# Capítulo II

# Teoría de la Dimensión

En este capítulo introduciremos una de las propiedades más importantes que tienen los espacios vectoriales: la dimensión. Dos son los modos posibles de llegar a la noción de dimensión de un espacio vectorial: uno aritmético, partiendo de las nociones de "familia libre" y "sistema de generadores" y llegando al concepto de "base" (véase el problema 3.28), y otro geométrico basado en la noción de "serie de composición", que es el que seguiremos aquí.

Fijaremos un cuerpo $k$, y todos los espacios vectoriales y aplicaciones lineales los supondremos sobre dicho cuerpo.

## 1 Dimensión de un Espacio Vectorial

**Definición 1.1** Diremos que un espacio vectorial $E$ es *de dimensión* 1, si $E \neq 0$ y no tiene otros subespacios que 0 y $E$; es decir, $E$ tiene dimensión 1 cuando $E \neq 0$ y $\langle e \rangle = E$ para todo vector no nulo $e \in E$.

Claramente, si dos espacios vectoriales son isomorfos y uno de ellos es de dimensión 1, entonces el otro también es de dimensión 1 (véase I.3.9).

**Ejemplo 1.2** Según I.2.3 (c), la dimensión de $k$ como espacio vectorial es 1.

**Lema 1.3** *Un espacio vectorial $E$ es de dimensión 1 si y sólo si es isomorfo a $k$.*

*Demostración.* Como ya hemos dicho, si $k \approx E$ entonces $E$ es de dimensión 1. Recíprocamente, supongamos que $E$ es de dimensión 1 y consideremos un vector no nulo $e \in E$; la aplicación lineal $f : k \to E$, $f(\lambda) := \lambda e$, es tal que $\operatorname{Im} f \neq 0$ y $\operatorname{Ker} f \neq k$, por lo tanto debe ser $\operatorname{Im} f = E$ y $\operatorname{Ker} f = 0$, es decir, $f$ es un isomorfismo. ∎

**Ejercicio 1.4** Si $e$ es un vector no nulo de un espacio vectorial $E$, entonces $\langle e \rangle$ es un espacio vectorial de dimensión 1. Como consecuencia, si $v$ es otro vector no nulo de $E$, entonces sólo pueden darse uno de los dos casos siguientes (que son excluyentes): $\langle e \rangle = \langle v \rangle$ ó $\langle e \rangle \cap \langle v \rangle = 0$.

**Definición 1.5** Dados un espacio vectorial $E$ y un natural $n$, llamaremos *serie de composición de longitud* $n$ en $E$ a toda sucesión creciente de subespacios de la forma

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

y tal que $E_i/E_{i-1}$ es de dimensión 1 para todo $i = 1, \ldots, n$.

**1.6** Con la notación de 1.5, como los subespacios vectoriales de $E_i/E_{i-1}$ están en correspondencia biunívoca con los subespacios de $E_i$ que contienen a $E_{i-1}$ (véase I.4.7), decir que $E_i/E_{i-1}$ es de dimensión 1 es equivalente a decir que no existen subespacios en $E$ que estén estrictamente contenidos entre $E_{i-1}$ y $E_i$; por lo tanto, una serie de composición de $E$ es una sucesión estrictamente creciente de subespacios de $E$, que comienza en 0, termina en $E$, y es "irrefinable" (esto es, no existe otra sucesión de subespacios de $E$ que comienze y termine igual, y que la contenga estrictamente como subsucesión).

**Definiciones 1.7** Diremos que un espacio vectorial no nulo es de *dimensión finita* si posee series de composición, y en caso contrario diremos que es de *dimensión infinita*.

Llamaremos *dimensión* de un espacio vectorial de dimensión finita $E$, y la denotaremos $\dim_k E$ (ó simplemente $\dim E$), al mínimo de las longitudes de todas las series de composición de $E$ (es claro que dicho mínimo existe).

El espacio vectorial trivial se considera de dimensión finita, y se define su dimensión como cero.

**Ejercicio 1.8** (a) Hemos dado dos definiciones de "espacio vectorial de dimensión finita igual a 1" (una en 1.1 y otra en 1.7). Compruébese que coinciden.

