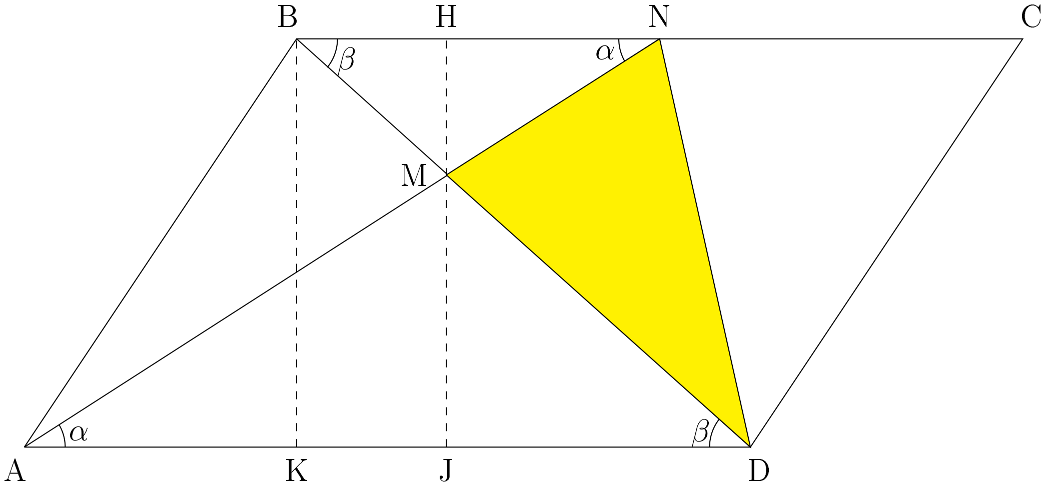
LXI Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
17 de enero de 2025
Soluciones

Olimpiada Matemática Española RSME

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea M el punto en la diagonal BD que cumple $MD = 2MB$. Las rectas AM y BC se cortan en el punto N. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo MND y el área del palalelogramo $ABCD$?*

Solución



Denótense por x e y las áreas de $ABCD$ y MND, respectivamente. Dado que $\angle DAN = \angle ANB$ y $\angle ADB = \angle CBD$, los triángulos ADM y BMN son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{BN}{AD} = \frac{NM}{AM} = \frac{HM}{MJ} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$$

Luego el área del triángulo BMN es la cuarta parte de la del triángulo AMD. Como $JM = 2/3 \cdot KB$, el área del triángulo AMD es la tercera parte del paralelogramo $ABCD$. Por otra parte, NC es la mitad de AD. Luego, el área del triángulo NDC es la mitad de BDC y la cuarta parte de $ABCD$. En definitiva,

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x}{12} - \frac{x}{4} = \mathbf{\frac{1}{6}} \cdot x$$

2. *Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots, 2024$, que $q(n) = 1/n$. Halla el valor de $q(2025)$.*

Solución: La propiedad anterior equivale a que $q(x)x = 1$ para $x = 1, 2, \ldots, 2024$, es decir, que $1, 2, \ldots, 2024$ sean las raíces del polinomio $q(x)x - 1$, de grado 2024. Por lo tanto, existe una constante k tal que

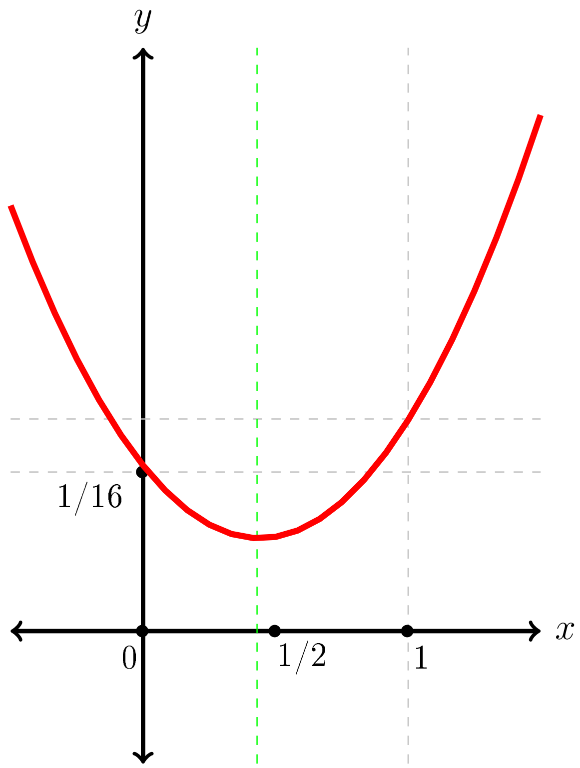
$$q(x)x - 1 = k(x-1)(x-2)\ldots(x-2024)$$

Sustituyendo en $x = 0$ tenemos que $-1 = k(-1)^{2024} 2024!$. Luego, $k = -1/2024!$. Sustituyendo en $x = 2025$, tenemos que $q(2025) \cdot 2025 - 1 = -1$. Por lo tanto, **$q(2025){=}0$**.

