supermercados solemos elegir la cola más lenta y que la tostada suele cae al suelo por el lado de la mantequilla.

Sobre la cola del supermercado

Ciertamente, la percepción de que nuestra cola suele ser más lenta tiene un carácter universal, aunque no se sostendría tras un estudio estadístico riguroso. Lo que ocurre es que en nuestra memoria quedan registradas con mayor viveza las ocasiones en las que hemos sufrido una cola insoportable. Por contra, cuando la cola progresa rápidamente la olvidamos a los diez segundos y desaparece de nuestra estadística casera. Esto responde a una visión pesimista de nuestra existencia que, posiblemente, obedezca a su vez a una necesidad evolutiva. Efectivamente, si nos despertaramos cada mañana con una mentalidad positiva, como proponen los gurús de los manuales de autoayuda, en lugar de en esa rodilla que nos duele, tendríamos que concentrarnos en cada una de las muelas, vértebras, codos, articulaciones en general, órganos y uñas que funcionan correctamente. En tales condiciones nuestra especie se habría extinguido hace miles de años.

El caso de la tostada de mantequilla

Este caso es diferente porque ha sido comprobado empíricamente por Robert Matthews, investigador de la Aston University de Birmingham. Efectivamente, concluyó que la tostada suele caer por el lado de la mantequilla debido a que la altura usual de las mesas sólo permite a la tostada dar media vuelta sobre sí misma. Posiblemente, si desayunáramos con mesas de unos dos metros de alto las tostadas tendrían la oportunidad de dar la vuelta completa y caerían más fácilmente con la mantequilla hacia arriba, como todos deseamos.

Referencias

J. Bertrand, (1888) "Calcul des Probabilités".

A.H. Bohl, M.J. Liberatore, R.L. Nydick, (1995) A tale of two goats and a car, or the importance of assumptions in problem solutions, Journal of Recreational Mathematics, 1-9.

L. Carroll, (1958) The Mathematical Recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and a Tangled Tale Reading.

G.P. Harmer, D. Abbott, (1999) Parrondos's Paradox, Statistical Science, 206-213.

G.P. Harmer, D. Abbott, (1999) Losing strategies can win by Parrondo's Paradox, Nature 402, 864.

M. Gardner, (1959) Mathematical games. Scientific American, 219, 180-182.

M. Gardner, (2013) ¡Ajá! Paradojas que te hacen pensar.

R. Matthews, (1995) Tumbling toast, Murphy's Law and the fundamental constants, European Journal of Physics, 16 (4), pp. 172-176.

S. Selvin, (1975a) A problem in probability, American Statician 29(1), 67.

S. Selvin, (1975b) On the Monty Hall problem, American Statician 29(3), 134.

A. Tversky, D. Kahneman, (1974) Judgment under uncertainly: Heuristics and biases, Science, 185, 1124-1131.

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 93 – 108

Calcular integrales con una moneda (cuando estudias bachillerato)

Agustín García Nogales

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas, s/n, 06006 *Badajoz, Spain*
nogales@unex.es

Resumen: El título es ya toda una declaración de intenciones: tienes una moneda y quieres calcular una integral –el área bajo una curva sobre el intervalo $[0, 1]$, por ejemplo. La vía fácil (solución tipo MP –de *mala película*– que, ante un problema cualquiera, consiste básicamente en introducir un personaje adicional que, sin explicar cómo, te lo resuelve) consistiría en localizar a alguien que sepa calcular la integral y se haya encaprichado de tu moneda. Pero tú, estudiante de bachillerato, amante ya –posiblemente, en secreto– de la poesía de las Matemáticas, y partidario decidido del *Hágaselo Usted Mismo*, no necesitas a nadie para ello.

Se te ofrecen en este artículo dos opciones: (i) en algunos casos especiales puedes calcular el valor exacto de la integral sin hacer uso de la Regla de Barrow, aunque utilizando una representación diferente de la integral basada en el experimento aleatorio que consiste en infinitos lanzamientos de una moneda (una representación análoga proporciona un nuevo método para calcular ciertos momentos de la distribución de Cantor); o (ii) puedes aproximar el valor de la integral simulando lanzamientos repetidos de la moneda haciendo uso de números aleatorios.

1. Algo de historia

Girolamo Cardano (1501-1576), además de médico, filósofo, astrónomo y matemático italiano renacentista, fue también, en ciertos periodos de su vida, un jugador. No cuesta trabajo, por tanto, imaginarle lanzando dados y monedas, ([1]) o echando cartas. Publicó las soluciones de las ecuaciones de grados 3 y 4 en su Ars Magna, con los créditos debidos a Niccolo Tartaglia (1500-1557) y Lodovico Ferrari (1522-1565), y se atrevió por primera vez a coquetear con raíces cuadradas de números negativos. En aquellos tiempos, tenía que ser alguien como él quien pudiera extraer de aquellos antros de lúdica perdición un hecho que hoy, con la ayuda de un ordenador, podemos comprobar empíricamente de forma muy sencilla: la estabilización de la frecuencia relativa de un suceso alrededor de un número que conocemos como la probabilidad del mismo. Por ejemplo, la frecuencia relativa del suceso *cara* en n lanzamientos

[1] *Probabilistas, esos individuos rumbosos que, tanto en tiempos de crisis como en tiempos de bonanza, se pasan el día tirando monedas.*

de una moneda, que se define como el número de caras obtenidas en esos n lanzamientos dividido por n, tiende a estabilizarse en torno a un número ($0'5$ si la moneda es equilibrada) cuando n se hace más y más grande (cuando n tiende a infinito, decimos). Con esta idea de la probabilidad de un suceso en mente, ésta será, como lo son las frecuencias relativas, un número entre 0 y 1, de tal suerte que sucesos con probabilidades próximas a 1 serían sucesos muy probables, mientras que sucesos con probabilidades próximas a 0 serían sucesos poco probables.

Casi 400 años después, un joven matemático ruso, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), comenzó sus estudios universitarios en 1920 en la Universidad de Moscú sin tener aún muy clara su vocación matemática (se le conocen escarceos con la metalurgia y la historia rusa, pero antes de terminar la carrera ya producía resultados matemáticos de relevancia internacional), y, cuando defendió su tesis doctoral en 1929, ya había conseguido probar matemáticamente el resultado (*Ley Fuerte de los Grandes Números*) que explica, en sus justos términos, y por los siglos de los siglos (amén), la estabilización de las frecuencias relativas descrita por Cardano varios decenios antes del origen de la llamada Teoría de la Probabilidad, que suele fijarse en la correspondencia sobre juegos de azar que mantuvieron Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662) en el siglo XVII. ([2])

En ese recorrido histórico de cuatro siglos aparecen también insignes matemáticos que dedicaron parte de sus esfuerzos a esta tarea: Jacob Bernoulli (1654-1705), Simeon Poisson (1781-1840), Pafnuty Chebyshev (1821-1894), Andrei Markov (1856-1922), Émile Borel (1871-1956), Francesco Cantelli (1875-1966) y Aleksandr Khinchin (1894-1959).

2. Monedas y longitudes

En el caso equilibrado podemos observar que, *siempre* que lanzamos la moneda repetidamente, la frecuencia relativa del suceso *cara* se estabiliza alrededor de $0'5$. Pero un matemático mínimamente formado no puede esperar un resultado (teorema) que afirme que la frecuencia relativa del suceso cara *siempre* tiende (o converge) a $0'5$ cuando n tiende a infinito; enseguida se percatará de que un suceso *posible* (aunque muy poco –nada, más bien– *probable*) es que en todos los lanzamientos salga cara, en cuyo caso, obviamente, la frecuencia relativa de *cara* es igual a 1 para todo número n de lanzamientos y el

[2] También había probado ya Kolmogorov la denominada Ley del Logaritmo Iterado, que evalúa la *velocidad* de estabilización de la frecuencia relativa. Luego hablaremos de ello.

límite de esas frecuencias relativas será 1, y no $0'5$. ¿Supone ésto una contradicción con nuestra larga experiencia de lanzadores de monedas? Se deduce de la Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov que la frecuencia relativa del suceso *cara* tiende a $0'5$ con probabilidad 1, expresión que, de momento, podemos interpretar como *casi siempre* (*casi seguro* se dice también en ambientes probabilísticos). Así pues, cuando no podemos decir *siempre* (como es el caso: ¡hemos puesto un ejemplo claro!, o, como diría un matemático, ¡tenemos un contraejemplo!), decir *casi siempre* es mucho decir. ¡Y éso es lo que afirma la Ley Fuerte de los Grandes Números! ¡Y éso es lo que resuelve la aparente contradicción que comentábamos hace un momento!

¿Y eso es todo? Si has llegado hasta aquí y, con lo que has leído, te sientes satisfecho, la respuesta, para ti, puede ser afirmativa.

Es posible, sin embargo, que te haya asaltado una duda: ¿cómo valorar el hecho de que la frecuencia relativa del suceso *cara* tienda con probabilidad 1 a $0'5$ cuando el número n de lanzamientos tiende a infinito? Sabemos que el límite es 1 si siempre sale cara (o si sale un número finito de cruces –por grande que sea– y el resto son caras), y que el límite es 0 si siempre sale cruz, y que es $0'2$ si sale cara uno de cada 5 lanzamientos, o $0'7$ si sale cara 7 de cada 10. ¿Qué quiere decir convergencia a $0'5$ con probabilidad 1?

