# LIX Olimpiada Matemática Española
## Primera Fase
## 20 de enero de 2023
## Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sea $n$ un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de algún bonito color pero verificando la siguiente propiedad: si $(a, b)$ es un par de enteros diferentes tales que $a$ es divisor de $b$, sus colores son diferentes. Encontrar el mínimo número de colores que se precisa para que esa propiedad se cumpla.

   **Solución:** Asignemos un color al número $1 = 2^0$; el del número $2 = 2^1$ debe ser diferente; el del número $4 = 2^2$ ha de ser también diferente a los anteriores, al igual que el de $8 = 2^3$ y así hasta llegar a $1024 = 2^{10}$. Llevamos ya necesariamente 11 colores diferentes que, además, son suficientes. Efectivamente, si coloreamos los número desde el $2^k$ hasta el $2^{k+1} - 1$ con un mismo color la propiedad se sigue verificando pues, si $a$ pertenece a esa categoría y $b \neq a$ es múltiplo de $a$, existe un entero $z \geq 2$ tal que $b = za \geq 2a \geq 2^{k+1}$, por lo que pertenece a una categoría superior. Es decir, los números de una misma categoría pueden compartir color.

2. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros enteros positivos, $1, 2, \ldots, n$, se escriben en una pizarra. Leocadia realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determina todos los enteros positivos $n$ para los que Leocadia puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

   **Solución:** Destacamos las cuatro afirmaciones siguientes:

   (i) La propiedad se verifica para $n = 3, 4, 5$, según se prueba en los siguientes diagramas:

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 1+3 | 2+3 | 3 |
| 4+2 | 5 | 3+2 |
| 6 | 5+1 | 5+1 |
| 6 | 6 | 6 |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1+4 | 2+4 | 3 | 4 |
| 5+3 | 6 | 3+3 | 4 |
| 8 | 6+2 | 6 | 4+2 |
| 8 | 8 | 6+2 | 6+2 |
| 8 | 8 | 8 | 8 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 8+1 | 8 | 8 | 8 | 5+1 |
| 9 | 8+1 | 8 | 8 | 6+1 |
| 9 | 9 | 8+1 | 8 | 7+1 |
| 9 | 9 | 9 | 8+1 | 8+1 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

   (ii) Dado que la propiedad se verifica para las secuencias $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 3, 4)$ y $(1, 2, 3, 4, 5)$, se verifica igualmente para cualquier secuencia de tres, cuatro o cinco enteros positivos consecutivos. Basta con sumar en cada paso las mismas cantidades en rojo, aunque la cantidad final en azul sea distinta.

   (iii) Con la secuencia $(1, 2, 3, 4)$ podemos incrementar cuanto queramos la cantidad en azul obtenida. Basta con considerar las parejas $(1, 2)$ y $(3, 4)$ y sumarles la diferencia. Con la secuencia $(1, 2, 3)$ podemos incrementar el valor en azul en cualquier cantidad par $2k$. Basta con sumar $k$ en las parejas $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(1, 3)$. Lo mismo ocurre con la secuencia $(1, 2, 3, 4, 5)$. Teniendo en cuenta (ii), estas propiedades pueden extenderse a secuencias de 3, 4 y 5 números consecutivos.

(iv) Sea cual sea $n$, si un proceso de este tipo conduce a una solución, el total de las cantidades sumadas durante el mismo tiene que ser par, porque en cada paso se suma una misma cantidad a una pareja.

Veamos pues para qué valores de $n$ se verifica en general la propiedad:

$n = 4k$: Si $n$ es múltiplo de 4 podemos descomponer los números del 1 a $n$ en $k$ secuencias de 4 números consecutivos. Según (i) y (ii), podemos llegar a una solución en cada una de las $k$ secuencias. Si las soluciones difieren entre sí se igualan posteriormente tal y como se indica en (iii).

