LXII Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
16 de enero de 2026
Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Encuentra todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y \\ y^3 = 5y + x \end{cases}$$

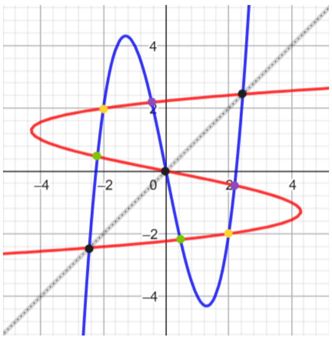
Solución propuesta: El sistema de ecuaciones anterior equivale a

$$\begin{cases} y = x^3 - 5x \\ x = y^3 - 5y \end{cases}$$

Si se define la función $f(x) = x^3 - 5x$, el problema consiste en buscar valores reales de x tales que $f(f(x)) = x$, en cuyo caso, tanto $(x, f(x))$ como $(f(x), x)$ verificarán el sistema de ecuaciones (es decir, las soluciones son simétricas respecto al eje $y = x$). Por lo tanto, el objetivo se reduce a encontrar las raíces reales del polinomio

$$(x^3 - 5x)^3 - 5(x^3 - 5x) - x = x(x^8 - 15x^6 + 75x^4 - 130x^2 + 24)$$

Así pues, tenemos la raíz $x = 0$ que se corresponde con la solución trivial $(0, 0)$. Los cuadrados del resto de raíces son las raíces del polinomio $p(z) = z^4 - 15z^3 + 75z^2 - 130z + 24$. Afortunadamente, este último cuenta con dos raíces enteras, 4 y 6. Mediante la regla de Ruffini probamos que $p(z) = (z-4)(z-6)(z^2-5z+1)$. Las raíces del polinomio z^2-5z+1 son $(5+\sqrt{21})/2$ y $(5-\sqrt{21})/2$. Los nueve puntos siguientes son las soluciones al sistema de ecuaciones, que coinciden con los puntos de corte entre las gráficas azul y roja.



$$(0,0)$$
$$(\sqrt{6}, \sqrt{6})$$
$$(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$$
$$(2,-2),\ (-2,2)$$
$$\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}}, -\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{21}}{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{21}}{2}}, \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}}\right)$$
$$\left(-\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}}, \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{21}}{2}}\right),\ \left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{21}}{2}}, -\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}}\right)$$

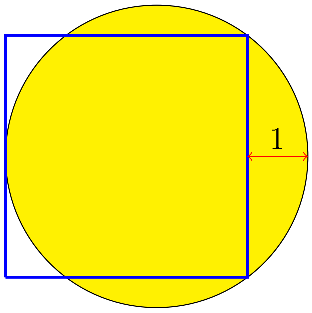
2. Encuentra todos los enteros no negativos a que cumplen que

$$3^{51} + 3^{51} + 3^{50+a}$$

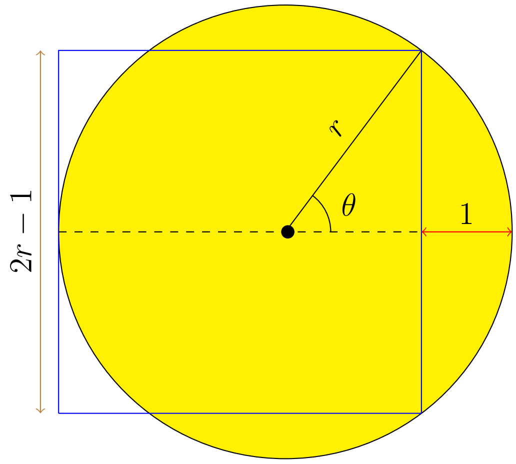
es un cuadrado perfecto.

Solución propuesta: Si $3^{50}(3+3+3^a) = z^2$ para algún entero z, debe existir otro entero d tal que $(3+3+3^a) = d^2$. El caso $a = 0$ quedaría descartado pues 7 no es cuadrado perfecto. El caso $a = 1$ es válido y se correspondería con $z = 3^{26}$. Si $a > 1$, entonces tendríamos $3^{51}(1+1+3^{a-1}) = z^2$. Existiría entonces otro entero e tal que $3(1+1+3^{a-1}) = e^2$. Luego, e sería múltiplo de 3 y e^2 sería múltiplo de 9. Según eso, $1+1+3^{a-1}$ sería múltiplo de 3, lo cual no es posible si $a > 1$. Por lo tanto, la única posibilidad es $a = 1$.

