# Capítulo I

# Espacios Vectoriales

Este capítulo está dedicado a definir la estructura fundamental del Álgebra Lineal: el espacio vectorial; también definiremos las aplicaciones entre espacios vectoriales que son compatibles con dicha estructura, las aplicaciones lineales, y veremos cómo construir nuevos espacios vectoriales a partir de otros espacios vectoriales dados.

Para todo ello supondremos conocidas las nociones elementales de las teorías de grupos, anillos y cuerpos (las cuales pueden consultarse en los apéndices del final).

## 1 La Estructura de Espacio Vectorial

**Definición 1.1** Sean $k$ un cuerpo y $(E,+)$ un grupo abeliano. Dar sobre $(E,+)$ una estructura de *$k$-espacio vectorial* (ó de *espacio vectorial sobre $k$*) es, por definición, dar una aplicación

$$\begin{array}{ccc} k \times E & \to & E \\ (\lambda, e) & \mapsto & \lambda \cdot e \end{array} \tag{1.1}$$

que para cualesquiera $e, v \in E$, $\lambda, \mu \in k$ satisfaga las siguientes propiedades:

(i) $\lambda \cdot (e+v) = \lambda \cdot e + \lambda \cdot v\,,$

(ii) $(\lambda+\mu)\cdot e = \lambda \cdot e + \mu \cdot e\,,$

(iii) $(\lambda\mu)\cdot e = \lambda \cdot (\mu \cdot e)\,,$

(iv) $1 \cdot e = e\,.$

Los elementos de $E$ se denominan *vectores*, los de $k$ *escalares*, y la aplicación (1.1) se llama *producto por escalares*. Dados vectores $e_1, \dots, e_n$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, un vector de la forma $\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n$ se denomina *combinación lineal* de los vectores $e_1, \dots, e_n$.

Para simplificar diremos que $E$ es un $k$-espacio vectorial, entendiendo con ello que $E$ está dotado de una operación "$+$" con la que es un grupo abeliano y de un producto por los escalares del cuerpo $k$.

**1.2** Dado un $k$-espacio vectorial $E$ y dado $e \in E$ se satisfacen las igualdades $(-1)\cdot e = -e$ y $0 \cdot e = 0$. (Obsérvese que, aunque los denotamos igual por simplificar la notación, el primero de los dos ceros que aparecen en la anterior igualdad es el "cero escalar", o sea, el elemento neutro de la suma de $k$, y el segundo es el "cero vector", esto es, el elemento neutro de la suma de $E$; es claro por el contexto qué significa en cada caso el símbolo "0".)

Efectivamente: Por una parte tenemos $0 \cdot e + 0 \cdot e = (0+0) \cdot e = 0 \cdot e = 0 \cdot e + 0$, por lo que simplificando obtenemos $0 \cdot e = 0$. Por otra parte, $0 = 0 \cdot e = (1 + (-1)) \cdot e = 1 \cdot e + (-1) \cdot e$, es decir, $(-1) \cdot e = -(1 \cdot e) = -e$.

**Ejemplos 1.3** (a) El grupo abeliano trivial (que tiene como único elemento el cero) es espacio vectorial sobre cualquier cuerpo.

(b) Todo cuerpo es espacio vectorial sobre él mismo.

(c) Si $k$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el grupo producto $(k^n, +)$ (cuya suma está definida por la igualdad $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$) tiene estructura de $k$-espacio vectorial con el producto por escalares

$$\begin{array}{rcl} k \times k^n & \to & k^n \\ (\lambda, (a_1, \ldots, a_n)) & \mapsto & \lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) . \end{array}$$

(d) Sea $E$ un $K$-espacio vectorial y sea $k$ un subcuerpo de $K$; la restricción del producto por escalares de $K$ a los escalares de $k$ dota a $E$ de estructura de $k$-espacio vectorial.

**Ejercicio 1.4** Fijemos un cuerpo $k$ y un grupo abeliano $E$. Si en $E$ hay un producto por escalares de $k$ que lo dota de estructura de espacio vectorial, entonces cada escalar $\lambda$ define una aplicación $h_\lambda : E \to E$, $e \mapsto h_\lambda(e) := \lambda \cdot e$, que (según la condición (i) de la definición 1.1) es un morfismo de grupos denominado *homotecia de razón* $\lambda$; en particular, si $\mathrm{End}_g(E)$ denota el conjunto de los endomorfismos del grupo $E$, entonces tenemos una aplicación

$$\begin{array}{rcl} h : k & \to & \mathrm{End}_g(E) \\ \lambda & \mapsto & h(\lambda) := h_\lambda . \end{array}$$

El conjunto $\mathrm{End}_g(E)$ dotado de sus operaciones naturales (suma de endomorfismos y composición de endomorfismos) es un anillo unitario, y es fácil comprobar (teniendo en cuenta (ii), (iii) y (iv) de 1.1) que $h$ es un morfismo de anillos con unidad (compruébese).

Recíprocamente, todo morfismo de anillos con unidad $h : k \to \mathrm{End}_g(E)$ define una estructura de $k$-espacio vectorial sobre $E$ tomando como producto por escalares la aplicación

$$\begin{array}{rcl} k \times E & \to & E \\ (\lambda, e) & \mapsto & \lambda \cdot e := h(\lambda)(e) . \end{array}$$

## 2 Subespacios Vectoriales

Fijemos en toda esta sección un $k$-espacio vectorial $E$.

**Definición 2.1** Llamaremos *subespacio vectorial* de $E$ a todo subgrupo suyo que sea estable por homotecias. Es decir, un subconjunto $F$ de $E$ es un subespacio vectorial si:

(i) $(F, +)$ es un subgrupo de $(E, +)$;

(ii) $e \in F,\ \lambda \in k \ \Rightarrow\ \lambda \cdot e \in F$.

Si $F$ es un subespacio vectorial de $E$, entonces $F$ es un grupo abeliano y la restricción a $F$ del producto por escalares que hay en $E$ dota a $F$ de estrutura de espacio vectorial sobre $k$; es decir, todo subespacio vectorial es de modo natural un espacio vectorial.

**Proposición 2.2** *Si $F$ es un subconjunto no vacío de $E$, entonces: $F$ es subespacio vectorial si y sólo si es cerrado frente a combinaciones lineales, es decir, si y sólo si $\lambda \cdot e + \mu \cdot v \in F$ para cualesquiera $e, v \in F$ , $\lambda, \mu \in k$.*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que $F$ es cerrado frente a combinaciones lineales. Para ver que $F$ es un subgrupo hay que probar que, cualesquiera que sean $e, v \in F$, se satisfacen $e + v \in F$ y $-e \in F$, lo cual es inmediato: $e + v = 1 \cdot e + 1 \cdot v$ , $-e = (-1) \cdot e + 0 \cdot v$. Para probar que $F$ es subespacio vectorial sólo hay que comprobar que se satisface la condición (ii) de la definición 2.1, lo cual es trivial.

Supongamos ahora que $F$ es subespacio vectorial y sean $e, v \in F$ , $\lambda, \mu \in k$; por ser $F$ estable por homotecias obtenemos $\lambda \cdot e$, $\mu \cdot v \in F$, y como $F$ es un subgrupo concluimos que $\lambda \cdot e + \mu \cdot v \in F$. ∎

**Ejemplos 2.3** (a) Todo espacio vectorial es un subespacio vectorial de él mismo; dicho subespacio se denomina subespacio vectorial *total* ó *impropio*, y un subespacio vectorial se dice que es *propio* si es distinto del total.

(b) Todo espacio vectorial tiene un subespacio vectorial denominado *trivial*: el que tiene como único elemento el vector cero.

(c) Los únicos subespacios vectoriales que tiene un cuerpo, considerado como espacio vectorial sobre sí mismo, son el trivial y el total (compruébese).

(d) La intersección cualquiera de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial (compruébese). Además, si $F_1, \dots, F_n$ son subespacios vectoriales de $E$, entonces es claro que $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ es el más grande de los subespacios vectoriales de $E$ que están contenidos en todos los subespacios $F_1, \dots, F_n$.

