Capítulo IV

El Espacio Dual

Fijemos en todo este capítulo un cuerpo k.

1 El Espacio Dual

Definición 1.1 Dado un espacio vectorial E, llamaremos *espacio dual* de E al k-espacio vectorial $E^* = \mathrm{Hom}_k(E, k)$. Los vectores de E^* se denominan *formas lineales* sobre E.

Proposición 1.2 *Sea E un espacio vectorial. Se satisfacen:*

(i) *Toda forma lineal no nula sobre E es epiyectiva.*

(ii) *Si E es de dimensión finita, entonces E^* también es de dimensión finita y* $\dim E^* = \dim E$.

(iii) *Dado un vector no nulo $e \in E$, existe $\omega \in E^*$ tal que $\omega(e) \neq 0$.*

Demostración. Para probar (i) basta tener en cuenta que los únicos subespacios vectoriales de k son 0 y k, y (ii) se sigue de III.2.4.

(iii) Sea e un vector no nulo de E y sea E' un subespacio de E tal que $E = E' \oplus \langle e \rangle$; si definimos el isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} f : k & \to & \langle e \rangle \\ \lambda & \mapsto & \lambda e \end{array}$$

y consideramos la proyección de E sobre $\langle e \rangle$ paralelamente a E', $p : E \to \langle e \rangle$, entonces $\omega = f^{-1} \circ p$ es una forma lineal sobre E que satisface $\omega(e) = 1$. ▮

1.3 Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n y sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base suya. Dados $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ existe una única forma lineal $\omega : E \to k$ tal que

$$\omega(e_1) = \mu_1\,,\ \ldots\,,\ \omega(e_n) = \mu_n$$

(véase el ejercicio II.2.7); sea entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ω_i la forma lineal que queda totalmente determinada por las condiciones

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i \neq j\,, \\ 1\,, & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

Veamos que $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es una base de E^*, para lo cual será suficiente comprobar que es libre: si $\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_n\omega_n = 0$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$), entonces dado $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos

$$0 = (\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_n\omega_n)(e_j) = \alpha_1\omega_1(e_j) + \cdots + \alpha_n\omega_n(e_j) = \alpha_j\omega_j(e_j) = \alpha_j\,.$$

Definición 1.4 La base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ de E^* obtenida en 1.3 a partir de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ se denomina *base dual* de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Observación **1.5** Con la notación de 1.3, las coordenadas de una forma lineal $\omega \in E^*$ en la base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ son $(\omega(e_1), \ldots, \omega(e_n))$, es decir, se satisface la igualdad

$$\omega = \omega(e_1)\,\omega_1 + \cdots + \omega(e_n)\,\omega_n\,.$$

Efectivamente, si $\omega = \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_n\omega_n$, entonces tenemos $\omega(e_j) = (\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_n\omega_n)(e_j) = \alpha_1\omega_1(e_j) + \cdots + \alpha_n\omega_n(e_j) = \alpha_j\omega_j(e_j) = \alpha_j$.

1.6 Sea E un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita). Cada vector $e \in E$ define una aplicación de E^* en k, que denotaremos $\phi(e)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(e) : E^* &\to k \\ \omega &\mapsto \phi(e)(\omega) := \omega(e)\,, \end{aligned}$$

es decir, $\phi(e)$ es la aplicación "tomar valor en e"; es fácil demostrar que $\phi(e)$ es lineal (compruébese), esto es, $\phi(e) \in \operatorname{Hom}_k(E^*, k)$. Si denotamos por E^{**} al espacio dual del espacio dual de E, llamado *espacio bidual* de E ($E^{**} = \operatorname{Hom}_k(E^*, k)$), tenemos entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : E &\to E^{**} \\ e &\mapsto \phi(e)\,, \end{aligned}$$

y se satisface el siguiente importante resultado:

Teorema 1.7 (Teorema de reflexividad) *Con la notación de* 1.6*, la aplicación ϕ es un monomorfismo. Como consecuencia se sigue que si E es de dimensión finita, entonces ϕ es un isomorfismo.*

Demostración. La demostración de que ϕ es lineal es sencilla; veamos, por ejemplo, que es morfismo de grupos: Dados vectores $e, v \in E$, cualquiera que sea $\omega \in E^*$ tenemos

$$\phi(e + v)(\omega) = \omega(e + v) = \omega(e) + \omega(v) = \phi(e)(\omega) + \phi(v)(\omega) = (\phi(e) + \phi(v))(\omega)\,,$$

lo cual prueba que las aplicaciones lineales $\phi(e+v)$ y $\phi(e)+\phi(v)$ son iguales y por lo tanto ϕ separa la suma.

Probemos que ϕ es inyectiva: si $e \in E-\{0\}$, entonces existe $\omega \in E^*$ tal que $0 \neq \omega(e) = \phi(e)(\omega)$ (véase 1.2 (iii)), es decir, $\phi(e)$ no es la aplicación nula; por lo tanto $\operatorname{Ker}\phi = 0$.

