Capítulo III

Espacios de Homomorfismos y su Representación en Coordenadas

Fijemos un cuerpo k en todo el capítulo.

1 El Espacio Vectorial de los Homomorfismos

Dados espacios vectoriales E y $\bar{E}$, denotemos por $\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de E en $\bar{E}$. Veamos que las estructuras de espacio vectorial de E y $\bar{E}$ definen de forma natural una estructura de k-espacio vectorial sobre $\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})$. En efecto tenemos las siguientes definiciones de "suma" y "producto por escalares":

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})\times\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E}) & \xrightarrow{+} & \operatorname{Hom}_k(E,\bar{E}) \\ (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}\quad, \qquad \begin{array}{rcl} k\times\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E}) & \xrightarrow{\cdot} & \operatorname{Hom}_k(E,\bar{E}) \\ (\lambda,f) & \mapsto & \lambda\cdot f \end{array}$$

donde $f+g$ y $\lambda\cdot f$ son las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} E & \xrightarrow{f+g} & \bar{E} \\ e & \longmapsto & (f+g)(e):=f(e)+g(e) \end{array}\ , \qquad \begin{array}{rcl} E & \xrightarrow{\lambda\cdot f} & \bar{E} \\ e & \longmapsto & (\lambda\cdot f)(e):=\lambda f(e) \end{array}$$

que son lineales (compruébese). Es fácil comprobar que $(\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E}),+)$ es un grupo abeliano y que el producto por escalares definido sobre él lo dota de estructura de k-espacio vectorial (compruébese).

Definición 1.1 El espacio vectorial $\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})$ que acabamos de construir lo llamaremos *espacio vectorial de los homomorfismos de E en $\bar{E}$*.

Ejemplos 1.2 Sea E un espacio vectorial.

(a) Se satisface $\operatorname{Hom}_k(k,E)\approx E$. En efecto, como 1 es base de k, una aplicación lineal de k en E queda determinada por la imagen de 1 (es decir, dar una aplicación lineal de k en E es dar un vector de E, que será la imagen de 1), y la siguiente aplicación es un isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_k(k,E) & \xrightarrow{\approx} & E \\ T & \longmapsto & T(1)\,. \end{array}$$

(b) El espacio vectorial $\mathrm{Hom}_k(E,k)$ se denota E^* y se denomina "espacio dual de E"; los vectores de E^* se llaman "formas lineales" sobre E. Dedicaremos el próximo capítulo al estudio de las formas lineales sobre un espacio vectorial.

(c) El espacio vectorial $\mathrm{Hom}_k(E,E)$ de los endomorfismos de E se denota $\mathrm{End}_k(E)$. Los endomorfismos tienen una estructura más rica que la de espacio vectorial, ya que tenemos para ellos otra operación: la composición de endomorfismos,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}_k(E)\times\mathrm{End}_k(E) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{End}_k(E) \\ (f,g) & \longmapsto & f\circ g\ . \end{array}$$

Es sencillo comprobar que $(\mathrm{End}_k(E),+,\cdot_k,\circ)$ es una *k-álgebra (eventualmente no conmutativa) con unidad*, es decir,

(i) $(\mathrm{End}_k(E),+,\cdot_k)$ es un k-espacio vectorial;

(ii) $(\mathrm{End}_k(E),+,\circ)$ es un anillo (eventualmente no conmutativo) con unidad (el elemento unitario para el producto "$\circ$" es el endomorfismo identidad de E);

(iii) los dos productos "$\cdot$" y "$\circ$" son compatibles en el siguiente sentido: la aplicación $k\to\mathrm{End}_k(E)$ que a cada $\lambda\in k$ le asocia la homotecia de razón λ, $h_\lambda\in\mathrm{End}_k(E)$, es un morfismo inyectivo de anillos con unidad, de modo que, identificando k con su imagen dentro de $\mathrm{End}_k(E)$ (esto es, identificando cada escalar λ con la homotecia h_λ) podemos suponer que k es un subanillo de $\mathrm{End}_k(E)$. En consecuencia, fijados $\lambda\in k$ y $f\in\mathrm{End}_k(E)$ tenemos dos modos de multiplicar λ y f, y ambos coinciden: $\lambda\cdot f=h_\lambda\circ f$; es decir, hacer el producto del escalar λ por el vector f (como espacio vectorial) coincide con hacer el producto en el anillo $\mathrm{End}_k(E)$ identificando λ con h_λ.