(e) No es cierto que la unión de subespacio vectoriales sea siempre un subespacio vectorial; por ejemplo, dados dos subespacios vectoriales $F$ y $G$ de $E$, pruébese que la condición necesaria y suficiente para que $F \cup G$ sea subespacio vectorial es que uno de ellos esté contenido en el otro.

(f) Dados subespacios vectoriales $F_1, \dots, F_n$ de $E$, se define su *suma* como el conjunto

$$F_1 + \cdots + F_n = \{e_1 + \cdots + e_n \ : \ e_1 \in F_1, \dots, e_n \in F_n\} .$$

Compruébese que $F_1 + \cdots + F_n$ es un subespacio vectorial, y que es el más pequeño de los subespacios vectoriales de $E$ que contienen a todos los subespacios $F_1, \dots, F_n$.

(g) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una familia de vectores de $E$ y denotemos por $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de esa familia:

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \{\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n \ : \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k\} .$$

Compruébese que $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ es un subespacio vectorial de $E$, el cual se dice que está *generado* por la familia $\{e_1, \dots, e_n\}$. Es claro que $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ es el menor de los subespacios vectoriales de $E$ que contienen a los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$; además se satisface

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle e_1 \rangle + \cdots + \langle e_n \rangle .$$

**2.4** Según los anteriores ejemplos, si en el conjunto de todos los subespacios vectoriales de $E$ consideramos la "relación de orden" que define la inclusión (es decir, $F \leq G$ si y sólo si $F \subseteq G$), entonces obtenemos un conjunto ordenado en el que existen supremos e ínfimos: $\sup\{F_1, \dots, F_n\} = F_1 + \cdots + F_n$, $\inf\{F_1, \dots, F_n\} = F_1 \cap \cdots \cap F_n$; además dicho conjunto ordenado tiene "primer elemento" (el subespacio trivial) y "último elemento" (el subespacio impropio).

*Nota* **2.5** En lo que llevamos de este primer capítulo, dados un escalar $\lambda$ y un vector $e$, el producto por escalares de $\lambda$ y $e$ lo hemos denotado "$\lambda \cdot e$"; para simplificar la notación, en el resto de este capítulo y en los capítulos siguientes lo denotaremos "$\lambda e$".

## 3 Aplicaciones Lineales

Sean $E$ y $\bar{E}$ dos $k$-espacios vectoriales.

**Definición 3.1** Una aplicación $T : E \to \bar{E}$ se dice que es un *morfismo de $k$-espacios vectoriales* (ó *aplicación $k$-lineal*, ó *aplicación lineal* si es claro cuál es el cuerpo $k$), si es un morfismo de grupos compatible con el producto por escalares, es decir, si cualesquiera que sean $e, v \in E$, $\lambda \in k$ se satisfacen:

(i) $T(e+v) = T(e) + T(v)$ ,

(ii) $T(\lambda e) = \lambda T(e)$.

Es inmediato comprobar que las condiciones (i) y (ii) anteriores son equivalentes a que $T$ conserve combinaciones lineales, esto es, a que satisfaga $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v)$.

**Definiciones 3.2** Diremos que una aplicación lineal es un *monomorfismo* (respectivamente: *epimorfismo, isomorfismo*) cuando sea inyectiva (respectivamente: epiyectiva, biyectiva).

Cuando una aplicación lineal que está definida en $E$ valora también en $E$, se dice de ella que es un *endomorfismo* (de $E$); los endomorfismos de $E$ que son isomorfismos se denominan *automorfismos* (de $E$).

Diremos que los espacios vectoriales $E$ y $\bar{E}$ son *isomorfos* cuando exista algún isomorfismo $T : E \to \bar{E}$, en cuyo caso escribiremos $E \overset{T}{\approx} \bar{E}$ (ó simplemente $E \approx \bar{E}$ si en el contexto es claro el correspondiente isomorfismo).

**3.3** Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal. Como $T$ es un morfismo de grupos satisface las propiedades de éstos, por ejemplo, $T(0) = 0$ y $T(-e) = -T(e)$ para todo $e \in E$; también tiene $T$ su imagen y su núcleo, $\operatorname{Im} T = \{T(e) : e \in E\}$ y $\operatorname{Ker} T = \{e \in E : T(e) = 0\}$, satisfaciéndose (como puede comprobarse fácilmente) "$T$ es inyectiva si y sólo si $\operatorname{Ker} T = 0$" y "$T$ es epiyectiva si y sólo si $\operatorname{Im} T = \bar{E}$".

**Lema 3.4** *La composición de aplicaciones lineales es otra aplicación lineal.*

*Demostración.* Inmediata; basta tener en cuenta las definiciones. ∎

**Lema 3.5** *Si una aplicación lineal es un isomorfismo (es decir, es biyectiva), entonces su aplicación inversa también es lineal (y por lo tanto también es un isomorfismo).*

*Demostración.* Sea $T : E \to \bar{E}$ un isomorfismo de $k$-espacios vectoriales y sea $T^{-1} : \bar{E} \to E$ su aplicación inversa. Dado $\bar{e} \in \bar{E}$, recordemos que $T^{-1}(\bar{e})$ es, por definición, el único vector de $E$ cuya imagen por $T$ es igual a $\bar{e}$; entonces, para ver que $T^{-1}(\lambda\bar{e} + \mu\bar{v}) = \lambda T^{-1}(\bar{e}) + \mu T^{-1}(\bar{v})$ bastará probar que la imagen por $T$ de $\lambda T^{-1}(\bar{e}) + \mu T^{-1}(\bar{v})$ es igual a $\lambda\bar{e} + \mu\bar{v}$ :

$$T\Big(\lambda T^{-1}(\bar{e}) + \mu T^{-1}(\bar{v})\Big) = \lambda T\Big(T^{-1}(\bar{e})\Big) + \mu T\Big(T^{-1}(\bar{v})\Big) = \lambda\bar{e} + \mu\bar{v}\,;$$

por lo tanto $T^{-1}$ es lineal, y como es biyectiva es un isomorfismo. ∎

**Ejemplos 3.6** (a) La aplicación de $E$ en $\bar{E}$ que es constantemente igual a cero es lineal y se donomina “aplicación nula”. Si $T : E \to \bar{E}$ es una aplicación lineal, entonces son claras las equivalencias: $T$ es nula $\iff$ $\operatorname{Im} T = 0$ $\iff$ $\operatorname{Ker} T = E$.

Si denotamos con $0$ el $k$-espacio vectorial cuyo único vector es el cero, entonces es claro que la única aplicación lineal de $0$ en $E$ es la aplicación nula, la cual denotaremos $0 \to E$. Del mismo modo, la única aplicación lineal de $E$ en $0$ es la aplicación nula, que denotaremos $E \to 0$.

(b) Si $F$ es un subespacio vectorial de $E$, entonces $F$ es un $k$-espacio vectorial y la inclusión natural $F \hookrightarrow E$ es un monomorfismo.

(c) Considerando la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ (véase 1.3 (c)), es fácil comprobar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - y, \frac{1}{2}y - x) \end{array}$$

es un endomorfismo. La imagen de $f$ es $\operatorname{Im} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\}$, y su núcleo es $\operatorname{Ker} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$ (es claro que $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Ker} f$ son rectas que pasan por el origen; véase el ejemplo siguiente).

(d) Si denominamos “rectas vectoriales” de $E$ a los subespacios vectoriales suyos de la forma $\langle e \rangle$ con $e \neq 0$, entonces en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacios vectoriales que hay aparte del subespacio trivial y del total son las rectas vectoriales (que son las rectas que pasan por el origen). Compruébese que los endomorfismos de $\mathbb{R}$ son las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya gráfica son rectas vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

**Definiciones 3.7** Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal. Dado un subespacio vectorial $F$ de $E$, se define la *imagen directa* de $F$ por $T$ como el subconjunto $T(F)$ de $\bar{E}$ dado por la igualdad

$$T(F) = \{T(e) \,:\, e \in F\}\,.$$

Es fácil probar que $T(F)$ es un subespacio vectorial de $\bar{E}$ (compruébese); en particular $\operatorname{Im} T = T(E)$ es un subespacio vectorial de $\bar{E}$.