(b) Sean $E$ y $\bar{E}$ espacios vectoriales isomorfos. Teniendo en cuenta I.3.9 (c), pruébese que ó ambos tienen dimensión infinita, ó ambos tienen dimensión finita y $\dim E = \dim \bar{E}$.

**Lema 1.9** *Sea $e$ un vector no nulo de un espacio vectorial de dimensión finita $E$. Toda serie de composición en $E$ de longitud $m$ produce una serie de composición en $E/\langle e\rangle$ de longitud $m-1$. Como consecuencia se sigue que $E/\langle e\rangle$ es de dimensión finita y que $\dim(E/\langle e\rangle) < \dim E$.*

*Demostración.* Sea $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = E$ una serie de composición en $E$ de longitud $m$. Consideremos la aplicación $\pi : E \to E/\langle e\rangle$ de paso al cociente y los subespacios $F_i = \pi(E_i)$ ($i = 1, \ldots, m$), de modo que tenemos

$$0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_m = E/\langle e\rangle$$

(porque la imagen directa conserva inclusiones). Ahora, como $e$ es no nulo existe $r \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $e \notin E_{r-1}$ y $e \in E_r$. Tenemos tres posibilidades:
(i) Si $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, entonces $e \notin E_i$ y por lo tanto la restricción de $\pi$ a $E_i$, $\pi : E_i \to F_i$, es un isomorfismo (porque su núcleo es $\operatorname{Ker}\pi \cap E_i = \langle e\rangle \cap E_i = 0$). Por dicho isomorfismo el subespacio $E_{i-1}$ de $E_i$ se corresponde con el subespacio $F_{i-1}$ de $F_i$, y por lo tanto el único subespacio vectorial de $F_i$ que contiene estrictamente a $F_{i-1}$ es $F_i$; se sigue entonces que el espacio vectorial $F_i/F_{i-1}$ es de dimensión 1.
(ii) Si $i = r$, entonces $e \in E_r$ y $e \notin E_{r-1}$ y por lo tanto

$$E_{r-1} + \langle e\rangle = E_r \qquad \Rightarrow \qquad \pi(E_{r-1}) = \pi(E_r) \qquad \Rightarrow \qquad F_{r-1} = F_r\,.$$

(iii) Si $i \in \{r+1, \ldots, m\}$, entonces $E_{i-1}$ y $E_i$ son subespacio vectoriales de $E$ que contienen a $\langle e\rangle$, por lo que basta aplicar I.4.7 para concluir que el espacio vectorial $F_i/F_{i-1}$ es de dimensión 1.

De todo lo dicho se concluye que

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{r-1} = F_r \subset F_{r+1} \subset \cdots \subset F_m = E/\langle e \rangle$$

es una serie de composición en $E/\langle e \rangle$ de longitud $m-1$. ∎

**Teorema 1.10 (Teorema de la dimensión)** *Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finita. Todas las series de composición de $E$ tienen la misma longitud. En consecuencia la dimensión de $E$ es la longitud de una cualquiera de sus series de composición.*

*Demostración.* Procedamos por inducción sobre $n = \dim E$, siendo el caso $n = 1$ evidente. Supongamos $n > 1$ y sea $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = E$ una serie de composición de $E$ de longitud $m$. Por una parte, por definición tenemos que $m \geq n$; por otra parte, si $e$ es un vector no nulo de $E$, entonces de 1.9 se sigue que la serie de composición de $E$ induce una serie de composición en $E/\langle e \rangle$ de longitud $m-1$ y que $\dim(E/\langle e \rangle) \leq n-1$, de modo que aplicando la inducción obtenemos $\dim(E/\langle e \rangle) = m-1$, es decir, $m-1 \leq n-1$. De las dos desigualdades probadas se sigue la igualdad $m = n$. ∎

**1.11** Si $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$ es una serie de composición de un espacio vectorial $E$, entonces es claro que cada $E_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ es un espacio vectorial de dimensión $i$, de lo que se sigue fácilmente el carácter geométrico de las series de composición al que hemos aludido al comienzo de este capítulo: si (en lenguaje geométrico) a los espacios vectoriales de dimensión cero los llamamos "puntos", a los de dimensión uno los llamamos "rectas", a los de dimensión dos los llamamos "planos", ..., entonces, que un espacio vectorial $F$ tenga dimensión 3 significa que en él existe una cadena irrefinable de subespacios, $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3$, de manera que $F_0$ es un punto, $F_1$ es una recta, $F_2$ es un plano y $F_3 = F$.