El grupo multiplicativo del anillo $\mathrm{End}_k(E)$ (esto es, los elementos de $\mathrm{End}_k(E)$ que tienen inverso para la composición) es el grupo de los automorfismos de E, que lo denotaremos $\mathrm{Aut}_k(E)$.

2 Matrices. Representación en Coordenadas

Definiciones 2.1 Dados enteros positivos m y n, llamaremos *matriz de tipo $m\times n$* (ó *matriz de m filas y n columnas*) con coeficientes en k, a toda aplicación A definida en el conjunto producto $\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$ y valorada en k,

$$\begin{array}{rcl} \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} & \xrightarrow{A} & k \\ (i,j) & \longmapsto & A(i,j)\,. \end{array}$$

El conjunto de todas las matrices de tipo $m\times n$ con coeficientes en k lo denotaremos $M_{m\times n}(k)$, y es fácil comprobar que es un espacio vectorial sobre k con la siguiente suma y el siguiente producto por escalares: dadas $A,B\in M_{m\times n}(k)$ y dado $\lambda\in k$,

$$\left.\begin{array}{r} (A+B)(i,j):=A(i,j)+B(i,j)\ , \\ (\lambda\cdot A)(i,j):=\lambda A(i,j)\ , \end{array}\right.\qquad \forall\ (i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\,;$$

el espacio vectorial $M_{m\times n}(k)$ obtenido se denomina *espacio vectorial de las matrices de tipo $m\times n$ con coeficientes en k*.

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(k)$ y dado $(i,j) \in \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$, el escalar $A(i,j)$ se denomina *término* (i,j) de A; es usual denotar el escalar $A(i,j)$ por a_{ij} y escribir la matriz A en la forma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dado $j \in \{1,\dots,n\}$, la matriz $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(k)$ se denomina *columna j-ésima* de A, y dado $i \in \{1,\dots,m\}$, la matriz $(a_{i1}, a_{i2},\dots,a_{in}) \in M_{1\times n}(k)$ se llama *fila i-ésima* de A.

Ejercicio 2.2 Pruébese que se satisface $\dim(M_{m\times n}(k)) = mn$. Concretamente, pruébese que la familia de matrices $\{A_{ij}\}_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n} \subset M_{m\times n}(k)$ forman una base de $M_{m\times n}(k)$, siendo

$$A_{ij}(l,h) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } (l,h) \neq (i,j)\,, \\ 1\,, & \text{si } (l,h) = (i,j)\,. \end{cases}$$

Por ejemplo, una base de $M_{2\times 3}(k)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definición 2.3 Sean E y $\bar{E}$ espacios vectoriales tales que $\dim E = n$ y $\dim \bar{E} = m$, y sean $\{e_1,\dots,e_n\}$ y $\{v_1,\dots,v_m\}$ bases de E y $\bar{E}$, respectivamente. Dada $T \in \operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})$, se define la *matriz asociada a T respecto de las bases $\{e_1,\dots,e_n\}$ y $\{v_1,\dots,v_m\}$*, como la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ determinada por las condiciones

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\,, \qquad (j = 1,\dots,n)\,;$$

es decir, A es la matriz cuya columna j-ésima son las coordenadas del vector $T(e_j)$ en la base $\{v_1,\dots,v_m\}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} T(e_1) & \dots & T(e_n) \end{array} \\ A \;=\; & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{array}. \end{array}$$

Teorema 2.4 *Con las notaciones e hipótesis de 2.3, se satisface que la aplicación $\phi : \operatorname{Hom}_k(E,\bar{E}) \to M_{m\times n}(k)$ que hace corresponder a cada aplicación lineal $T : E \to \bar{E}$ su matriz asociada en las bases $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E y $\{v_1,\dots,v_m\}$ de $\bar{E}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como consecuencia se obtiene que el espacio vectorial $\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})$ es de dimensión finita y que $\dim(\operatorname{Hom}_k(E,\bar{E})) = mn$.*

Demostración. La aplicación ϕ es lineal, ya que dadas $T, T' \in \operatorname{Hom}_k(E, \bar{E})$ y dado $j \in \{1, \dots, n\}$, si $T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$ y $T'(e_j) = \sum_{i=1}^m a'_{ij} v_i$, entonces

$$(T + T')(e_j) = T(e_j) + T'(e_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + a'_{ij}) v_i \,,$$

es decir, el término (i, j) de la matriz asociada a $T + T'$ es igual a la suma del término (i, j) de la matriz asociada a T y el témino (i, j) de la matriz asociada a T'. Igual se prueba que ϕ es compatible con el producto por escalares.