Dado un subespacio vectorial $\bar{F}$ de $\bar{E}$, se define la *imagen inversa* (ó *imagen recíproca*) de $\bar{F}$ por $T$ como el subconjunto $T^{-1}(\bar{F})$ de $E$ dado por la igualdad

$$T^{-1}(\bar{F}) = \{e \in E \,:\, T(e) \in \bar{F}\}\,.$$

Es también fácil ver que $T^{-1}(\bar{F})$ es un subespacio vectorial de $E$ (compruébese); en particular $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(\{0\})$ es un subespacio vectorial de $E$.

**3.8** Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal. Tomando imágenes directas por $T$ de los subespacios de $E$ obtenemos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } E\end{array}\right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } \bar{E}\end{array}\right] \\ F & \longmapsto & T(F) \end{array}$$

que es un morfismo de conjuntos ordenados, es decir, si $F$ y $F'$ son subespacios vectoriales de $E$ tales que $F \subseteq F'$, entonces $T(F) \subseteq T(F')$ (véase 2.4). De la misma forma, las imágenes inversas por $T$ de los subespacios de $\bar{E}$ definen una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } \bar{E}\end{array}\right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } E\end{array}\right] \\ \bar{F} & \longmapsto & T^{-1}(\bar{F}) \end{array}$$

que es un morfismo de conjuntos ordenados.

**Ejercicio 3.9** Los dos morfismos de conjuntos ordenados que aparecen en 3.8 no siempre son inversos uno del otro. Compruébense:

(a) Dado un subespacio $\bar{F}$ de $\bar{E}$ se tiene $T(T^{-1}(\bar{F})) = \bar{F} \cap \operatorname{Im} T$; como consecuencia, si $T$ es epiyectiva entonces para todo subespacio $\bar{F}$ de $\bar{E}$ se satisface $T(T^{-1}(\bar{F})) = \bar{F}$.

(b) Dado un subespacio $F$ de $E$ se tiene $T^{-1}(T(F)) = F + \operatorname{Ker} T$; como consecuencia, si $T$ es inyectiva entonces para todo subespacio $F$ de $E$ se satisface $T^{-1}(T(F)) = F$.

(c) Si $T$ es un isomorfismo, de (a) y (b) se sigue que los morfismos de 3.8 son inversos uno del otro, y por lo tanto son "isomorfismos de conjuntos ordenados" [1].

# 4 Espacio Vectorial Cociente

Fijemos en esta sección un subespacio vectorial $E'$ de un $k$-espacio vectorial $E$.

Como por definición $E'$ es un subgrupo de $E$, tenemos el grupo cociente $E/E'$ y el morfismo canónico de grupos $\pi : E \to E/E'$ (consúltese [2], [7] ú [8]). Nos planteamos ahora si podemos dotar a $E/E'$ de estructura de espacio vectorial sobre $k$ de modo que la aplicación $\pi$ sea un morfismo de espacios vectoriales.

Dados $\lambda \in k$ y $\pi(e) \in E/E'$, si queremos definir un producto por escalares en $E/E'$ tal que $\pi$ sea una aplicación lineal, es claro que la única posiblidad es que dicho producto sea el definido por la igualdad $\lambda \cdot \pi(e) = \pi(\lambda e)$.

**Teorema 4.1** *Dados $e, v \in E$ tales que $\pi(e) = \pi(v)$, para todo $\lambda \in k$ se satisface $\pi(\lambda e) = \pi(\lambda v)$. Por lo tanto se puede definir la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} k \times E/E' & \to & E/E' \\ (\lambda, \pi(e)) & \mapsto & \lambda \cdot \pi(e) := \pi(\lambda e)\,, \end{array}$$

[1] Dados conjuntos ordenados $X$ e $Y$, un morfismo de conjuntos ordenados $f : X \to Y$ se dice que es un *isomorfismo de conjuntos ordenados*, si existe otro morfismo de conjuntos ordenados $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ es la identidad $X$ y $f \circ g$ es la identidad de $Y$.

*la cual dota al grupo cociente $E/E'$ de estructura de $k$-espacio vectorial. Dicha estructura es la única para la que la aplicación $\pi$ es $k$-lineal.*

*Demostración.* Si $e, v \in E$ son tales que $\pi(e) = \pi(v)$, entonces $e - v \in E'$ y por lo tanto, dado $\lambda \in k$, $\lambda e - \lambda v = \lambda(e - v) \in E'$, es decir, $\pi(\lambda e) = \pi(\lambda v)$, lo que prueba que la definición de $\lambda \cdot \pi(e)$ no depende del representante elegido en la clase $\pi(e)$.

Es fácil probar que la aplicación del enunciado es un producto por escalares en el grupo cociente $E/E'$ (es decir, que satisface las propiedades (i) − (iv) de la definición 1.1), y ya hemos visto antes de enunciar el teorema que este producto por escalares es el único que hace que la aplicación $\pi$ sea lineal. ∎

**Definición 4.2** Llamaremos *$k$-espacio vectorial cociente* de $E$ por $E'$ al grupo cociente $E/E'$ dotado de la estructura de $k$-espacio vectorial del teorema 4.1.

**Ejercicio 4.3** Compruébese que $E/E' = 0$ si y sólo si $E' = E$.

**Teorema 4.4 (Propiedad universal del espacio vectorial cociente)** *Dada una aplicación lineal $T : E \to \bar{E}$, $T$ factoriza a través de $\pi$ si y sólo si $T$ se anula sobre $E'$; es decir, existe una aplicación lineal $\bar{T} : E/E' \to \bar{E}$ tal que es conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "T"'] & E/E'' \arrow[dl, "\bar{T}"] \\ \bar{E} & \end{tikzcd}$$

*si y sólo si $E' \subseteq \operatorname{Ker} T$. Además, si $T$ factoriza lo hace de modo único.*

*Demostración.* La unicidad es clara, ya que si existe una aplicación lineal $\bar{T} : E/E' \to \bar{E}$ satisfaciendo $T = \bar{T} \circ \pi$, entonces la imagen por $\bar{T}$ de un vector $\pi(e) \in E/E'$ debe ser necesariamente $\bar{T}(\pi(e)) = \bar{T} \circ \pi(e) = T(e)$; además, si existe $\bar{T}$, entonces dado $e' \in E'$ tenemos $T(e') = \bar{T}(\pi(e')) = \bar{T}(0) = 0$, es decir, $T$ se anula sobre $E'$ (recordemos que los vectores de $E$ que representan al vector cero de $E/E'$ son los vectores de $E'$, o sea, dado $e \in E$, $\pi(e) = 0$ si y sólo si $e \in E'$).

Supongamos ahora que $E' \subseteq \operatorname{Ker} T$. Si $e, v \in E$ son tales que $\pi(e) = \pi(v)$, entonces $e - v \in E' \subseteq \operatorname{Ker} T$ y por lo tanto $T(e - v) = 0$, es decir, $T(e) = T(v)$. Podemos entonces definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \bar{T} : E/E' & \to & \bar{E} \\ \pi(e) & \mapsto & T(e)\,, \end{array}$$

la cual es claro que satisface $\bar{T} \circ \pi = T$. Para terminar habría que demostrar que la aplicación $\bar{T}$ definida es lineal, lo cual es una sencilla comprobación que se deja como ejercicio. ∎

**Corolario 4.5 (Teorema de factorización canónica)** *Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal, consideremos el espacio vectorial cociente $E/\operatorname{Ker} T$ con su aplicación lineal canónica $\pi : E \to E/\operatorname{Ker} T$ (que es un epimorfismo), y sea $i : \operatorname{Im} T \to \bar{E}$ la inclusión de $\operatorname{Im} T$ en $\bar{E}$ (que* *es un monomorfimso). Existe un único isomorfismo $\varphi : E/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Im} T$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & \bar{E} \\ \pi \big\downarrow & & \big\uparrow i \\ E/\operatorname{Ker} T & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Im} T \end{array} ,$$

*es decir, tal que $T = i \circ \varphi \circ \pi$.*

*Demostración.* Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} T' : E & \to & \operatorname{Im} T \\ e & \mapsto & T(e) \ ; \end{array}$$

$T'$ está definida igual que $T$ pero cambiando $\bar{E}$ por el subespacio suyo donde valora $T$, por lo que $T'$ es epiyectiva (porque $\operatorname{Im} T' = \operatorname{Im} T$ ) y satisface $T = i \circ T'$.