**Teorema 1.12 (Aditividad de la dimensión)** *Si $0 \to E' \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} E'' \to 0$ es una sucesión exacta de aplicaciones lineales, entonces $E$ es de dimensión finita si y sólo si $E'$ y $E''$ lo son, en cuyo caso se satisface*

$$\dim E = \dim E' + \dim E'' .$$

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que $E'$ y $E''$ son de dimensión finita, y sean $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_m = E'$ y $0 = E''_0 \subset E''_1 \subset \cdots \subset E''_s = E''$ series de composición de $E'$ y $E''$, respectivamente ($\dim E' = m$, $\dim E'' = s$). Por una parte, como $j : E' \to j(E')$ es un isomorfismo, $0 = j(E'_0) \subset j(E'_1) \subset \cdots \subset j(E'_m) = j(E')$ es una serie de composición de $j(E')$. Por otra parte, tomando imagen inversa por $p$ obtenemos un isomorfismo de conjuntos ordenados entre $\{$subespacios de $E''\}$ y $\{$subespacios de $E$ que contienen a $\operatorname{Ker} p\}$, por lo tanto $\operatorname{Ker} p = p^{-1}(E''_0) \subset p^{-1}(E''_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(E''_s) = E$ es una sucesión estrictamente creciente e irrefinable de subespacios de $E$. Por último, como $j(E') = \operatorname{Ker} p$, de todo lo dicho se sigue que

$$0 = j(E'_0) \subset j(E'_1) \subset \cdots \subset j(E'_m) \subset p^{-1}(E''_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(E''_s) = E$$

es una serie de composición de $E$ de longitud $m+s$, es decir $E$ tiene dimensión finita y $\dim E = m + s = \dim E' + \dim E''$.

Supongamos ahora que $E$ tiene dimensión finita y probemos, por inducción sobre $n = \dim E$, que $E'$ y $E''$ tienen dimensión finita, siendo el caso $n = 1$ evidente (compruébese).

Si $j$ es un isomorfismo, entonces $E'$ es de dimensión finita (igual a la de $E$); si $j$ no es un isomorfismo, entonces existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $e \notin j(E')$, de modo que la composición $E' \xrightarrow{j} E \to E/\langle e \rangle$ es inyectiva (compruébese); como (según 1.9) $\dim(E/\langle e \rangle) < n$, podemos aplicar la inducción para concluir que $E'$ tiene dimensión finita.

Ahora, si $p$ es un isomorfismo, entonces $E''$ tiene dimensión finita; si $p$ no es un isomorfismo, entonces existe un vector no nulo $e \in \operatorname{Ker} p$ y (según I.4.5) $p$ induce una aplicación lineal $E/\langle e \rangle \to E''$ que es epiyectiva; aplicando de nuevo la inducción obtenemos que $E''$ es de dimensión finita. ∎

**1.13 (Fórmulas de dimensión)** Véanse en los ejemplos I.7.2 cómo están definidas las sucesiones exactas que usaremos a continuación.

(a) Dados espacios vectoriales $E_1$ y $E_2$, el espacio vectorial $E_1 \times E_2$ es de dimensión finita si y sólo si $E_1$ y $E_2$ son de dimensión finita, en cuyo caso tenemos $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$. Basta aplicar 1.12 a la sucesión exacta

$$0 \to E_1 \xrightarrow{s_1} E_1 \times E_2 \xrightarrow{p_2} E_2 \to 0 .$$

En general, dados espacios vectoriales $E_1, \dots, E_n$ tenemos que la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & E_1 & \xrightarrow{s_1} & E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_2 \times \cdots \times E_n & \to & 0 \\ & & & & (e_1, e_2, \dots, e_n) & \longmapsto & (e_2, \dots, e_n) & & \end{array}$$

es exacta y por lo tanto $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim E_1 + \dim(E_2 \times \cdots \times E_n)$; aplicando la última igualdad reiteradamente obtenemos

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n .$$

En particular se satisface $\dim k^n = n$.