Es claro que ϕ es inyectiva, ya que si T es una aplicación lineal de E en $\bar{E}$ tal que su matriz asociada en las bases fijadas es la matriz nula (todos sus términos son iguales a cero), entonces T es la aplicación nula.

Por último veamos que ϕ es epiyectiva: Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ y para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ denotemos $u_j = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{mj} v_m$; si T es la única aplicación lineal de E en $\bar{E}$ que satisface $T(e_1) = u_1 , \dots , T(e_n) = u_n$ (véase II.2.7), entonces es claro que la matriz de T en las bases fijadas es A, es decir, $\phi(T) = A$. ∎

2.5 Siguiendo con la notación de 2.3, es fácil ver que una base de $\operatorname{Hom}_k(E, \bar{E})$ es la familia de aplicaciones lineales $\{f_{ij}\}_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ determinadas por las condiciones

$$f_{ij}(e_h) = \delta_{jh}\, v_i \,, \qquad i = 1, \dots, m \,, \qquad j, h = 1, \dots, n \,,$$

donde δ_{jh} es el "símbolo de Kroenecker" ó "delta de Kroenecker", que vale

$$\delta_{jh} = \begin{cases} 0 \,, & \text{si } h \neq j \,, \\ 1 \,, & \text{si } h = j \,. \end{cases}$$

Obsérvese que la matriz de f_{ij} en las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ es la matriz A_{ij} definida en el ejercicico 2.2, es decir, la base $\{f_{ij}\}_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ de $\operatorname{Hom}_k(E, \bar{E})$ se corresponde por el isomorfismo ϕ con la base $\{A_{ij}\}_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ de $M_{m\times n}(k)$.

Definición 2.6 Sean E, F y G espacios vectoriales de dimensión finita, y sean $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ y $\{u_1, \dots, u_p\}$ bases de E, F y G, respectivamante ($n = \dim E$, $m = \dim F$, $p = \dim G$). Consideremos aplicaciones lineales $T : E \to F$ y $T' : F \to G$, y sean $A = (a_{ij}) \in M_{p\times m}(k)$ la matriz de T' en las bases de F y G, y $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ la matriz de T en las bases de E y F.

Vamos a definir el producto de las matrices A y B de modo que $A \cdot B$ sea la matriz de la aplicación lineal composición $T' \circ T$ en las bases de E y G: Sea $A \cdot B = (c_{ij}) \in M_{p\times n}(k)$ la matriz de $T' \circ T$ en las bases de E y G; por una parte

$$(T' \circ T)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij} u_i \,, \tag{2.1}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} (T' \circ T)(e_j) &= T'(T(e_j)) = T'\Big(\sum_{h=1}^{m} b_{hj} v_h \Big) = \sum_{h=1}^{m} b_{hj} T'(v_h) \\ &= \sum_{h=1}^{m} \Big(b_{hj} \sum_{i=1}^{p} a_{ih} u_i \Big) = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{h=1}^{m} a_{ih} b_{hj} \Big) u_i \,; \end{aligned} \tag{2.2}$$

comparando (2.1) y (2.2) obtenemos

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{m} a_{ih} b_{hj}\,, \qquad\qquad i = 1, \dots, p\,, \qquad j = 1, \dots, n\,.$$

En resumen: *el producto de dos matrices está definido sólo cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda, en cuyo caso, si A es una matriz de tipo $p \times m$ y B es una matriz de tipo $m \times n$, entonces el producto $A \cdot B$ es la matriz de tipo $p \times n$ cuyo término (i, j) es igual a la suma de los productos de los elementos de la fila i-ésima de A por sus correspondientes de la columna j-ésima de B; por esta razón se dice que el producto de matrices se efectua multiplicando filas por columnas.*

Esta definición, aunque parezca un poco artificiosa, es la buena, ya que está dada para que se satisfaga lo que acabamos de probar, a saber: que la composición de aplicaciones se corresponda con el producto de matrices. Como consecuencia, el producto de matrices goza de las mismas propiedades que la composición de aplicaciones; por ejemplo, es asociativo y es distributivo respecto de la suma.

