Capítulo V

Tensores sobre un Espacio Vectorial

En todo este capítulo, k denotará un cuerpo y E será un k-espacio vectorial.

1 Aplicaciones Multilineales: Tensores

Definición 1.1 Dados k-espacios vectoriales $E_1, \ldots, E_n$ y F, diremos que una aplicación $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ es *multilineal* si es lineal en cada uno de sus argumentos, es decir, si cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in k$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ y

$$e_1 \in E_1 \ , \ \ldots \ , \quad e_{i-1} \in E_{i-1} \ , \quad e_i, e_i' \in E_i \ , \ \ldots \ , \quad e_{i+1} \in E_{i+1} \ , \ \ldots \ , \quad e_n \in E_n$$

se satisface

$$\begin{aligned} & T(e_1, \ldots, e_{i-1}, \, \lambda e_i + \mu e_i', e_{i+1}, \ldots, e_n) \\ & \qquad = \lambda \, T(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) + \mu \, T(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i', e_{i+1}, \ldots, e_n) \, . \end{aligned}$$

1.2 Dados espacios vectoriales $E_1, \ldots, E_n$, F denotaremos por $M(E_1, \ldots, E_n; F)$ el conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en F. Se tiene la siguiente definición de “suma” y “producto por escalares” en $M(E_1, \ldots, E_n; F)$:

$$\begin{array}{rcl} M(E_1, \ldots, E_n; F) \times M(E_1, \ldots, E_n; F) & \xrightarrow{+} & M(E_1, \ldots, E_n; F) \\ (T, \overline{T}) & \mapsto & T + \overline{T} \end{array} \quad ,$$

$$\begin{array}{rcl} k \times M(E_1, \ldots, E_n; F) & \xrightarrow{\cdot} & M(E_1, \ldots, E_n; F) \\ (\lambda, T) & \mapsto & \lambda \cdot T \end{array} \quad ,$$

donde $T + \overline{T}$ y $\lambda \cdot T$ son las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} E_1 \times \cdots \times E_n & \xrightarrow{T+\overline{T}} & F \\ (e_1, \ldots, e_n) & \longmapsto & (T + \overline{T})(e_1, \ldots, e_n) := T(e_1, \ldots, e_n) + \overline{T}(e_1, \ldots, e_n) \, , \\ E_1 \times \cdots \times E_n & \xrightarrow{\lambda \cdot T} & F \\ (e_1, \ldots, e_n) & \longmapsto & (\lambda \cdot T)(e_1, \ldots, e_n) := \lambda T(e_1, \ldots, e_n) \, , \end{array}$$

que son multilineales (compruébese). Es fácil probar que $(M(E_1,\dots,E_n;F),+)$ es un grupo abeliano y que el producto por escalares definido sobre él lo dota de estructura de k-espacio vectorial (compruébese).

Definición 1.3 Sean p y q dos naturales no simultaneamente nulos. Llamaremos *tensor p veces covariante y q veces contravariante* (ó *tensor de tipo* (p,q)) sobre E, a todo vector del espacio vectorial $M(\underbrace{E,\dots,E}_{p},\underbrace{E^*,\dots,E^*}_{q};k)$ (véase 1.2), es decir, a toda aplicación

$$\begin{array}{rcl} T_p^q : E^{\,p}\times E^{*q} & \longrightarrow & k \\ (e_1,\dots,e_p,\omega_1,\dots,\omega_q) & \longmapsto & T_p^q(e_1,\dots,e_p,\omega_1,\dots,\omega_q) \end{array}$$

que sea multilineal. El espacio vectorial de todos los tensores de tipo (p,q) sobre E lo denotaremos $T_p^q(E)$.

Definimos el espacio vectorial de los tensores de tipo (0,0) sobre E como el espacio vectorial de los escalares: $T_0^0(E)=k$.

Ejemplos 1.4 (a) Los tensores de tipo (1,0) son las formas lineales: $T_1^0(E)=M(E;k)=\mathrm{Hom}_k(E,k)=E^*$.