Es pertinente en este punto un breve apunte histórico. En 1931, Kolmogorov, en compañía de su amigo, y también matemático ruso de reconocido prestigio internacional, Pavel Sergeevich Aleksandrov (1896-1982), inicia un viaje por Europa que le lleva, en particular, a París, donde mantiene largas conversaciones con Paul Lévy (1886-1971), uno de los grandes probabilistas de la época, y con Maurice Fréchet (1878-1973), quien había aprovechado las ideas de Borel, René-Louis Baire (1874-1932) y Henri Lebesgue (1875-1941) en el desarrollo de la moderna teoría de funciones de una variable real para construir unas Teorías de la Medida y de la Integración abstractas. Dos años después de este viaje, y solo cuatro años después de su tesis doctoral, en 1933, Kolmogorov, a la edad de 30 años, publicó su libro sobre Teoría de la Probabilidad, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, donde, de una forma simple y elegante, le cuenta al mundo cómo sumergir la Probabilidad dentro de las Matemáticas –y ése era un objetivo perseguido con denuedo–, construyendo la teoría a partir de una base axiomática de forma análoga a como Euclides de Alejandría (325aC-265aC, aproximadamente) hizo con la Geometría unos 300 años antes de Cristo (0-33, aproximadamente), o como George Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) hicieron en el siglo XIX con la Teoría de Conjuntos y los Fundamentos de la Matemática

Moderna. De acuerdo con Kolmogorov, calcular probabilidades tiene mucho que ver con medir (longitudes, áreas en el plano, volúmenes en el espacio, ...), lo que permite hacer uso de la base axiomática de la Teoría de la Medida para axiomatizar la Teoría de la Probabilidad, aunque ambas teorías tienen orígenes, objetivos e, incluso, terminologías diferentes. La influencia de este tratado en la comunidad matemática internacional fue espectacular, pues conceptos y herramientas típicamente probabilísticos (la esperanza condicional, especialmente) que, parafraseando a Joseph Doob (1910-2004), se venían desarrollando hasta entonces en un vago contexto pseudomatemático, aparecen en él como objetos inequívocamente matemáticos. Eso atrajo la atención de muchos matemáticos hacia la Teoría de la Probabilidad y, como consecuencia, se tradujo en un considerable desarrollo de la misma. Se rumorea que, en alguna ocasión, Lévy, a la vista del libro de Kolmogorov, se lamentó de no haber dedicado el esfuerzo suficiente a los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad. Otros muchos matemáticos de la época sí lo hicieron, aunque sin éxito. Kolmogorov resolvió de ese modo la parte correspondiente a la Probabilidad del Problema VI de Hilbert, cuyo objetivo consistía –nada más y nada menos– en axiomatizar la Física. David Hilbert (1862-1943) presentó, de hecho, una lista de 10 problemas matemáticos abiertos –es decir, sin resolver– en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en París en 1900; posteriomente completó la lista hasta 23 problemas. Una buena parte de las matemáticas del siglo XX quedan explicadas por el afán de resolución de los mismos. Kolmogorov resuelve también el Problema XIII.

Conscientes ya de que calcular probabilidades y medir (e, incluso, contar) son problemas estrechamente relacionados desde un punto de vista matemático, volvamos al ejemplo de la moneda para calibrar el alcance de la Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov. Si hubiera que hacer una lista con los 10 teoremas más importantes de las Matemáticas, así, en sentido amplio, éste sería uno de ellos, en mi opinión. Y otro sería el Teorema del Límite Central.

Imaginemos que lanzamos repetidamente una moneda equilibrada y que anotamos un 1 cada vez que sale cara y un 0 cada vez que sale cruz. El resultado de los n primeros lanzamientos es una colección ordenada de n ceros y unos. Por ejemplo, 001011 es el resultado de 6 lanzamientos de la moneda si en el primer lanzamiento salió cruz, en el segundo cruz, en el tercero cara, el cuarto cruz, el quinto cara y el sexto cara. No cuesta nada identificar esa colección ordenada de ceros y unos con un número del intervalo $[0, 1]$ escrito en base 2, considerándola como las cifras decimales –valga esta expresión también en base 2, aunque más apropiado sería hablar de *representación binaria*– de un número cuya parte entera es 0: $0'001011$. Ésta es, en realidad, la representación en base 2 del siguiente número en base 10:

$$\frac{0}{2^1}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}=0'171875\,.$$

Habitualmente utilizamos el sistema decimal (base 10) para representar los números haciendo uso de los dígitos $0,1,2,\ldots,8,9$; por ejemplo, $2059'251$ es la representación en base 10 del número:

$$2\cdot 10^3+0\cdot 10^2+5\cdot 10^1+9\cdot 10^0+2\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-2}+1\cdot 10^{-3}.$$

Tras la base 10, la más popular de las bases matemáticas, hablando de sistemas de numeración, es la base 2, o sistema binario, en el que solamente se hace uso de las cifras 0 y 1 para representar los números, como hemos visto hace un momento. Esta popularidad se debe probablemente al uso que del sistema binario se hace en Informática, donde 0 es apagado, y 1, encendido.

Idealmente podemos considerar infinitos lanzamientos de esa moneda e imaginar el resultado como una colección infinita ordenada (*sucesión*, dicen los matemáticos) de ceros y unos, donde en la posición n-ésima aparece un 0 o un 1 según que el resultado del n-ésimo lanzamiento haya sido cruz o cara, respectivamente, y, análogamente, podemos identificar esa sucesión de ceros y unos con el número del intervalo $[0,1]$ cuya cifras decimales en base 2 son las de esa sucesión. De ese modo, cada vez que lanzamos la moneda equilibrada infinitas veces, obtenemos un número del intervalo $[0,1]$ escrito en base 2. Por otra parte, dado un número del intervalo $[0,1]$ escrito en base 2, la sucesión de sus cifras decimales es una sucesión de ceros y unos que se puede indentificar con el resultado de infinitos lanzamientos de una moneda equilibrada. Hay números del intervalo $[0,1]$ que admiten dos representaciones en base 2 –por ejemplo, $0'011=0'01011111\ldots$–, del mismo modo que, en base 10, $0'3=0'299999\ldots$ Pero éste es un inconveniente fácil de obviar cuando identificamos en este contexto sucesiones de ceros y unos con los puntos del intervalo $[0,1]$. De hecho, estos puntos conflictivos son exactamente aquéllos que admiten una representación finita en base 2, es decir, aquellos números cuyas cifras decimales son todas nulas a partir de una dada; en ese caso, basta reemplazar la última cifra decimal igual a 1 por cero y escribir un 1 en todas las cifras decimales que le siguen para obtener una representación distinta del mismo número, como hemos hecho en el ejemplo precedente. Estos números del intervalo $[0,1]$ que admiten una representación finita en base 2 se suelen llamar *racionales diádicos* y se corresponden con los extremos de los intervalos que se obtienen al dividir el intervalo $[0,1]$ en 2, 4, 8, 16, ... partes iguales; hay una cantidad infinita de ellos.

Podemos decir que un número del intervalo $[0,1]$ tiene la propiedad EF (de estabilización de frecuencias) si la sucesión de ceros y unos de su representación decimal en base 2 verifica la Ley Fuerte de los Grandes Números, es decir, si el límite de las frecuencias relativas del suceso 1 (cara) en n lanzamientos converge a $0'5$ cuando n tiende a infinito. Hemos visto anteriormente ejemplos (contraejemplos) de números que no tienen esa propiedad EF. Pues bien, lo que afirma la Ley Fuerte de los Grandes Números es que el conjunto de los números del intervalo $[0,1]$ que tienen la propiedad EF tiene longitud 1.

Observa que un subconjunto de $[0,1]$ con longitud 1 no es necesariamente igual al intervalo $[0,1]$: en efecto, un punto tiene longitud nula y si al intervalo $[0,1]$ le quitamos un punto, obtendremos un subconjunto de $[0,1]$, distinto de $[0,1]$, pero con longitud 1 (admitamos que la longitud del conjunto formado por la unión de los intervalos $[0'1, 0'3]$ y $[0'7, 0'8]$ es la suma de las longitudes de ambos, es decir, $0'3$ y, análogamente, la longitud de la unión de dos o más subintervalos del intervalo $[0,1]$ es la suma de sus longitudes si dos cualesquiera de ellos no tienen elementos comunes).

Lo mismo sucede si al intervalo $[0,1]$ le quitamos un número finito de puntos –un millón de puntos, por ejemplo–: el conjunto resultante sigue teniendo longitud 1. Podríamos quitarle incluso un número infinito de puntos –como los racionales diádicos que mencionábamos anteriormente– y la longitud seguiría siendo uno.

Pero ¡ojo con el infinito! En otros casos, si quitamos infinitos puntos al intervalo $[0,1]$ la longitud puede disminuir –por ejemplo, si le quitamos todos los puntos del intervalo $[0, 0'5]$. ¡Hay distintos tipos de infinitos! ¡Infinitos infinitos, de hecho! Por ejemplo, hay infinitos racionales diádicos, pero este infinito es menor que el infinito del número de puntos del intervalo $[0, 0'5]$, aunque ésa es otra cuestión.

