EJERCICIOS SOBRE GRUPOS

Ejercicio 1. *Sea $\cdot$ una operación definida en un conjunto G. Comprueba que para que $\cdot$ defina una estructura de grupo en G basta con que cumpla las siguientes propiedades:*

(1) *Propiedad asociativa.*
(2) $\exists 1 \in G: \quad a \cdot 1 = a, \ \forall a \in G.$
(3) $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G: \ a \cdot a^{-1} = 1.$

Ejercicio 2. *¿Define la operación $x * y = (x + y)/(1 + xy)$ una estructura de grupo sobre los números reales mayores que -1 y menores que 1?*

Ejercicio 3. *Determina los números complejos a, b tales que la operación*

$$x * y = ax + by$$

define una estructura de grupo en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 4. *Sean x, y dos elementos de un grupo G. Si $x^5 = 1$, $y^4 = 1$, $xy = yx^3$, probar que $x^2y = yx$, $xy^3 = y^3x^2$.*

Ejercicio 5. *Sea H un subconjunto finito y no vacío de un grupo G. Probar que H es un subgrupo de G precisamente cuando $x \cdot y \in H$ para todo $x, y \in H$. ¿Sigue siendo cierto el enunciado cuando H no es finito?*

Ejercicio 6. *Sea H un subconjunto no vacío de un grupo G. Probar que H es un subgrupo de G si, y sólo si, $xH = H$ para todo $x \in H$.*

Ejercicio 7. *Sea G un grupo conmutativo. Si H_1 y H_2 son subgrupos de G, probar que*

$$H_1H_2 := \{g \in G \colon \ g = h_1h_2 \text{ para algunos } h_1 \in H_1, \ h_2 \in H_2\}$$

es un subgrupo de G, y que es el menor subgrupo de G que contiene a H_1 y H_2. ¿Es cierto este resultado si se elimina la hipótesis de que G sea abeliano? [Considérese el grupo simétrico S_3.]

Ejercicio 8. *Si los únicos subgrupos de un grupo $G \neq 1$ son los triviales, 1 y G, entonces G es un grupo finito y su orden es primo.*

Ejercicio 9. *Sea a, b elementos de un grupo G. Demostrar que* $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(bab^{-1})$. *¿Es cierto que siempre* $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$*?*

Ejercicio 10. *Determinar el grupo de simetría de los triángulos, el cuadrado, los rectángulos, los rombos, los trapecios y el pentágono regular.*

Ejercicio 11. *Determinar los siguientes subgrupos:*

a) *El subgrupo de $\mathbb{Z}$ generado por $X = \{3, 5\}$.*

b) *El subgrupo de* $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *generado por* $X = \{(2,0),(0,5)\}$ *y el generado por* $Y = \{(2, 3),(4, 5)\}$.
c) *El subgrupo de* S_3 *generado por* $X = \{(1,2),(1,3)\}$.
d) *El subgrupo de* $\mathbb{Q}$ *generado por* $X = \{1\}$, *el generado por* $Y = \{1/2\}$ *y el generado por* $Z = \{1/6, 1/8\}$.

Ejercicio 12. *¿Está generado* S_n *por las trasposiciones* $(1i)$, $2 \leq i \leq n$*? ¿y por las trasposiciones* $(i-1, i)$, $2 \leq i \leq n$*? ¿y por los ciclos* (ijk) *de orden 3? ¿y por el ciclo* $(12\ldots n)$ *y la trasposición* (12)*? ¿y por el ciclo* $(23\ldots n)$ *y la trasposición* (12)*?*

Ejercicio 13. *Sea* n *un número natural y sea* $\mathbb{C}^*$ *el grupo multiplicativo de los números complejos no nulos. Probar que la aplicación* $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) := z^n$, *es un morfismo de grupos. Determinar su núcleo y su imagen. Análogamente cuando* n *es entero. ¿Cuándo es un isomorfismo de grupos?*