(b) Si $E_1$ y $E_2$ son subespacios de un espacio vectorial $E$, entonces $E_1$ y $E_2$ son de dimensión finita si y sólo si $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son de dimensión finita, en cuyo caso se satisface

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) .$$

La afirmación se sigue de la exactitud de la sucesión

$$0 \to E_1 \cap E_2 \to E_1 \times E_2 \to E_1 + E_2 \to 0 .$$

En particular, los subespacios $E_1$ y $E_2$ están en suma directa si y sólo si $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

(c) Si $E'$ es un subespacio de un espacio vetorial $E$, entonces $E$ es de dimensión finita si y sólo si $E'$ y $E/E'$ son de dimensión finita, en cuyo caso se satisface

$$\dim(E/E') = \dim E - \dim E' .$$

Se obtiene de la sucesión exacta

$$0 \to E' \hookrightarrow E \to E/E' \to 0 .$$

(d) Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal. Si $E$ es de dimensión finita, entonces $\operatorname{Im} T$ es de dimensión finita y se satisface

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T\,.$$

Basta tener en cuenta la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker} T \hookrightarrow E \xrightarrow{T} \operatorname{Im} T \to 0\,.$$

**1.14** Una consecuencia importante de la fórmula dada en 1.13 (c) es la siguiente: si $E$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $E'$ es un subespacio suyo, entonces $E' = E$ si y sólo si $\dim E = \dim E'$ (porque $E' = E$ si y sólo si $E/E' = 0$).

**Ejercicio 1.15** Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal con $\dim E = \dim \bar{E}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones: (i) $T$ es inyectiva; (ii) $T$ es biyectiva; (iii) $T$ es epiyectiva.

## 2 Bases en un Espacio Vectorial

**Definiciones 2.1** Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una familia de vectores de un espacio vectorial $E$ y consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : k^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\,. \end{array}$$

Diremos que la familia $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un *sistema de generadores* de $E$ cuando la aplicación $\Lambda$ sea epiyectiva, y diremos que la familia $\{e_1, \dots, e_n\}$ es *linealmente independiente* (ó *libre*) cuando la aplicación $\Lambda$ sea inyectiva. Por último, diremos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una *base* de $E$ cuando sea una familia libre y un sistema de generadores de $E$, es decir, cuando $\Lambda$ sea un isomorfismo. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $E$, entonces, dado un vector $e \in E$ existe una única $n$-upla de escalares $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$ que satisface $e = \Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, y diremos que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son las *coordenadas* del vector $e$ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

**2.2** Por una parte, que la familia $\{e_1, \dots, e_n\}$ sea libre significa que si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ tales que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ entonces debe ser $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, es decir, que los subespacios $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ no son nulos y están en suma directa (véanse I.2.3 (g) y I.6.2; nótese que si álguno de los vectores de la familia es nulo entonces dicha familia no es libre).

Por otra parte es claro que $\operatorname{Im} \Lambda = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, y por lo tanto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un sistema de generadores de $E$ cuando $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle e_1 \rangle + \cdots + \langle e_n \rangle$.

Concluimos entonces que la familia $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $E$ si y sólo si ninguno de sus vectores es nulo y $E = \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n \rangle$.

**Ejercicio 2.3** Sea $E$ un espacio vectorial y sean $e_1, \dots, e_n \in E$. Pruébense que la familia $\{e_1, \dots, e_n\}$ es libre si y sólo si ningún vector de ella puede expresarse como combinación lineal del resto.

**Ejercicio 2.4** Consideremos la familia de vectores $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... , $u_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ de $k^n$. Pruébese que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base que llamaremos *base usual* de $k^n$.

La base $\{(1,0),(0,1)\}$ de $k^2$ es un caso particular del siguiente ejemplo: Si $\{e_1,\dots,e_m\}$ es una base de un espacio vectorial $E_1$ y $\{v_1,\dots,v_s\}$ es una base de otro espacio vectorial $E_2$, entonces la familia de vectores $\{(e_1,0),\dots,(e_m,0),(0,v_1),\dots,(0,v_s)\}$ es una base de $E_1\times E_2$.