Ahora, como $\operatorname{Ker} T' = \operatorname{Ker} T$, aplicando 4.4 a $T'$ obtenemos que existe una única aplicación lineal $\varphi : E/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Im} T$ tal que $T' = \varphi \circ \pi$, y por lo tanto $T = i \circ \varphi \circ \pi$. La demostración de que $\varphi$ es biyectiva se deja como ejercicio. ∎

**Ejercicio 4.6** Sean $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal, $E'$ un subespacio vectorial de $E$, $\bar{E}'$ un subespacio vectorial de $\bar{E}$, y $\pi : E \to E/E'$, $\bar{\pi} : \bar{E} \to \bar{E}/\bar{E}'$ los correspondientes morfismos de paso al cociente. Pruébese que existe una única aplicación lineal $\bar{T} : E/E' \to \bar{E}/\bar{E}'$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & \bar{E} \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow \bar{\pi} \\ E/E' & \xrightarrow{\bar{T}} & \bar{E}/\bar{E}' \end{array}$$

si y sólo si $T(E') \subseteq \bar{E}'$.

Terminaremos esta sección con una importante propiedad del morfismo canónico $\pi : E \to E/E'$.

**Teorema 4.7** *La aplicación de paso al cociente $\pi : E \to E/E'$ induce una correspondencia biyectiva entre los subespacios vectoriales de $E/E'$ y los subespacios vectoriales de $E$ que contienen a $E'$. Dicha correspondencia es un isomorfismo de conjuntos ordenados.*

*Demostración.* Por una parte tenemos la aplicación "tomar imagen directa por $\pi$" restringida al conjunto de los subespacios vectoriales de $E$ que contienen a $E'$,

$$\begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{c} \text{subespacios vectoriales} \\ \text{de } E \text{ que contienen a } E' \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[ \begin{array}{c} \text{subespacios vec-} \\ \text{toriales de } E/E' \end{array} \right] \\ F & \longmapsto & \pi(F) \ . \end{array}$$

Por otra parte, si $\bar{F}$ es un subespacio vectorial de $E/E'$, entonces $\pi^{-1}(\bar{F})$ es un subespacio vectorial de $E$ que contiene a $E'$, ya que $\pi(E') = 0 \in \bar{F}$; por lo tanto la aplicación "tomar imagen inversa por $\pi$" valora en el conjunto de los subespacios vectoriales de $E$ que contienen a $E'$ y tenemos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vec-}\\ \text{toriales de } E/E'\end{array}\right] & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{subespacios vectoriales}\\ \text{de } E \text{ que contienen a } E'\end{array}\right] \\ \bar{F} & \longmapsto & \pi^{-1}(\bar{F}) \,. \end{array}$$

Ya sabemos que estas dos aplicaciones conservan el orden (véase 3.8), y es fácil demostrar que son biyectivas porque son una la inversa de la otra (véanse (a) y (b) de 3.9). ∎

# 5 Producto Directo y Suma Directa

Fijemos en esta sección una familia de $k$-espacios vectoriales $\{E_i\}_{i\in I}$ indexada por un conjunto $I$ ($I$ es el conjunto de índices).

Si $\prod\limits_{i\in I} E_i = \{(e_i)_{i\in I} : e_i \in E_i \ \forall i \in I\}$ es el producto cartesiano de la familia de espacios vectoriales, entonces para cada índice $j \in I$ tenemos la "proyección del producto sobre el factor $j$-ésimo":

$$\begin{array}{rcl} p_j \ : \ \prod\limits_{i\in I} E_i & \rightarrow & E_j \\ (e_i)_{i\in I} & \mapsto & e_j \,. \end{array}$$

Como es sabido (véase [7] ú [8]), la única suma posible en $\prod\limits_{i\in I} E_i$ que le da estructura de grupo tal que las proyecciones $\{p_i : i \in I\}$ son todas morfismos de grupos es "sumar componente a componente":

$$(e_i)_{i\in I} + (v_i)_{i\in I} := (e_i + v_i)_{i\in I} \,, \qquad \Big( (e_i)_{i\in I} \,,\ (e_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \Big) \,;$$

además, en este caso, como todos los grupos $(E_i, +)$ son abelianos, $\prod\limits_{i\in I} E_i$ con la anterior suma es abeliano (pues la suma de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ está definida a partir de todas las sumas de los espacios factores).

Nos planteamos ahora si podemos dotar a $\prod\limits_{i\in I} E_i$ de estructura de espacio vectorial sobre $k$ de modo que todas las proyecciones $\{p_i : i \in I\}$ sean aplicaciones lineales. Supongamos que existe sobre $\prod\limits_{i\in I} E_i$ un producto por escalares para el cual todas las proyecciones son lineales; dados $\lambda \in k$, $(e_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ veamos cómo debe ser dicho producto $\lambda \cdot (e_i)_{i\in I}$: si $j \in I$, como $p_j$ es lineal tenemos

$$p_j(\lambda \cdot (e_i)_{i\in I}) = \lambda p_j((e_i)_{i\in I}) = \lambda e_j \,,$$

de modo que la componente $j$-ésima de $\lambda \cdot (e_i)_{i\in I}$ es $\lambda e_j$; por lo tanto debe ser

$$\lambda \cdot (e_i)_{i\in I} = (\lambda e_i)_{i\in I} \,,$$

esto es, el producto de un escalar por un elemento de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ consiste en multiplicar el escalar componente a componente (véase 1.3 (c) ).

**Teorema 5.1** *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} k \times \prod\limits_{i\in I} E_i & \to & \prod\limits_{i\in I} E_i \\ (\lambda, (e_i)_{i\in I})) & \mapsto & \lambda \cdot \ (e_i)_{i\in I} := (\lambda e_i)_{i\in I} \end{array}$$

*dota al grupo producto* $\prod\limits_{i\in I} E_i$ *de estructura de* $k$*-espacio vectorial. Dicha estructura es la única para la que las proyecciones* $\{p_i : i \in I\}$ *son morfismos de* $k$*-espacios vectoriales.*

*Demostración.* Es fácil probar que la aplicación del enunciado es un producto por escalares en el grupo producto $\prod\limits_{i\in I} E_i$ (es decir, que satisface las propiedades (i) − (iv) de la definición 1.1), y ya hemos visto antes de enunciar el teorema que este producto por escalares es el único que hace que las aplicaciones $\{p_i : i \in I\}$ sean lineales. ∎

**Definición 5.2** Llamaremos *k-espacio vectorial producto directo* de la familia $\{E_i : i \in I\}$, al grupo producto $\prod\limits_{i\in I} E_i$ dotado de la estructura de $k$-espacio vectorial del teorema 5.1.

**Definiciones 5.3** Un elemento $(e_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ se dice que es *casi nulo* si $e_i = 0$ excepto, a lo sumo, para un conjunto finito de índices. Si denotamos $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i = \{(e_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i : (e_i)_{i\in I}$ es casi nulo$\}$, entonces es fácil probar que $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ es un subespacio vectorial de $\prod\limits_{i\in I} E_i$; en particular $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ es un $k$-espacio vectorial que se denomina *suma directa* de la familia $\{E_i : i \in I\}$.

El espacio vectorial $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ está dotado de las inmersiones de los espacios sumandos en la suma: dado un índice $j \in I$, tenemos la aplicación $s_j : E_j \to \bigoplus\limits_{i\in I} E_i$, que a cada $e \in E_j$ le asigna el elemento $(e_i)_{i\in I}$ tal que $e_j = e$ y $e_i = 0$ si $i \neq j$; $s_j$ es un monomorfismo (compruébese)

**5.4** Es claro que la condición necesaria y suficiente para que $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i = \prod\limits_{i\in I} E_i$ es que el conjunto de índices $\{i \in I : E_i \neq 0\}$ sea finito.