Ejercicio 14. *Si* H_1, H_2 *son subgrupos de un grupo conmutativo* G, *probar que la aplicación* $f\colon H_1 \times H_2 \to G$, $f(a,b) := ab$, *es un morfismo de grupos.*

Ejercicio 15. *Sea* $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *un morfismo de grupos. Demostrar la existencia de un único número racional* c *tal que* $f(x) = cx$ *para todo* $x \in \mathbb{Q}$. *[Téngase en cuenta que tal número* c *ha de ser* $f(1)$ *necesariamente.]*

Ejercicio 16. *Sea* z *un número complejo. ¿Cuándo es un isomorfismo de grupos la aplicación* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = zx$ *?*

Ejercicio 17. *Probar que la condición necesaria y suficiente para que un grupo* G *sea conmutativo es que su operación* $G \times G \to G$ *sea un morfismo de grupos.*

Ejercicio 18. *Sea* G *un grupo y sea* G' *un grupo conmutativo. Probar que el conjunto* $\mathrm{Hom}(G, G')$ *formado por los morfismos de grupos* $G \to G'$ *tiene estructura de grupo con la operación*

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x) \quad , \qquad f, h \in \mathrm{Hom}(G, G') \ , \quad x \in G.$$

¿Es siempre conmutativo este grupo?

Ejercicio 19. *Probar que la aplicación* $e^{it}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ *es morfismo de grupos. Determinar su imagen y su núcleo.*

Ejercicio 20. *Sea* G *un grupo. Un automorfismo de* G *es un isomorfismo de grupos* $f : G \to G$. *Probar que:*

1. *El conjunto* $Aut(G)$ *de los automorfismos de* G, *con la composición de aplicaciones, es un grupo.*
2. *Dado* $g \in G$, *la aplicación* $\tau_g\colon G \to G$, $\tau_g(x) := gxg^{-1}$ *es un automorfismo.*

3. *La aplicación* $\tau\colon G \to Aut(G)$, $\tau(g) := \tau_g$, *es un morfismo de grupos.*
4. *El núcleo de* τ *es el subgrupo*

$$Z(G) = \{a \in G \,:\, ax = xa\,\forall x \in G\,\}.$$

Este subgrupo se denomina **centro de** G *y es un subgrupo normal de* G.

Ejercicio 21. *Determinar todos los subgrupos del grupo simétrico* S_3. *¿Cuáles de estos subgrupos son normales?*

Ejercicio 22. *Sea* H *un subgrupo de un grupo* G. *Consideremos la relación de equivalencia* $\equiv$ *definida por* H *en* G :

$$a \equiv b \;\Leftrightarrow\; a^{-1}b \in H.$$

Sea $G/H = \{[a] = aH\}$ *el conjunto cociente de* G *por esta relación.*

(a) *Demuestra que, para cualquier grupo* H *se cumple que esta relación es compatible con el producto por la izquierda; es decir:*

$$[a] = [a'] \Leftrightarrow [b \cdot a] = [b \cdot a'],\ \forall b \in G.$$

(b) *Demuestra que la condición necesaria y suficiente para que la relación* $\equiv$ *sea compatible con el producto por la derecha, es decir para que se cumpla que*

$$[a] = [a'] \Leftrightarrow [a \cdot b] = [a' \cdot b],\ \forall b \in G,$$

es que H *sea un subgrupo normal de* G.

Ejercicio 23. *Sea* H *un subgrupo de un grupo* G. *Consideremos la relación* $\sim$ *definida por* H *en* G*:*

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; ba^{-1} \in H.$$

(a) *Comprueba que* $\sim$ *es una relación de equivalencia en* G.
(b) *Determina la clase de equivalencia respecto de esta relación de cualquier elemento* $a \in G$.
(c) *Demuestra que para cualquier grupo* H *se cumple que esta relación es compatible con el producto por la derecha; es decir:*

$$[a] = [a'] \Leftrightarrow [a \cdot b] = [a' \cdot b'],\ \forall b \in G.$$

(d) *Demuestra que* H *es un subgrupo normal si, y sólo si la relación* $\sim$ *es compatible con el producto por la izquierda.*
(e) *La relación* $\sim$ *coincide con la relación* $\equiv$ *definida por* H *si, y sólo si, el subgrupo* H *es normal en* G.