Por último, si E es dimensión finita, entonces E^{**} es también de dimensión finita e igual a la de E; basta tener en cuanta que ϕ es un monomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita e iguales para concluir que ϕ es un isomorfismo (véase II.1.15). ∎

1.8 El teorema 1.7 nos dice que E es un subespacio vectorial de E^{**} identificando cada vector $e \in E$ con su imagen $\phi(e)$ en E^{**}:

$$\begin{aligned} \phi(e) = e : E^* &\to k \\ \omega &\mapsto e(\omega) := \omega(e)\,. \end{aligned}$$

La segunda parte del teorema de reflexividad es muy importante: si E tiene dimensión finita, entonces no sólo cada vector de E define un elemento de E^{**}, si no que además no hay más elementos en E^{**} que los definidos por vectores de E, es decir, dada $f \in E^{**}$, existe un vector $e \in E$ (único, porque ϕ es biyectiva) tal que $f(\omega) = e(\omega)$ para toda $\omega \in E^*$ (o lo que es lo mismo, dada $f \in E^{**}$, existe un único vector $e \in E$ tal que f es la aplicación "tomar valor en e").

1.9 Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de un espacio vectorial E de dimensión finita, y sea $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ la base dual de $\{e_1,\dots,e_n\}$ (véase 1.4). Como E^{**} es el espacio dual de E^*, podemos hablar de la base dual de $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ en E^{**}; dicha base será la familia $\{f_1,\dots,f_n\}$ de vectores de E^{**} totalmente determinada por las condiciones

$$f_i(\omega_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i \neq j\,, \\ 1\,, & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

Pero de la identificación $E \approx E^{**}$ que nos da el teorema de relfexividad se sigue que $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una familia de E^{**} que satisface

$$e_i(\omega_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i \neq j\,, \\ 1\,, & \text{si } i = j\,, \end{cases}$$

es decir, la base dual de $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ es $\{e_1,\dots,e_n\}$; por este motivo se dice que $\{e_1,\dots,e_n\}$ *y* $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ *son bases duales una de la otra.*

2 Incidencia

Definición 2.1 Dado un subespacio F de un espacio vectorial E, se define el *incidente* de F como el siguiente subespacio vectorial de E^*:

$$F^\circ = \{\omega \in E^* : \omega(e) = 0 \text{ para todo } e \in F\} = \{\omega \in E^* : F \subseteq \operatorname{Ker}\omega\}\,.$$

Dados $e \in E$ y $\omega \in E^*$, se dice que e y ω *son incidentes* si $\omega(e) = 0$.

2.2 Sea E un espacio vectorial. Si G es un subespacio de E^*, según la definición 2.1 el incidente de G será el siguiente subespacio vectorial de E^{**}:

$$G^\circ = \{f \in E^{**} : f(\omega) = 0 \text{ para todo } \omega \in G\},$$

y si E tiene dimensión finita tenemos que

$$G^\circ = \{e \in E : e(\omega) = 0 \text{ para todo } \omega \in G\},$$

es un subespacio de E. Por tanto, cuando E es de dimensión finita (¡y sólo cuando E es de dimensión finita!) el incidente de un subespacio de E^* es un subespacio de E.

Teorema 2.3 *Sean F, E_1 y E_2 subespacios de un espacio vectorial E. Se satisfacen:*

(i) $E^\circ = 0$ *y* $0^\circ = E^*$;

(ii) $E_1 \subseteq E_2 \;\Rightarrow\; E_2^\circ \subseteq E_1^\circ$;

(iii) $(E_1 + E_2)^\circ = E_1^\circ \cap E_2^\circ$;

(iv) *si E es de dimensión finita, entonces* $F^{\circ\circ} = F$;

(v) *si E es de dimensión finita, entonces* $(E_1 \cap E_2)^\circ = E_1^\circ + E_2^\circ$.

Demostración. Los apartados (i) y (ii) son inmediatos.

(iii) Como $E_1 \subseteq E_1+E_2$ y $E_2 \subseteq E_1+E_2$, de (ii) se sigue que $(E_1+E_2)^\circ \subseteq E_1^\circ$ y $(E_1+E_2)^\circ \subseteq E_2^\circ$, luego $(E_1 + E_2)^\circ \subseteq E_1^\circ \cap E_2^\circ$. Veamos la otra inclusión. Sea $\omega \in E_1^\circ \cap E_2^\circ$; si $e \in E_1 + E_2$ existen $e_1 \in E_1$ y $e_2 \in E_2$ tales que $e = e_1 + e_2$ y por lo tanto $\omega(e) = \omega(e_1) + \omega(e_2) = 0$, es decir, $\omega \in (E_1 + E_2)^\circ$.

(iv) Es claro que $F \subseteq F^{\circ\circ}$ (compruébese; basta aplicar la definición de incidente). Veamos ahora que todo vector de $F^{\circ\circ}$ está en F, o lo que es equivalente, probemos que si un vector no está en F, entonces tampoco está en $F^{\circ\circ}$. Si $e \in E$ es tal que $e \notin F$, entonces la clase $\bar e$ de e en el espacio cociente E/F es no nula y por lo tanto existe una forma lineal $\bar\omega$ sobre E/F que no se anula sobre $\bar e$ (véase 1.2 (iii)); si $\pi : E \to E/F$ es el morfismo de paso al cociente y definimos $\omega = \bar\omega \circ \pi \in E^*$, entonces, por una parte $\omega \in F^\circ$ porque $\operatorname{Ker}\pi = F$, y por otra parte $\omega(e) = \bar\omega(\bar e) \neq 0$; hemos encontrado un elemento de F° sobre el cual no se anula el vector e, es decir, $e \notin F^{\circ\circ}$.