Eso es lo que ocurre con los infinitos lanzamientos de una moneda: con probabilidad 1 obtendremos una sucesión de ceros y unos (caras y cruces) que verifica la propiedad EF. *Con probabilidad* 1 no significa *siempre* (¡tenemos contraejemplos!), pero sí explica que, en la práctica, no vayamos a observar ningún caso en el que ocurra otra cosa.

Como hemos comentado anteriormente, la tesis de Kolmogorov también contenía la Ley del Logaritmo Iterado, un teorema que, en el caso de los lanzamientos de la moneda equilibrada que estamos considerando, viene a decir que, con probabilidad 1, la frecuencia relativa del suceso *cara* converge a la probabilidad $0'5$ de sacar cara con rapidez similar a la de la convergencia a cero de la sucesión

$$a_n = \sqrt{\frac{\log(\log n))}{2n}}\,,$$

donde log denota el logaritmo neperiano. Se prueba, de hecho, que, con probabilidad 1, $\limsup_n (f_n - 0'5)/a_n = 1$ y $\liminf_n (f_n - 0'5)/a_n = -1$, donde f_n es la frecuencia relativa del suceso *cara* en los n primeros lanzamientos. Notar que, para 100 lanzamientos, $a_{100} = 0'0388$, y, para un millón de lanzamientos, $a_{1000000} = 0'0019$.

Ocurre, incluso, que las sucesiones de ceros y unos así generadas (es decir, cuando en cada posición, o lanzamiento, se obtiene 0 –cruz– o 1 –cara– con probabilidad $0'5$) se *distribuyen* uniformemente. O, lo que es lo mismo, la distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $[0, 1]$ se obtiene generando los puntos del intervalo (que supondremos escritos en base 2) eligiendo para cada posición decimal un 0 o un 1 con probabilidad $0'5$ (lanzando para ello una moneda equilibrada al aire, por ejemplo). Una breve nota para iniciados: la distribución de probabilidad uniforme en $[0, 1]$ se suele conocer en Análisis Matemático como Medida de Lebesgue –¡Henri, sí!– y es la medida que utilizamos habitualmente para calcular longitudes, ahora dentro del intervalo unidad; no deja de ser ésta una curiosa descripción alternativa de la Medida de Lebesgue que nos permite, como veremos en la sección 3, calcular, teóricamente al menos, integrales de Lebesgue –y longitudes, por tanto– sin hacer uso de la regla de Isaac Barrow (1630-1677), aunque con la ayuda, eso sí, de un teorema de integración en productos infinitos que merece llevar el nombre de Guido Fubini (1879-1943).

Todo lo que hemos dicho hasta ahora se basa en que la moneda es equilibrada. Pero, ¿y si la moneda no fuese equilibrada? Hablar de lanzamientos de monedas en Probabilidad tiene, seguramente, mucho que ver con los orígenes de la teoría, relacionados con los juegos de azar, según hemos comentado. Por lo demás, se trata de un modelo fácilmente comprensible que puede trasladarse sin dificultad a otro tipo de situaciones de naturaleza dicotómica (éxito o fracaso, ocurrencia o no de un cierto suceso, . . .) que pudieran ser, eventualmente, más interesantes desde un punto de vista aplicado. Claro que, en esos casos –por ejemplo, éxito (1) o fracaso (0) en un tratamiento quirúrgico para una cierta dolencia–, la suposición de que las probabilidades del 1 y del 0 sean la misma (igual a $0'5$) es más discutible.

Supongamos ahora que es un número p entre 0 y 1 la probabilidad de sacar *cara* en un lanzamiento de una moneda (trucada si $p \neq 0'5$). La Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov se sigue aplicando, sólo que ahora la frecuencia relativa del suceso *cara* converge con probabilidad 1 a la probabilidad p, hecho que también podemos comprobar empíricamente lanzando al aire la moneda repetidamente; la Ley del Logaritmo Iterado también funciona exactamente igual que en el caso equilibrado.

Pero ¿cómo interpretar en este caso la convergencia *con probabilidad* 1?

Aquí hay algo que llama la atención: ya hemos comentado anteriormente que hay sucesiones de ceros y unos (cruces y caras) tales que el límite de la frecuencia relativa de 1 (cara) es igual a $0'5$, otras para las que ese límite es $0'2$, otras para las que es $0'7$, ... Incluso hay sucesiones de ceros y unos para las que no existe el límite de la frecuencia relativa del suceso *cara* (EJERCICIO PARA INICIADOS: Fijados dos números distintos $0 < p < q < 1$, ¿sabrías construir una sucesión de ceros y unos tal que la sucesión de las frecuencias relativas de 1 se vaya aproximando alternadamente a q y a p infinitas veces y, por tanto, carezca de límite?)

Y, sin embargo, la Ley Fuerte de los Grandes Números afirma que, si la moneda es equilibrada, con probabilidad 1 la frecuencia relativa de *cara* converge a $0'5$. Es decir, si denotamos $A_{0'5}$ el conjunto de puntos del intervalo $[0,1]$ cuya sucesión de cifras decimales en base 2 verifica que la frecuencia relativa de 1 converge a $0'5$, entonces $A_{0'5}$ tiene probabilidad 1, lo que, en el caso equilibrado que consideramos, significa tener longitud 1.

Y la misma Ley Fuerte de los Grandes Números afirma también que, si la moneda está trucada y la probabilidad de sacar *cara* es un número $p \neq 0'5$ entonces, con probabilidad 1, la frecuencia relativa de *cara* converge a p. Dicho de otro modo, si denotamos A_p el conjunto de puntos del intervalo $[0,1]$ cuya sucesión de cifras decimales en base 2 verifica que la frecuencia relativa de 1 converge a p, entonces A_p también tiene probabilidad 1. Obviamente, en el caso trucado que consideramos, probabilidad 1 no puede significar también longitud 1 ya que A_p y $A_{0'5}$ no tienen puntos comunes (no puede ocurrir simultáneamente que el límite de la frecuencia relativa de 1 sea $0'5$ y también $p \neq 0'5$) y no es posible encontrar dos subconjuntos de longitud 1 en $[0,1]$ que no tengan puntos en común. Es más, como $A_{0'5}$ tiene longitud 1, A_p tiene longitud 0 si $p \neq 0'5$.

Así pues, en el caso trucado la expresión *con probabilidad* 1 tiene un significado diferente que en el caso equilibrado. De hecho, si en el caso equilibrado obtenemos una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $[0,1]$ –distribución que nos permite calcular longitudes–, en el caso trucado se obtiene una distribución de probabilidad diferente –no útil para calcular longitudes–.

Es habitual, en Cálculo de Probabilidades, utilizar expresiones como *¿cuál es la probabilidad de que . . . ?* que aplicamos cuando lanzamos monedas, cuando lanzamos dados, cuando sacamos cartas *al azar* de una baraja, . . . Son expresiones que parecen presuponer la existencia de una probabilidad universal que rige todos los fenómenos aleatorios que en el mundo son o han sido.

Acabamos de verificar que eso no puede ser así, que no es la misma probabilidad la que rige el caso equilibrado que la del caso trucado. Y ésto, que ahora parece evidente, no siempre estaba claro antes de que Kolmogorov nos propusiera su definición axiomática de la probabilidad.

La realidad es que cada valor de $p \in [0,1]$ determina una distribución de probabilidad diferente en el intervalo $[0,1]$, que solo en el caso $p = 0'5$ obtenemos una distribución de probabilidad que podemos utilizar para calcular longitudes en ese intervalo, y que, si la probabilidad de sacar cara es p, entonces la probabilidad de A_q es nula cuando $q \neq p$.

3. Monedas e integrales: primera parte (no apta para menores de 18 años)

Hace mucho tiempo leí (lamento no recordar la cita exacta, ni, ¡ay!, su autor –posiblemente era Bertrand Russel (1872-1970)) que la belleza está presente en las matemáticas, como lo está en la poesía. Hablando de belleza, recuerdo a mi profesor, Carlos Benítez (1943-2014), recientemente fallecido, a quien, de tanto en tanto, le gustaba recitar que *la Matemática es una bella y arisca dama que sólo concede sus favores a quien con ella porfía.* ([3])

Algo más adelante en esta sección, querido bachiller, asumiendo lo que hasta ahora hemos comentado, incluiremos una demostración matemática. Échale un vistazo . . . ¿Te parece bella? ¿O te parece una colección de símbolos sin sentido? ¿La ves, tal vez, como un árido paisaje hecho de cifras, letras y símbolos?

Y, sin embargo, más allá de los posibles cambios de notación, y de una cierta flexibilidad en la sintaxis matemática –¡que también existe!–, cada uno de ellos tiene un significado preciso; y no sobra ninguno.

