LVII Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
21 de enero de 2021
Soluciones propuestas

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Determina todos los números positivos de cuatro cifras $\overline{abcd}$ tales que, al insertar un dígito 0 en cualquier posición, se obtiene un múltiplo de 7.*

   Solución: El número expresado equivale a $a10^3 + b10^2 + c10^1 + d10^0$. Así pues, insertando ceros en las diferentes posiciones, deducimos que tienen que existir enteros positivos $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq n_5$ tales que

$$\begin{aligned} a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10^1 &= n_1 7 && (1)\\ a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10^0 &= n_2 7 && (2)\\ a10^4 + b10^3 + c10^1 + d10^0 &= n_3 7 && (3)\\ a10^4 + b10^2 + c10^1 + d10^0 &= n_4 7 && (4)\\ a10^3 + b10^2 + c10^1 + d10^0 &= n_5 7 && (5) \end{aligned}$$

   Restando (2) a (1) se obtiene $9d = (n_1 - n_2)7$. Dado que 7 y 9 son primos entre sí, d tiene que ser un múltiplo de 7 entre 0 y 9, es decir d puede ser 0 ó 7. Restando (3) a (2) se obtiene que $90c = (n_2 - n_3)7$. Dado que 7 y cualquier número que sea potencia de 10 son primos entre sí, se tiene igualmente que $c = 0$ ó 7; restando (4) a (3) se obtiene que b puede valer 0 ó 7; por último, restando (5) a (4) y teniendo en cuenta que el número es de 4 cifras, se tiene que $a = 7$. Luego, las única opciones posibles son $7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777$.

2. *Razona para qué valores enteros positivos de n ocurre que, al desarrollar $(1 + x + x^2)^n$ en potencias de x, aparezcan exactamente tres términos con coeficientes impares.*

   Solución: La propiead se verifica obviamente para $n = 1$ y, si multiplicamos polinomios con paciencia y cuidado, nos percataremos de que se verifica también para $n = 2, 4$ y 8, lo que nos puede hace pensar que esto ocurre en general para n de la forma 2^k, pero es conveniente demostrarlo y lo haremos por inducción: supongamos que, para cierto $k \geq 0$, se verifica que $(1 + x + x^2)^{2^k}$ tiene tres coeficientes impares. Vamos a probar que, entonces, el único n entre $2^k + 1$ y 2^{k+1}, ambos inclusive, con tres coeficientes impares es $n = 2^{k+1}$.

   En lo que sigue y para cada $n \geq 1$, $a_{[n,0]}, \ldots, a_{[n,2n]}$ denotarán, respectivamente, los coeficientes de los términos de orden $0, \ldots, 2n$ del polinomio $(1 + x + x^2)^n$. Luego, $a_{[n,n]}$ será el coeficiente central. Los coeficientes son simétricos respecto al centro, es decir, $a_{[n,0]} = a_{[n,2n]} = 1$, $a_{[n,1]} = a_{[n,2n-1]}$, etc. En consecuencia, si multiplicamos $(1 + x + x^2)^n$ por $(1 + x + x^2)$, tenemos que $a_{[n+1,n+1]} = a_{[n,n]} + 2a_{[n,n-1]}$, que es impar cuando lo es $a_{[n,n]}$. Un sencillo razonamiento por inducción nos convence de que siempre hay al menos tres términos con coeficientes impares: los dos extremos y el central. Veamos que para $n = 2^{k+1}$ son los únicos impares. Efectivamente, dado $1 < p \leq 2^{k+1}$, el coeficiente $a_{[2^{k+1},p]}$ puede obtenerse mediante:

   - Si p es impar, $a_{[2^{k+1},p]} = 2\sum_{j=0}^{(p-1)/2} a_{[2^k,j]}a_{[2^k,p-j]}$
   - Si p es par, $a_{[2^{k+1},p]} = 2\sum_{j=0}^{p/2-1} a_{[2^k,j]}a_{[2^k,p-j]} + a^2_{[2^k,p/2]}$

Es decir, exceptuando $a_{[2^{k+1},0]} = 1$, $a_{[2^{k+1},p]}$ es impar si, y sólo si, p es par y $a_{[2^k,p/2]}$ impar, es decir, si $p = 2^{k+1}$. Falta entonces por probar que, si $n = 2^k + q$ con $1 < q < 2^k$, $(1+x+x^2)^n$ tiene al menos cuatro coeficientes impares. Sea $a_{[q,p]}$ el primer coeficiente impar, salvo $a_{[q,0]}$, de $(1+x+x^2)^q$, en cuyo caso se tiene que $1 \leq p \leq q < 2^k$. Luego, $a_{[2^k,1]}, \ldots, a_{[2^k,p]}$ son pares. Se verifica que

$$a_{[2^k+q,p]} = \sum_{j=0}^{p} a_{[q,j]}a_{[2^k,p-j]} = \sum_{j=1}^{p-1} a_{[q,j]}a_{[2^k,p-j]} + a_{[2^k,p]} + a_{[q,p]}$$

Como el único coeficiente impar que aparece en el lado derecho es $a_{[q,p]}$, la suma total será impar, lo cual supone un coeficiente impar de $(1+x+x^2)^n$ que no está ni en el centro ni en los extremos.