2.7 Supongamos que $A = (a_{ij})$ es la matriz de la aplicación lineal $T : E \to \bar{E}$ en las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $\bar{E}$. La definición dada de producto de matrices nos permite calcular, a partir de A, la imagen de los vectores de E por la aplicación T: dado $e \in E$, si $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de e en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $(y_1, \dots, y_m)$ son las coordenadas de $T(e)$ en la base $\{v_1, \dots, v_m\}$, entonces tenemos

$$T(e) = T\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) v_i\,,$$

y como $T(e) = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$, comparando obtenemos las igualdades

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,, \qquad\qquad i = 1, \dots, m\,,$$

que en forma matricial se expresan

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ denotan las matrices columnas de las coordenadas de los vectores e y $T(e)$ en las bases de E y $\bar{E}$, respectivamente, entonces la anterior igualdad matricial la podemos escribir abreviadamente como

$$Y = A \cdot X\,.$$

Definiciones 2.8 Dado un entero positivo n, las matrices de $M_{n\times n}(k)$ se denominan *matrices cuadradas de orden n* con coeficientes en k, y el espacio vectorial $M_{n\times n}(k)$ se denota $M_n(k)$.

Como dos matrices cuadradas del mismo orden siempre se pueden multiplicar en $M_n(k)$ tenemos la operación

$$\begin{array}{rcl} M_n(k) \times M_n(k) & \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} & M_n(k) \\ (A, B) & \longmapsto & A \cdot B \ , \end{array}$$

y se satisface que $(M_n(k), +, \cdot)$ es un anillo con unidad (compruébese); el elemento unitario de dicho anillo es la matriz unidad de orden n, $I_n = (\delta_{ij})$. Igual que los endomorfismos de un espacio vectorial (véase 1.2 (c)), $M_n(k)$ es una k-álgebra con unidad, ya que el morfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} k & \to & M_n(k) \\ \lambda & \mapsto & A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

es inyectivo y hace de k un subanillo de $M_n(k)$ (identificando cada escalar λ con la matriz A_λ), satisfaciéndose $\lambda \cdot A = A_\lambda \cdot A$ para toda matriz $A \in M_n(k)$.

Diremos que una matriz $A \in M_n(k)$ es *invertible* si lo es como elemento del anillo $M_n(k)$, es decir, si existe $B \in M_n(k)$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$; si A es invertible, entonces se satisface (como en todo anillo) que la matriz B que cumple $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ es única, por lo que B se denomina *matriz inversa* de A y se denota A^{-1}. El grupo multiplicativo de las unidades del anillo $M_n(k)$ (esto es, las matrices de $M_n(k)$ que son invertibles) se denota $\mathrm{GL}_n(k)$ y se denomina *grupo lineal de orden n sobre k*.

Definición 2.9 Sean E un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E. Dado $T \in \mathrm{End}_k(E)$, se define la *matriz del endomorfismo T en la base* $\{e_1, \dots, e_n\}$ como la matriz de la aplicación lineal T respecto de las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ según la definición 2.3; esto es, la matriz del endomorfismo T en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ cuya columna j-ésima son las coordenadas del vector $T(e_j)$ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} T(e_1) & \dots & T(e_n) \end{array} \\ A \ = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \ . \end{array}$$

2.10 Siguiendo con la notación de 2.9, si $\phi : \mathrm{End}_k(E) \to M_n(k)$ es la aplicación que lleva cada endomorfismo de E a su matriz en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces sabemos que ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales (lo probamos en 2.4).

Ahora se satisface además que ϕ es un isomorfismo de k-álgebras, ya que ϕ es un morfismo de anillos con unidad (la composición de endomorfismos se corresponde con el producto de matrices, y al endomorfismo identidad de E le corresponde la matriz unidad de orden n), y ϕ hace corresponder un elemento de k "dentro de $\mathrm{End}_k(E)$" con el mismo elemento de k "dentro de $M_n(k)$" (dado $\lambda \in k$, la imagen por ϕ de la homotecia de razón λ es la matriz que en 2.8 hemos denotado A_λ).