(v) Se deja como ejercicio (se sigue de (iii) y (iv)). ∎

3 Morfismos Traspuestos

3.1 Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Para cada forma lineal $\omega \in F^*$ la aplicación composición $\omega \circ f$ es una forma lineal sobre E, de modo que tenemos definida la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f^* : F^* &\;\to\; E^* \\ \omega &\;\mapsto\; f^*(\omega) := \omega \circ f\,; \end{aligned}$$

es fácil probar (y se deja como ejercicio) que $f^* : F^* \to E^*$ es una aplicación lineal.

Definición 3.2 A la aplicación lineal $f^* : F^* \to E^*$ obtenida en 3.1 a partir $f : E \to F$ la llamaremos *morfismo traspuesto* (ó *aplicación traspuesta*) de f.

Teorema 3.3 *Sean E, F y G espacios vectoriales. Tenemos:*

(i) *Dados $f_1, f_2 \in \operatorname{Hom}_k(E,F)$ y dado $\lambda \in k$ se satisfacen $(f_1+f_2)^* = f_1^* + f_2^*$ y $(\lambda f_1)^* = \lambda f_1^*$; es decir, es lineal la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_k(E,F) & \to & \operatorname{Hom}_k(F^*,E^*) \\ f & \mapsto & f^* \end{array} .$$

(ii) *Si I_E es el endomorfismo identidad de E, entonces $(I_E)^*$ es el endomorfismo identidad de E^*: $(I_E)^* = I_{E^*}$.*

(iii) *Si $f \in \operatorname{Hom}_k(E,F)$ y $g \in \operatorname{Hom}_k(F,G)$, entonces $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$.*

(iv) *Si $f \in \operatorname{Hom}_k(E,F)$ es un isomorfismo, entonces f^* también es isomorfismo y se satisface $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.*

Demostración. Los apartados (i) y (ii) son sencillos de probar y se dejan como ejercicio.

(iii) Cualquiera que sea $\omega \in G^*$ tenemos,

$$(g\circ f)^*(\omega) = \omega\circ(g\circ f) = (\omega\circ g)\circ f = f^*(\omega\circ g) = f^*(g^*(\omega)) = (f^*\circ g^*)(\omega)\,,$$

lo cual prueba que las aplicaciones $(g\circ f)^*$ y $f^*\circ g^*$ son iguales.

(iv) Si $f \in \operatorname{Hom}_k(E,F)$ es un isomorfismo tenemos

$$f^*\circ(f^{-1})^* = (f^{-1}\circ f)^* = (I_E)^* = I_{E^*}\,, \qquad (f^{-1})^*\circ f^* = (f\circ f^{-1})^* = (I_F)^* = I_{F^*}\,,$$

por lo tanto f^* y $(f^{-1})^*$ son isomorfismo y cada uno inverso del otro. ∎

Lema 3.4 *Para toda aplicación lineal $g : E \to G$ se satisfacen:*

(i) $\operatorname{Ker} g^* = (\operatorname{Im} g)^\circ$;

(ii) $\operatorname{Im} g^* = (\operatorname{Ker} g)^\circ$.

Demostración. El apartado (i) es sencillo y se deja como ejercicio.

(ii) Probemos en primer lugar la inclusión $\operatorname{Im} g^* \supseteq (\operatorname{Ker} g)^\circ$, es decir, sea $\omega \in E^*$ tal que $\omega(\operatorname{Ker} g) = 0$ y veamos que existe $\omega_0 \in G^*$ satisfaciendo $\omega = \omega_0\circ g = g^*(\omega_0)$. Consideremos un subespacio G' de G que sea suplementario de $\operatorname{Im} g$: $G = \operatorname{Im} g \oplus G'$. Si $\omega_1 \in (\operatorname{Im} g)^*$ y $\omega_2 \in G'^*$, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \omega_0 : G = \operatorname{Im} g \oplus G' & \to & k \\ v = v_1 + v_2 & \mapsto & \omega_0(v) := \omega_1(v_1) + \omega_2(v_2)\,, \qquad (v_1 \in \operatorname{Im} g\,,\ v_2 \in G') \end{array} \tag{3.1}$$

es lineal y por lo tanto $\omega_0 \in G^*$.

Tomemos ω_2 arbitrariamente y definamos ω_1 del siguiente modo: si $g' : E \to \operatorname{Im} g$ es la aplicación g con el codominio restringido a $\operatorname{Im} g$, entonces g' es epiyectiva y basta tener en cuenta que $\omega(\operatorname{Ker} g') = \omega(\operatorname{Ker} g) = 0$ para obtener que ω factoriza a través de g', es decir, existe ω_1 tal que $\omega = \omega_1\circ g'$ (véase I.8.36). Ahora, si definimos ω_0 como en (3.1) a partir de estas formas ω_1 y ω_2, entonces es claro que $\omega_0 \in G^*$ es tal que $\omega = \omega_0\circ g$.

Por último, la demostración de la inclusión $\operatorname{Im} g^* \subseteq (\operatorname{Ker} g)^\circ$ es inmediata. ∎

Teorema 3.5 (Teorema de Fröbenius) *La operación "tomar duales" conserva las sucesiones exactas.*

Demostración. Una sucesión de aplicaciones lineales es exacta si lo es en cada uno de sus términos, por lo tanto debemos probar que si tenemos una sucesión exacta de aplicaciones lineales de la forma $F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G$, entonces también es exacta la sucesión $G^* \xrightarrow{g^*} E^* \xrightarrow{f^*} f^*$.