Y cada una de las igualdades que allí aparecen tiene una justificación. ¡Una justificación matemática! No una opinión, ni un capricho, ni un elemento decorativo: ¡detrás de cada una de ellas hay un teorema! Son teoremas con

[3] Así es como el alumno que fui recuerda la cita, aunque, en su discurso de inauguración del curso 2007-2008 en la Universidad de Extremadura, Carlos utilizó esta otra versión: *La Matemática es una hermosa y arisca dama que sólo muestra sus encantos a quien con ella porfía.*

nombre, como el teorema de la medida producto y el de Fubini (en el caso de un número infinito de factores también), o el teorema de la medida imagen, o el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue.

Entender todos y cada uno de esos símbolos, y todos y cada uno de esos teoremas, requiere por tu parte unos años más de profundización en el estudio de las matemáticas. ¡No desesperes si no entiendes nada! No pretendas tampoco que nadie te lo explique en 10 minutos. ¡No es posible! Puedes considerar un reto entender esa demostración, pero debes prepararte para el camino. No es corto. Ni sencillo, seguramente. Pero no dudes de que hay una posibilidad real de que termines disfrutando con ello. Posibilidad que pasa, necesariamente, por la porfía con las matemáticas, por el cortejo paciente con esa bella dama que, sin duda, es. De hecho, toda esta sección tiene ya un nivel matemático que excede con creces el que has alcanzado hasta el momento. Probablemente no la consideres apta para ti. En efecto, no lo es. Pero te invito a seguir leyendo de todos modos. ¡Porfía!

El inicio y el final de la demostración no te sorprenderán pues vamos a probar que $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$. Te llamará la atención, supongo, todo lo que hay entre ambas, habida cuenta de que, como todo bachiller sabe (tras la regla de Barrow, o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, conocido en la literatura anglosajona como *Newton-Leibniz axiom*), $x^3/3$ es una primitiva de x^2 y la diferencia de sus valores en los extremos del intervalo $[0,1]$, igual a $1/3$, coincide con la integral buscada. Pero queremos probarlo de una forma alternativa, aprovechando la moneda para ello.

Debemos fijar unas notaciones previas. Denotaremos por P la probabilidad en el conjunto $\{0,1\}$ que asigna probabilidad $1/2$ tanto al 1 (cara) como al 0 (cruz). $P^{\mathbb{N}}$ es la correspondiente probabilidad producto en el conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de ceros y unos, es decir, de todas las posibles realizaciones del experimento aleatorio que consiste en infinitos lanzamientos de una moneda equilibrada. Si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ es una tal sucesión de ceros y unos, denotaremos por $T(\omega)$ el número del intervalo $[0,1]$ cuyas cifras decimales en base 2 son las de la sucesión ω:

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i}\,.$$

Lo que con palabras hemos afirmado en la sección anterior, en términos matemáticos se expresa diciendo que la distribución $(P^{\mathbb{N}})^T$ de la variable aleatoria (o función medible) T es la distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$ (o medida de Lebesgue en ese intervalo, medida ésta que utilizamos para medir longitudes en el intervalo). Calculemos, pues, la integral, aprovechando esa representación de la medida de Lebesgue:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\,dx &= \int_0^1 x^2\,d(P^{\mathbb{N}})^T(x) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} T(\omega)^2\,dP^{\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i}\right)^2 dP^{\mathbb{N}}(\omega) = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i}\right)^2 dP^{\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i}\right)^2 dP^{\mathbb{N}}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i}\right)^2 dP^{\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\{0,1\}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i}\right)^2 dP^n(\omega_1,\dots,\omega_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\{0,1\}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{4^i} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\omega_i\omega_j}{2^{i+j}}\right) dP^n(\omega_1,\dots,\omega_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} \int_{\{0,1\}^n} \frac{\omega_i}{4^i}\,dP^n(\omega_1,\dots,\omega_n) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \int_{\{0,1\}^n} \frac{\omega_i\omega_j}{2^{i+j}}\,dP^n(\omega_1,\dots,\omega_n)\Bigg) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} \int_{\{0,1\}} \omega_i\,dP(\omega_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{2^{i+j}} \int_{\{0,1\}^2} \omega_i\omega_j\,dP^2(\omega_i,\omega_j)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{2^{i+j}} \int_{\{0,1\}} \omega_i\,dP(\omega_i) \int_{\{0,1\}} \omega_j\,dP(\omega_j)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1/4}{1-1/4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1/2}{1-1/2}\right)^2 = 1/3\,.
\end{aligned}$$

Eso acaba la demostración.

En ella se ha utilizado, en particular, que la suma infinita –serie, se dice en Matemáticas– $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ es igual a 1. Puede chocar de entrada que infinitos sumandos no nulos puedan sumar una cantida finita. Imagina que tienes una tarta de un kilogramo y comes la mitad en media hora, y la mitad de lo que queda en el cuarto de hora siguiente, y la mitad de lo que queda en los 7'5 minutos siguientes, y así sucesivamente. Que la suma de esa serie sea 1 explica que al cabo de 1 hora te habrás comido toda la tarta.

La posible finitud de una suma de infinitos términos resuelve también la llamada *paradoja de Aquiles y la tortuga* que planteó Zenón de Elea (490aC-425aC, aproximadamente) hace más de 2000 años y que viene a decir que, en una carrera entre Aquiles y la tortuga, si el aqueo *de los pies ligeros* le ofrece a aquélla una cierta ventaja, jamás podrá alcanzarla, con el argumento repetitivo de que, cuando Aquiles llegue a la posición que un momento antes ocupaba la tortuga, ésta ya se habrá desplazado un cierto trecho.

Es claro que el procedimiento utilizado en la demostración anterior no puede competir en sencillez con la regla de Barrow. No obstante, unos cálculos similares nos permiten calcular otro tipo de integrales en circunstancias donde no existe una herramienta tan eficaz como la diseñada por Barrow. Hagamos un breve inciso para hablar algo sobre ello.

Tras la base 2, la base 3 –¡y no hablamos de béisbol!– Si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ es una sucesión de ceros y unos, denotaremos por $S(\omega)$ el número del intervalo $[0,1]$ cuyas cifras decimales en base 3 son las de la sucesión 2ω, es decir,

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\omega_i}{3^i}.$$

Los puntos del intervalo $[0,1]$ de esa forma, es decir, aquéllos que en base 3 se escriben haciendo solamente uso de las cifras 0 y 2, son los puntos del llamado conjunto de Cantor –¡George, en efecto!–, y se pueden conseguir también, como hemos visto, lanzando repetidas veces una moneda equilibrada. La distribución $(P^{\mathbb{N}})^S$ de probabilidad de la variable aleatoria S no nos sirve ahora para medir longitudes en $[0,1]$ –de hecho, el conjunto de Cantor tiene longitud 0, ¡a pesar de que tiene tantos puntos como el intervalo $[0,1]$!–. Pero, en Matemáticas, hemos generalizado el concepto de medida, de tal suerte que hay medidas que no tienen el uso clásico de calcular longitudes, áreas o volúmenes, si no que, como ya hemos vislumbrado anteriormente –gracias a Fréchet y Kolmogorov–, podrían utilizarse también, por ejemplo, para calcular probabilidades. Y $(P^{\mathbb{N}})^S$ es una medida en ese sentido –una probabilidad, de hecho– que llamaremos medida de Cantor y denotaremos por μ. La función de distribución, o medida de Lebesgue-Stieljes, asociada a esa medida es la llamada función de Cantor –conocida también como *escalera del diablo*–, una función continua creciente que vale 0 en 0 y 1 en 1, pero no es absolutamente continua, de tal suerte que no puede ser representada por una función de densidad respecto a la medida de Lebesgue.

Si, a pesar de las advertencias, has aceptado la invitación y te has quedado en esta sección, tal vez podrías reproducir unos cálculos similares a los anteriores para probar que $\int_0^1 x^2\, d\mu(x) = 3/8$. La distribución de Cantor, como la uniforme en $[0,1]$, tiene media $1/2$, pero su varianza es $1/8$, mientras que la de la uniforme es $1/12$.

Imagina ahora las posibilidades que se abren cambiando de sistema de numeración: base 4, base 5, ... En base 6, por ejemplo, utilizamos exclusivamente los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 para escribir los números. Inmediatamente podemos imaginar que lanzamos un dado equilibrado con caras numeradas del 1 al 6 y que el resultado del experimento sería una sucesión de dígitos del 1 al 6, es decir, un elemento $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ del conjunto producto $\{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}$, que podemos identificar con el número

$$D(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i - 1}{6^i} \in [0,1]\,.$$

Si el dado es equilibrado, es decir, si la probabilidad P de cada uno de los resultados posibles 1 a 6 es la misma (e igual a $1/6$, obviamente), entonces la distribución $(P^{\mathbb{N}})^D$ de la variable D vuelve a ser la medida de Lebesgue (distribución uniforme) en $[0,1]$. Pero si el dado está trucado, se obtienen nuevas medidas de probabilidad en ese intervalo. Se obtienen, además, *conjuntos tipo Cantor* considerando el conjunto de puntos del intervalo $[0,1]$ que se escriben en base 6 sin hacer uso de uno de los dígitos (el 3, por ejemplo), o de dos de ellos (el 1 y el 4, por ejemplo). Y también medidas análogas a la de Cantor por un procedimiento similar. Y podríamos análogamente calcular integrales de algunas funciones respecto a esa nuevas medidas.

¡Todo un mundo de posibilidades para la imaginación!