$n = 4k+1$: El caso $k = 1$ se corresponde con $n = 5$, que está resuelto. Si $k > 1$, entonces $n = 4(k-1)+5$. Dividimos entonces los $n-5$ primeros números en $k-1$ secuencias de cuatro y encontramos una solución común (en azul) $m_1$ para todas ellas. Por otra parte, encontramos otra solución $m_2$ para los cinco últimos, que es posible por (i) y (ii). Podemos suponer que $m_2 \geq m_1$ pues, de lo contrario, se incrementa lo que sea necesario pero en una cantidad par, según (iii). Como $m_1$ puede incrementarse a conveniencia, las cantidades pueden igualarse finalmente.

$n = 4k+3$: Se procede como en el caso anterior buscando una solución para los $4k$ primeros números, otra para los tres últimos e igualándolas.

$n = 4k+2$: No puede haber solución en este caso porque, si la hubiera para una misma cantidad final (en azul) $m$, la suma de las cantidades sería $m(4k+2)$ que es par. Dado que para pasar de la situación inicial a la final debemos sumar una cantidad par, según (iv), la suma en la fase inicial debería ser también par. Pero dicha suma es

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2 = (2k+1)(2k+3)$$

que es impar.

Así pues, existe solución para cualquier $n > 2$ cuyo resto al dividir entre 4 no sea 2. No valen, por ejemplo 6, 10, 14, 18, etc. O sea, no te molestes en buscar una solución para $n = 6$ porque no la vas a encontrar.

3. Decimos que una terna de números reales $(a, b, c)$, todos distintos de cero, es *local* si

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 && (1)\\ b^2 + b &= c^2 && (2)\\ c^2 + c &= a^2. && (3) \end{aligned}$$

(a) Probar que si $(a, b, c)$ es local, entonces $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que la longitud $A_1A_2 = a$, que $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = 1$ y $A_1A_5 = c$. Prueba que $(a, b, -c)$ es local.

**Solución:**

(a) Sumando las tres ecuaciones comprobamos que $a + b + c = 0$. Por otra parte, (1), (2) y (3) equivalen, respectivamente, a

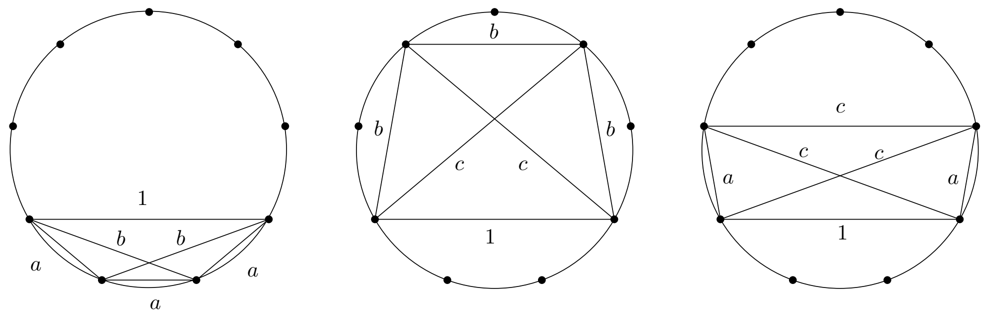
$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= -a && (4)\\ (b+c)(b-c) &= -b && (5)\\ (c+a)(c-a) &= -c && (6) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

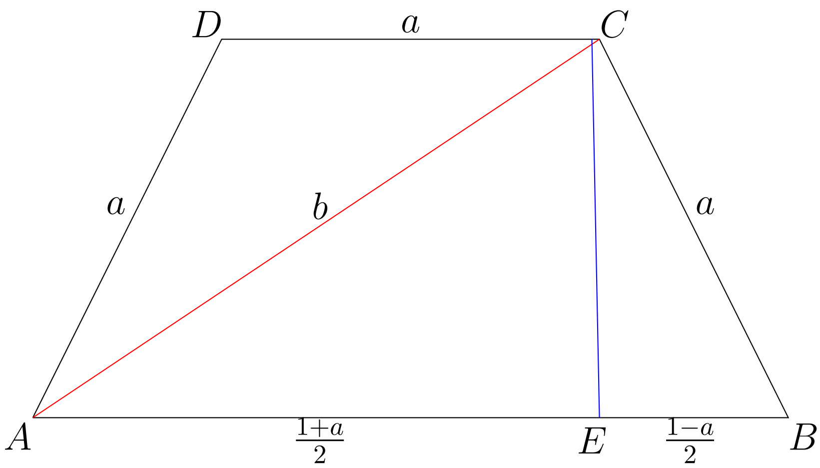
$$a - b = -\frac{a}{a+b} = \frac{a}{c} \tag{7}$$
$$b - c = -\frac{b}{b+c} = \frac{b}{a} \tag{8}$$
$$c - a = -\frac{c}{c+a} = \frac{c}{b} \tag{9}$$