Nuestra hipótesis es que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ y debemos probar la igualdad $\operatorname{Im} g^* = \operatorname{Ker} f^*$, la cual se sigue inmediatamente aplicando el lema 3.4:

$$\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\circ = (\operatorname{Ker} g)^\circ = \operatorname{Im} g^* . \quad \blacksquare$$

Corolario 3.6 (i) *Si* $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de aplicaciones lineales, entonces también es exacta la sucesión*

$$0 \longrightarrow E''^* \xrightarrow{p^*} E^* \xrightarrow{i^*} E'^* \longrightarrow 0 .$$

(ii) *Si* $f : E \to F$ *es una aplicación lineal inyectiva (respectivamente, epiyectiva), entonces* $f^* : F^* \to E^*$ *es epiyectiva (inyectiva).*

Demostración. Para probar el corolario basta tener en cuanta que los morfismos traspuestos de las aplicaciones nulas $0 \to E$ y $E \to 0$, son las aplicaciones nulas $E^* \to 0$ y $0 \to E^*$, respectivamente. $\blacksquare$

Corolario 3.7 *Si* $f : E \to F$ *es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces se satisfacen:*

(i) $f^{**} = f$;

(ii) f *es inyectiva* $\iff$ f^* *es epiyectiva;*

(iii) f *es epiyectiva* $\iff$ f^* *es inyectiva;*

(iv) f *es isomorfismo* $\iff$ f^* *es isomorfismo.*

Demostración. La aplicación f^{**} es la traspuesta de f^*, es decir, $f^{**} \in \operatorname{Hom}_k(E^{**}, F^{**})$, pero como estamos en dimensión finita identificamos cada espacio vectorial con su bidual (en virtud de 1.7). Mediante dicha identificación, dados $e \in E$ y $\omega \in F^*$ tenemos

$$(f^{**}(e))(\omega) = (e \circ f^*)(\omega) = e(f^*(\omega)) = f^*(\omega)(e) = \omega(f(e)) = (f(e))(\omega) ,$$

es decir, $f^{**}(e) = f(e)$ para todo $e \in E$.

Para probar los apartados (ii), (iii) y (iv) basta tener en cuenta (i) y 3.6 (ii). $\blacksquare$

Corolario 3.8 *Si* F *es un subespacio de un espacio vectorial* E*, entonces se satisface* $F^\circ \approx (E/F)^*$*. Como consecuencia, cuando* E *sea de dimensión finita tendremos*

$$\dim F^\circ = \dim E - \dim F .$$

Demostración. Si $i : F \to E$ es la inclusión natural de F en E y $\pi : E \to E/F$ es el morfismo de paso al cociente, entonces la sucesión de aplicaciones lineales

$$0 \longrightarrow (E/F)^* \xrightarrow{\pi^*} E^* \xrightarrow{i^*} F^* \longrightarrow 0$$

es exacta, y por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} F^\circ &= \{\omega \in E : \omega(F) = 0\} = \{\omega \in E : \omega(i(F)) = 0\} \\ &= \{\omega \in E : i^*(\omega) = 0\} = \operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Im} \pi^* . \end{aligned}$$

Como π^* es inyectiva, $(E/F)^*$ es isomorfo a $\operatorname{Im}\pi^*$, es decir, $(E/F)^* \approx F^\circ$.

Si E es de dimensión finita, entonces E/F también es de dimensión finita y obtenemos $\dim F^\circ = \dim((E/F)^*) = \dim(E/F) = \dim E - \dim F$. ∎

Nota **3.9** Obsérvese que el isomorfismo $F^\circ \approx (E/F)^*$ probado en 3.8 no es más que un caso particular de la propiedad universal probada en I.4.4.

Corolario 3.10 (Teorema del rango) *Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces T y T^* tienen igual rango (véase* II.2.11*).*

Demostración. Denotemos por $i : \operatorname{Ker} T \to E$ la inclusión natural de $\operatorname{Ker} T$ en E. Por una parte, aplicando la fórmula de la dimensión a las aplicaciones T e i^* obtenemos

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T) = \dim E = \dim(\operatorname{Im} i^*) + \dim(\operatorname{Ker} i^*) .$$

Por otra parte, aplicando el Teorema de Fröbenius obtenemos que la sucesión de aplicaciones lineales $F^* \xrightarrow{T^*} E^* \xrightarrow{i^*} (\operatorname{Ker} T)^* \to 0$ es exacta, es decir, i^* es epiyectiva y $\operatorname{Ker} i^* = \operatorname{Im} T^*$, de lo que se siguen las igualdades

$$\dim(\operatorname{Im} i^*) = \dim((\operatorname{Ker} T)^*) = \dim(\operatorname{Ker} T) , \qquad \dim(\operatorname{Ker} i^*) = \dim(\operatorname{Im} T^*) .$$

De todo lo dicho obtenemos $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Im} T^*)$, lo cual termina la demostración. ∎

4 Matrices Traspuestas

Definición 4.1 Llamaremos *matriz traspuesta* de una matriz $A \in M_{m\times n}(k)$, y la denotaremos A^t, a la matriz de $M_{n\times m}(k)$ que se obtiene de A cambiando filas por columnas, es decir,

$$A^t(i,j) := A(j,i) , \qquad i = 1, \dots, n , \quad j = 1, \dots, m .$$

Es inmediato comprobar que $(A^t)^t = A$.