4. Monedas e integrales: segunda parte

Y de vuelta a la base 2, no queremos ocultar que el tipo de cálculos que, en la sección anterior, nos han permitido probar que $\int_0^1 x^2\, dx = 1/3$ no se pueden reproducir sin más para otro tipo de funciones más complicadas.

Tampoco la regla de Barrow es la panacea universal, pues, en general, no es sencillo obtener una primitiva de la función que queremos integrar: el cálculo de integrales pasa habitualmente por el uso de métodos numéricos.

La Ley Fuerte de los Grandes Números también nos proporciona un método, llamado de Monte Carlo, para calcular integrales de forma aproximada y que compite con éxito con otros métodos de integración numérica.

El método de Monte Carlo fue concebido por Stanislaw Ulam (1909-1984) cuando trabajaba en la bomba de hidrógeno (resolvió uno de los mayores problemas que se habían encontrado con la bomba de fusión) en Los Alamos National Laboratory, Nuevo Méjico, buscando soluciones a problemas matemáticos mediante muestreo estadístico con números aleatorios.

Ulam fue discípulo de Kazimierz Kuratowski (1896-1980) y cliente habitual, junto con Stefan Banach (1892-1945) y otros matemáticos polacos, del Scottish Cafe en Lvov (hoy en Ucrania), donde, entre tazas, se desarrollaba una intensa vida matemática.

Ulam fue invitado a realizar trabajos de guerra en Los Alamos por John von Neumann (1903-1957), otro de los grandes matemáticos de la época. John von Neumann formó parte del Proyecto Manhanttan diseñando el denominado *método de implosión* que fue utilizado en la primera detonación de una bomba atómica en la historia de la humanidad –y también en la bomba atómica de Nagasaki–.

Parece ser que Ulam ideó el método durante el periodo de convalecencia de una enfermedad en el que pasaba largas horas haciendo *solitarios* con una baraja de cartas, y preguntándose por la probabilidad de éxito en ese juego. Ante la dificultad de los cálculos combinatorios necesarios para resolver el problema, se preguntó por la posibilidad de estimar esa probabilidad mediante la frecuencia relativa de éxito en una larga serie de partidas. Ulam puso su descubrimiento en conocimiento de von Neumann y ambos comenzaron los primeros cálculos haciendo uso del método de Monte Carlo.

John von Neumann, además de haber realizado importantes contribuciones en diversas áreas de las Matemáticas, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista aplicado, fue también uno de los pioneros de las ciencias de la computación. Era además un firme defensor de la energía atómica, subestimando los peligros de la radiación, lo que, probablemente, le produjo la enfermedad –cáncer de hueso– que terminó con su vida.

En Los Alamos todo estaba codificado y, buscando una denominación en clave para el método ideado por Ulam, Nicholas Metropolis (1915-1999) propuso el nombre del célebre casino del que, al parecer, era cliente habitual un tío de Ulam. El primer artículo científico no codificado sobre el método de Monte Carlo fue publicado en 1949 por Ulam y Metropolis.

El método de Monte Carlo consiste en lo siguiente: si queremos aproximar la integral entre 0 y 1 de una función f, seleccionamos un número n de puntos $x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[0, 1]$ *al azar* y aproximamos la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ por

$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Cuanto mayor sea n, mejor es la aproximación, en general, pues la Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov garantiza convergencia con probabilidad 1 a la integral cuando n tiende a ∞.

La selección al azar de los puntos $x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[0, 1]$ puede ser realizada con la ayuda de una moneda equilibrada como se explica a continuación: dado un entero m, lanzamos la moneda $n \cdot m$ veces y anotamos un 1 cuando salga cara y un 0 cuando salga cruz; x_1 será el número diádico entre 0 y 1 cuyas m cifras decimales en base 2 son los m primeros resultados de los lanzamientos; para x_2 tomamos los m siguientes lanzamientos y, así sucesivamente, reservaremos para x_n los m últimos lanzamientos. Aunque el procedimiento descrito solamente hace uso de racionales diádicos, debemos señalar que, para cada punto del intervalo $[0, 1]$, hay un racional diádico tan próximo a él como se desee (basta elegir m suficientemente grande). Se prueba también que, bajo ciertas condiciones, la convergencia del método de Monte Carlo es del orden de $1/\sqrt{n}$.

El método de Monte Carlo se extiende sin dificultad a un intervalo cualquiera de la recta, y también al caso multidimensional. Y, a diferencia de otros métodos de integración numérica deterministas, posee el mismo orden de convergencia para funciones de varias variables que para funciones de una variable.

Por ejemplo, con la ayuda de un ordenador, y tomando $m = 10$ y $n = 1000$, se han realizado 10 simulaciones del experimento de lanzar una moneda equilibrada 1000 veces, y se han obtenido las siguientes aproximaciones a la integral $\int_0^1 x^2\,dx$:

0,3335, 0,3145, 0,3414, 0,3346, 0,3249, 0,3324, 0,3514, 0,3493, 0,3337, 0,3482.

Esto resuelve, finalmente, el problema que nos planteábamos en el título, tras un breve recorrido de 400 años por la biografía de algunos de los mejores matemáticos de su tiempo, y tras entrever, espero, debajo de una literatura deliberada y necesariamente imprecisa, dadas las circunstancias, los anhelos y el quehacer de los matemáticos y, con un poco de fortuna, buena formación y mucha perseverancia, la belleza matemática que, como la nota dormida en el arpa olvidada y cubierta de polvo de Gustavo Adolfo Bécquer (1836-1870), aguarda paciente una *mano de nieve* que, porfiando, sepa arrancarla.

Lecturas recomendadas:

– Obras de Gustavo Adolfo Bécquer (1871), Imprenta de T. Fortanet, Madrid. (Rima VII).

– Kolmogorov, A.N. (1933) *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlín. (Una traducción al inglés por N. Morrison apareció en 1950 bajo el título *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, con una segunda edición en 1956).

– http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 109 – 115

LaTeX y TikZ
Unas herramientas para escribir textos matemáticos con gráficas y dibujos

Fernando Sánchez Fernández

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas, s/n, 06006 *Badajoz, Spain*

fsanchez@unex.es

1 Definición de LaTeX

Quizás la mejor definición pueda verse en Wikipedia: “LaTeX (escrito LaTeX en texto plano) es un sistema de composición de textos, orientado especialmente a la creación de libros, documentos científicos y técnicos que contengan fórmulas matemáticas. LaTeX está formado por un gran conjunto de macros de TeX, escrito por Leslie Lamport en 1984, con la intención de facilitar el uso del lenguaje de composición tipográfica, creado por Donald Knuth. Es muy utilizado para la composición de artículos académicos, tesis y libros técnicos, dado que la calidad tipográfica de los documentos realizados con LaTeX es comparable a la de una editorial científica de primera línea.”

Instalación

Una instalación muy sencilla consiste en descargar la última versión de Texlive, que puede encontrarse en `http://www.tug.org/texlive/` además de algún editor de texto preparado para LaTeX, como TexMaker (`http://es.wikipedia.org/wiki/Texmaker`). Hay otras opciones, pero esta combinación Texlive+TexMaker funciona muy bien y lo hace exactamente igual en ordenadores con Windows o Linux.

Primeros pasos

LaTeX hace que un texto como este

```
se puede escribir texto normal o ecuaciones del tipo $x+y=y^2/z$
o bien $\sqrt{x+\sqrt{x}}=2$
```

se convierta en

se puede escribir texto normal o ecuaciones del tipo $x + y = y^2/z$ o bien $\sqrt{x + \sqrt{x}} = 2$

Hay todo un ejército de colaboradores creando pequeñas mejoras para que LaTeX pueda servir para escribir música, fórmulas químicas, ... Por supuesto, se puede escribir casi cualquier expresión matemática. Además hay miles de páginas de ayuda que te resuelven cualquier duda en un momento: ¿cómo se escriben matrices? Basta teclear "cómo se escriben matrices con latex" para encontrarse con algo así:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$$

se obtiene con

```
\[\left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right )\].
```

2 Cómo funciona LaTeX

Una vez instalados esos programas, al poner en marcha TexMaker podremos crear nuestro primer documento LaTeX. Más o menos el documento tendrá este aspecto:

```
\documentclass[12pt,a4paper]{report}
\usepackage[spanish]{babel}
\usepackage[utf8x]{inputenc}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{amsfonts}

\begin{document}
Esto es una prueba de c\'{o}mo funciona \LaTeX\
con una ecuaci\'{o}n de prueba:
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
\end{document}
```

Al procesar este documento se generará el resultado

Esto es una prueba de cómo funciona LaTeX con una ecuación de prueba: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

En TexMaker (o TexStudio) hay que ir al menú *Herramientas* y dentro de él elegir la opción *Compilación rápida*; equivalentemente se puede pulsar la tecla

$\boxed{\texttt{F1}}$. Esto hace que LATEX comience a procesar el documento y, si todo va bien y no hay errores, se generará un fichero PDF listo para imprimir, guardarlo, subirlo a alguna página de internet, etc.