lo cual conduce directamente al resultado.

(b) Tengamos en cuenta los trapecios isósceles de la siguiente figura, cuyas medidas vienen especificadas en el enunciado:




Razonemos por comodidad con una única figura, la de abajo, que representa un trapecio isóseceles genérico (cuyas dimensiones exactas no corresponden realmente a ninguno de los tres anteriores), y obtendremos las igualdades (1), (2) y (3). Empecemos por (1):




Dado que $AB = 1$ y que el trapecio es isósceles, se tiene que $EB = (1-a)/2$ y $AE = (1+a)/2$. Por el teorema de Pitágoras se tiene $CE^2 = a^2 - EB^2$ y que

$$\begin{aligned} b^2 &= AE^2 + CE^2 \\ &= \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \\ &= a^2 + a \end{aligned}$$

Se verifica pues (1). Para obtener (2) basta con razonar igualmente reemplazando $a$ por $b$ y $b$ por $c$, como en el trapecio del medio. Por último, para obtener (3) para $-c$ se razona de manera idéntica pero con $DC = 1$, $CB = AD = a$ y $AC = AB = c$, como en el trapecio de la derecha. En esta ocasión $EB = (c-1)/2$ y $AE = (c+1)/2$.

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned} c^2 &= AE^2 + CE^2 \\ &= \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \\ &= a^2 + c \end{aligned}$$

4. Para pavimentar un tramo de calzada de 64750 mm de largo y 200 mm de ancho disponemos de tres tipos de losas de 500, 650 y 700 mm de longitud. Todas tienen 200 mm de ancho. ¿Cuál es el número mínimo de losas que se precisan para pavimentarlo sin que sobre ni falte ningún milímetro y sin cortar ninguna losa? ¿Cuántas losas de cada tipo necesitamos? ¿Cuántas soluciones diferentes existen?

**Solución:** Las losas deben disponerse longitudinalmente, pues de lo contrario habría que cortarlas. Para mayor comodidad dividamos las longitudes de la calzada y las losas por su denominador común, que es 50. Eso equivale a considerar 50 mm como unidad de longitud, de manera que la calzada mide 1295 unidades y las losas 10, 13 y 14 de largo, respectivamente. Una solución consiste en una terna $a, b, c$ de enteros positivos tales que $a10 + b13 + c14 = 1295$, que será óptima cuando $a + b + c$ sea mínimo.

Si 1295 fuera múltiplo de 14 el problema quedaría resuelto. Pero $1295 = 92 \times 14 + 7$. A medida que descontamos losas de 14, el resto va aumentando según se aprecia en la primera tabla, de manera que, cuando pueda expresarse de la forma $10a + 13b$ con $a$ y $b$ enteros positivos, tendremos una solución (no necesariamente óptima).

| Número de losas de 14 | 92 | 91 | 90 | 89 | 88 | 87 | 86 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resto hasta 1295 | 7 | 21 | 35 | **49** | **63** | 77 | **91** |

| Número de losas de 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud que cubren | **13** | 26 | **39** | 52 | 65 | 78 | **91** |

Si comparamos ambas tablas observamos una solución para 86 losas de 14 que, junto con 7 de 13 cubrirían las 1295 unidades. Supone un total de 93 losas. Resulta bastante intuitivo que no puede haber una solución óptima con menos de 86 losas de 14. Razonémolos de todas formas: si tenemos una solución óptima con $c < 86$ entonces $b \geq 7$ pues, de lo contrario, estaríamos reemplazando losas de 13 y 14 por una cantidad necesariamente mayor de losas de 10. Por lo tanto, $(86-c)14 = (b-7)13 + a10 < (b+a-7)14$, que equivale a $a+b+c > 93$, lo cual es contradictorio. Así pues, para encontrar una solución óptima debemos buscarla en las tablas anteriores.