Ejercicio 24. *Sea* H *un subgrupo de un grupo* G. *Si en el conjunto cociente* G/H *existe alguna estructura de grupo tal que la proyección canónica* $\pi\colon G \to G/H$ *sea morfismo de grupos, demostrar que* H *es un subgrupo normal de* G.

Ejercicio 25. *Sea $\equiv$ una relación de equivalencia en un grupo G. Si en el conjunto cociente $G/\equiv$ existe alguna estructura de grupo tal que la proyección canónica $\pi\colon G \to G/\equiv$ sea morfismo de grupos, probar la existencia de un subgrupo normal H de G tal que $\equiv$ es la relación de congruencia módulo H.*

Ejercicio 26. *Sea G un grupo finito y sea*

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

una sucesión creciente de subgrupos de G. Si r_i denota el índice de G_{i-1} en G_i, demostrar que $|G| = r_1 r_2 \ldots r_n$.

Ejercicio 27. *Sea $f\colon G \to G'$ un morfismo de grupos.*

1. *Si H' es un subgrupo normal de G', ¿se sigue necesariamente que $f^{-1}(H')$ es un subgrupo normal de G ?*
2. *Si H es un subgrupo normal de G, ¿se sigue necesariamente que $f(H)$ es un subgrupo normal de G'?.*

Ejercicio 28. *Si H es un subgrupo de un grupo G, probar que $N(H) = \{a \in G \;:\; aHa^{-1} = H\}$ es un subgrupo de G que contiene a H. ¿Es siempre $N(H)$ un subgrupo normal de G? ¿Es siempre H un subgrupo normal de $N(H)$?*

Ejercicio 29. *Demostrar que todo subgrupo de índice 2 es normal. [Téngase en cuenta que si $g \notin H$, entonces gH y Hg coinciden con $G \setminus H$.]*

Ejercicio 30. *Sea H un subgrupo normal de un grupo G. Probar que la condición necesaria y suficiente para que el grupo cociente G/H sea conmutativo es que H contenga todos los elementos de G de la forma $aba^{-1}b^{-1}$, donde $a, b \in G$.*

Ejercicio 31. *Sea $f\colon G \to G'$ un isomorfismo de grupos, H un subconjunto de G y $H' = f(H)$. Probar que H es un subgrupo normal de G precisamente cuando H' es un subgrupo normal de G'. En tal caso, demostrar además que G/H y G'/H' son grupos isomorfos.*

Ejercicio 32. *Sea $\mathbb{C}^*$ el grupo multiplicativo de los números complejos no nulos y sea U el subgrupo de $\mathbb{C}^*$ formado por los números complejos de módulo 1. Probar que*

$$(a) \quad \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U \qquad , \qquad (b) \quad \mathbb{C}^*/U \simeq \mathbb{R}_+$$

donde $\mathbb{R}_+$ denota el grupo multiplicativo de los números reales positivos. [Úsese que la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$, es morfismo de grupos.]

Ejercicio 33. *Sean H y H' subgrupos de un grupo G. Si H es normal en G, ¿se sigue necesariamente que $H' \cap H$ es un subgrupo normal de H'? ¿y que $H' \cap H$ es un subgrupo normal de G ?*

¿Es cierto que la intersección de dos subgrupos normales de un grupo G siempre es un subgrupo normal de G ?

Ejercicio 34. *Determinar cuáles de los siguientes grupos son isomorfos entre sí e indicar cuáles de estos grupos son cíclicos:*

$$G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$G_2 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

$$G_3 = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$$

$$G_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$G_5 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

$$G_6 = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$G_7 = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$G_8 = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Ejercicio 35. *Dada la permutación*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Descomponer σ en producto de ciclos disjuntos.
b) Calcular el orden de σ.
c) Calcular σ^{7006}.