**Teorema 2.5 (Teorema de la base)** *Un espacio vectorial es de dimensión finita $n$ si y sólo si tiene una base con $n$ vectores. En consecuencia, todas las bases finitas de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores, y dicho número es la dimensión del espacio.*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que $E$ es un espacio vectorial de dimensión finita $n$ y consideremos una serie de composición suya:

$$0=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=E\,.$$

Sea $e_1\in E_1$ tal que $e_1\neq 0$; entonces debe ser $E_1=\langle e_1\rangle$, ya que de lo contrario tendríamos $E_0\subset\langle e_1\rangle\subset E_1$, lo cual no puede ser. Análogamente, sea $e_2\in E_2$ tal que $e_2\notin E_1$; entonces debe ser $E_2=E_1+\langle e_2\rangle=\langle e_1\rangle+\langle e_2\rangle$ porque entre $E_1$ y $E_2$ no hay subespacios intermedios. En general, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ sea $e_i\in E_i$ tal que $e_i\notin E_{i-1}$, de modo que debe satisfacerse $E_i=E_{i-1}+\langle e_i\rangle$ y por lo tanto

$$E_1=\langle e_1\rangle\,,\ \dots\,,\ E_i=\langle e_1,\dots e_i\rangle\,,\ \dots\,,\ E_n=\langle e_1,\dots e_n\rangle\,;$$

en particular $E=\langle e_1,\dots e_n\rangle$, es decir, $\{e_1,\dots,e_n\}$ es un sistema de generadores de $E$. Para probar que $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de $E$ veamos que los subespacios $\langle e_1\rangle,\dots,\langle e_n\rangle$ están en suma directa, para lo cual usaremos el criterio dado en I.6.3: si para un índice $i$ se satisface $\langle e_1,\dots e_{i-1}\rangle\cap\langle e_i\rangle\neq 0$, entonces $e_i\in\langle e_1,\dots e_{i-1}\rangle$, es decir, $E_{i-1}=E_i$, lo cual no puede ser.

Recíprocamente, supongamos ahora que $E$ tiene una base $\{e_1,\dots,e_n\}$. Entonces $E=\langle e_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle e_n\rangle$ (véase 2.2), y basta tener en cuenta lo dicho en 1.13 (a) para obtener

$$\dim E=\dim\langle e_1\rangle+\cdots+\dim\langle e_n\rangle=n\,,$$

ya que cada subespacio $\langle e_i\rangle$ tiene dimensión 1 (véase 1.4). ∎

**Corolario 2.6** *Un espacio vectorial es de dimensión finita $n$ si y sólo si es isomorfo a $k^n$. Como consecuencia, dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

**Ejercicio 2.7** Sean $E$ y $\bar E$ espacios vectoriales tales que $E$ es de dimensión finita $n$. Cualquiera que sea la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de $E$ y cualquiera que sea la familia $\{v_1,\dots,v_n\}$ de vectores de $\bar E$, existe una única aplicación lineal $T:E\to\bar E$ que satisface: $T(e_1)=v_1$ , $T(e_2)=v_2$ , $\dots$ , $T(e_n)=v_n$ .

**Ejercicio 2.8** Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una familia de vectores de un espacio vectorial $E$ (de dimensión finita ó infinita); el subespacio generado por dicha familia es de dimensión finita y $\dim\langle e_1,\dots,e_n\rangle\leq n$; además, $\dim\langle e_1,\dots,e_n\rangle=n$ si y sólo si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es libre.

**Proposición 2.9** *Sean $e_1,\dots,e_r$ vectores de un espacio vectorial $E$ de dimensión finita $n$.*

(i) *Si* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *es libre entonces necesariamente debe ser* $r \leq n$. *Además, si* $r = n$ *entonces* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *es base de* $E$, *y si* $r < n$ *entonces existen vectores* $e_{r+1}, \ldots, e_n$ *en* $E$ *tales que* $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ *es base de* $E$.

(ii) *Si* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *es un sistema de generadores de* $E$ *entonces se satisface* $r \geq n$. *Además, si* $r = n$ *entonces* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *es base de* $E$, *y si* $r > n$ *entonces de la familia* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *puede extraerse una base de* $E$.