Teorema 4.2 *Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita, $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E, y $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de F. Denotemos por $B_1^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la base dual de B_1 y por $B_2^* = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ la base dual de B_2. Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal y A es la matriz de T en las bases B_1 y B_2, entonces la matriz de $T^* : F^* \to E^*$ en las bases B_2^* y B_1^* es A^t.*

Demostración. Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ y $T \in \mathrm{Hom}_k(E, F)$ como en el enunciado, es decir, satisfaciendo

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \,, \qquad\qquad j = 1, \dots, n \,.$$

Para ver que A^t es la matriz de T^* en las bases B_2^* y B_1^*, tenemos que probar las igualdades

$$T^*(\xi_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \,, \qquad\qquad i = 1, \dots, m \,,$$

y como $T^*(\xi_i)$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j$ son aplicaciones lineales de E en k, para ver que son la misma basta comprobar que coinciden sobre una base de E: dado $e_h \in B_1$, $h \in \{1, \dots, n\}$, tenemos

$$\begin{aligned} T^*(\xi_i)(e_h) &= (\xi_i \circ T)(e_h) = \xi_i(T(e_h)) = \xi_i(a_{1h}v_1 + \dots + a_{mh}v_m) \\ &= a_{1h}\xi_i(v_1) + \dots + a_{mh}\xi_i(v_m) = a_{ih} \,, \\ \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j\Big)(e_h) &= a_{i1}\omega_1(e_h) + \dots + a_{in}\omega_n(e_h) = a_{ih} \,, \end{aligned}$$

ya que $\xi_i(v_h) = 0$ si $i \neq h$, $\xi_i(v_i) = 1$, $\omega_j(e_h) = 0$ si $j \neq h$, y $\omega_h(e_h) = 1$. ▮

Corolario 4.3 (i) *Cualesquiera que sean las matrices $A \in M_{m\times n}(k)$ y $B \in M_{n\times p}(k)$ se satisface $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.*

(ii) *Sean B_1 y B_2 bases de un espacio vectorial E, y sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y B_2, respectivamente. Si A es la matriz de cambio de la base B_1 a la base B_2, entonces A^t es la matriz de cambio de la base B_2^* a la base B_1^*.*

(iii) *Para cada matriz cuadrada $A \in M_n(k)$ se satisface: A es invertible si y sólo si A^t es invertible, en cuyo caso, la matriz inversa de A^t es igual a la matriz traspuesta de A^{-1}, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.*

Demostración. Las demostraciones son sencillas y se dejan como ejercicio. Se trata de traducir a las matrices (con ayuda del teorema 4.2) las propiedades probadas en 3.3 para los morfismos. ▮

4.4 (Rango de una matriz) Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$. Las n columnas de A las podemos considerar como vectores de k^m, de modo que podemos hablar del "rango de las columnas de A", el cual denotaremos $\mathrm{rg}\, c(A)$; de igual forma, las m filas de A son vectores de k^n y por lo tanto tenemos el "rango de las filas de A", que denotaremos $\mathrm{rg}\, f(A)$.

Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal cuya matriz en ciertas bases de E y F es A, entonces se satisface la igualdad $\mathrm{rg}\, T = \mathrm{rg}\, c(A)$. En efecto, si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y B' es una base de F tales que la matriz de T en ellas es A, basta tener en cuenta que $\mathrm{rg}\, T = \mathrm{rg}\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ y que las columnas de A son los vectores $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ expresados en la base B'.

De la anterior propiedad y de 3.10 se sigue inmediatamente la versión matricial del teorema del rango: *Para toda matriz $A \in M_{m\times n}(k)$ se satisface que el rango de sus filas es igual al rango de sus columnas,* $\mathrm{rg}\, f(A) = \mathrm{rg}\, c(A)$. Para probarlo basta tener en cuenta, siguiendo con la notación del párrafo anterior, que $\mathrm{rg}\, f(A) = \mathrm{rg}\, c(A^t) = \mathrm{rg}\, T^*$ (véase 4.2).

La propiedad enunciada en el último párrafo nos permite dar la siguiente definición: Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(k)$, llamaremos *rango* de A, y lo denotaremos $\operatorname{rg} A$, al rango de sus columnas (ó de sus filas), $\operatorname{rg} A := \operatorname{rg} c(A) = \operatorname{rg} f(A)$.

De todo lo dicho se siguen inmediatamente las siguientes propiedades:

(i) El rango de una matriz es igual al rango de su matriz traspuesta.

(ii) El rango de una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita es igual al rango de su matriz asociada en bases cualesquiera de dichos espacios.

(iii) Una matriz cuadrada de orden n es invertibles si y sólo si su rango es igual a n (véase II.1.15).

5 Hiperplanos Vectoriales

Vamos a introducir en esta sección una clase importante de subespacios vectoriales: los hiperplanos vectoriales. Estos subespacios son justamente los núcleos de las formas lineales no nulas, y es por ello que admitirán ecuaciones sencillas.

Definición 5.1 Dado un subespacio F de un espacio vectorial E, se define la *codimensión* de F como la dimensión del espacio cociente E/F. Llamaremos *hiperplano vectorial* de E a todo subespacio de E de codimensión igual a 1.