Si, como caso particular, existe un $k$-espacio vectorial $E$ tal que $E_i = E$ para todo $i \in I$, entonces el producto directo se denota $E^I$ y la suma directa se denota $E^{(I)}$; si además el conjunto de índices es finito, $I = \{1, \dots, n\}$, entonces el producto directo (y la suma directa) se denota $E^n$ :

$$E^n = E \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus E = E \times \overset{n}{\cdots} \times E \,.$$

# 6 Subespacios Suplementarios

Sea $E$ un $k$-espacio vectorial y sean $E_1, \dots, E_n$ subespacios vectoriales de $E$. Tenemos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} E_1 \oplus \cdots \oplus E_n & \to & E \\ (e_1, \dots, e_n) & \mapsto & e_1 + \cdots + e_n \end{array}$$

que es lineal (compruébese) y cuya imagen es $E_1 + \cdots + E_n$ (véase en 2.3 (f) la definición de suma de subespacios); en particular tenemos un epimorfismo

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \to E_1 + \cdots + E_n \,. \tag{6.1}$$

**Definición 6.1** Diremos que los subespacios $E_1, \dots, E_n$ *están en suma directa* (ó que *la suma* $E_1 + \cdots + E_n$ *es directa*) cuando el epimorfismo (6.1) sea un isomorfismo.

**6.2** Que los subespacios $E_1, \dots, E_n$ estén en suma directa significa que cada vector $e$ de $E_1 + \cdots + E_n$ admita una única representación de la forma $e = e_1 + \cdots + e_n$ con $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$, es decir, que se satisfaga la propiedad siguiente: “ si $e_1, v_1 \in E_1, \dots, e_n, v_n \in E_n$ son tales que $e_1 + \cdots + e_n = v_1 + \cdots + v_n$, entonces $e_1 = v_1, \dots, e_n = v_n$ ”. Basta tener en cuenta que la anterior propiedad significa que el morfismo (6.1) es inyectivo.

Por la misma razón, el que los subespacios $E_1, \dots, E_n$ estén en suma directa es equivalente a la propiedad: “ si $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$ son tales que $e_1 + \cdots + e_n = 0$, entonces $e_1 = \cdots = e_n = 0$ ”.

Un criterio para saber cuándo los subespacios $E_1, \dots, E_n$ están en suma directa es el siguiente:

**Proposición 6.3** *Los subespacios $E_1, \dots, E_n$ están en suma directa si y sólo si satisfacen las siguientes $n - 1$ igualdades:*

$$(E_1 + \cdots + E_i) \cap E_{i+1} = 0 \,, \qquad\qquad (i \in \{1, \dots, n-1\}) \,.$$

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que los subespacios están en suma directa y sea $i \in \{1, \dots, n-1\}$; si $e \in (E_1 + \cdots + E_i) \cap E_{i+1}$, entonces existen vectores $e_1 \in E_1, \dots, e_i \in E_i$ tales que $e = e_1 + \cdots + e_i$, y como $e \in E_{i+1}$, tomando $e_{i+1} = -e$ y $e_k = 0$ para $k \in \{i+2, \dots, n\}$ tendremos la igualdad

$$0 = e_1 + \cdots + e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n \,,$$

de la que se deduce aplicando la hipótesis que $e_1 = \cdots = e_i = e_{i+1} = 0$; en particular $e = 0$.

Recíprocamente, supongamos ahora que para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se satisface $(E_1 + \cdots + E_i) \cap E_{i+1} = 0$, y sean $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$ tales que $e_1 + \cdots + e_n = 0$. Despejando $e_n$ obtenemos

$$e_n = -(e_1 + \cdots + e_{n-1}) \in (E_1 + \cdots + E_{n-1}) \cap E_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_n = 0 \\ e_1 + \cdots + e_{n-1} = 0 \ ; \end{cases}$$

despejando ahora $e_{n-1}$ de la igualdad $e_1 + \cdots + e_{n-1} = 0$,

$$e_{n-1} = -(e_1 + \cdots + e_{n-2}) \in (E_1 + \cdots + E_{n-2}) \cap E_{n-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_{n-1} = 0 \\ e_1 + \cdots + e_{n-2} = 0 \ ; \end{cases}$$

es claro que en un número finito de pasos probamos que se satisface $e_1 = \cdots = e_n = 0$. ∎

*Nota* **6.4** Cuando los subespacios $E_n, \dots, E_n$ estén en suma directa, abusando de la notación su suma la denotaremos $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ (pues que estén en suma directa significa que la aplicación $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \to E_1 + \cdots + E_n$ sea un isomorfismo).

**Definición 6.5** Diremos que dos subespacios vectoriales $E_1$ y $E_2$ de $E$ son *suplementarios* si están en suma directa y su suma es $E$, es decir, si $E = E_1 \oplus E_2$.

Según el criterio dado en 6.3, los subespacios $E_1$ y $E_2$ son suplementarios si y sólo si $E_1 \cap E_2 = 0$ y $E_1 + E_2 = E$.

**Ejercicio 6.6** Dados dos subespacios $E_1$ y $E_2$ de $E$, pruébese que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) $E = E_1 \oplus E_2$.

(b) Para todo $e \in E$ existe un único $v \in E_1$ tal que $e - v \in E_2$.

Según lo anterior, si $E = E_1 \oplus E_2$, entonces podemos definir la aplicación $p : E \to E$ del siguiente modo: dado $e \in E$, $p(e)$ es el único vector de $E_1$ que satisface $e - p(e) \in E_2$. Pruébese que $p$ es un endomorfismo de $E$ (conocido como *proyección de $E$ sobre $E_1$ paralelamente a $E_2$*) que tiene las siguientes propiedades: $p^2 = p$ ($p$ es "idempotente"), $\operatorname{Im} p = E_1$ y $\operatorname{Ker} p = E_2$.

**6.7** Veamos cómo podemos interpretar el endomorfismo $p$ del ejercicio 6.6. Que $E = E_1 \oplus E_2$ significa que $E$ puede identificarse con el espacio vectorial suma directa $E_1 \oplus E_2$ mediante el isomorfismo $E_1 \oplus E_2 \to E$, $(e_1, e_2) \mapsto e_1 + e_2$; si $p_1 : E_1 \oplus E_2 \to E_1$ es la proyección sobre $E_1$ y $s_1 : E_1 \to E_1 \oplus E_2$ es la inmersión de $E_1$, entonces (mediante la identificación $E_1 \oplus E_2 \approx E$ mencionada) es fácil ver que la proyección de $E$ sobre $E_1$ paralelamente a $E_2$ es $s_1 \circ p_1$.

Podemos plantearnos ahora la siguiente cuestión: dado un subespacio vectorial $F$ de $E$, ¿existen subespacios $G$ de $E$ tales que $E = F \oplus G$? Es fácil ver con ejemplos que para la cuestión planteada no hay unicidad, es decir, pueden existir en $E$ subespacios distintos $G_1$ y $G_2$ tales que $F \oplus G_1 = E = F \oplus G_2$. Probaremos a continuación la existencia haciendo uso del *Lema de Zorn* (véase [7] ú [8]).