3. *Razona cuál es el área del cuadrado azul.*



Solución: El ángulo θ de la figura verifica estas dos condiciones:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(2r-1)/2}{r}, \quad \cos\theta = \frac{r-1}{r}$$

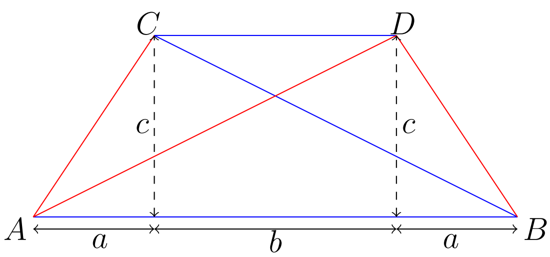
Como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se tiene que

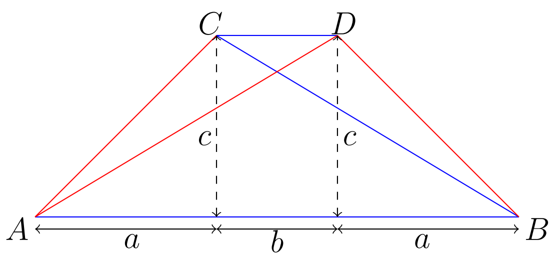
$$\frac{(2r-1)^2}{4r^2} + \frac{(r-1)^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto, r tiene que ser una de las dos soluciones de la ecuación $4r^2 - 12r + 5 = 0$, que son 0.5 y 2.5. La primera se desecha pues $r > 1$. Por lo tanto, el lado del cuadrado es 4 y su área, 16.

4. *Consideremos un trapecio isósceles y los seis segmentos correspondientes a sus cuatro lados y a sus dos diagonales. Tres de esos segmentos se pintan de rojo y los tres restantes se pintan de azul. Demuestra que siempre es posible escoger tres segmentos de un mismo color cuyas longitudes coincidan con las de los lados de algún triángulo.*

Solución propuesta: Téngase en cuenta que tres segmentos pueden componer un triángulo cuando la suma de los dos segmentos más cortos es mayor que la del más largo. Así pues, todos los casos que puedan plantearse tienen una solución trivial para alguno de los dos colores excepto el que presentamos a continuación:





En ese caso, se pueden dar dos situaciones:

(i) Si $b \geq a$, como en el trapecio de la izquierda, podremos formar un triángulo con los segmentos azules si $|\overline{AB}| < |\overline{BC}| + |\overline{CD}|$, lo cual es cierto pues $|\overline{AB}| = 2a + b$, $|\overline{BC}| > a + b$ y $|\overline{CD}| = b \geq a$.

(ii) Si $b < a$, como en el trapecio de la derecha, podremos formar un triángulo con los segmentos rojos siempre y cuando $|\overline{AD}| < |\overline{AC}| + |\overline{AD}|$, es decir, cuando $\sqrt{(a+b)^2 + c^2} < 2\sqrt{a^2 + c^2}$. Eso equivale a $3a^2 > b^2 + 2ab$, lo cual es cierto en estas condiciones.

5. *Ensartamos en un cordel $2n$ bolas blancas y otras $2n$ bolas negras, formando una cadena abierta. Prueba que, independientemente del orden en que se ensarten las bolas, siempre es posible cortar un segmento de la cadena con $2n$ bolas y con el mismo número de bolas blancas y negras.*

   Solución propuesta: La idea es la siguiente: si en la mitad izquierda de la cadena hay más negras que blancas, en la mitad derecha ocurrirá lo contrario. Parece razonable pensar que, si nos vamos desplazando una posición cada vez, de izquierda a derecha, habrá algún momento en que los números se igualen. A continuación vamos a intentar formalizarlo.

   La cadena consta de $4n$ bolas. Denótese $D_1 = N_1 - B_1$, siendo B_1 el número de bolas blancas que se encuentran en la mitad izquierda de la cadena, es decir, entre las $2n$ posiciones que van de la 1 a la $2n$, ambas inclusive, y N_1 el número de bolas negras en las mismas posiciones. Este cálculo se repite a medida que nos desplazamos hacia la derecha hasta llegar a la mitad derecha de la cadena. Es decir, que podemos definir, para cada $i = 1, 2, \ldots 2n+1$, $D_i = N_i - B_i$. Como $B_i + N_i = 2n$, que es par, entonces B_i y N_i son ambos pares o bien ambos impares. En cualquiera de los dos casos se verifica que $D_i = N_i - B_i$ será un entero par. Por lo tanto, cada vez que avanzamos una posición en la cadena ocurre que D_{i+1} es igual a D_i más 0, más 2 o más -2, según la situación.

   Si $D_1 = 0$, efectuaremos un único corte entre las posiciones $2n$ y $2n+1$. Supongamos que $D_1 \geq 2$. Como dijimos al principio, eso implica que $D_{2n+1} \leq -2$. Necesariamente debe existir algún i entre 2 y $2n$ tal que $D_i = 0$. En ese caso, cortaremos entre $i-1$ e i y entre $i+2n-1$ e $i+2n$. Podemos razonar igual para el caso $D_1 \leq -2$.

6. *Prueba que el resultado de sumar 1 al producto de cuatro números naturales consecutivos es un cuadrado perfecto.*

   Solución propuesta: Resulta sensato en estos casos ver qué sucede en casos sencillos, como por ejemplo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 5^2$, o también $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 11^2$, para inferir que $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ podría ser igual a $(n(n+3)+1)^2$. Para demostrarlo, basta con comprobar que ambos polinomios equivalen a $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$.