*Demostración.* Se deja como ejercicio (utilízense 1.14, 2.3 y 2.8). ∎

**2.10** Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finita $n$ y sea $E'$ un subespacio suyo. En este caso podemos dar una demostración de la existencia de subespacios suplementarios de $E'$ sin hacer uso del lema de Zorn (véase I.6.8): si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ es una base de $E'$ ($\dim E' = r \leq n$), entonces $\{e_1, \ldots, e_r\}$ es una familia libre en $E$ y por lo tanto podemos ampliarla a una base de $E$ con vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n \in E$; es claro que $E = E' \oplus \langle e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle$.

**Definición 2.11** Dados vectores $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio vectorial $E$, llamaremos *rango de la familia* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la dimensión del subespacio vectorial de $E$ generado por dicha familia: $\mathrm{rg}\{e_1, \ldots, e_n\} := \dim\langle e_1, \ldots, e_n \rangle \leq n$.

Si $T : E \to \bar{E}$ es una aplicación lineal tal que $E$ es de dimensión finita, entonces se define el *rango de la aplicación lineal* $T$ como la dimensión de la imagen de $T$: $\mathrm{rg}\, T := \dim(\mathrm{Im}\, T)$ ($\leq \dim E$). Dado un sistema de generadores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $E$, es fácil comprobar que $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}\, T$ y por lo tanto se satisface

$$\mathrm{rg}\, T = \dim(\mathrm{Im}\, T) = \dim\langle T(e_1), \ldots, T(e_n) \rangle = \mathrm{rg}\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}\,.$$

**Ejercicio 2.12** Para una aplicación lineal $T : E \to \bar{E}$ pruébese que son equivalentes las siguientes afirmaciones: (i) $T$ es inyectiva; (ii) $T$ manda familias libres a familias libres (esto es, para toda familia libre $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $E$, $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ es una familia libre de $\bar{E}$); (iii) $T$ conserva los rangos (es decir, para toda familia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de vectores de $E$ se satisface: $\mathrm{rg}\{e_1, \ldots, e_n\} = \mathrm{rg}\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$).

# 3 Problemas

**3.1** Demuéstrese que la familia $\{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Pruébese también que $\{2 + x, 3x + x^2, 1 + 2x^2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

**3.2** Sea $E$, $F$ y $G$ espacios vectoriales de dimensión finita, y sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ aplicaciones lineales. Demuéstrese la relación

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = \dim(\mathrm{Im}\, f) - \dim(\mathrm{Im}\ g \circ f)\,.$$

**3.3** En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios:

$$E_1 = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,3,1,3) \rangle\,, \qquad E_2 = \langle (1,2,0,2), (1,2,1,2), (3,1,3,1) \rangle\,.$$

Calcúlense las dimensiones de $E_1$, $E_2$, $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.

**3.4** Hállense sistemas de generadores de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
(a) $F_1 = \{(\lambda, 2\lambda, 4\lambda) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$;
(b) $F_2 = \{(x+2y, -x+y, y-x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$;
(c) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y-z = 0\}$.

**3.5** Hállense sistemas de generadores de los siguientes subespacios de $\mathbb{C}^3$:
(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, (2-\mathrm{i})x - y = (e+\mathrm{i})z\}$;
(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, 2\mathrm{i}x - (3-\mathrm{i})y = z - (2+\mathrm{i})x = y + (1-\mathrm{i})z\}$.

**3.6** Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una familia libre de vectores de un espacio vectorial $E$. Dados escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, pruébese que la familia $\{e_1 - \alpha_1 e_n, e_2 - \alpha_2 e_n, \dots, e_{n-1} - \alpha_{n-1} e_n\}$ también es libre.

**3.7** ¿Para qué valores de $a$ los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^3$?:
(a) $\{(a, 1, 0), (1, a, 0), (0, 1, a)\}$;
(b) $\{(1+a, 1, 1), (1, 1+a, 1), (1, 1, 1+a)\}$.

**3.8** Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base suya. Pruébense:
(a) $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \dots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$ es base de $E$;
(b) para cualquier vector no nulo $e \in E$ existe un índice $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\{e_1, \dots, e_{i-1}, e, e_{i+1}, \dots, e_n\}$ es base de $E$.

