LIV Olimpiada Matemática Espanõla
Primera Fase
Soluciones
19 de enero de 2018

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sean a y b números naturales cuyos máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M, respectivamente. Demostrar que

$$M^2 + D^2 \geq a^2 + b^2$$

Solución:

Sean $x, y \geq 1$ números naturales primos entre sí tales que $a = xD$ y $b = yD$, de manera que $M = xyD$. Luego, hay que probar que $(x^2y^2 + 1)D^2 \geq (x^2 + y^2)D^2$, lo cual equivale a demostrar que $x^2(y^2 - 1) \geq y^2 - 1$, es decir, que $x^2 \geq 1$.

2. Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y \tag{1}$$

para cualesquiera x, y reales.

Solución: A lo largo del ejercio se denotará $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y $\texttt{Id}$ la función identidad que asigna a cada número x su mismo valor. Si aplicamos (1) con $x = 0$ se obtiene

$$f^2(y) = f(0) + y \tag{2}$$

cualquiera que sea y. En particular, aplicando (2) a $y = 0$ se deduce que $f^2(0) = f(0)$ y, en consecuencia, que $f^3(0) = f\big[f^2(0)\big] = f\big[f(0)\big] = f^2(0) = f(0)$. Por otra parte, se verifica también, según (2), que $f^3(0) = f^2\big[f(0)\big] = 2f(0)$. De ambas afirmaciones se deduce que $f(0) = 0$ y, por lo tanto,

$$f^2 = \texttt{Id} \tag{3}$$

Así pues, aplicando (3) al número $x + f(x)$ se obtiene, por un lado, que $f^2(x + f(x)) = x + f(x)$. Por otro lado, si aplicamos primero (1) con $y = 0$ y después (3) se deduce también que $f^2(x + f(x)) = f\big[f(x + f(x))\big] = f\big[f(2x)\big] = f^2(2x) = 2x$. A partir de ambas afirmaciones concluimos que $f = \texttt{Id}$.

3. En una isla paradisíaca se distinguen dos tipos de habitantes: aquellos cuyas afirmaciones son siempre verdaderas y aquellos cuyas afirmaciones son siempre falsas (o sea, que son mentirosos compulsivos). Tras una reunión, siete habitantes de la isla, etiquetados con las letras de la A a la G, emiten simultáneamente sendas afirmaciones, que son las siguientes:

A: `Todos nosotros estamos diciendo la verdad.`
B: `Solo uno de nosotros dice la verdad.`
C: `Al menos uno de nosotros dice la verdad.`
D: `Solo dos de nosotros dicen la verdad.`
E: `Al menos dos de nosotros dicen la verdad.`
F: `Solo tres uno de nosotros dicen la verdad.`
G: `Al menos tres de nosotros dicen la verdad.`

Razona claramente quiénes son mentirosos compulsivos.

Solución: Razonaremos caso a caso por reducción al absurdo.

A: Es falso pues B, D y F no pueden estar diciendo simultáneamente la verdad.

B: Es falso pues, si fuera verdadero, también lo sería C, con lo que se incurriría en una contradicción.

D: Es falso pues, si fuera verdadero, también lo serían C y E.

F: Es falso pues, si fuera verdadero, también lo serían C, E y G. En consecuencia, puede haber a lo sumo tres afirmaciones verdaderas.

G: Es falso pues, si fuera verdadera, habría exactamente tres afirmaciones verdaderas, lo cual sabemos que es falso (F). Por lo tanto, puede haber a lo sumo dos afirmaciones verdaderas.

E: Es falso pues, si fuera verdadera, habría exactamente dos afirmaciones verdaderas, lo cual sabemos que es falso (D). Por lo tanto, puede haber a lo sumo una afirmación verdadera.

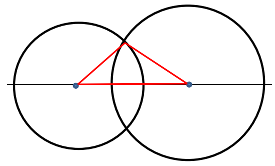
C: Es falso pues, si fuera verdadera, habría exactamente una afirmación verdadera, lo cual sabemos que es falso (B).

Así pues los siete son mentirosos compulsivos.

4. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

Solución: Dado que la primera longitud es la mayor de las tres para todo $x > 1$, basta determinar los valores $x > 1$ para los cuales dicha longitud es menor que la suma de las otras dos. Esa es la condición necesaria y suficiente para poder construir un triángulo según se razona en la figura.



Nótese que la demostración puede abreviarse si nos percartamos de que los tres polinomios en x son múltiplos de $x^2 + 1$. Concretamente, pueden expresarse como $x^2 + 1$ multiplicado por $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ y $x^2 - 1$, respectivamente. En consecuencia, debe verificarse $x^2 + x + 1 < x^2 + 2x$, es decir, $x > 1$. Así pues, el triángulo existe para todo $x > 1$.

5. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

Solución: Debemos tener presente que, si $n \geq 1$, los valores de las dos últimas cifras de 7^n dependen exclusivamente de los valores de las dos últimas cifras de 7^{n-1}. Dado que

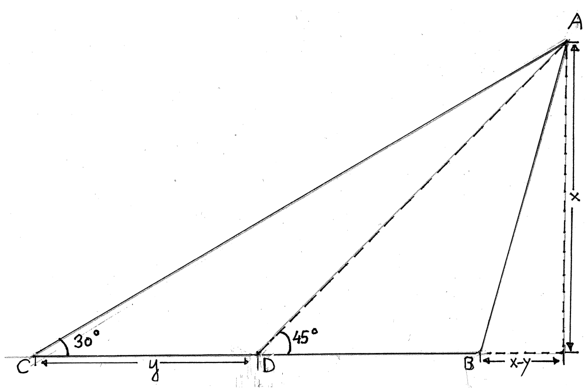
$$7^0 = 01, \qquad 7^1 = 07, \qquad 7^2 = 49, \qquad 7^3 = 343, \qquad 7^4 = 2501,$$

sabemos que las dos últimas cifras de 7^n solo pueden ser 01, 07, 49 o 43 (que se suceden cíclicamente según el resto de dividir n entre 4 sea, respectivamente, 0, 1, 2 o 3). Luego, si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima tiene que ser 4.

6. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

Solución: Siguiendo la notación expresada en la figura aplicaremos el teorema de los senos, según el cual

$$\operatorname{sen}^2(\angle BAD) = \operatorname{sen}^2(\angle ADB) \cdot \frac{DB^2}{AB^2} = \frac{1}{2}\frac{DB^2}{AB^2} \tag{4}$$



Como $1/\sqrt{3} = \tan(\angle ACB) = x/(x+y)$ se deduce que $y = x(\sqrt{3}-1)$ y, por lo tanto, $DB^2 = y^2 = 2x^2(2-\sqrt{3})$. Por otra parte, del teorema de Pitágoras se sigue que $AB^2 = x^2 + (x-y)^2 = 4x^2(2-\sqrt{3})$. En consecuencia, se deduce de (4) que $\operatorname{sen}^2(\angle BAD) = 1/4$. Luego, $\angle BAD = 30^o$.