Buscaremos coincidencias entre ambas tablas en la última cifra, pues eso significa que la diferencia entre los números es múltiplo de 10. Tenemos una solución con una losa de 13 pues, si le sumamos 5 de 10, cubrimos 63 unidades, que es el resto que dejan 88 losas de 14. Eso supone un total de 94 losas, por lo que no es óptima. La siguiente y última solución consta de 3 losas de 13 que, unidas a una de 10, completan las 49 unidades que dejan de resto 89 losas de 14. En total serían 93 losas. Por lo tanto, el número mínimo de losas requerido es 93 con dos posibles configuraciones:

| Tipos de losas | 700 mm | 650 mm | 500 mm | Total |
|---|---|---|---|---|
| Número de losas solución 1 | 86 | 7 | 0 | 93 |
| Número de losas solución 2 | 89 | 3 | 1 | 93 |

5. Ildefonso escribe los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 en una pizarra. En cada paso, selecciona dos números $x$ e $y$ y los reemplaza con el número

$$f(x,y)=\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

**Solución:** Si $x=1/a$ y $y=1/b$ con $a,b$ enteros positivos, se verifica

$$f(x,y)=\frac{1}{1+(a-1)(b-1)}$$

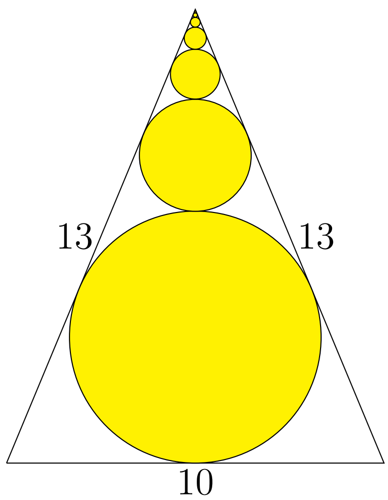
Se trata pues del inverso del entero $1+(a-1)(b-1)$. Luego, si $z=1/c$ siendo $c$ otro entero positivo diferente, basta sustituir en la expresión $a$ por $1+(a-1)(b-1)$ y $b$ por $c$ para obtener

$$f(f(x,y),z)=\frac{1}{1+(a-1)(b-1)(c-1)}$$

Repitiendo este proceso hasta un total de 2022 veces obtenemos, independientemente del orden en el que se han considerados los distintos números, el resultado

$$\frac{1}{1+\prod_{k=2}^{2023}(k-1)}=\frac{1}{1+2022!}$$

6. En la figura puedes intuir infintos círculos tangentes entre sí, cada vez más pequeños. ¿Cuánto suman las longitudes de todas las circunferencias? ¿Cuánto suman sus áreas?




**Solución:** Por el teorema de Pitágoras sabemos que la altura del triángulo mide 12. La circunferencia de cada círculo mide $\pi$ por el diámetro, que es la porción de la altura que le corresponde. Sumando y sacando factor común obtenemos como resultado $12\pi$, que es la solución al primer apartado.

Considera la figura que aparece a continuación. El área de $\triangle ABC$ mide 60. Sea $\theta=\angle CAB$. Su coseno y tangente son $5/13$ y $12/5$, respectivamente. La primera circunferencia es la inscrita en el triángulo $\triangle ABC$, así como la segunda es la inscrita en $\triangle A'B'C$, etc. Para resolver el problema empezaremos calculando las áreas del círculo y trapecio mayores, para lo cual se precisa conocer la longitudes $OD$ y $AE$.