Añadiendo gráficas, imágenes, …

También se pueden añadir gráficos, imágenes de cualquier tipo, fotos, … La mayoría de formatos gráficos son reconocidos en LATEX. A veces no es fácil, ya que requiere el uso de programa externos para crear, manipular, … ficheros gráficos. Así se importan gráficos en formatos eps, pdf, jpg, … Hay entornos del propio LATEX que no son sencillos de usar.

Hay una alternativa reciente a todo esto. Se llama TikZ (o PGF-TIkZ) y hace unos gráficos dentro de LATEX con una alta calidad, sin tener que recurrir a ningún programa externo. Puede verse en `texample.net` una gran cantidad de gráficas de todo tipo hechas de esta forma. Es una herramienta relativamente reciente con un desarrollo espectacular.

> “PGF is a TeX macro package for generating graphics. It is platform –and format–independent and works together with the most important TeX backend drivers, including pdftex and dvips. It comes with a user-friedly syntax layer called TikZ.”

La descripción de wikipedia sobre este tándem PGF TikZ:

> PGF/TikZ is a tandem of languages for producing vector graphics from a geometric/algebraic description. PGF is a lower-level language, while TikZ is a set of higher-level macros that use PGF. The top-level PGF and TikZ commands are invoked as TeX macros, but in contrast with PSTricks, the PGF/TikZ graphics themselves are described in a language that resembles MetaPost. Till Tantau is the designer of these languages, and he is also the main developer of the only known interpreter for PGF and TikZ, which is written in TeX. PGF is an acronym for “Portable Graphics Format”. TikZ was introduced in version 1.10 of PGF, and it is a recursive acronym for “TikZ ist kein Zeichenprogramm” (German for "TikZ is not a drawing program"). The PGF/TikZ interpreter can be used from the popular LaTeX and ConTeXt macro packages, and also directly from the original TeX. Since TeX itself is not concerned with graphics, the interpreter supports multiple TeX output backends: dvips, dvipdfm/dvipdfmx/xdvipdfmx, TeX4ht,

> and pdftex's internal PDF output driver. PGF/TikZ comes with extensive documentation. The version 2.10 manual has 726 pages.
>
> Several graphical editors can produce output for PGF/TikZ like the KDE program Cirkuit, and the math drawing program GeoGebra. Export to TikZ is also available as extensions for Inkscape, Blender, MATLAB, matplotlib, Gnuplot and R.

3 Unos ejemplos de cómo colocar figuras TikZ en un documento LaTeX

3.1. Directamente

 **Límite de una función en un punto**. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de A. Se dice que $b \in \mathbb{R}$ es límite de f en a si $\dots$

```
\begin{tikzpicture}[scale=0.1]
\clip (-2,-3) rectangle (6,6);
\node at (3,2) [rotate=15]{$\bigstar$};
\node at (4,-1) [rotate=-15]{$\bigstar$};
\node at (0,0) [rotate=0]{$\bigstar$};
\end{tikzpicture}
{\bf L\'{\i}mite de una funci\'{o}n en un punto}. Sea
$f:A\subset\R\longrightarrow\R$ y sea $a$ un punto
de acumulaci\'{o}n de $A$. Se dice que $b\in\R$
es l\'{\i}mite de $f$ en $a$ si $\dots$
```

3.2. Como una figura centrada

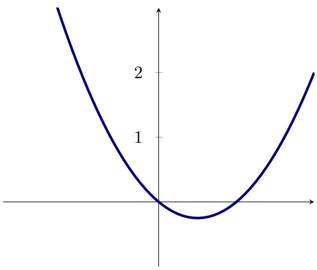
Se consideran las aplicaciones

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & f(A) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, rightsquigarrow] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

```
Se consideran las aplicaciones
\begin{center}\begin{tikzpicture}[scale=1.0]
\node[right] at (1,3) {$A\stackrel{f}{\longrightarrow}
f(A)\stackrel{g}{\longrightarrow} \R$};
\node[right] at (1,2.2)
{$x\ \leadsto\ \, f(x)\ \leadsto\ g(f(x))$};
\draw[line width=0.75pt,->,>=to] (1.3,1.8) ..
controls (1.3,1) and (4.1,1) .. (4.3,1.8);
\node at (2.8,0.8) {$g\circ f$};
\end{tikzpicture}\end{center}
```

Otro más:

la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ en el intervalo $[-2, 2]$ puede verse más abajo

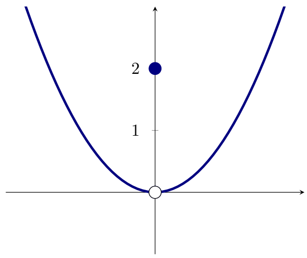



```
la gr\'{a}fica de la funci\'{o}n $f(x)=x^2-x$
en el intervalo $[-2,2]$
puede verse m\'{a}s abajo
\begin{center}\begin{tikzpicture}[scale=.6]
\pgfplotsset{my style/.append style={axis x line=middle,
axis y line=middle, xlabel={$\,$},
ylabel={$\,$}, xtick={0},ytick={1,2}}}
\begin{axis}[my style, xmin=-2, xmax=2, ymin=-1, ymax=3,
yticklabel style = {xshift=-4pt}]
\addplot[azul,domain=-2:2, ultra thick]{x^2-x};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

3.3. Colocando texto alrededor . Para ello se utiliza `parbox` (opcionalmente con `resizebox`)

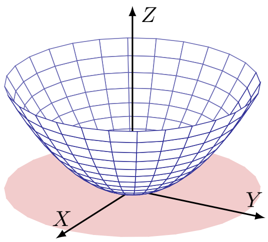
A la derecha puede verse la gráfica de la función

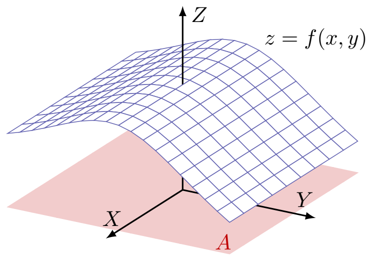
$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{R} & \stackrel{g}{\longrightarrow} & \mathbb{R}\\
x\ne 0 & \leadsto & x^2\hphantom{\ne 0}\\
0 & \leadsto & 2
\end{array}$$



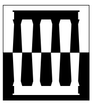