Proposición 2.11 *Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial E y sea $T \in \operatorname{End}_k(E)$. Si $A \in M_n(k)$ es la matriz de T en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces se satisfacen:*

(i) *T es un automorfismo $\iff$ A es invertible;*

(ii) *si T es un automorfismo, entonces A^{-1} es la matriz del endomorfismo T^{-1} en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que por un isomorfismo de anillos los elementos invertibles se corresponden, y que el inverso de la imagen por un morfismo de anillos de un elemento invertible es igual a la imagen del inverso de dicho elemento (véase [7] ú [8]). ∎

3 Cambios de Bases

Definición 3.1 Sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita E. Definimos la *matriz de cambio de la base B a la base B'* como la matriz de la aplicación identidad $I : E \to E$ respecto de las bases B y B'; es decir, la matriz de cambio de la base B a la base B' es la matriz $A \in M_n(k)$ cuya columna j-ésima son las coordenadas del vector j-ésimo de la base B en la base B',

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_n \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \, . \end{array}$$

3.2 Con la notación de 3.1, dado un vector $e \in E$, si convenimos en decir que B es la “base antigua” y que B' es la “base nueva”, entonces la matriz A nos permite obtener las coordenadas de e en la base nueva a partir de las coordenadas de e en la base antigua: si $e = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_n e'_n$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Por otra parte, si C es la matriz de cambio de la base B' a la base B, entonces $C \cdot A$ (respectivamente, $A \cdot C$) es la matriz de la aplicación identidad $I : E \to E$ respecto de las bases B y B (B’ y B'), es decir, $C \cdot A = I_n$ ($A \cdot C = I_n$); resumiendo, la matriz A es invertible y A^{-1} es la matriz de cambio de la base B' a la base B.

3.3 Una vez visto cómo cambian las coordenadas de un vector al cambiar las bases, nos interesa saber cómo cambia la matriz de una aplicación lineal al cambiar las bases. Sea $T : E \to \bar{E}$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y sea A la matriz de T respecto de las bases $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ de $\bar{E}$.

Consideremos otras bases $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ de E y $\bar{B}' = \{\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m\}$ de $\bar{E}$, y sean V_1 la matriz de cambio de la base B' a la base B y V_2 la matriz de cambio de la base $\bar{B}$ a la base

$\bar{B}'$; teniendo en cuenta que $I_{\bar{E}} \circ T \circ I_E = T$ y el siguiente diagrama,

$$\underset{B'}{E} \xrightarrow[V_1]{I_E} \underset{B}{E} \xrightarrow[A]{T} \underset{\bar{B}}{\bar{E}} \xrightarrow[V_2]{I_{\bar{E}}} \underset{\bar{B}'}{\bar{E}} \qquad \equiv \qquad \underset{B'}{E} \xrightarrow[V_2 \cdot A \cdot V_1]{I_{\bar{E}} \circ T \circ I_E} \underset{\bar{B}'}{\bar{E}}$$

se concluye que la matriz de T respecto de las bases B' y $\bar{B}'$ es $V_2 \cdot A \cdot V_1$.

3.4 Como caso particular de lo dicho en 3.3 tenemos: Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial E y sea A la matriz de un endomorfismo $T : E \to E$ en dicha base; si $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ es una nueva base de E y U es la matriz de cambio de la base B a la base B', entonces la matriz de T en la base nueva es $U \cdot A \cdot U^{-1}$.

4 Problemas

4.1 Sea E un espacio vectorial y sea $T \in \operatorname{End}_k(E)$ tal que $T^2 = T + I$ (I es el endomorfismo identidad de E). Pruébese que T es un automorfismo y calcúlese su automorfismo inverso.

4.2 Sea $f \in \operatorname{End}(E)$. Se dice que f es un *proyector* si es idempotente, esto es, si $f^2 = f$ (véase I.6.6). Pruébense:

(a) f es un proyector si y sólo si $f - I$ es un proyector;

(b) si f es un proyector se satisfacen $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im}(f - I) = \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker}(f - I) = \operatorname{Im} f$;

(c) Dados dos proyectores f y g de E, encuéntrense condiciones necesarias y suficientes para que $f + g$ sea también un proyector.

4.3 Sea E un espacio vectorial y sean $f, g \in \operatorname{End}_k(E)$ tales que $f + g = I$.

(a) Pruébese: $f \circ g = 0 = g \circ f \iff f^2 = f$ y $g^2 = g$

(b) Supuesto que se satisface $f \circ g = 0 = g \circ f$, pruébese que $E = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Im} f$.

4.4 Sea E un espacio vectorial y sean $T_1, \dots, T_n \in \operatorname{End}_k(E)$ tales que $T_1 + \dots + T_n = I$ y $T_i \circ T_j = 0$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$. Pruébense:

(a) $T_i^2 = T_i$, $i = 1, \dots, n$.