5.2 Sea H un subespacio de un espacio vectorial E. Claramente, el que H sea un hiperplano es equivalente a que H sea un subespacio propio y que no existan subespacios que estén estrictamente contenidos entre H y E (véase el comentario hecho en II.1.6). En particular, si H es un hiperplano, entonces existen vectores de E que no están en H, y dado $e \in E$ tal que $e \notin H$ debe satisfacerse $E = H \oplus \langle e\rangle$ (porque $H \subsetneq H + \langle e\rangle \subseteq E$ y $H \cap \langle e\rangle = 0$). Recíprocamente, si existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $E = H \oplus \langle e\rangle$, entonces $E/H \approx \langle e\rangle$ y por lo tanto $\dim(E/H) = \dim\langle e\rangle = 1$, es decir, H es un hiperplano.

Por otra parte, si E es de dimensión finita n, entonces es claro que los hiperplanos vectoriales de E son los subespacios suyos de dimensión $n-1$.

Proposición 5.3 *Dado un subespacio H de un espacio vectorial E, son equivalentes:*

(i) *H es un hiperplano;*

(ii) *H es el núcleo de una forma lineal no nula sobre E.*

Además, si H es un hiperplano y $\omega \in E^*$ es tal que $H = \operatorname{Ker}\omega$, entonces $H^\circ = \langle\omega\rangle$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si H es un hiperplano, entonces $\dim(E/H) = 1$ y por lo tanto existe un isomorfismo $f : E/H \to k$; la composición $f\circ\pi : E \to k$ (donde $\pi : E \to E/H$ es el morfismo de paso al cociente) es una forma lineal no nula sobre E cuyo núcleo es H.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que existe $\omega \in E^*$, $\omega \neq 0$, tal que $H = \operatorname{Ker}\omega$; entonces, como toda forma lineal no nula es epiyectiva (véase 1.2 (i)), el teorema de factorización I.4.5 nos dice que $E/H = E/\operatorname{Ker}\omega \approx k$, de lo que obtenemos $\dim(E/H) = \dim k = 1$.

Para terminar, supongamos que H es un hiperplano y que $\omega \in E^*$ es tal que $H = \operatorname{Ker}\omega$; entonces ω es una forma lineal no nula de H°, y como $\dim H^\circ = \dim((E/H)^*) = \dim(E/H) = 1$ (véase 3.8), concluimos que $H^\circ = \langle\omega\rangle$. ∎

Corolario 5.4 *Si* ω_1 *y* ω_2 *son dos formas lineales no nulas sobre un espacio vectorial* E*, entonces:* $\operatorname{Ker}\omega_1 = \operatorname{Ker}\omega_2 \iff \langle\omega_1\rangle = \langle\omega_2\rangle$.

6 Problemas

6.1 Sean E un espacio vectorial de dimensión 5, $B = \{e_1, \dots, e_5\}$ una base suya y $B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$ su base dual. Dado el subespacio F generado por los vectores $u_1 = e_2 - e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_3 = e_3 + 2e_4 - e_5$, hállese $\dim F$ y obténgase una base se F°.

6.2 Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ una base de $(\mathbb{R}^2)^*$. Se sabe que $\omega_1(x, y) = 2x - y$, $\omega_2(-1, 1) = 2$ y $\omega_2(1, 2) = -1$. Hállese en $\mathbb{R}^2$ la base dual de $\{\omega_1, \omega_2\}$.

6.3 Tres elementos $f, g, h \in (\mathbb{R}^3)^*$ están definidos para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ por las fórmulas $f(x, y, z) = x + z$, $g(x, y, z) = x$, $h(x, y, z) = y$. Pruébese que $\{f, g, h\}$ es una base de $(\mathbb{R}^3)^*$ y calcúlese su base dual.

6.4 Considérese la base $\{(2, 3), (-1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ su base dual. Se definen las aplicaciones $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por las igualdades

$$\varphi_1(x, y) = -2x + y\,, \qquad \varphi_2(x, y) = x - 3y\,.$$

(a) Demuéstrese que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es una base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
(b) Calcúlense las coordenadas de φ_1, φ_2 en la base $\{\omega_1, \omega_2\}$.
(c) Hállese la base dual de $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

6.5 Considérese la base $\{(1, 2, -1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Se definen las aplicaciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por las igualdades

$$\varphi_1(x, y, z) = -3x - y + z\,, \qquad \varphi_2(x, y, z) = x - 3z\,, \qquad \varphi_3(x, y, z) = 2y + x\,.$$

(a) Demuéstrese que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
(b) Calcúlense las coordenadas de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.
(c) Hállese la base dual de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

6.6 Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Dadas formas lineales $\omega_1, \dots, \omega_r$ sobre E se definen los subespacios $E_i = \operatorname{Ker}\omega_i$ $(i = 1, \dots, r)$, $F = E_1 \cap \dots \cap E_r$. Pruébense:
(a) $\dim(E/F) \leq r$;
(b) $\dim(E/F) = r \iff \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ es una familia libre de E^*.

6.7 Considérense en $\mathbb{C}_1[x]$ las formas lineales $\omega_1(p(x)) = p(1)$, $\omega_2(p(x)) = p(\mathrm{i})$ $(p(x) \in \mathbb{C}_1[x])$. Pruébese que $\{\omega_1, \omega_2\}$ es una base de $(\mathbb{C}_1[x])^*$ y calcúlese su base dual.

6.8 Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Calcúlese la base dual de $\{v_1, v_2, v_3\}$ sabiendo que $v_1 = (1 + \mathrm{i})e_1 - \mathrm{i}e_2$, $v_2 = -\mathrm{i}e_2 + (1 - \mathrm{i})e_3$, $v_3 = e_3 - (2 + \mathrm{i})e_2$.

