LX Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
19 de enero de 2024
Soluciones

Olimpiada Matemática Española RSME

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *La siguiente tabla presenta el número de días que son o bien lluviosos o bien soleados a lo largo de un año y en doce regiones diferentes. El resto de días, que son mezcla de ambas cosas, se consideran inclasificables.*

Region	*Sol o lluvia*	*Inclasificable*
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35
G	311	54
H	325	40
I	341	24
J	331	34
K	333	32
L	303	62

Es además sabido que, si prescindimos de una de las doce regiones, el número total de días lluviosos es exactamente la tercera parte del número de días soleados. Razona de qué región se trata.

Solución: Si el número de días soleados es el triple del de días lluviosos, la suma de ambos es el cuádruple del número de días lluviosos, por lo que la suma de la columna del medio debe ser múltiplo de cuatro. Dado que el número de regiones con días impares es par, si prescindiéramos de una de ellas la suma sería impar. Luego, las únicas candidatas a ser eliminadas son A y F. Como 100 es múltiplo de 4 sólo nos interesa la suma de las dos últimas cifras, que vale 302 si eliminamos A y 296 si eliminamos F. Luego, es F la región a eliminar.

2. *Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b números reales, ambos diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determina el valor de $a + b$.*

Solución: Como el cociente al dividir un polinomio de grado 5 por otro de grado 3 es de grado 2, si despejamos el resto común deducimos que existen dos polinomios de grado 2, $p(x)$ y $q(x)$, tales que $p(x)(x^3+ax+b) = q(x)(x^3+ax^2+b)$. En consecuencia, los términos de orden 2 de $p(x)$ y $q(x)$, que son distintos de 0, son idénticos, por lo que puede suponerse sin pérdida de generalidad que valen 1. También son idénticos los términos independientes. En definitiva, buscamos tres números reales α, β y γ tales que

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^3 + ax + b) = (x^2 + \gamma x + \beta)(x^3 + ax^2 + b) \qquad (1)$$

Si igualamos las potencias de orden 3 se tiene que $\beta + a = \beta + a\gamma$. Despejando y teniendo en cuenta que $a \neq 0$ se deduce que $\gamma = 1$. Es decir, (1) queda así:

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^3 + ax + b) = (x^2 + x + \beta)(x^3 + ax^2 + b) \tag{2}$$

Igualando las potencias de orden 4 se deduce que $\alpha = a + 1$. Igualando las potencias de orden 1 se obtiene que $\alpha b + \beta a = b$, es decir, $b(a + 1) + \beta a = b$. Despejando tenemos que $\beta = -b$. Por lo tanto, (2) queda como sigue:

$$(x^2 + \alpha x - b)(x^3 + ax + b) = (x^2 + x - b)(x^3 + ax^2 + b) \tag{3}$$

Igualando por último las potencias de orden 2, se obtiene que $b+\alpha a = b-ab$. Sustituyendo α por $a+1$ se tiene que $b+a(a+1) = b-ab$. Despejando de nuevo se obtiene que $a+b = -1$.

3. *En una urna hay cinco bolas blancas y otras cinco negras que se van extrayendo al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que en la sexta extracción se saque por tercera vez una bola blanca?*

Solución 1: Para que se tenga esa posibilidad en la sexta extracción es necesario que en tras la quinta se hayan extraído 3 negras y dos blancas, sin importar el orden en que eso haya sucedido. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra es $\binom{5}{3} \times \binom{5}{2} : \binom{10}{5}$. Si se llega a esa situación, la probabilidad de que se verifique lo deseado se obtiene multiplicando la probabilidad anterior por 3/5. Luego, la probabilidad buscada es

$$\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{2!3!} : \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{21}$$

Solución 2: Mediante un diagrama de árbol nos podemos analizar las posibles secuencias que conducen al resultado deseado. Una de ellas es NNNBB en las cinco primeras bolas y B en la sexta. La probabilidad de que eso ocurra es

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot \frac{3}{5} \tag{4}$$

Las demás secuencias son: NNBNBB, NNBBNB, NBNNBB, NBNBNB,NBBNNB, BNNNBB, BNNBNB, BNBNNB y BBNNNB. Ocurre que la probabilidad de ocurra cualquiera de estas otras nueve secuencias es la misma que en (4), pues sólo variará el orden de los factores en el numerador de la fracción izquierda. Luego, la probabilidad buscada es