(b) Si E es de dimensión finita, entonces los tensores de tipo (0,1) son los vectores: $T_0^1(E)=\mathrm{Hom}_k(E^*,k)=E^{**}=E$.

(c) Los tensores de tipo (2,0) se denominan *métricas*: una métrica sobre E es una aplicación *bilineal* de $E\times E$ en k, es decir, una aplicación $T_2^0 : E\times E\to k$ que satisface

$$T_2^0(\lambda e+\mu e',v)=\lambda T_2^0(e,v)+\mu T_2^0(e',v)\,,\qquad T_2^0(e,\lambda v+\mu v')=\lambda T_2^0(e,v)+\mu T_2^0(e,v')$$

cualesquiera que sean los escalares $\lambda,\mu\in k$ y los vectores $e,e',v,v'\in E$.

(d) Si E es de dimensión finita, entonces los tensores de tipo (1,1) son los endomorfismos de E. En efecto, tenemos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{End}_k(E) & \to & T_1^1(E) \\ T & \mapsto & \varphi(T)\ , \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \varphi(T) : E\times E^* & \to & k \\ (e,\omega) & \mapsto & \varphi(T)(e,\omega) := \omega(T(e))\,. \end{array}$$

Es inmediato comprobar que $\varphi(T)$ es bilineal (es decir, $\varphi(T)\in T_1^1(E)$), y también es claro que φ es lineal. La inyectividad de φ es consecuencia de la siguiente conocida propiedad: dado un vector no nulo $e\in E$, existe $\omega\in E^*$ tal que $\omega(e)\neq 0$.

Veamos que φ es epiyectiva, para lo cual fijemos un tensor $T_1^1\in T_1^1(E)$; dado $e\in E$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} T_1^1(e,\cdot) : E^* & \to & k \\ \omega & \mapsto & T_1^1(e,\omega) \end{array}$$

es lineal (es decir, $T_1^1(e,\cdot)\in E^{**}$) y por lo tanto tenemos definida la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E^{**} \\ e & \mapsto & f(e) := T_1^1(e,\cdot)\,; \end{array}$$

la aplicación f es lineal (compruébese), y si consideramos el isomorfismo $\phi : E \to E^{**}$ del teorema de reflexividad (véase IV.1.7), entonces el endomorfismo $T = \phi^{-1} f : E \to E$ satisface $\varphi(T) = T_1^1$ (compruébese).

(e) Los tensores de tipo $(p, 0)$ se dice que son *puramente covariantes*, y los de tipo $(0, q)$ de denominan *puramente contravariantes*. De la definición se sigue la igualdad $T_0^q(E) = T_q^0(E^*)$, de modo que el estudio de los tensores puramente contravariantes sobre E queda reducido al estudio de los tensores puramente covariantes sobre E^*.

Definición 1.5 Sean $T_p^q \in T_p^q(E)$ y $T_{p'}^{q'} \in T_{p'}^{q'}(E)$. Se llama *producto tensorial* de T_p^q por $T_{p'}^{q'}$ al tensor $T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}$ de tipo $(p+p', q+q')$ definido del siguiente modo: dados $e_1, \ldots, e_{p+p'} \in E$ y $\omega_1, \ldots, \omega_{q+q'} \in E^*$,

$$\begin{aligned}\left(T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right)&(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, \omega_1, \ldots, \omega_q, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &:= T_p^q(e_1, \ldots, e_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) \cdot T_{p'}^{q'}(e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'})\,.\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio comprobar que la aplicación $T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}$ definida es efectivamente multilineal (es decir, $T_p^q \otimes T_{p'}^{q'} \in T_{p+p'}^{q+q'}(E)$).

Teorema 1.6 (i) *El producto tensorial de tensores es bilineal, es decir, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} T_p^q(E) \times T_{p'}^{q'}(E) & \to & T_{p+p'}^{q+q'}(E) \\ (T_p^q, T_{p'}^{q'}) & \mapsto & T_p^q \otimes T_{p'}^{q'} \end{array}$$

es bilineal.