3. *Si tenemos una tablero de m filas y n columnas, determina el valor mínimo de n que permite colocar algunas piedras en las casillas del tablero, no más de una piedra por casilla, de manera que no existan dos filas con la misma cantidad de piedras y todas las columnas tengan exactamente el mismo número k de piedras. El tablero debe valer para cualquier k entre 1 y $m-1$.*

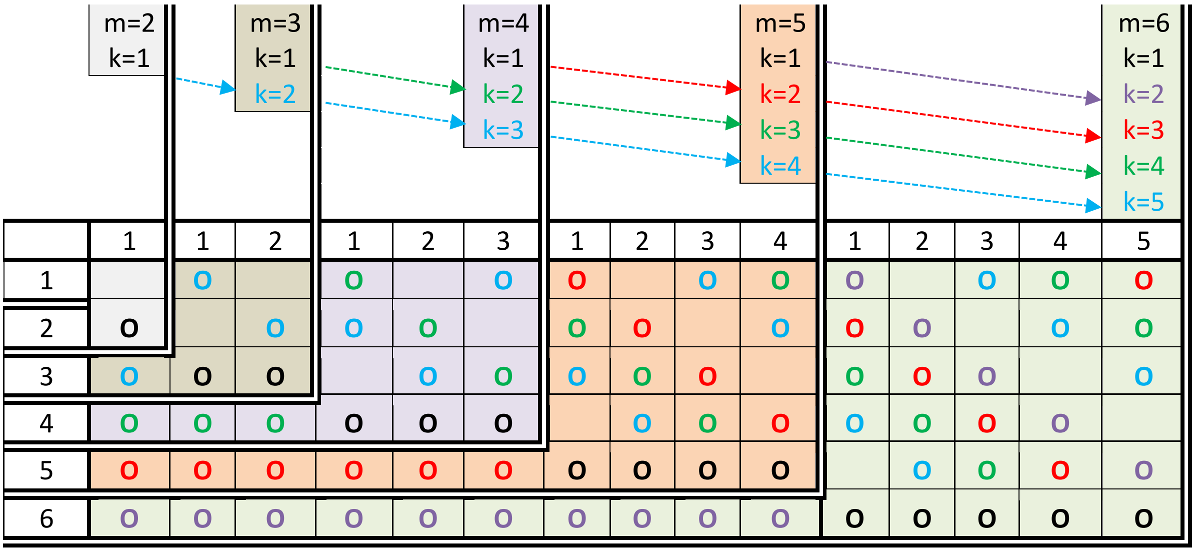
   Solución: Supongamos que contamos con m filas y veamos cuál debe ser el menor valor n para que la propiedad anterior pueda satisfacerse, sea cual sea el número constante k de piedras por columnas, que tiene que ser inferior a m. Se denotará por $n_1, \ldots, n_m$ las frecuencias de las respectivas filas $1, \ldots, m$, es decir, el número de columnas en las que tienen piedras. Si $k = 1$, el mínimo valor posible de n se alcanza con un tablero tipo $n_1 = 0, n_2 = 1, \ldots, n_m = m-1$. Es decir, asignamos a cada fila $i \leq 1$ un bloque i de n_i columnas. En total tenemos la progresión aritmética

$$n = 0 + 1 + \ldots + m - 1 = m(m-1)/2$$

   Así pues, para cada m, un valor de n que verifique la propiedad enunciada debe ser mayor o igual que $m(m-1)/2$. Veremos que $n = m(m-1)/2$ cumple la condición exigida, no sólo para $k = 1$, sino para cualquier $k \leq m-1$. El procedimiento se ilustra en el esquema adjunto para $m = 2, \ldots, 6$ con $k = 1, \ldots, m-1$, pero la demostración requiere de un razonamiento por inducción, suponiéndolo cierto para cualquier m con $k = 1$. Efectivamente, veamos que, si la condición deseada se verifica para m y $k < m$ con $n = m(m-1)/2$ columnas, entonces también se verifica para $m+1$ y $k+1$ con $n = (m+1)m/2$ columnas. Entonces habremos acabado pues podremos cubrir todas las opciones de m y k posibles.