Ejercicio 36. *Sea G un grupo conmutativo de orden n. Si r es un número entero primo con n, demostrar que para cada $a \in G$, la ecuación $x^r = a$ admite una única solución en G. [Considérese el morfismo de grupos $f\colon G \to G$, $f(x) := x^r$.] ¿Y cuando G no es conmutativo? [Úsese la identidad de Bézout.]*

Ejercicio 37. *Determinar si los grupos aditivos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cíclicos.*

Ejercicio 38. *Determinar si los grupos $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3n\mathbb{Z})$ son cíclicos. [Estúdiese el orden de sus elementos.]*

Ejercicio 39. *Sean G_1 y G_2 dos grupos cíclicos finitos. Probar que la condición necesaria y suficiente para que el grupo $G_1 \times G_2$ sea cíclico es que los órdenes de G_1 y G_2 sean primos entre sí.*

Ejercicio 40. *Sea b un elemento de un grupo cíclico finito G de orden n y sea m un número entero no nulo. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que exista algún $a \in G$ tal que $b = a^m$ es que $b^{n/d} = 1$, donde $d = m.c.d.(n, m)$.*

Ejercicio 41. *Si un grupo sólo tiene un número finito de subgrupos, su orden es finito. [Téngase en cuenta que todo grupo es unión de subgrupos cíclicos.]*

Ejercicio 42. *Sea G un grupo finito que tenga la propiedad de que para cada par de subgrupos H_1, H_2 se tiene $H_1 \subseteq H_2$ ó $H_2 \subseteq H_1$. Probar que G es cíclico y su orden es una potencia de un número primo. [Téngase en cuenta que G está generado por un elemento de orden máximo.]*

Ejercicio 43. ***Clasificación de grupos de orden 4.*** *Demostrar que todo grupo de orden 4 es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o al grupo $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, llamado grupo de Klein (1849-1925). Además estos dos grupos no son isomorfos.*

Ejercicio 44. *Determinar los automorfismos del grupo de las raíces n-ésimas de la unidad cuando $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 7.*

Ejercicio 45. *Sea $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : \; z^n = 1\}$ el grupo multiplicativo de las raíces n-ésimas de la unidad complejas. Probar que*

$$(a) \quad \mathbb{C}^*/\mu_n \simeq \mathbb{C}^* \qquad , \qquad (b) \quad U/\mu_n \simeq U.$$

Ejercicio 46. *Calcular A^{2001} cuando*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 47. *Sea H un subgrupo de S_n. Probar que todas las permutaciones $\sigma \in H$ son pares o la mitad son pares y la otra mitad impares.*

Ejercicio 48. *Sean p, n números naturales. Si p es primo y no divide a n, entonces n y p^r son primos entre sí para todo $r \geq 1$.*

Si b, m, $n \in \mathbb{Z}$, la condición necesaria y suficiente para que b sea primo con mn es que sea primo con m y con n. Además, $m + bn$ es primo con n si y sólo si m es primo con n.

Ejercicio 49. *Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?:*

a) *Si $ac \equiv bc$ (mód. n) y c no es múltiplo de n, entonces $a \equiv b$ (mód. n).*
b) *Si b no es múltiplo de n, entonces la ecuación $bX \equiv a$ (mód. n) simepre tiene alguna solución entera.*

Ejercicio 50. *Averiguar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:*

- *Sea $d = m.c.d.(m, n)$. Se verifica que $m.c.d.(m^2, n^2) = d^2$ y $m.c.d.(am, an) = ad$ para todo entero $a \neq 0$.*
- *Sean d, a, $b \in \mathbb{Z}$. Si existen α, $\beta \in \mathbb{Z}$ tales que $d = \alpha a + \beta b$, entonces $d = m.c.d.(a, b)$.*