6.9 Sean F y G subespacios de un espacio vectorial E de dimensión finita tales que $E = F \oplus G$. Pruébese la igualdad $E^* = F^\circ \oplus G^\circ$.

6.10 Sea $E = \mathbb{R}_2[x]$. Consideremos la base $B = \{1, x, x^2\}$ de E y sea $B^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de B. Se definen las aplicaciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ del siguiente modo: dado $p(x) \in E$,

$$\theta_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \theta_2(p(x)) = \int_0^1 xp(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \theta_3(p(x)) = \int_0^1 x^2p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Pruébese que $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ es una base de E^*.
(b) Hállense las coordenadas de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ en la base B^*.
(c) Obténgase la base dual de $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.
(d) Dedúzcase de todo lo anterior que para toda forma lineal $\omega \in E^*$ existe un único polinomio $p(x) \in E$ satisfaciendo:

$$\omega(q(x)) = \int_0^1 q(x)p(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{para todo } q(x) \in E\,.$$

6.11 Dado n, es sabido que las funciones $e_1 = \operatorname{sen} t$, $e_2 = \operatorname{sen} 2t$, $\dots$, $e_n = \operatorname{sen} nt$ son linealmente independientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ (véase II.3.22). Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial que dichas funciones generan, sea $B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la base dual de la base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, y para cada $f \in E$ considérese la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi_f : E & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \phi_f(g) := \int_0^{2\pi} fg\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

(a) Pruébese que $\phi_f \in E^*$ para todo $f \in E$.
(b) Pruébese que la aplicación $\phi : E \to E^*$, $f \mapsto \phi(f) := \phi_f$, es un isomorfismo y calcúlese su matriz en las bases B y B^*.[1]
(c) Dados números reales arbitrarios $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dedúzcanse las relaciones

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} \alpha_i\, e_i\, e_h\ \mathrm{d}t = \pi\alpha_h\,.$$

6.12 Hállense de modo explícito las formas lineales que constituyen la base dual de la base usual de k^n. ¿Cuál es la expresión general de una forma lineal sobre k^n?

6.13 Hállense de modo explícito las formas lineales que constituyen la base dual de la base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ de $k_n[x]$. ¿Cuál es la expresión general de una forma lineal sobre $k_n[x]$?

Supóngase el caso $k = \mathbb{R}$, $n = 2$ y considérese sobre $\mathbb{R}_2[x]$ la forma lineal ω definida por la igualdad $\omega(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$ $(p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$. Calcúlense las coordenadas de ω en la base dual de $\{1, x, x^2\}$.

[1] Recuérdese que cuando $i \neq h$ una primitiva de la función $\operatorname{sen} it \operatorname{sen} ht$ es $\frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{sen}(i-h)t}{i-h} - \frac{\operatorname{sen}(i+h)t}{i+h}\right\}$, y que una primitiva de la función $\operatorname{sen}^2 it$ es $\frac{1}{2}\left\{t - \frac{\operatorname{sen} 2it}{2i}\right\}$.

6.14 Calcúlese el incidente de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\langle (1,2,-1,1),(0,-1,1,0)\rangle$;

(b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,:\, x_1-x_2+x_3=0\}$;

(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,:\, x_1+x_2-x_4=0,\ 2x_1-x_3+x_4=0\}$.

6.15 Calcúlese el incidente de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$:

(a) $\langle 2-x, x^3\rangle$;

(b) $\{p(x) \,:\, p''(1)=0\}$;

(c) $\{p(x) \,:\, p'(0)=0,\ \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x=0\}$.

6.16 Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y sea $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ una base suya. Dados en E los subespacios $F=\langle e_2-2e_1, e_2+e_3\rangle$, $G=\langle e_1+2e_3, e_2\rangle$ hállese $(F\cap G)^\circ$. Calcúlese $T^*(F^\circ)$ donde T es el endomorfismo de E cuya matriz en la base B es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.17 Dada una aplicación lineal $T: E\to F$ demuéstrense:

(a) $(T^{-1}(V))^\circ = T^*(V^\circ)$ para todo subespacio V de F;

(b) $(T(W))^\circ = (T^*)^{-1}(W^\circ)$ para todo subespacio W de E.

[Indicación: En el apartado (a) considérese la aplicación $\pi\circ T: E\to F\to F/V$, cuyo núcleo es $T^{-1}(V)$, y aplíquese la igualdad $(\operatorname{Ker}(\pi\circ T))^\circ = \operatorname{Im}(\pi\circ T)^*$.]

6.18 Sea E un espacio vectorial y sean $e\in E$, $\omega\in E^*$, ambos no nulos e incidentes. Se define la aplicación $T: E\to E$ por la fórmula $T(v):=v+\omega(v)e$ $(v\in E)$.

(a) Demuéstrese que T es un automorfismo y calcúlese T^{-1}.

(b) Pruébese que si E tiene dimensión finita existe una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E tal que $T(e_1)=e_1+e_2$, $T(e_2)=e_2$, $T(e_3)=e_3$, $\dots$, $T(e_n)=e_n$.

6.19 Sea f un automorfismo de un espacio vectorial E. Pruébese que f induce un automorfismo g de E^* que conserva la incidencia, es decir, tal que si $e\in E$ y $\omega\in E^*$ son tales que $\omega(e)=0$, entonces $g(\omega)(f(e))=0$. Pruébese también que si h es otro automorfismo de E^* con la misma propiedad de g, entonces h y g son proporcionales.