(ii) *El producto tensorial de tensores es asociativo:* $T_p^q \otimes (T_{p'}^{q'} \otimes T_{p''}^{q''}) = (T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}) \otimes T_{p''}^{q''}$.

(iii) *El producto tensorial de tensores NO es conmutativo.*

Demostración. (i) Veamos, por ejemplo, la linealidad en el primer argumento. Dados $T_p^q, \overline{T}_p^q \in T_p^q(E)$, $\lambda, \mu \in k$ y $T_{p'}^{q'} \in T_{p'}^{q'}(E)$ tenemos

$$\begin{aligned}&\left[\left(\lambda T_p^q + \mu \overline{T}_p^q\right) \otimes T_{p'}^{q'}\right](e_1, \ldots, e_{p+p'}, \omega_1, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &\quad = \left(\lambda T_p^q + \mu \overline{T}_p^q\right)(e_1, \ldots, e_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) \cdot T_{p'}^{q'}(e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &\quad = \left[\lambda T_p^q(e_1, \ldots, e_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) + \mu \overline{T}_p^q(e_1, \ldots, e_p, \omega_1, \ldots, \omega_q)\right] \\ &\qquad\quad \cdot T_{p'}^{q'}(e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &\quad = \lambda T_p^q(e_1, \ldots, e_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) T_{p'}^{q'}(e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &\qquad\quad + \mu \overline{T}_p^q(e_1, \ldots, e_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) T_{p'}^{q'}(e_{p+1}, \ldots, e_{p+p'}, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &\quad = \lambda\left(T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right)(e_1, \ldots, e_{p+p'}, \omega_1, \ldots, \omega_{q+q'}) + \mu\left(\overline{T}_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right)(e_1, \ldots, e_{p+p'}, \omega_1, \ldots, \omega_{q+q'}) \\ &\quad = \left[\lambda\left(T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right) + \mu\left(\overline{T}_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right)\right](e_1, \ldots, e_{p+p'}, \omega_1, \ldots, \omega_{q+q'})\,,\end{aligned}$$

y lo anterior cualesquiera que sean $e_1, \dots, e_{p+p'} \in E$ y $\omega_1, \dots, \omega_{q+q'} \in E^*$, por lo tanto

$$\left(\lambda T_p^q + \mu \overline{T}_p^q\right) \otimes T_{p'}^{q'} = \lambda \left(T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right) + \mu \left(\overline{T}_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right) .$$

De igual modo se probaría la linealidad en el segundo argumento, es decir:

$$T_p^q \otimes \left(\lambda T_{p'}^{q'} + \mu \overline{T}_{p'}^{q'}\right) = \lambda \left(T_p^q \otimes T_{p'}^{q'}\right) + \mu \left(T_p^q \otimes \overline{T}_{p'}^{q'}\right) .$$

(ii) La demostración de este apartado se sigue inmediatamente de la definición.

(iii) Queda como ejercicio poner ejemplos en los que se vea que, efectivamente, el producto tensorial no es conmutativo. ∎

Observación **1.7** En la definición de producto tensorial de tensores no hemos impuesto condiciones a los naturales p, q, p' y q' que indican los tipos, por lo que es preciso que hagamos algunas aclaraciones.

Si $(p,q) = (0,0)$ entonces $T_p^q(E) = k$, y dados $\lambda \in k$ y $T_{p'}^{q'} \in T_{p'}^{q'}$ definimos $\lambda \otimes T_{p'}^{q'}$ como el tensor $\lambda T_{p'}^{q'}$, que es de tipo $(0+p', 0+q') = (p', q')$; es decir, en este caso la aplicación

$$\begin{array}{rcl} T_0^0(E) \times T_{p'}^{q'}(E) & \to & T_{p'}^{q'}(E) \\ (\lambda, T_{p'}^{q'}) & \mapsto & \lambda \otimes T_{p'}^{q'} = \lambda T_{p'}^{q'} \end{array}$$

es el producto por escalares que dota a $T_{p'}^{q'}(E)$ de estructura de k-espacio vectorial. Del mismo modo, si $(p', q') = (0,0)$, entonces definimos $T_p^q \otimes \lambda = \lambda T_p^q$.