(b) $E = \operatorname{Im} T_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} T_n$.

4.5 Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(E)$. Supongamos que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, tales que $(T - \alpha I)(T - \beta I) = 0$. Demuéstrese que

$$E(\alpha) = \{e \in E : T(e) = \alpha e\}, \qquad E(\beta) = \{e \in E : T(e) = \beta e\}$$

son subespacios vectoriales de E tales que $E = E(\alpha) \oplus E(\beta)$. (Véase el problema I.8.25).

4.6 Sea E un espacio vectorial de dimensión 2 y sea T un endomorfismo de E no nulo y *nilpotente* (esto es, tal que existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $T^n = 0$). Pruébese que existe una base de E en la que la matriz de T es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Aplíquese lo anterior al endomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ cuya matriz en cierta base es $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

4.7 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida como $f(x, y) = (x + y, x + y, x + y)$.
(a) Hállese la matriz de f en las bases usuales.
(b) Obténganse bases de $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
(c) Calcúlese la imagen recíproca del vector $(2, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$.

4.8 Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(x, y) = (x + y, x - y)$, obténgase su matriz en la base usual de $\mathbb{R}^2$. Obténganse también las matrices de los endomorfismos $f^2 - I$ y f^3.

4.9 Pruébese que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita puede expresarse como diferencia de dos automorfismos.

4.10 Pruébese que las funciones $\{1, \operatorname{sen} t, \cos t\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Sea E el espacio vectorial real que ellas generan. Si $D : E \to E$ es el *operador derivada*, pruébese que $D \in \operatorname{End}(E)$ y calcúlese su matriz en la base $\{1, \operatorname{sen} t, \cos t\}$; calcúlese también en dicha base la matriz de D^n $(n \in \mathbb{N})$. Obténganse $\operatorname{Ker} D$ e $\operatorname{Im} D$; ¿cuáles son sus dimensiones? ¿Es cierto que $E = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D$?

4.11 En $\mathbb{R}^3$ hay fijada una base y $f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ son tales que sus matrices en dicha base son A y B, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcúlense las matrices asociadas (en la misma base) a las aplicaciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

4.12 Sean $B_1 = \{e_1, e_2\}$, $B_2 = \{u_1, u_2\}$ y $B_3 = \{v_1, v_2\}$ tres bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $u_1 = e_1$, $u_2 = 2e_1 + e_2$, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + 4e_2$. Usando las matrices de cambio de bases, calcúlense las coordenadas del vector $u = 2u_1 + 5u_2$ en la base B_3.

4.13 Calcúlense las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B_1 = \{(1, 2, 3), (3, 4, 0), (1, 1, 0)\}$ sabiendo que sus coordenadas respecto de la base $B_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ son $(1, 1, 1)$.

4.14 Obténgase la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ determinada por la igualdades $f(1, 2) = (1, 1, 2)$, $f(2, 3) = (2, 10, 1)$ respecto de las bases $\{(1, 1), (1, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

4.15 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y, z) = (2x+y, y-z)$, calcúlese la matriz asociada a f en:
(a) las bases usuales;
(b) las bases $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(2, 1), (1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

4.16 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido como $f(x,y,z) = (x+y+2z, y+z, x+z)$.

(a) Hállese la matriz de f en la base usual.

(b) Calcúlense $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(c) Obténgase una base de $\operatorname{Im} f$, amplíese a una base de $\mathbb{R}^3$ y calcúlese la matriz de f en la nueva base obtenida.

(d) Calcúlese una base de $\operatorname{Ker} f$ y hágase lo mismo que en (c).

4.17 Dada la base $B = \{(1,2,1),(0,3,1),(2,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal que a cada vector de $\mathbb{R}^3$ le hace corresponder su primera coordenada en la base B. Calcúlese la matriz de f en las bases usuales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}$.

4.18 Considérese la aplicación lineal $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $D(p(x)) = p'(x)$. Calcúlense:

(a) la matriz de D en las bases $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\{1, x\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$, y en las bases $\{x^2+1, 2x-1, x+2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\{x+3, x-3\}$ de $\mathbb{R}_1[x]$;

(b) el núcleo y la imagen de D.

4.19 Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $f(p(x)) = \alpha p(x) + p'(x)$ ($\alpha =$ cte.).

(a) Pruébese que f es un endomorfismo de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Hállense el núcleo y la imagen de f.