**Teorema 6.8** *Todo subespacio de un espacio vectorial posee un subespacio suplementario.*

*Demostración.* Sea $F$ un subespacio vectorial de $E$ y consideremos el conjunto

$$X = \{H \text{ subespacio de } E \ : \ H \cap F = 0\};$$

dicho conjunto es no vacío y está ordenado por la inclusión. Si $\{E_i\}_{i \in I}$ es una cadena de $X$ (una cadena es un subconjunto totalmente ordenado), entonces $H = \bigcup_{i \in I} E_i$ es un elemento de $X$ (compruébese) que es una cota superior para el subconjunto $\{E_i\}_{i \in I}$ de $X$. Por lo tanto, aplicando el Lema de Zorn obtenemos que en $X$ hay elementos maximales, es decir, existe un subespacio $G$ de $E$ que es un elemento de $X$ tal que en $X$ no hay elementos que contengan estrictamente a $G$. Para ver que $E = F \oplus G$ hay que probar que $E = F + G$. Supongamos que no se satisface la anterior igualdad, es decir, que existe un vector $e \in E$ tal que $e \notin F + G$; entonces el subespacio $G + \langle e \rangle$ sería un elemento de $X$ que contiene estrictamente a $G$, lo cual no puede ser. ▮

## 7 Sucesiones Exactas de Aplicaciones Lineales

**Definición 7.1** Una sucesión de aplicaciones lineales entre $k$-espacios vectoriales

$$\dots \longrightarrow E_{i-1} \xrightarrow{T_{i-1}} E_i \xrightarrow{T_i} E_{i+1} \longrightarrow \dots$$

se dice que es *exacta en el término $E_i$* cuando $\operatorname{Im} T_{i-1} = \operatorname{Ker} T_i$, y se dice que es *exacta* cuando sea exacta en todos sus términos.

**Ejemplos 7.2** (a) Decir que la sucesión $0 \to E' \xrightarrow{f} E$ es exacta significa que $f$ es inyectiva; análogamente, la sucesión $E \xrightarrow{g} E'' \to 0$ es exacta si y sólo si $g$ es epiyectiva. Por último, decir que la sucesión

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$$

es exacta significa que: $f$ es inyectiva (y por tanto $f : E' \to f(E')$ es un isomorfismo), $g$ es epiyectiva, e $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$; aplicando 4.5 obtenemos además que $g$ induce un isomorfismo $\bar{g} : E/f(E') \to E''$.

(b) Todo subespacio $E'$ de un espacio vectorial $E$ determina una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow E' \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} E/E' \longrightarrow 0\,.$$

(c) Una aplicación lineal $T : E \to F$ nos determina la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \hookrightarrow E \xrightarrow{T} \operatorname{Im} T \longrightarrow 0\,.$$

(d) Sean $E_1$ y $E_2$ dos $k$-espacios vectoriales, $s_1 : E_1 \to E_1 \times E_2$, $s_1(e_1) = (e_1, 0)$, la inmersión de $E_1$, y $p_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$, $p_2(e_1, e_2) = e_2$, la proyección sobre $E_2$. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{s_1} E_1 \times E_2 \xrightarrow{p_2} E_2 \longrightarrow 0\,,$$

y si mediante el monomorfismo $s_1$ identificamos $E_1$ con el subespacio $E_1 \times 0 = \operatorname{Im} s_1$ de $E_1 \times E_2$, entonces obtenemos

$$\frac{E_1 \times E_2}{E_1} = E_2\,.$$

(e) Sean ahora $E_1$ y $E_2$ subespacios de un espacio vectorial $E$ y consideremos las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} i : E_1 \cap E_2 & \to & E_1 \times E_2 \\ e & \mapsto & (e, -e) \end{array}\,, \qquad \begin{array}{rcl} \sigma : E_1 \times E_2 & \to & E_1 + E_2 \\ (e_1, e_2) & \mapsto & e_1 + e_2 \end{array}\,.$$

La sucesión

$$0 \longrightarrow E_1 \cap E_2 \xrightarrow{i} E_1 \times E_2 \xrightarrow{\sigma} E_1 + E_2 \longrightarrow 0$$

es exacta y por lo tanto $\sigma$ es un isomorfismo si y sólo si $\sigma$ es inyectiva, es decir, si y sólo si $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Im} i = 0$. Como $i$ es inyectiva, será $\operatorname{Im} i = 0$ si y sólo si $E_1 \cap E_2 = 0$. Hemos probado que $E_1$ y $E_2$ están en suma directa si y sólo si $E_1 \cap E_2 = 0$, resultado que ya sabíamos (véase 6.3)

**Ejercicios 7.3** (a) Dado un diagrama conmutativo de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & E'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle T'} & & \downarrow{\scriptstyle T} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & F' & \xrightarrow{j} & F & \xrightarrow{q} & F'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

cuyas filas son sucesiones exactas, existe una aplicación lineal $T'' : E'' \to F''$ que completa el diagrama, esto es, tal que $T''\circ p = q\circ T$.

(b) Sean $0 \to E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \to 0$ una sucesión exacta de aplicaciones lineales y $T : E \to F$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que $T$ factorice a través de $p$ (es decir, para que exista una aplicación lineal $\bar{T} : E'' \to F$ que haga que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "T"] & E'' \arrow[r] \arrow[dl, "\bar{T}"] & 0 \\ & & F & & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo), es que $T$ se anule sobre la imagen de $i$ (esto es, $T \circ i = 0$).

## 8 Problemas

En los problemas que siguen $k$ denotará un cuerpo arbitrario, y cuando digamos "... sea $E$ un espacio vectorial ..." ó "... sea $T : E \to F$ una aplicación lineal ..." sin hacer referencia a ningún cuerpo concreto (como el de los números reales $\mathbb{R}$ ó el de los números complejos $\mathbb{C}$), estaremos queriendo decir "... sea $E$ un $k$-espacio vectorial ..." ó "... sean $E$ y $F$ $k$-espacios vectoriales y $T : E \to F$ una aplicación $k$-lineal ...".

En los problemas enunciados sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, i denotará una de las dos raíces del polinomio $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$; en particular $\mathrm{i}^2 = -1$.

**8.1** Estúdiese, en cada uno de los casos siguientes, si el conjunto $E$ dotado de la suma y el producto por elementos de $k$ considerados en cada uno de los casos es un espacio vectorial.

(a) $E = k[x] = \{$polinomios con coeficientes en $k\}$; la suma es la usual de polinomios y el producto de un elemento de $k$ por un polinomio también es el usual.

(b) $E = k^2$; dados $(x, y), (x', y') \in k^2$, $\lambda \in k$, la suma de $(x, y)$ y $(x', y')$ es la dada por la igualdad

$$(x, y) + (x', y') := (2x + x', y + 3y'),$$

y el producto de $\lambda$ por $(x, y)$ es

$$\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

(c) $E = k^2$; dados $(x, y), (x', y') \in k^2$, $\lambda \in k$, la suma de $(x, y)$ y $(x', y')$ es la dada por la igualdad

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'),$$

y el producto de $\lambda$ por $(x, y)$ es

$$\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, y).$$

(d) $E = S(k) = \{$sucesiones de elementos de $k\}$ con las operaciones usuales (la suma de dos sucesiones se realiza término a término, y el producto de un escalar por una sucesión se obtiene multiplicando el escalar por todos los términos de la sucesión).

(e) Supongamos en este caso que $k = \mathbb{R}$ y sea $E = \mathbb{R}^+ = \{$números reales $> 0\}$; la suma "$*$" y el producto por números reales "$\circ$" son los definidos del siguiente modo: dados $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$x * y := xy, \qquad \lambda \circ x := x^\lambda.$$

**8.2** Ya sabemos que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Si sobre el grupo abeliano $(\mathbb{R}^2, +)$ se considera el siguiente producto por escalares complejos,

$$(a + b\mathrm{i})(x, y) := (ax - by, ay + bx) \qquad a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}\,, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

pruébese que $\mathbb{R}^2$ queda dotado de estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

**8.3** Sean $C$ un conjunto y $V$ un $k$-espacio vectorial. Dótese al conjunto $\mathcal{F}(C, V) = \{$aplicaciones de $C$ en $V\}$ de estructura de $k$-espacio vectorial.

**8.4** Dado un número natural $n$, ¿cuáles de los siguientes conjuntos son subespacio vectorial de $k^n$?:
(a) $F_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \,:\, x_1 + \cdots + x_n \neq 0\}$;
(b) $F_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \,:\, x_m = \cdots = x_n\}$ $(m < n)$;
(c) $F_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \,:\, x_1 x_2 = 0\}$;
(d) $F_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \,:\, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \neq 0\}$ $(a_1, \dots, a_n \in k$ fijos$)$.