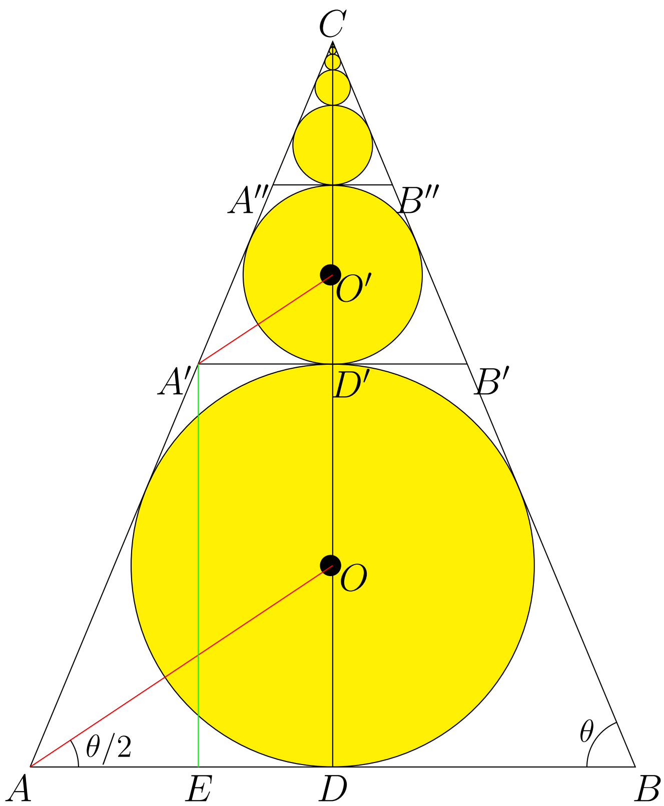
$$\begin{aligned} OD &= 5\tan\frac{\theta}{2} = 5\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+cos\theta}} = 5\sqrt{\frac{1-5/13}{1+5/13}} = 10/3 \\ AE &= 2OD(\tan\theta)^{-1} = \frac{20}{3}\cdot\frac{5}{12} = 25/9 \end{aligned}$$

En consecuencia, $A'B' = 10 - 2\cdot 25/9 = 40/9$. Por lo tanto, la relación entre el área del círculo inscrito en $\triangle ABC$ y el área del trapecio de vértices $A, A', B', B$ es

$$\frac{\pi(10/3)^3}{(10+40/9)\cdot 10/3} = \frac{3}{13}\pi$$

Podemos intuir que esa relación se mantiene en todos los sucesivos trapecios y círculos, de manera que equivale a la proporción entre la suma de las áreas de los círculos y el área total del triángulo $\triangle ABC$, por lo que la suma de las áreas de los círculos es

$$\frac{3}{13}\pi\cdot 60 = \frac{180}{13}\pi$$




**Nota:** Esa es la solución al segundo apartado. No obstante, es conveniente justificar formalmente las últimas afirmaciones. En primer lugar, dado que $\theta/2 = \angle OAD = \angle O'A'D'$, se tiene que $\triangle AOD$ y $\triangle A'O'D'$ son semejantes. Luego, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{OD}{O'D'} = k$$

Si $\mathcal{C}_i$ y $\mathcal{T}_i$ denotan las áreas del círculo y trapecio $i$-ésimos, respectivamente, se verifica:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1} &= \frac{\pi OD^2}{2(AB - AE)OD} && (10) \\ &= \frac{\pi OD}{2[AB - 2OD(\tan\theta)^{-1}]} && (11) \\ &= \frac{\pi k O'D'}{2k[A'B' - 2O'D'(\tan\theta)^{-1}]} && (12) \\ &= \frac{\mathcal{C}_2}{\mathcal{T}_2} = \frac{\mathcal{C}_3}{\mathcal{T}_3} = \dots && (13) \end{aligned}$$

Luego, dado que las áreas de los trapecios suman el área de triángulo $\triangle ABC$ y sacando factor común, se verifica que la suma $\mathcal{S}$ de las áreas de los círculos es

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_i}{\mathcal{T}_i}\mathcal{T}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1}\mathcal{T}_i = \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1}\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i \\ &= \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1} 60 \end{aligned}$$