Es fácil comprobar que el teorema 1.6 sigue siendo válido cuando $(p,q) = (0,0)$ ó $(p',q') = (0,0)$.

Definición 1.8 Sean $e \in E$ y $T_p^q \in T_p^q(E)$ con $p \geq 1$. Llamaremos *producto interior* (ó *contracción interior*) de e y T_p^q, al tensor $i_e T_p^q$ de tipo $(p-1, q)$ definido de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} i_e T_p^q : E^{p-1} \times E^{*q} & \to & k \\ (e_1, \dots, e_{p-1}, \omega_1, \dots, \omega_q) & \mapsto & T_p^q(e, e_1, \dots, e_{p-1}, \omega_1, \dots, \omega_q) . \end{array}$$

Proposición 1.9 *Para todo $p \geq 1$ es bilineal la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} E \times T_p^q(E) & \to & T_{p-1}^q(E) \\ (e, T_p^q) & \mapsto & i_e T_p^q \end{array} .$$

En particular, fijado $e \in E$ es lineal la aplicación $T_p^q(E) \to T_{p-1}^q(E)$, $T_p^q \mapsto i_e T_p^q$.

Demostración. Se deja como sencillo ejercicio. ∎

Ejemplo 1.10 Como $T_1^0(E) = E^*$, dados $e \in E$ y $\omega \in E^*$ podemos hacer el producto interior de e y ω obteniendo como resultado un tensor de tipo $(1-1, 0) = (0,0)$, es decir, un escalar: $i_e \omega = \omega(e) \in k$. En este caso la proposición 1.9 nos dice que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} E \times E^* & \to & k \\ (e, \omega) & \mapsto & i_e \omega = \omega(e) \end{array}$$

es bilineal, lo cual ya sabíamos: es lineal en el primer argumento porque, fijado $e \in E$, la aplicación "tomar valor en e" ($E^* \to k$, $\omega \mapsto \omega(e)$) es lineal; del mismo modo, es lineal en el segundo argumento porque, fijado $\omega \in E^*$, la aplicación $E \to k$, $e \mapsto \omega(e)$ es lineal.

2 Representación en Coordenadas

En toda esta sección supondremos que el espacio vectorial E tiene dimensón finita igual a n, y que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es su base dual.

Lema 2.1 *Sean p y q naturales no simultáneamente nulos. Para que dos tensores de tipo (p, q) sobre E sean iguales es suficiente con que coincidan sobre cualquier familia $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})$ de vectores y formas de las bases.*

Demostración. Sean $T_p^q, \overline{T}_p^q \in T_p^q(E)$ tensores que satisfacen

$$T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) = \overline{T}_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})$$

cualesquiera que sean $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$.

Sean ahora $v_1, \dots, v_p \in E$ y $\xi_1, \dots, \xi_q \in E^*$ y probemos la igualdad

$$T_p^q(v_1, \dots, v_p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \overline{T}_p^q(v_1, \dots, v_p, \xi_1, \dots, \xi_q)\,,$$

con lo que tendríamos $T_p^q = \overline{T}_p^q$. Los vectores $\{v_1, \dots, v_p\}$ admiten una expresión como combinación lineal de los vectores de la base de E:

$$v_l = \sum_{i_l=1}^{n} \lambda_{i_l} e_{i_l}\,, \qquad (l = 1, \dots, p\,; \quad \lambda_{i_l} \in k)\,;$$

análogamente, para las formas lineales $\{\xi_1, \dots, \xi_q\}$ tenemos:

$$\xi_h = \sum_{j_h=1}^{n} \mu_{j_h} \omega_{j_h}\,, \qquad (h = 1, \dots, q\,; \quad \mu_{j_h} \in k)\,.$$