**8.5** Considérese el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (véase 8.3). ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacio vectorial de $E$?:
(a) $F_1 = \{f \in E \,:\, f(x^2) = (f(x))^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
(b) $F_2 = \{f \in E \,:\, f(a) = f(b)\}$ $(a, b \in \mathbb{R}$ fijos$)$;
(c) $F_3 = \{f \in E \,:\, f(a) = 0\}$ $(a \in \mathbb{R}$ fijo$)$;
(d) $F_4 = \{f \in E \,:\, f(x) = f(-x)\}$ (funciones pares);
(e) $F_5 = \{f \in E \,:\, f(-x) = -f(x)\}$ (funciones impares);
(f) $F_6 = \{f \in E \,:\, f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

**8.6** Dado un subconjunto no vacío $V$ de un espacio vectorial $E$, pruébese que $V$ es un subespacio vectorial si y sólo si para cualesquiera $v_1 \dots, v_m \in V$ se satisface $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq V$.

**8.7** Dado un vector no nulo $e$ de un espacio vectorial $E$ y dado un subespacio $F$ de $E$, pruébense las siguientes equivalencias: $e \in F \iff \langle e \rangle \subseteq F \iff \langle e \rangle \cap F \neq 0$.

**8.8** Para cada natural $n$ denotemos por $k_n[x]$ el subconjunto de $k[x]$ formado por los polinomios de grado $\leq n$. Dígase cuáles de los siguientes subconjuntos de $k[x]$ son subespacio:
(a) $k_n[x]$;
(b) los polinomios de $k[x]$ de grado mayor que 4;
(c) los polinomios de $k[x]$ cuyo término independiente es nulo.

**8.9** Considérense en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $F_1 = \langle (1, 1, 0) \rangle$, $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 0,\, y = 0\}$, $F_3 = \langle (1, 2, 0), (-1, -1, 1) \rangle$, $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = z\}$. Calcúlense $F_1 + F_2$ y $F_3 \cap F_4$.

**8.10** Estúdiese si son lineales las siguientes aplicaciones entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 1$;
(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = (2x + y, x - y, 3y)$;
(c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (2xy, 3y + z, 2y + x)$.

**8.11** Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal y sean $F_1, F_2$ subespacios vectoriales de $E$. Pruébense:

(a) $T(F_1 \cap F_2) \subseteq T(F_1) \cap T(F_2)$ y se da la igualdad cuando $T$ es inyectiva;

(b) $T(F_1 + F_2) = T(F_1) + T(F_2)$.

**8.12** Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal y sean $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ subespacios vectoriales de $\bar{E}$. Pruébense:

(a) $T^{-1}(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = T^{-1}(\bar{F}_1) \cap T^{-1}(\bar{F}_2)$;

(b) $T^{-1}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \supseteq T^{-1}(\bar{F}_1) + T^{-1}(\bar{F}_2)$ y se da la igualdad cuando $T$ es epiyectiva.

**8.13** Dadas aplicaciones lineales $f : E \to F$ y $g : F \to G$, pruébense:

(a) $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im} g$ y $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker}(g \circ f)$

(b) $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

**8.14** Sean $f$ y $g$ endomorfismos de un espacio vectorial $E$ tales que $f \circ g = g \circ f$. Pruébese que se satisfacen las inclusiones $f(\operatorname{Ker} g) \subseteq \operatorname{Ker} g$ y $f(\operatorname{Im} g) \subseteq \operatorname{Im} g$.

**8.15** Dado un endomorfismo $f : E \to E$, pruébense:

(a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0 \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$;

(b) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

**8.16** Sea $f : E \to E$ un endomorfismo idempotente (esto es, tal que $f^2 = f$ ). Pruébense:

(a) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(b) $f$ es la proyección de $E$ sobre $\operatorname{Im} f$ paralelamente a $\operatorname{Ker} f$ (véase 6.6).

**8.17** Pruébese que las siguientes aplicaciones son lineales y calcúlense el núcleo y la imagen de cada una de ellas:

(a) $f : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}^2, \quad f(p(x)) = (p(\mathrm{i}), p(-\mathrm{i}))$ ;

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3)$ ;

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x], \quad h(a, b) = (a - b)x^2 + (2a + b)x - b$.

**8.18** Dada una aplicación lineal $T : E \to F$, definimos a partir de ella la aplicación $\varphi : E \times F \to E \times F$, $\varphi(u, v) = (u, v - T(u))$. Pruébese que $\varphi$ es un automorfismo de $E \times F$.

**8.19** Sea $T : E \to F$ un morfismo de espacios vectoriales. Se define el *conúcleo* de $T$ como el espacio vectorial $\operatorname{Coker} T := F/\operatorname{Im} T$. Pruébense:

(a) $T$ es epiyectiva $\iff$ $\operatorname{Coker} T = 0$.

(b) La sucesión de aplicaciones lineales

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ T\ } F \xrightarrow{\ \pi\ } \operatorname{Coker} T \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $i : \operatorname{Ker} T \to E$ es la inclusión natural y $\pi : F \to \operatorname{Coker} T$ es el morfismo de paso al cociente.

**8.20** Pruébense los siguientes isomorfismos:
(a) $\mathbb{R}^2/\langle(1,0)\rangle \approx \mathbb{R}$ ;
(b) $k_2[x]/k \approx k_1[x]$ ;
(c) $k[x]/k \approx k[x]$ ;
(d) $E/V \approx \mathbb{R}$, donde $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $V = \{f \in E \,:\, f(0) = 0\}$ .

**8.21** En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideremos los siguientes conjuntos:

$$E_1 = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}\,, \qquad E_2 = \{(\lambda,\lambda,-\lambda) \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

(a) Pruébese que $E_1$ y $E_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.
(b) Determínese algún subespacio $F$ de $\mathbb{R}^3$ distinto de $E_1$ tal que $F$ y $E_2$ sean suplementarios.
(c) Determínese algún subespacio $G$ de $\mathbb{R}^3$ distinto de $E_2$ tal que $G$ y $E_1$ sean suplementarios.

**8.22** Considérese en $\mathbb{C}^2$ el subespacio vectorial $V = \langle(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})\rangle$.
(a) Hállese un suplementario de $V$.
(b) Calcúlese la proyección del vector $(-\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i})$ sobre $V$ paralelamente al subespacio hallado en el apartado (a).

**8.23** Compruébese en cada uno de los casos siguientes que se satisface la igualdad $E = V \oplus W$ :
(a) $E = \mathbb{R}^2$ , $V = \langle(1,2)\rangle$ , $W = \{(x,y) \,:\, 2x + 3y = 0\}$ ;
(b) $E = \mathbb{R}^2$ , $V = \langle(1,2)\rangle$ , $W = \langle(-1,0)\rangle$ , con lo que podemos concluir que el suplementario de un subespacio dado no es único;
(c) $E = \mathbb{R}^3$ , $V = \{(x,x,-x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ , $W = \{(x,y,z) \,:\, x+y+z = 0\}$ ;
(d) $E = \mathbb{R}_2[x]$ , $V = \langle 5+x, 1+x^2\rangle$ , $W = \langle 2x+3\rangle$ ;
(e) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ , $V = \{$funciones pares$\}$ , $W = \{$ funciones impares$\}$ .

**8.24** Sean $F_1$, $F_2$ y $G$ subespacios de un espacio vectorial $E$ tales que $F_1 \oplus G = E = F_2 \oplus G$. Pruébese que $F_1$ y $F_2$ son isomorfos.

**8.25** Sea $E$ un $k$-espacio vectorial, con $k$ de característica distinta de 2 (esto es, en $k$ se satisface $2 := 1+1 \neq 0$), y sea $T$ un endomorfismo "involutivo" de $E$ (es decir, tal que $T^2 = I$, donde $I$ es el endomorfismo identidad de $E$; o lo que es lo mismo, $T$ es un automorfismo cuyo automorfismo inverso es $T$ ). Pruébese que los subconjuntos

$$E^+ = \{e \in E \,:\, T(e) = e\}\,, \qquad E^- = \{e \in E \,:\, T(e) = -e\}$$

son subespacios vectoriales de $E$ y que $E = E^+ \oplus E^-$.