**3.9** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido como $T(x, y, z) = (x+y+z, x+2y, z-y)$. Se pide hallar $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ y bases de estos subespacios. Pregunta análoga para el endomorfismo $T^2$.

**3.10** Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un espacio vectorial $E$ y sea $T$ un endomorfismo de $E$ tal que $T(e_1) = e_1 + e_2$, $T(e_3) = e_3$ y $\operatorname{Ker} T = \langle e_1 + e_2 \rangle$. Calcúlense $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Im} T^2$ y $\operatorname{Ker} T^2$.

**3.11** Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un espacio vectorial $E$. Hállese una base del espacio vectorial $E/F$, donde $u = 4e_1 + e_3$, $v = e_1 + 3e_2$ y $F = \langle u, v \rangle$.

**3.12** Sean $E$ y $F$ espacios vectoriales con $E$ de dimensión finita. Dados subespacios vectoriales $V$ de $E$ y $W$ de $F$ tales que $\dim V + \dim W = \dim E$, demuéstrese que existe una aplicación lineal $T : E \to F$ tal que $\operatorname{Ker} T = V$ e $\operatorname{Im} T = W$.

**3.13** Póngase un ejemplo de aplicación lineal inyectiva $T : E \to F$ para la que exista una base $B$ de $E$ tal que $T(B)$ no sea base de $F$.

**3.14** Póngase un ejemplo de aplicación lineal epiyectiva $T : E \to F$ para la que exista una base $B$ de $E$ tal que $T(B)$ no sea base de $F$.

**3.15** Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base suya. Dados vectores $v_1, \dots, v_r \in E$, $r \leq n$, demuéstrese que la familia $\{v_1, \dots, v_r\}$ es libre si y sólo si existe un automorfismo $f$ de $E$ satisfaciendo $f(e_i) = v_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

**3.16** Dado un subespacio $F$ de un espacio vectorial $E$, estúdiese la relación existente entre las familias libres de $E$ y las de $E/F$. Hágase el mismo estudio con los sistemas de generadores.

**3.17** Sea $E$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita (mayor que cero) para el que existe un endomorfismo $f$ tal que $f^2 = -I$ ( = "menos la identidad"). Pruébense:

(a) $f$ es un automorfismo;

(b) para cada vector no nulo $e$ de $E$, $e$ y $f(e)$ son linealmante independientes;

(c) si $e, v \in E$ son tales que $e$, $f(e)$ y $v$ son linealmente independientes, entonces $\{e, f(e), v, f(v)\}$ es una familia libre;

(d) la dimensión de $E$ es par;

(e) $E$ admite una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$.

**3.18** Sea $E$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita $n$ (mayor que cero). Pruébese que $E$ admite una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita igual a $2n$, y que para dicha estructura existe un endomorfismo $f$ tal que $f^2 = -I$.

**3.19** Sean $f : E \to \bar{E}$, $g : E \to \bar{E}$ aplicaciones lineales tales que $\dim E = n$, $\dim \bar{E} = m$, $\operatorname{rg} f = r$ y $\operatorname{rg} g = s$. Demuéstrense:

(a) si $F$ es un subespacio de $E$ de dimensión $p$ y tal que $\dim(F \cap \operatorname{Ker} f) = d$, entonces $f(F)$ es un subespacio de $\bar{E}$ de dimensión $p - d$;

(b) si $\bar{F}$ es un subespacio de $\bar{E}$ tal que $\dim(\bar{F} \cap \operatorname{Im} f) = q$, entonces $f^{-1}(\bar{F})$ es un subespacio de $E$ de dimensión $n + q - r$;

(c) $|r - s| \leq \dim[\operatorname{Im}(f \circ g)] \leq \inf\{n, m, r + s\}$.

**3.20** Considérese la aplicación $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $T(p(x)) = (p(1), p'(1))$ ($p'(x)$ es la derivada del polinomio $p(x)$).

(a) Demuéstrese que $T$ es lineal.

(b) Sin hacer ningún cálculo, ¿puede decirse si $T$ es ó no inyectiva?