De la definición de tensor (es decir, de aplicación multilineal) se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
T_p^q(v_1, \dots, v_p, \xi_1, \dots, \xi_q) &= T_p^q\left(\sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} \lambda_{i_p} e_{i_p}, \sum_{j_1=1}^{n} \mu_{j_1} \omega_{j_1}, \dots, \sum_{j_q=1}^{n} \mu_{j_q} \omega_{j_q}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{i_1} T_p^q\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{i_2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} \lambda_{i_p} e_{i_p}, \sum_{j_1=1}^{n} \mu_{j_1} \omega_{j_1}, \dots, \sum_{j_q=1}^{n} \mu_{j_q} \omega_{j_q}\right) \\
&= \sum_{i_1, i_2=1}^{n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} T_p^q\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{n} \lambda_{i_3} e_{i_3}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} \lambda_{i_p} e_{i_p}, \sum_{j_1=1}^{n} \mu_{j_1} \omega_{j_1}, \dots, \sum_{j_q=1}^{n} \mu_{j_q} \omega_{j_q}\right) \\
&= \quad \dots \quad = \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q=1}^{n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} \mu_{j_1} \dots \mu_{j_q} T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q=1}^{n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p} \mu_{j_1} \dots \mu_{j_q} \overline{T}_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) \\
&= \quad \dots \quad = \overline{T}_p^q(v_1, \dots, v_p, \xi_1, \dots, \xi_q)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.2 *Los tensores de la forma* $\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$ *donde* $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ *toman todos los valores entre* 1 *y* n *(es decir, siendo* $(i_1, \dots, i_p)$ *y* $(j_1, \dots, j_q)$ *variaciones con repetición de los elementos del conjunto* $\{1, \dots, n\}$ *tomados de* p *en* p *y de* q *en* q*, respectivamente), constituyen una base del* k*-espacio vectorial* $T_p^q(E)$*. Como consecuencia se sigue la igualdad*

$$\dim\left(T_p^q(E)\right) = (\dim E)^{p+q} = n^{p+q}\,.$$

Demostración. Recordemos que cada vector $e \in E$ "es una forma lineal sobre E^*":

$$\begin{aligned} e : E^* &\;\to\; k \\ \omega &\;\mapsto\; e(\omega) = \omega(e)\,; \end{aligned}$$

por lo tanto, dados $e, v \in E$ podemos hacer producto tensorial para obtener un tensor de tipo (0,2) sobre E:

$$\begin{aligned} e \otimes v : E^* \times E^* &\;\to\; k \\ (\omega, \omega') &\;\mapsto\; (e \otimes v)(\omega, \omega') = e(\omega)v(\omega')\,. \end{aligned}$$

En general, dados q vectores $v_1, \dots, v_q$ de E y p formas $\xi_1, \dots, \xi_p$ de E^* tenemos que el tensor $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q$ es de tipo (p, q):

$$\begin{aligned} E^{\,p} \times E^{*q} &\;\to\; k \\ (u_1, \dots, u_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q) &\;\mapsto\; (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q)(u_1, \dots, u_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q) \\ &\qquad = \xi_1(u_1) \cdots \xi_p(u_p) v_1(\zeta_1) \cdots v_q(\zeta_q)\,. \end{aligned}$$

Es fácil ver que para los vectores y formas lineales de las bases fijadas en E y E^* se satisface la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} &(\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q})(e_{l_1}, \dots, e_{l_p}, \omega_{h_1}, \dots, \omega_{h_q}) \\ &\qquad = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q) = (l_1, \dots, l_p, h_1, \dots, h_q)\,, \\ 0 & \text{si } (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q) \neq (l_1, \dots, l_p, h_1, \dots, h_q)\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Pasemos ya a demostrar el teorema, para lo cual denotemos por $\mathrm{VR}(n, p)$ y $\mathrm{VR}(n, q)$ los conjuntos de las variaciones con repetición de los elementos del conjunto $\{1, \dots, n\}$ tomados de p en p y de q en q, respectivamente.