Utilícese lo anterior para demostrar que toda función real de variable real es suma, de manera única, de una función par y una función impar. (Véase el apartado (e) de 8.23.)

**8.26** Se tiene un diagrama conmutativo de espacios vectoriales y aplicaciones lineales como el de la derecha en el que se satisfacen que las diagonales $E_1E_3E_5$ y $E_4E_3E_2$ son exactas y que $h$ y $h'$ son isomorfismos. Pruébense:
(a) $E_1 \approx \operatorname{Im} i$ (es decir, $i$ es inyectiva) y $E_4 \approx \operatorname{Im} i'$ ;
(b) $E_3 = \operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} i'$ .

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "i"'] & & E_2 \\
& E_3 \arrow[ur, "j'"'] \arrow[dr, "j"] & \\
E_4 \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "h'"'] & & E_5
\end{tikzcd}$$

**8.27** Sea $e$ un vector no nulo de un espacio vectorial $E$. Pruébese que $\langle e \rangle$ es un espacio vectorial isomorfo a $k$. Dedúzcase (usando la existencia de subespacios suplementarios) que existe una aplicación lineal $\omega : E \to k$ que satisface $\omega(e) = 1$.

**8.28** Sean $f : E \to F$ y $g : F \to E$ aplicaciones lineales tales que $f \circ g$ es un isomorfismo. Pruébese que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

**8.29** Se tiene un diagrama conmutativo de espacios vectoriales y aplicaciones lineales como el de la derecha en el que se satisface $E = i(F) + j(G)$, y en el que hemos usado la siguiente notación: $I$ es el endomorfismo identidad de $F$, $I'$ es el endomorfismo identidad de $G$, y $0$ denota las aplicaciones nulas. Pruébense:
(a) $i$ y $j$ son monomorfismos;
(b) $E = \operatorname{Im} i \oplus \operatorname{Im} j$ .

$$\begin{tikzcd}
& F & \\
F \arrow[ur, "I"] \arrow[r, "i"'] \arrow[dr, "0"'] & E \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"] & G \arrow[l, "j"'] \arrow[ul, "0"'] \arrow[dl, "I'"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

**8.30** Sean $F$ y $G$ subespacios de un espacio vectorial $E$. Si $i : F \hookrightarrow F+G$ y $j : F \cap G \hookrightarrow F$ son las inclusiones naturales y $\pi : F+G \to (F+G)/G$ es el morfismo de paso al cociente, demuéstrese que la sucesión

$$0 \longrightarrow F \cap G \xrightarrow{\ j\ } F \xrightarrow{\ \sigma\ } \frac{F+G}{G} \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\sigma = \pi \circ i$. Obténgase como consecuencia el isomorfismo

$$\frac{F}{F \cap G} \approx \frac{F+G}{G} \, .$$

**8.31** Dado un endomorfismo $f$ de un espacio vectorial $E$, pruébese que son equivalentes las siguientes afirmaciones:
(a) $f$ conmuta con todos los endomorfismos de $E$;
(b) $f$ es una homotecia.
[Indicación: Dado un vector no nulo $e \in E$, si $\omega_e : E \to k$ es una aplicación lineal tal que $\omega_e(e) = 1$ (véase el problema 8.27), entonces la aplicación $g : E \to E$ definida por la fórmula $g(v) = \omega(v)e$ $(v \in E)$ es un endomorfismo no nulo.]

**8.32** Dado el subespacio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, : \, 2x - z = 0, \ 3z + t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$, calcúlese un suplementario de $V$.

**8.33** Dado el subespacio $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \, : \, p(1) = 0\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, calcúlese un suplementario de $W$.

**8.34** **Lema de los cinco.** Se tiene un diagrama de aplicaciones entre espacios vectoriales como el siguiente

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"'] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"'] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4"] & E_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\
F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5
\end{tikzcd} \; ,$$

de modo que las filas son exactas y los cuadrados son conmutativos. Pruébense:

(a) Si $\phi_1$ es epiyectiva y $\phi_2$ y $\phi_4$ son inyectivas, entonces $\phi_3$ es inyectiva.

(b) Si $\phi_5$ es inyectiva y $\phi_2$ y $\phi_4$ son epiyectivas, entonces $\phi_3$ es epiyectiva.

(c) Si $\phi_1$ es epiyectiva, $\phi_5$ es inyectiva, y $\phi_2$ y $\phi_4$ son isomorfismos, entonces $\phi_3$ es un isomorfismo.

**8.35** Sea $F$ un subespacio de un espacio vectorial $E$. El monomorfismo natural $i : F \hookrightarrow E$ está caracterizado por la siguiente propiedad universal (esto es, una propiedad en la que intervienen todos los $k$-espacios vectoriales): Cualquiera que sea la aplicación lineal $f : \bar{E} \to E$, $f$ factoriza de modo único a través de $i$ si y sólo si $\operatorname{Im} f \subseteq F$. La propiedad es evidente y su demostración es inmediata.

Pruébese la siguiente afirmación: "Sea $j : E' \to E$ un monomorfismo de $k$-espacios vectoriales. Cualquiera que sea la aplicación lineal $f : \bar{E} \to E$, $f$ factoriza de modo único a través de $j$ si y sólo si $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} j$ ; esto es,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "j"] & E \\ & & \bar{E} \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd} \qquad \exists^{\cdot}\ g : \bar{E} \to E' \text{ tal que } f = j{\circ}g \iff \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} j \text{ ''.}$$

Como conclusión se obtiene que en todo monomorfismo el dominio puede considerarse, identificándolo con la imagen, como un subespacio del codomino (la propiedad anterior dice que se comporta como tal).

**8.36** De 4.5 se sigue que si $q : E \to F$ es un epimorfismo entonces hay un isomorfismo $E/\operatorname{Ker} q \to F$, es decir, en todo epimorfismo el codominio se identifica con un cociente del dominio, y que se comporta como tal lo dice la siguiente propiedad que se pide demostrar: "Sea $p : E \to E''$ un epimorfismo de $k$-espacios vectoriales. Cualquiera que sea la aplicación lineal $f : E \to \bar{E}$, $f$ factoriza de modo único a través de $p$ si y sólo si $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} p$; esto es,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & E'' \arrow[r] \arrow[dl, "g"] & 0 \\ \bar{E} & & \end{tikzcd} \qquad \exists^{\cdot}\ g : E'' \to \bar{E} \text{ tal que } f = g{\circ}p \iff \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} p \text{ ''.}$$

**8.37** Sea $f : E \to F$ un morfismo de espacios vectoriales. Diremos que una aplicación lineal $\sigma : F \to E$ es una *sección* de $f$ cuando $f{\circ}\sigma$ sea el endomorfismo identidad de $F$, y diremos que una aplicación lineal $\rho : F \to E$ es un *retracto* de $f$ cuando $\rho{\circ}f$ sea el endomorfismo identidad de $E$. En particular, toda sección es inyectiva y todo retracto es epiyectivo.

Pruébese que para todo epimorfismo existen secciones y que para todo monomorfismo existen retractos.

**8.38** Sea $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \longrightarrow 0$ una sucesion exacta de morfismos de espacios vectoriales. Según lo dicho en 8.35 y 8.36 podemos suponer que $E'$ es un subespacio de $E$ y que $E''$ es el cociente de $E$ por $E'$, con lo que podemos escribir $E'' = E/E'$ (véase también 7.2 (a) ). Veamos otra interpretación: Considérese una sección $\sigma : E'' \to E$ de $p$ ($\sigma$ existe porque $p$ es epiyectiva), y compruébese que se satisface la igualdad $E = i(E') \oplus \sigma(E'')$; hemos dicho que $E'$ lo identificamos con $i(E)$, y como toda sección es inyectiva también podemos identificar $E''$ con $\sigma(E)$, de modo que la anterior igualdad la podemos escribir $E = E' \oplus E''$.