(c) Calcúlense $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

**3.21** Considérese la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(a, b) = (3a - b, 2a + b, b))$.

(a) Demuéstrese que $T$ es lineal.

(b) Sin hacer ningún cálculo, ¿puede decirse si $T$ es ó no epiyectiva?

(c) Calcúlense $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

**3.22** Una colección infinita de vectores de un espacio vectorial se dice que es libre si lo es toda subcolección finita suya. Estúdiese si son libres las siguientes colecciones de vectores:

(a) $\{1, 1 + x, \dots, 1 + x + \cdots + x^n, \dots\}$ en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$;

(b) $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \operatorname{sen} nx, \dots\}$ en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**3.23** Dado un espacio vectorial $E$, pruébese que son equivalentes:

(a) $E$ es de dimensión infinita;

(b) existe en $E$ una familia infinita de vectores que es libre;

(c) existen en $E$ familias libres finitas con un número de vectores tan grande como se quiera.

**3.24** Pruébese que los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión infinita:

(a) $\mathbb{R}^\infty = \{$sucesiones de números reales$\}$;

(b) $c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$;

(c) $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$.

**3.25** Dado un endomorfismo $f$ de un espacio vectorial $E$ de dimensión finita, pruébese que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$;

(b) $\dim E$ es par, $f^2 = 0$ y $\operatorname{rg} f = \frac{1}{2}\dim E$.

**3.26** Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión $n$ y sea $f \in \operatorname{End}_k(E)$ tal que $f^{n-1} \neq 0$ y $f^n = 0$. Demuéstrese que existe $e \in E$ tal que $\{e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e)\}$ es base de $E$. Calcúlense el núcleo y la imagen de $f$.

**3.27** Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finta y sea $f \in \operatorname{End}_k(E)$. Pruébese que para todo $m \in \mathbb{N}$ se satisfacen $\operatorname{Ker} f^m \subseteq \operatorname{Ker} f^{m+1}$ e $\operatorname{Im} f^m \supseteq \operatorname{Im} f^{m+1}$. Además, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p = 0$, y $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^m$ e $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^m$ cuando $m \geq p$.

**3.28** Veamos en este problema cómo llegar al concepto de dimensión partiendo de la noción de base (sin hacer uso de las series de composición). Para ello ignoraremos todo lo dicho en este capítulo salvo las definiciones y observaciones dadas en 2.1, 2.2 y 2.3.

Sea $E$ un espacio vectorial, $E \neq 0$, y sean $e_1, \dots, e_n \in E$. Pruébense:

(a) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es libre y $v \in E$ tal que $v \notin \langle e_1, \dots, e_n\rangle$, entonces $\{v, e_1, \dots, e_n\}$ es libre; esto es, si una familia de vectores de $E$ es libre y no genera a $E$, entonces puede ampliarse a una familia libre más grande.

(b) Si $e_1 \in \langle e_2, \dots, e_n\rangle$, entonces $\langle e_1, e_2, \dots, e_n\rangle = \langle e_2, \dots, e_n\rangle$; esto es, si un sistema de generadores de $E$ no es libre, entonces se puede extraer de él un sistema de generadores más pequeño; como consecuencia, de todo sistema de generadores de $E$ se puede extraer una base.

(c) (Teorema de Steinitz) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $E$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una familia libre de $E$, entonces se pueden sustituir $m$ vectores de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ por $v_1, \dots, v_m$ obteniéndose una nueva base. En particular $m \leq n$.

Diremos que $E$ es de "dimensión finita" si es finito generado (se decir, si en $E$ existen sistemas de generadores), y en caso contrario diremos que $E$ es de "dimensión infinita".

Supongamos que $E$ es de dimensión finita (recordemos que $E \neq 0$; el espacio vectorial trivial se considera de dimensión finita y se define su dimensión como cero). Según (b) tenemos que en $E$ existen bases, y del Teorema de Steinitz se sigue fácilmente que todas las bases de $E$ tienen igual número de vectores; por lo tanto podemos definir la "dimensión" de $E$ como el número de vectores de una cualquiera de sus bases. Por último, del apartado (a) y del Teorema de Steinitz se obtiene que toda familia libre de $E$ puede extenderse a una base.