Fijemos un tensor $T_p^q \in T_p^q(E)$; para cada pareja de variaciones $(i_1, \dots, i_p) \in \mathrm{VR}(n, p)$, $(j_1, \dots, j_q) \in \mathrm{VR}(n, q)$ definimos el escalar

$$\lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})\,,$$

y a partir de estos escalares definimos el nuevo tensor

$$\overline{T}_p^q = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \in \mathrm{VR}(n, p) \\ (j_1, \dots, j_q) \in \mathrm{VR}(n, q)}} \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\, \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}\,.$$

De la definición de $\overline{T}_p^q$ se sigue que cualesquiera que sean las variaciones $(i_1, \dots, i_p)$ y $(j_1, \dots, j_q)$ se satisface la igualdad

$$\overline{T}_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q}) = \lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}\,,$$

y por lo tanto de 2.1 obtenemos $T_p^q = \overline{T}_p^q$, con lo que hemos probado que una familia de generadore de $T_p^q(E)$ son los tensores

$$\Big\{\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \,:\, (i_1, \dots, i_p) \in \mathrm{VR}(n,p),\, (j_1, \dots, j_q) \in \mathrm{VR}(n,q)\Big\}. \tag{2.1}$$

Supongamos ahora que tenemos una combinación lineal de los tensores de la familia (2.1) igualada a cero,

$$\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_p) \in \mathrm{VR}(n,p) \\ (j_1,\dots,j_q) \in \mathrm{VR}(n,q)}} \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\, \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} = 0\,;$$

entonces se comprueba fácilmente que cualesquiera que sean las variaciones $(i_1, \dots, i_p)$ y $(j_1, \dots, j_q)$ se satisface $\lambda_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = 0$, lo que termina la demostración. ∎

Observación **2.3** En la demostración del teorema 2.2 hemos obtenido la expresión de los tensores de $T_p^q(E)$ como combinación lineal de los tensores de la base (2.1): dado $T_p^q \in T_p^q(E)$,

$$T_p^q = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_p) \in \mathrm{VR}(n,p) \\ (j_1,\dots,j_q) \in \mathrm{VR}(n,q)}} \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\, \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$$

donde $\lambda_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = T_p^q(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_q})$.

Ejemplos 2.4 (Véanse los ejemplos 1.4.)

(a) Como $T_1^0(E) = E^*$, el teorema 2.2 nos dice que una base de E^* es $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ (obsérvese que $\mathrm{VR}(n,1) = \{1, \dots, n\}$); además, dada una forma $\omega \in E^*$, su expresión como combinación lineal de la base es $\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ donde $\lambda_i = \omega(e_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ (como ya sabíamos).

(b) Por ser E de dimensión finita tenemos $T_0^1(E) = E$, y el teorema 2.2 dice que una base de E es $\{e_1, \dots, e_n\}$; además, dado $e \in E$ se satisface

$$e = e(\omega_1)e_1 + \cdots + e(\omega_n)e_n = \omega_1(e)e_1 + \cdots + \omega_n(e)e_n$$

(también lo sabíamos ya).

(c) Consideremos ahora el espacio vectorial de las métricas sobre E, $T_2^0(E)$, del cual una base es (según 2.2) la familia de tensores

$$\{\omega_i \otimes \omega_j : i, j \in \{1, \dots, n\}\}\,.$$

Dada una métrica $T_2^0 \in T_2^0(E)$ se satisface $T_2^0 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j)$, donde $\lambda_{ij} = T_2^0(e_i, e_j)$. Las coordenadas de una métrica se utilizan de la siguiente manera: Sea $A = (\lambda_{ij}) \in M_n(k)$ la matriz de las coordenadas de T_2^0; dados vectores $u, v \in E$, si $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ y $v = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$, entonces

$$T_2^0(u,v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\;;$$

para probar la anterior igualdad basta tener en cuenta que T_2^0 es bilineal. La matriz $A = (\lambda_{ij}) = (T_2^0(e_i, e_j))$ se denomina *matriz de la métrica T_2^0 en la base* $\{e_1, \dots, e_n\}$.