   En la configuración del tablero correspondiente a (m, k) se insertan, al final, la fila $m+1$ y un bloque de m columnas, lo que hace un total de $n = m + m(m-1)/2 = (m+1)m/2$, que es la cifra buscada. La parte antigua de la nueva configuración permanece invariante respecto al caso (m, k). La nueva fila introducida se marca en todas las columnas, por lo que $n_{m+1} = n$. Aparte, en cada columna del bloque nuevo se marcan otras k filas, de manera que cada una de las m primeras filas aparezca en este bloque $k < m$ veces, ahora veremos cómo. Así, tendremos $k+1$ filas marcadas en cada una de las columnas. Además, $n_1, \ldots, n_m < n_{m+1}$ y las diferencias entre m frecuencias iniciales permanecen invariantes respecto al tablero (m, k), por lo que se cumple $n_1 < n_2 < n_m < \ldots < n_{m+1}$.

   Para lograr que aparezca cada una de las m filas iniciales $k < m$ veces en el último bloque de m columnas, conviene concebir la secuencia de filas de una forma circular. Por ejemplo, si contamos con cinco filas, $1, 2, 3, 4, 5$, y queremos que cada una aparezca $k = 3$ veces en cinco columnas, deberíamos marcar 123 en la primera columna, 234 en la segunda, 345 en la tercera, 451 en la cuarta y 512 en la quinta, como se ve en el esquema con $m = 6$ y $k = 4$ (violeta+ rojo+ verde).



4. *Siete amigos tienen la cuestionable costumbre navideña de entregarse mutuamente regalos por el precio de 10 euros cada uno.*

   - *¿Cuántos dinero gastarán entre todos?*
   - *Hartos de tanto derroche deciden regalarse mediante el método del "amigo invisible", consistente en que cada uno de ellos regala únicamente a otro y cada uno recibe únicamente de otro. ¿Cuánto dinero gastarán entre todos con el nuevo sistema?*
   - *¿Cuántas configuraciones diferentes pueden contemplarse para un método de amigo invisible de siete personas? Si no consigues dar con la cifra exacta se valoraría positivamente una buena aproximación.*

Solución: Responderemos las preguntas para un número genérico n de amigos. Asignemos un número del 1 al n a cada uno de ellos. Para responder la primera basta tener en cuenta que cada uno de los n amigos regala a $n-1$ personas, lo que implica $n(n-1)$ regalos diferentes. En nuestro caso 42, lo cual supone un total de 420 euros.

Si utilizamos el método del amigo invisible, cada uno regala a un único individuo, por lo que se gastarán en total 70 euros. Saber cuántas configuraciones pueden establecerse, en general, con n amigos, equivale a calcular el número a_n de permutaciones de los número del 1 al n en las cuales ninguno de ellos está en la posición que le corresponde. En una permutación concreta de este tipo, el primer número que aparezca denotará a la persona que regale al primer de la lista, el segundo al segundo, etc.

Calcular a_n no es fácil. Lo haremos de manera recursiva, teniendo en cuenta que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. Si $n \geq 3$, podemos calcular a_n en función de a_{n-1} y a_{n-2}. Efectivamente, dado que el número 1 no debe quedar primero, puede ocupar $n-1$ posiciones diferentes, y razonaremos igual para cada una de ellas. Imaginemos, por ejemplo, que se encuentra en la posición segunda. En tal caso, puede ocurrir que el número 2 ocupe la posición primera, con lo cual el resto se dispondría de a_{n-2} formas diferentes, o bien lo contrario, lo cual ofrecería a_{n-1} posibilidades. En consecuencia, $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$. En el caso $n = 8$ se obtiene pues:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	1	2	9	44	265	1854

La solución es entonces 1854 configuraciones validas (de entre las 7!=5040 permutaciones posibles de 7 elementos).

NOTA: En este punto podría heber sido de utilidad tener en cuenta el famoso problema de los sombreros de Euler, que se formula así: n caballeros acuden con sombreros idénticos a la ópera y los cuelgan en sendas perchas, recogiéndolos de manera aleatoria tras la función. Euler demostró que la probabilidad de que ninguno de ellos volviera a casa con su sombreo convergía a e^{-1} conforme n tiende a infinito, con gran rapidez, por cierto. Con la notación que hemos seguido en nuestro problema, se verifica pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = e^{-1}$$

Esto sugiere aproximar nuestra solución mediante $a_7 \simeq 7!e^{-1} = 1853$.