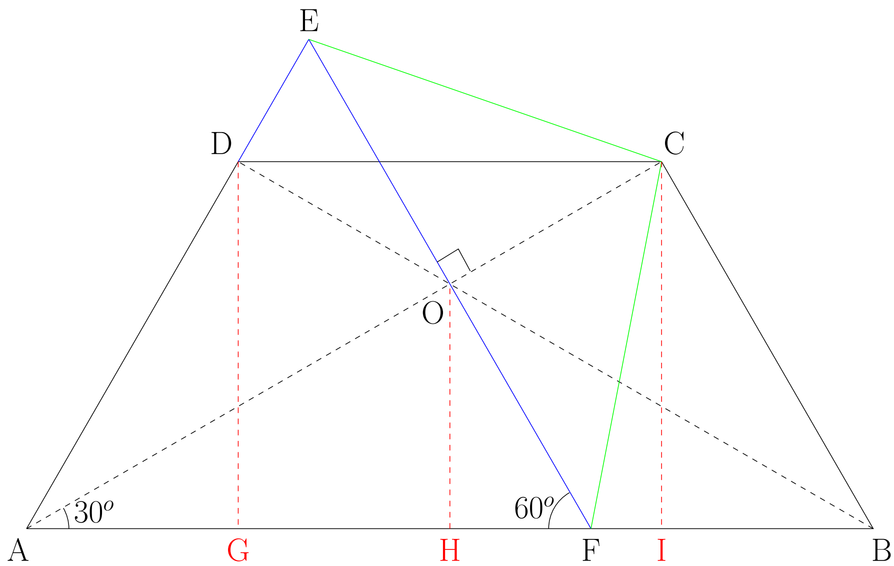
$$10 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{5}{21}$$

4. *En una reunión con un número impar de personas se saludan entre sí quienes se conocían previamente. Demuestra que al menos un asistente saludará a un número par de personas (0 se considera un número par y corresponde a un asistente que no ha saludado a nadie).*

Solución: Si k denota el número de personas y n_i el número de personas que saluda el sujeto i-ésimo, la suma de saludos que contabilizan por separado cada uno de los asistentes es $N = n_1 + \ldots + n_k$. Como cada saludo involucra a dos personas, N es el doble del número total de saludos, por lo que debe ser par. Eso sería imposible si $n_1, \ldots, n_k$ fueran impares, pues k es impar.

5. *Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 1$ y $AB = 2$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcula el área del cuadrilátero $AECF$.*

Solución: Dado que $AD = CB$, el trapecio debe ser necesariamente isósceles. Por lo tanto, $AG = 1/2$ y se verifica, por el teorema de Pitágoras, que $DG = CI = \sqrt{3}/2$. Además, $AI = 3/2$. En consecuencia $\angle BAD = \arcsin(\sqrt{3}/2) = 60^o$ y $\angle BAC = \arctan(\sqrt{3}/3) = 30^o$. Luego, $\angle AFO = 90^o - 30^o = 60^o$, es decir, el triángulo AEF es equilátero.



El área del paralelogramo $AECF$ es la suma de las áreas de los triángulos AEF y CEF, que comparten la base EF y tienen por alturas AO y OC, respectivamente. Por lo tanto, se trata de calcular $EF(AO + OC)/2 = OF \cdot AC$. En primer lugar, $AC = CI/\operatorname{sen} 30^o = \sqrt{3}$. Por otra parte, $OH = 1 \cdot \tan 30^o = \sqrt{3}/3$ y, en consecuencia, $OF = \sqrt{3}/(3 \operatorname{sen} 60^o) = 2/3$. Luego, el área buscada es $2\sqrt{3}/3$.

6. *En otra reunión hay 100 personas. Cada par de personas son o bien amigos o bien enemigos (una y sólo una de las dos cosas). Además, se cumple la siguiente propiedad: ai A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demuestra que hay dos personas que son amigas y que tienen el mismo número de enemigos.*

Solución: Sea A una persona cuyo número de enemigos n sea máximo (supondremos que $n \geq 2$ pues, de lo contrario, acabamos). Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de sus amigos y $\mathcal{B}$ el de sus n enemigos. Si algún sujeto de $\mathcal{A}$ tiene n enemigos acabamos, por lo que supondremos en lo sucesivo que tienen a los sumo $n - 1$ enemigos. Además, los elementos de $\mathcal{B}$ son todos amigos entre sí, pues tienen a A como enemigo común.

Dado que el número de enemigos de cualquier elemento de $\mathcal{B}$ está entre 1 y n, se pueden dar dos circunstancias: que haya dos con el mismo número de enemigos, en cuyo caso acabamos, o que haya un elemento B_1 con un enemigo, otro B_2 con 2 y así sucesivamente hasta B_n con n. En ese caso, B_1 debe ser amigo de todos los sujetos de $\mathcal{A}$. Además, existirá un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ constituido por lo $n - 1$ elementos enemigos de B_n si exceptuamos A, que son todos amigos entre sí pues B_n es enemigo común.

Como el número de enemigos de cualquier elemento de $\mathcal{C}$ está entre 1 y $n-1$, se pueden dar dos circunstancias: que haya un elemento C_1 con un solo enemigo o que todos tengan entre 2 y $n - 1$ enemigos. En el primer caso, B_1 y C_1 serían dos amigos con un único enemigo; en el segundo, habría al menos dos sujetos de $\mathcal{C}$ con el mismo número de enemigos.