6.20 Sea $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ la base dual de la usual de $\mathbb{R}^3$ y considérense en $(\mathbb{R}^3)^*$ los subespacios $W_1=\langle 2\omega_1-\omega_3\rangle$, $W_2=\langle \omega_2, \omega_1-3\omega_3\rangle$. Hállense W_1^*, W_2^*, $(W_1\cap W_2)^*$, $(W_1+W_2)^*$.

6.21 Sea $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en la bases $\{1,x,x^2,x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ y usual de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcúlense $\operatorname{Im} T^*$, $(\operatorname{Im} T^*)^\circ$, $\operatorname{Ker} T^*$, $(\operatorname{Ker} T^*)^\circ$.

6.22 Se dice que una matriz $A \in M_n(k)$ es *simétrica* si $A^t = A$, y que es *hemisimétrica* si $A^t = -A$. Sean $S_n(k)$ y $H_n(k)$ los conjuntos de las matrices simétricas y hemisimétricas de $M_n(k)$, respectivamente. Pruébese que $S_n(k)$ y $H_n(k)$ son subespacios vectorialess de $M_n(k)$ y hállense bases de suyas. Demuéstrese que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus H_n(\mathbb{R})$.

6.23 Considérese el espacio vectorial $M_n(k)$ de las matrices cuadradas de orden n, y para cada par de índices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sea e_{ij} la matriz cuyos términos son todos nulos salvo el (i, j) que vale 1; $\{e_{ij}\}$ es base de $M_n(k)$ (véase III.2.2). Sea $\{\omega_{ij}\}$ la base dual de $\{e_{ij}\}$. Para cada matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ se definen las siguientes aplicaciones[2]:

$$\begin{aligned} D_A : M_n(k) &\to k \\ B &\mapsto D_A(B) := \mathrm{tra}(BA)\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} I_A : M_n(k) &\to k \\ B &\mapsto I_A(B) := \mathrm{tra}(AB)\,. \end{aligned}$$

(a) Pruébese que $D_A, I_A \in (M_n(k))^*$, hállense sus coordenadas en la base $\{\omega_{ij}\}$ y dedúzcase que $I_A = D_A$.

(b) Pruébese que la aplicación

$$\begin{aligned} T : M_n(k) &\to (M_n(k))^* \\ A &\mapsto T(A) := I_A \end{aligned}$$

es un isomorfismo y calcúlese su matriz en las bases $\{e_{ij}\}$ y $\{\omega_{ij}\}$.

(c) Dada la forma lineal $\omega : M_n(k) \to k$ definida como $\omega(B) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}$ $(B = (b_{ij}))$, obténgase $A \in M_n(k)$ tal que $\omega = T(A)$.

(d) Calcúlese $T^{-1}((S_n(k))^\circ)$ (véase 6.22).

6.24 Sea f un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial E, esto es, tal que existe un entero positivo r satisfaciendo $f^r = 0$. Pruébense:

(a) f^* también es nilpotente.

(b) Si $g \in \mathrm{End}(E)$ es tal que $g \circ f = f \circ g$, entonces $f \circ g$ también es nilpotente.

(c) Si I es el endomorfismo identidad de E, entonces $I + f$ es un automorfismo de E.

(d) Si $p(x) \in k[x]$ no tiene término independiente, entonces $p(f)$ también es nilpotente.

(e) Si $N(E)$ es el conjunto de los endomorfismo nilpotentes de E, de los anteriores apartados se sigue que podemos definir la aplicación $\exp : N(E) \to \mathrm{Aut}(E)$ como[3]

$$\exp(u) = I + u + \frac{1}{2!}u^2 + \ \dots\ + \frac{1}{n!}u^n + \ \dots \qquad\qquad (u \in N(E)\,.)$$

Pruébese que si $u_1, u_2 \in N(E)$ conmutan entonces $\exp(u_1 + u_2) = \exp(u_1)\exp(u_2)$, y como consecuencia $\exp(u_1)$ y $\exp(u_2)$ también conmutan.

(f) Aplicación: Sea un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es decir, funciones incógnitas $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que satisfacen las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1' = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\ \vdots \\ x_n' = \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} ,$$

[2] Dada $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ se define la *traza* de A como el escalar $\mathrm{tra}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

[3] Obsérvese que la suma de la definición de exp es finita.

o sea

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Si A es nilpotente tA también lo es y las soluciones del sistema vienen dadas por la igualdad

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} ,$$

donde $c_1, \dots, c_n$ son constantes a determinar por las condiciones iniciales del problema.

Resuélvase, con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $x_3(0) = x_4(0) = 0$, el sistema

$$x'_1 = 0 , \quad x'_2 = x_1 , \quad x'_3 = x_2 , \quad x'_4 = x_3 .$$

6.25 Dadas $A \in M_{p\times m}(k)$, $B \in M_{m\times n}(k)$ pruébese $\operatorname{rg}(AB) \leq \min\{\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B\}$.

6.26 Dadas $A, B \in M_{m\times n}(k)$ pruébese $\operatorname{rg}(A+B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

6.27 Dadas $A, B \in M_n(k)$ pruébense:
(a) si A es invertible entonces $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B$;
(b) $\operatorname{rg}(AB) \geq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B - n$;
(c) $\operatorname{rg}(A^t A) = \operatorname{rg}(AA^t) = \operatorname{rg} A$.