(c) Calcúlese la matriz de f en la base $\{2, x+1, x^2-1, x^3+1\}$.

4.20 Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Pruébese que existen bases de E y F tales que la matriz de f en ellas es

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_r es la matriz unidad de orden r. ¿Qué significado tiene r?

4.21 Considérense el siguiente subconjunto V de $M_2(\mathbb{R})$,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

y la aplicación $f : V \to V$ definida por la igualdad

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Demuéstrese que V es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ y hállese una base suya.

(b) Demuéstrese que f es un endomorfismo de V y calcúlese la matriz suya en la base obtenida en el apartado (a).

(c) Calcúlense el núcleo y la imagen de f.

4.22 Considérense el siguiente subconjunto V de $M_2(\mathbb{R})$,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

y la aplicación $f : V \to V$ definida por la igualdad

$$f \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Demuéstrese que V es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ y hállese una base suya.
(b) Pruébese que una base de V es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Pruébese que f es un endomorfismo de V y calcúlese la matriz suya en la base B.
(c) Calcúlense el núcleo y la imagen de f.

4.23 Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ definida por la igualdad

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} d & c-a \\ b-c & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Pruébese que f es lineal y calcúlese su matriz en las bases $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ y B de $M_2(\mathbb{R})$, donde

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Calcúlense el núcleo y la imagen de f.

4.24 Considérense las aplicaciones lineales $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$, donde

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-c, b-2d, 2a+b),$$

y g está determinada por las igualdades $g(1,0,1) = x^2 - 1$, $g(2,1,0) = 2x - 2$, $g(-1,0,1) = x^2 - 2x + 1$. Calcúlese la matriz de $g \circ f$ en las bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y $\{1 - x, 2 + x^2, 3 - 2x\}$. Hállense el núcleo y la imagen de $g \circ f$, así como suplementarios de ambos subespacios.

4.25 Un endomorfismo f de $\mathbb{R}_2[x]$ tiene como matriz en la base $\{1, x+1, x^2+1\}$ a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

y otro endomorfismo g de $\mathbb{R}_2[x]$ tiene como matriz en la base $\{2-x, 2+x, x^2\}$ a

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcúlense las matrices de $f+g$ y $f \circ g$ en la base $\{1, x, x^2\}$. Hállense el núcleo y la imagen de $f+g$ y $f \circ g$.

4.26 Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}_2[x]$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases $\{(1-\mathrm{i}, 2+\mathrm{i}, 0), (0, 2-\mathrm{i}, -1), (1+2\mathrm{i}, 0, -\mathrm{i})\}$ de $\mathbb{C}^3$ e $\{\mathrm{i}-x^2, (1+\mathrm{i})x-1, 2-\mathrm{i}\}$ de $\mathbb{C}_2[x]$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Hállese $T(-\mathrm{i}+1, 2+\mathrm{i}, -2)$, así como $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

(b) Si consideramos la aplicación lineal $\bar{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $T(z_1, z_2) = (z_1 - z_2, z_1 - z_2, z_2)$, calcúlese la matriz de $T \circ \bar{T}$ en las bases $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{C}_2[x]$ y usual de $\mathbb{C}^2$.

(c) Hállense el núcleo y la imagen de $T \circ \bar{T}$.

4.27 Sea E un espacio vectorial. Para cada $e \in E$ se define la aplicación $\Phi_e : k \to E$, $\Phi_e(\lambda) := \lambda e$. Pruébese que Φ_e es lineal y que la aplicación $\Phi : E \to \operatorname{Hom}_k(k, E)$, $\Phi(e) := \Phi_e$ es un isomorfismo.

4.28 Dada una aplicación lineal $f : E \to \bar{E}$ y un espacio vectorial F, pruébense:

(a) $N = \{g \in \operatorname{Hom}_k(\bar{E}, F) \,:\, g \circ f = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\operatorname{Hom}_k(\bar{E}, F)$;

(b) f es epiyectiva $\iff$ $N = 0$.

4.29 Fijado un endomorfismo f de un espacio vectorial E de dimensión finita, pruébese que los subconjuntos $\mathcal{F} = \{\} \in \operatorname{End}(\mathcal{E}) : \{\circ\} = \prime\}$, $\mathcal{G} = \{\} \in \operatorname{End}(\mathcal{E}) : \}\circ\{ = \prime\}$ son subespacios de $\operatorname{End}(E)$ y calcúlense sus dimensiones.