3. *Supongamos que tenemos una cuerda de longitud 1 y podemos cortarla para formar un círculo con un trozo y un cuadrado con el otro. Calcula los valores mínimo y máximo de la suma de las correspondientes áreas.*

Solución: Si x es la longitud del trozo de cuerda que forma el círculo, la suma de ambas áreas es el polinomio de grado 2 siguiente (se representa en la figura):

$$f(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \frac{(1-x)^2}{16} = \frac{(\pi+4)x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi}$$



En consecuencia, el mínimo se alcanza en la coordenada x del vértice,

$$x_{min} = \frac{\pi}{\pi+4}$$

Teniendo en cuenta que $x_{min} < 1/2$ y la simetría del polinomio respecto a su vértice, el máximo de $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$ se alcanza en $x_{max} = 1$, es decir, cuando no cortamos la cuerda y formamos únicamente un círculo. Sustituyendo, los valores mínimo y máximo son, respectivamente,

$$\mathbf{f_{min}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi+16}} \quad , \quad \mathbf{f_{max}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}$$

4. *Determina el menor entero positivo n que tiene al menos cuatro divisores diferentes* a, b, c, d*, con* $1 < a, b, c, d < n$*, de forma que* $a + b + c + d = 1001$*.*

Solución: Si suponemos a, b, c, d ordenados de menor a mayor, existen n_1, n_2, n_3, n_4 enteros diferentes, mayores que 1 y menores que n, tales que $n = n_1 a = n_2 b = n_3 c = n_4 d$ y $a + b + c + d = 1001$. En ese caso,

$$\left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} + \frac{n}{n_3} + \frac{n}{n_4}\right) = 1001$$

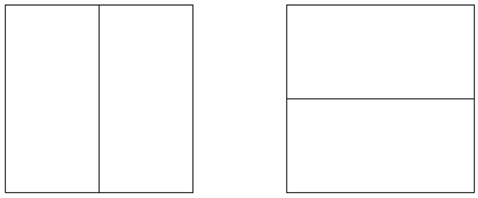
Es decir,

$$n = 1001 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right)^{-1}$$

Encontrar n equivale a encontrar el valor máximo de $x = n_1^{-1} + n_2^{-1} + n_3^{-1} + n_4^{-1}$ tal que $1001/x$ sea entero. La primera opción que debemos analizar es pues $n_4 = 2$, $n_3 = 3$, $n_2 = 4$ y $n_1 = 5$, en cuyo caso caso $x = 77/60$. Por lo tanto, $n = 1001 \cdot 60/77 =$**780**. Luego, es la solución buscada.

5. *Un suelo rectangular de dimensión 12×2 se rellena con baldosas de dimensión 2×1. ¿Cuántas configuraciones distintas se pueden dar?*

Solución: Si a_n denota el número de configuraciones para un valor n determinado, sabemos que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Efectivamente, en el caso $n = 2$ se pueden adoptar las dos configuraciones (a) o (b) de la figura:



(a) (b)

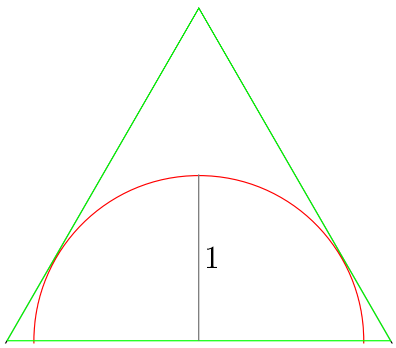
Si conocemos a_{n-2} y a_{n-1} podemos saber el valor de a_n para $n \geq 2$. Depende de si la primera baldosa se coloca de manera vertical (a) u horizontal (b). En el primer caso, las $n-1$ restantes se pueden colocar de a_{n-1} formas diferentes. En el segundo caso, como el primer cuadrado (b) queda completo, las $n-2$ restantes se pueden colocar de a_{n-2} formas diferentes.

En definitiva,

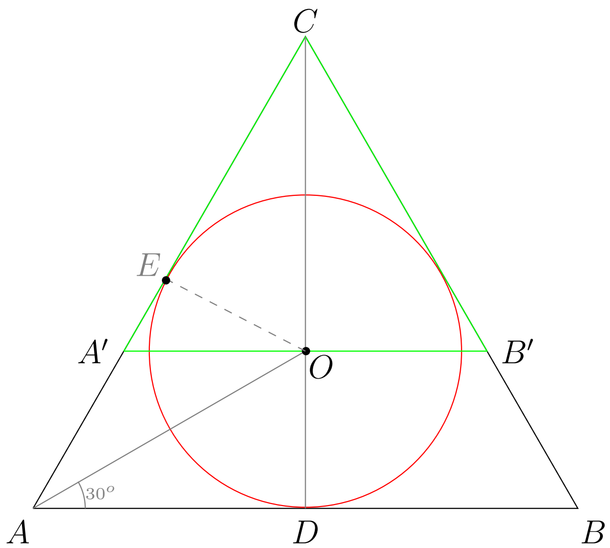
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \tag{1}$$

Es decir, a_{12} es el duodécimo término de la sucesión de Fibonacci, que se obtiene de manera recurrente según (1): 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, **233**.

6. *Calcula el área del triángulo equilátero de la figura.*



Solución (a): El triángulo equilátero $A'B'C$ puede extenderse, según se ve en la figura, hasta formar otro triángulo equilátero ABC cuyo incentro O es el punto medio de $A'B'$.



Por simetría, $AO = OC$. Como el incentro es el punto en el que se cortan las bisectrices, $\angle DAO = 30^o$. Se verifica entonces que

$$sen(30) = \frac{OD}{AO}, \quad tg(30) = \frac{OD}{AD}$$

Dado que $OD = 1$, se tiene que $AO = 2$ y $AD = \sqrt{3}$. Como $CD = 3$ y los triángulos $A'OC$ y ADC son semejantes, $A'0 = AD \cdot 2/3 = 2\sqrt{3}/3$. Así pues, el área de $A'B'C$ es

$$A'O \cdot OC = \mathbf{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

Solución (b): Ten en cuenta que $OE = 1$ y $\angle OEA' = 90^o$. Por lo tanto, $\angle A'OE = 30^o$ y $\angle EOC = 60^o$. Entonces, $A'0 = 2\sqrt{3}/3$ y $OC = 2$. De ahí se obtiene la misma área.