```
\parbox[][][t]{.55\linewidth}{A la derecha puede verse
la gr\'{a}fica de la funci\'{o}n
\[\begin{array}{rcl}
\R &\stackrel{g}{\longrightarrow}& \R\\
x\ne 0 &\leadsto& x^2\hphantom{\ne 0}\\
0 &\leadsto& 2\end{array}\]}\hfill
\parbox[][][t]{.35\linewidth}{
\resizebox{.9\linewidth}{!}{
\begin{tikzpicture}[scale=.6]
\definecolor{azul}{rgb}{0,0,0.5}
\definecolor{rojo}{rgb}{0.5,0,0}
\definecolor{verde}{rgb}{0,0.5,0}
\pgfplotsset{my style/.append
style={axis x line=middle, axis y line=middle,
xlabel={$\,$}, ylabel={$\,$}, xtick={0},ytick={1,2}}}
\begin{axis}[my style, xmin=-2, xmax=2, ymin=-1, ymax=3,
yticklabel style = {xshift=-4pt}]
\addplot[azul,domain=-2:2, ultra thick]{x^2};
\addplot[mark=*, mark size=4pt, azul]
  coordinates {(0,2)};
\addplot[mark=*, mark size=4pt, azul]
  coordinates {(0,0)};
\addplot[mark=*, mark size=4pt, fill=white]
  coordinates {(0,0)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}}}
```

Esta herramienta TikZ permite también hacer gráficas en $\mathbb{R}^3$:





Incluso símbolos como este:

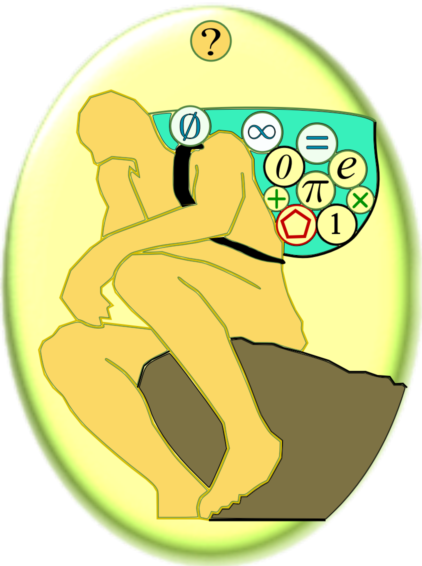


Algunas referencias de ayuda:

1) http://es.wikipedia.org/wiki/LaTeX
2) http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX
3) http://es.wikibooks.org/wiki/LaTeX
4) http://www.latex-project.org/
5) http://navarroj.com/latex
6) http://www.latextemplates.com/

DIVULGATIONES MATHEMATICAE 2015, 117 – 128

Epílogo: 20 problemas visuales



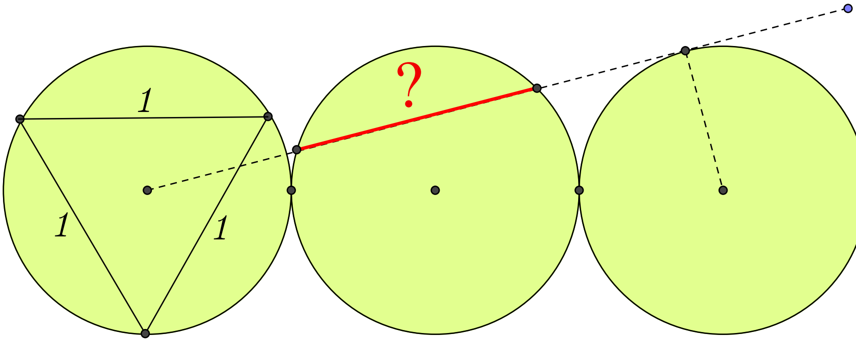
R. Faro Rivas

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura
Avda. de Elvas, s/n, 06006 *Badajoz, Spain*

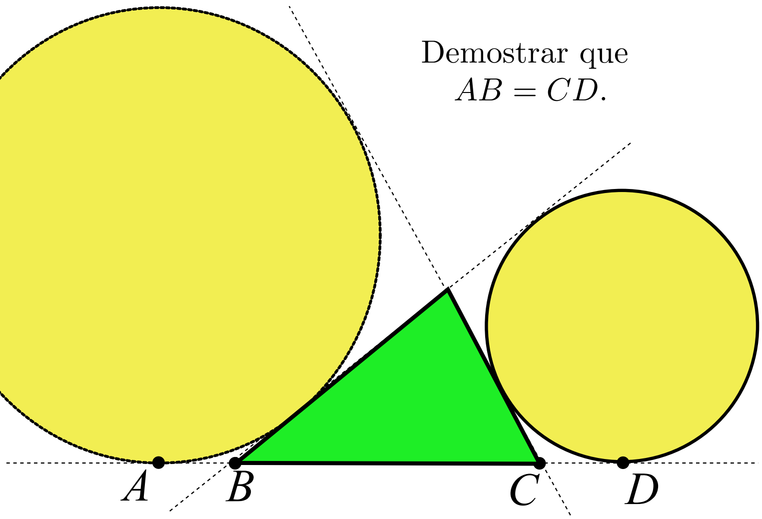
ricarfr@unex.es

Las soluciones a estos problemas se podrán consultar, a su debido tiempo, en la página web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura, en la sección dedicada a la Olimpiada Matemática.

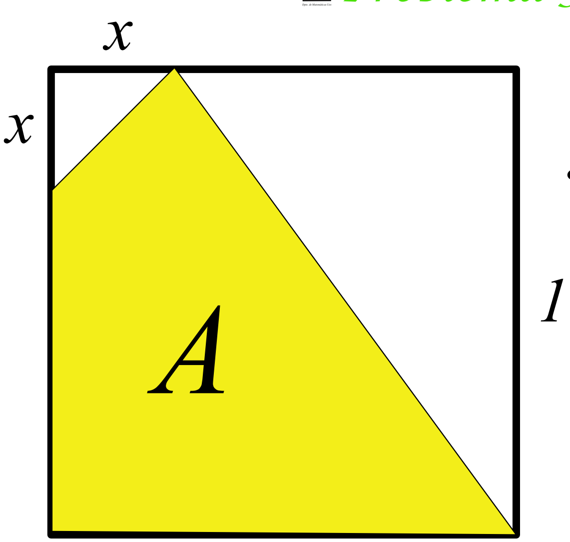
Problema 1



Problema 2



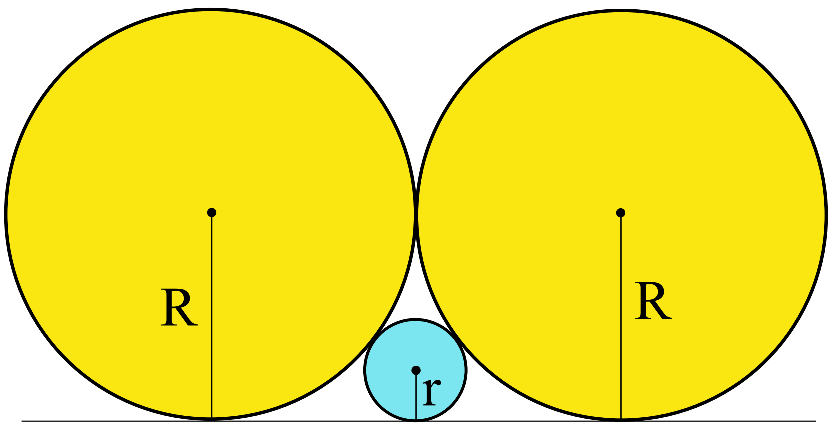
Problema 3



¿Para qué valor de x el área A es máxima?

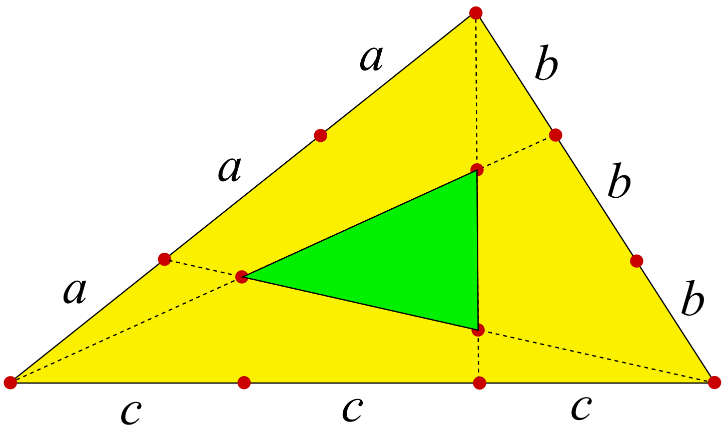
Problema 4

Demostrar que R=4r

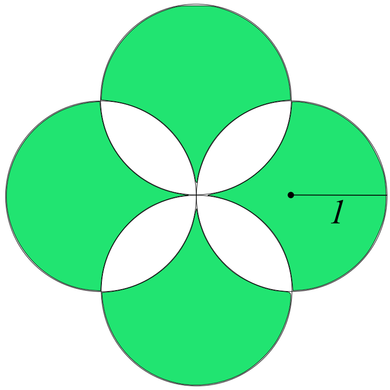


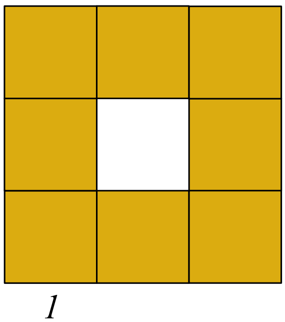
Problema 5

El cociente entre las áreas del triángulo grande y el pequeño es 7



Problema 6





¿La figura verde tiene mayor, igual o menor área que la marrón?

Problema 7

Falacias Matematicas

(i)

$$4 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \log\left(\frac{1}{2}\right) < 2 \log\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 2$$

(ii)

$$x = \frac{\pi + 3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x(\pi - 3) = \pi^2 - 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 - 6x = \pi^2 - 2x\pi$$

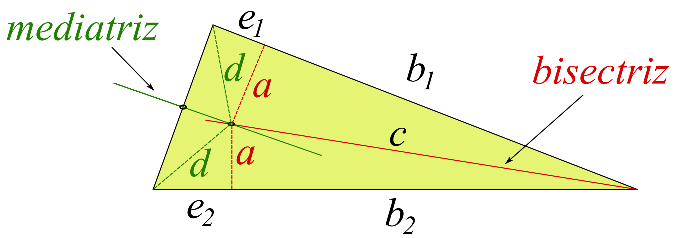
$$\Leftrightarrow \quad 3^2 - 6x + x^2 = \pi^2 - 2x\pi + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (3-x)^2 = (\pi - x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - x = \pi - x \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \pi$$

Problema 8

Falacias Matematicas 2:

Todo triángulo es isosceles



$$\left.\begin{array}{l} b_1^2 + a^2 = c^2 = b_2^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 \\ e_1^2 + a^2 = d^2 = e_2^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad e_1 = e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e_1 + b_1 = e_2 + b_2.$$

Problema 9

Rellenar la tabla con números del 1 al 7, siguiendo las instrucciones

1.- Poner en cada una de las dos primeras casillas un número entre 1 y 7, que no sean los dos 7.

2.- Poner en la siguiente casilla la suma de las dos anteriores (si se pasa de 7 se pone el resto).

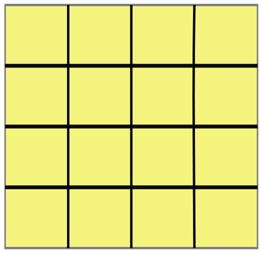
3.- Se repite el paso anterior en todas las casillas, es decir en cada una se pone la suma de las dos anteriores (recordando que si se pasa de 7 se pone el resto).

4.- Se suman los 16 números, que están entre 1 y 7, de la tabla rellena. El resultado tendrá dos cifras.

5.- Se suman las dos cifras. El resultado final será un número entre 1 y 9.

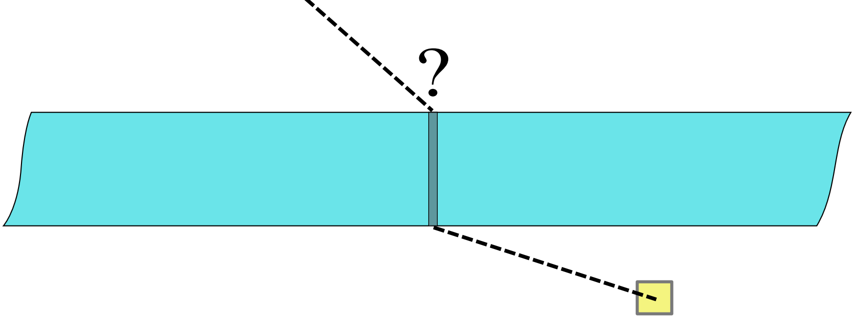
6.- Piensa la letra del abecedario que corresponde a ese número: Siendo $1 \to a, 2 \to b, \cdots, 9 \to i$.

7.- Piensa en un tipo de edificio que empiece por esa letra... Las soluciones al final...



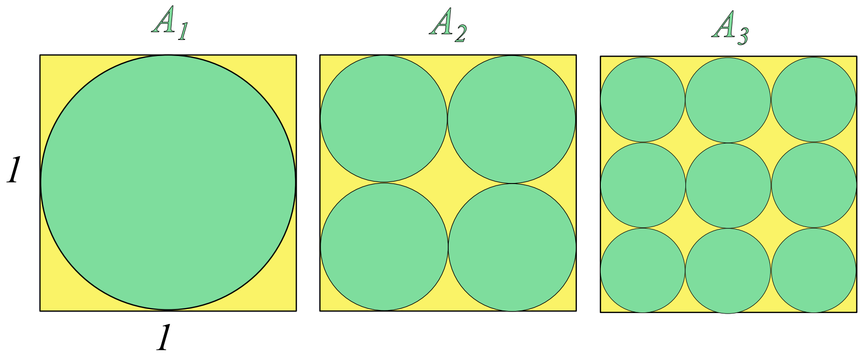
Problema 10

Un rio, de orillas paralelas, separa dos pueblos. ¿Donde debe hacerse un puente perpendicular a la orilla, para que la distancia entre los pueblos sea mínima?

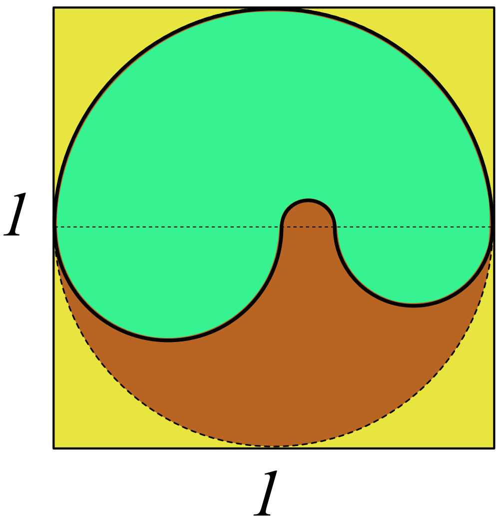


Problema 11

Colocamos n^2 círculos en un cuadrado de lado 1,
como muestra la figura para n=1,2 y 3.
Si su área total es A_n, ¿cuál es el lim A_n?



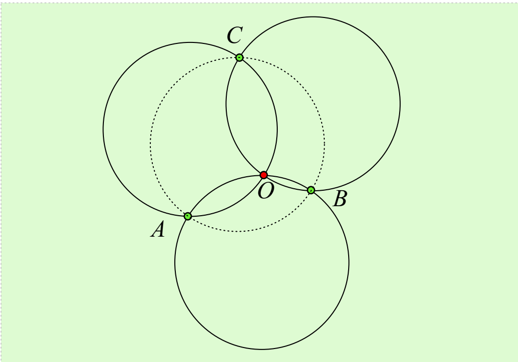
Problema 12



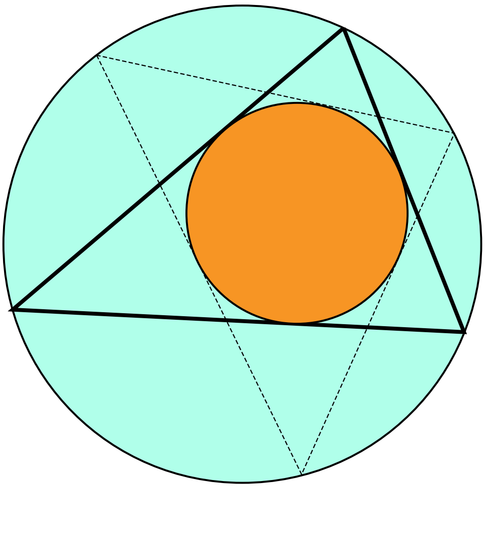
Calcular la longitud de la curva cerrada formada por las 4 semicircunferencias

Problema 13

Tres circunferencias de igual radio r, pasan por un mismo punto O. Demostrar que la circunferencia que pasa por los otros 3 puntos de corte, tiene igual radio r.



Problema 14



Si 5 lados de dos triángulos, con vértices en un círculo, son tangentes a otro círculo en su interior, el sexto lado también.

Problema 15

Obsérvese que

$$1^3 = 1^2, \quad 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2, \ldots,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2, \ldots$$

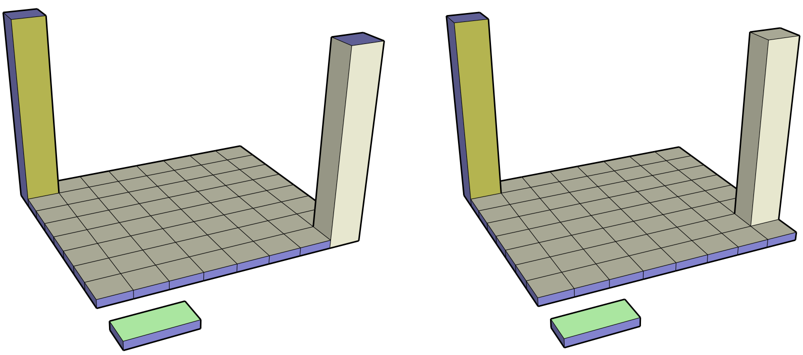
Demostrar que para todo n

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3,$$

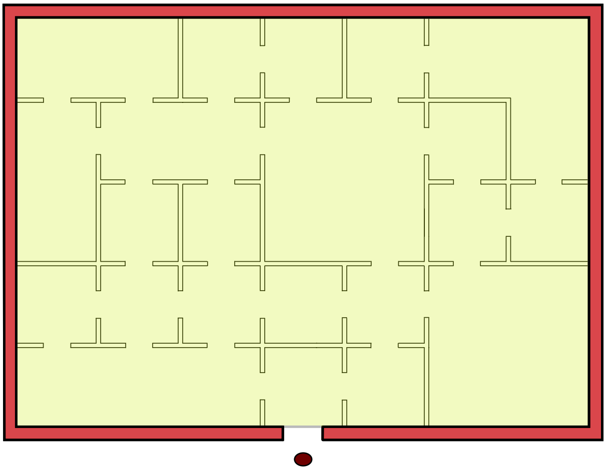
es un cuadrado perfecto, ¿de qué número?.

Problema 16

*¿Cuales, de estos dos suelos, se pueden enlosar con losas de 2*x*1, sin partir ninguna ?*



Problema 17

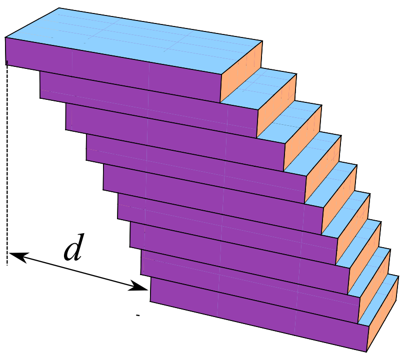


¿Podemos entrar y salir de la casa, atravesando todas las puertas interiores una única vez?

Problema 18

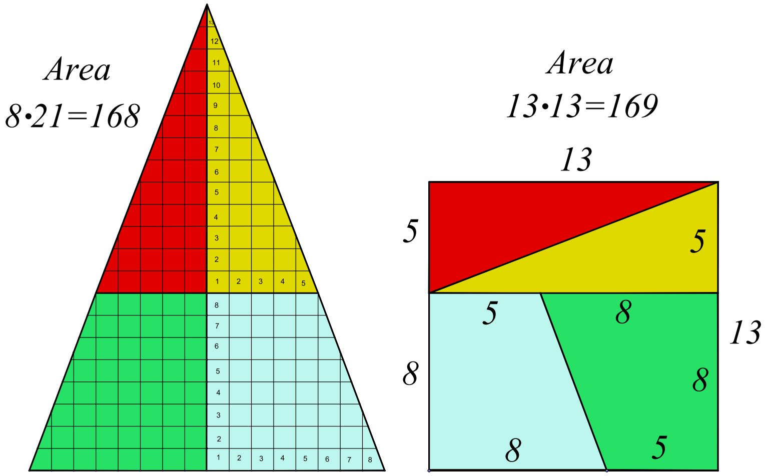
¿Cuanto puede sobresalir un libro en una pila de libros iguales, sin que se caigan, poniendo tantos como se quiera?

¿d máxima?



Problema 19

¿Donde está el cuadradito que falta?



Problema 20