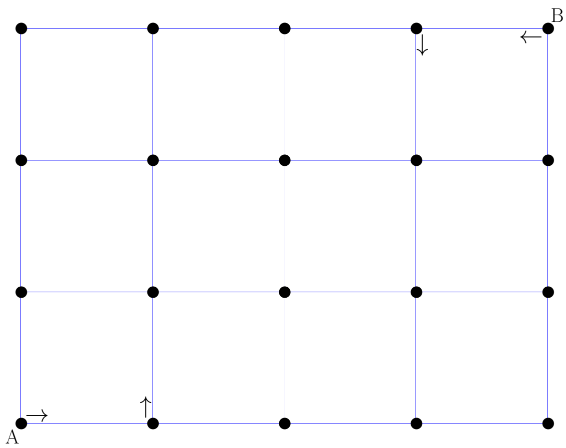
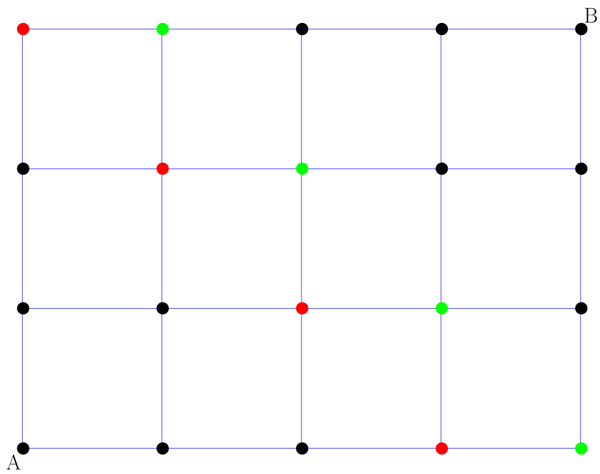
LVII Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
21 de enero de 2022
Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. La figura muestra un plano con estrechas calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona P va de A a B y otra Q, de B a A. Ambas parten al mismo tiempo, a la misma velocidad y de manera que, en cualquier encrucijada, deben tomar un camino entre aquéllos que les aproximen a su objetivo. Si tienen varias posibilidades, toman al azar y con idéntica probabilidad uno de ellos. Halla la probabilidad de que P y Q colisionen.



Solución: Dado que el individuo P sólo se puede mover hacia la derecha o hacia arriba, al contrario que Q, que debe moverse hacia la izquierda o hacia abajo, la colisión debería producirse, si acaso, en el cuarto movimiento. Antes del mismo, P puede estar en cualquiera de las posiciones marcadas en rojo, mientras que Q estará en cualquiera de las verdes. Calcularemos la probabilidad de colisión mediante un diagrama de árbol.



- P puede llegar a la posición $(0, 3)$ en el tercer movimiento con probabilidad $1/8$, en cuyo caso colisionarán con Q si éste ha llegado a la posición $(1, 3)$ en el tercer movimiento, lo cual ocurre con probabilidad $1/8$ y, además, se mueve hacia la izquierda en el cuarto movimiento, lo cual ocurre con probabilidad 1/2. Por lo tanto, la probabilidad de colisión es

$$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{128}$$

- P puede llegar a la posición $(1, 2)$ con probabilidad 3/8, en cuyo caso colisionarán con Q si se verifica una de estas dos circunstancias:
  (a) Si Q ha llegado a la posición $(1, 3)$ y se mueve a continuación hacia la abajo y en sentido contrario al de P en el cuarto movimiento. Por lo tanto, la probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{256}$$
  (b) Si Q ha llegado a la posición $(2, 2)$ y se mueve hacia la izquierda y en sentido contrario al de P. Por lo tanto, la probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{256}$$
- P puede llegar a la posición $(2, 1)$ en le tercer movimiento con probabilidad 3/8, en cuyo caso colisionarán con Q si se verifica una de estas dos circunstancias:
  (a) Si Q ha llegado a la posición $(2, 2)$ y se mueve hacia abajo y en sentido contrario al de P. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{256}$$
  (b) Si Q ha llegado a la posición $(3, 1)$ y se mueve hacia la izquierda y en sentido contrario al de P. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{256}$$
- P puede llegar a la posición $(3, 0)$ con probabilidad 1/8, en cuyo caso colisionarán con Q si se verifica una de estas dos circunstancias:
  (a) Si Q ha llegado a la posición $(3, 1)$ y se mueve hacia la abajo y en sentido contrario al de P. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{1}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{256}$$
  (b) Si Q ha llegado a la posición $(4, 0)$ y P se mueve hacia la derecha. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{128}$$

Por lo tanto, la probabilidad total de colisión es

$$\frac{1}{128} + \frac{3}{256} + \frac{9}{256} + \frac{9}{256} + \frac{9}{256} + \frac{3}{256} + \frac{1}{128} = \frac{37}{256}$$

2. ¿Es posible encontrar una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1$ para todo $n \geq 1$?

   Solución: Supongamos que existe f verificando la condición y tal que $f(1) = m \in \mathbb{N}$. En ese caso, $f(m) = f(f(1)) = 2$ y $f(2) = f(f(m)) = m+1$. Análogamente, $f(3) = f(f(2)) = m + 2$. En general, se verifica pues que $f(n) = n + m - 1$. En particular, $f(m) = 2m - 1$. Dado que $f(m) = 2$, se deduce que $m = 1/2$, que no es natural. Luego, tal función no puede existir.

3. De un grupos de 201 personas de 5 nacionalidades diferentes sabemos que, de cada 6 personas, al menos 2 tienen la misma edad. Demuestra entonces que hay al menos 5 personas que coinciden en nacionalidad, factor Rh y edad.

Solución: Afirmar que es imposible configurar un grupo de 6 personas con diferentes edades equivale a afirmar que contamos con, a lo sumo, 5 edades diferentes. Dado que tenemos 5 nacionalidades distintas y dos tipos de Rh, podemos contemplar teóricamente hasta $5 \times 2 \times 5 = 50$ tipos posibles de sujetos atendiendo a estos tres aspectos. Si el número máximo de personas del mismo tipo es k, entonces el número total de personas, 201, es menor o igual que $50k$. Luego, $k \geq 5$.

4. Razona si un cuadrado de lado 1 puede contener un triángulo equilátero de lado estrictamente mayor que 1.

Solución: Sí existe al menos un triángulo en las condiciones de (a). Por ejemplo, cualquiera del tipo de la figura 1 tiene al menos dos lados iguales de longitud mayor que 1. Por el teorema de Pitágoras, para que sea equilátero debemos elegir x como una de las soluciones de la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= 2(1-x)^2 \\ x^2 - 4x + 1 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Escogemos la solución $x = 2 - \sqrt{3}$ pues es un número entre 0 y 1 y obtenemos un triángulo equilátero de lado mayor que 1 como el de la figura 1. Obviamente, existen más triángulos verificando la condición. Lo importante aquí es que queda claro que es equilátero y de lado mayor que 1.

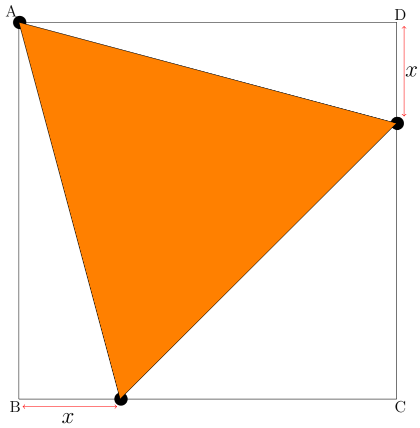


Figura 1: Triángulo equilátero