(d) Por ser E de dimensión finita tenemos $T_1^1(E) = \mathrm{End}_k(E)$, y según 2.2 una base del espacio vectorial $\mathrm{End}_k(E)$ es la familia de tensores

$$\{\omega_i \otimes e_j : i, j \in \{1, \dots, n\}\}\,.$$

Fijemos un endomorfismo $T : E \to E$ e identifiquémoslo con el tensor T_1^1 que le corresponde según la igualdad $T_1^1(E) = \mathrm{End}_k(E)$,

$$\begin{aligned} T_1^1 : E \times E^* \quad &\to k \\ (e, \omega) \quad &\mapsto \quad T_1^1(e, \omega) = \omega(T(e))\,; \end{aligned}$$

veamos cuáles son las coordenadas del endomorfismo T (es decir, las coordenadas del tensor T_1^1): $T_1^1 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^j(\omega_i \otimes e_j)$ donde $\lambda_i^j = T_1^1(e_i, \omega_j) = \omega_j(T(e_i)) =$ coordenada j-ésima de $T(e_i)$ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, es decir, si $T(e_i) = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$, entonces $\lambda_i^j = \omega_j(T(e_i)) = a_{ji}$; concluyendo, $(\lambda_i^j) = (a_{ji})$ es la matriz del endomorfismo T en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.[1]

Obsérvese que el tensor $\omega_i \otimes e_j$ de la base se corresponde con el endomorfismo $T_{ji} : E \to E$ determinado por las condiciones $T_{ji}(e_i) = e_j$ y $T_{ji}(e_h) = 0$ para todo $h \neq i$ (véase la sección III.2).

2.5 (Convenio de notación de Einstein) Debido a la aparatosa notación de la teoría de tensores suele emplearse el llamado *convenio de notación de Einstein*, según el cual, *siempre que a un mismo lado de la igualdad de una fórmula aparezca un índice repetido, se entiende que se está sumando sobre todos los valores que toma dicho índice.*

Por ejemplo, la fórmula $T(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\bar{e}_i$, que define la matriz de una aplicación lineal respecto de una pareja de bases, se escribirá usando el convenio de Einstein simplemente como $T(e_j) = a_{ij}\bar{e}_i$, pues como el índice i está repetido a la derecha de la igualdad se entiende que se suma sobre los valores $i = 1, \dots, n$.

Si T_2^0 es una métrica sobre E y $A = (a_{ij})$ es la mariz de T_2^0 en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E (es decir, $a_{ij} = T_2^0(e_i, e_j)$), entonces T_2^0 viene dada por la fórmula

$$T_2^0\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i a_{ij} \beta_j$$

(véase el ejemplo (c) de 2.4); usando el convenio descrito la anterior fórmula se escribirá

$$T_2^0(\alpha_i e_i, \beta_j e_j) = \alpha_i a_{ij} \beta_j\,.$$

Por último, la expresión

$$T_p^q = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \in \mathrm{VR}(n,p) \\ (j_1, \dots, j_q) \in \mathrm{VR}(n,q)}} \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\ \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$$

se escribirá $T_p^q = \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}\ \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$.

[1] Sale que la matriz de T es (a_{ji}) en vez de (a_{ij}), porque en el ejemplo hemos llamado i al índice que indica las columnas y j al que indica las filas, al contrario de como hicimos cuando dimos la definición de matriz de un endomorfismo.

2.6 (Cambios de base) Veamos ahora cómo cambian las coordenadas de un tensor al cambiar la base, para lo cual usaremos el convenio de notación de Einstein.

Sea $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ otra base de E y $\{\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n\}$ su base dual, y sea $C = (c_{hi})$ la matriz de cambio de la base nueva a la base antigua, es decir, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la columna i-ésima de C son las coordenadas del vector $\bar{e}_i$ en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (como siempre, el primer índice indica la fila y el segundo índice indica la columna):

$$\bar{e}_i = c_{hi} e_h \qquad \text{(convenio de notación)}\,.$$

Igual que en el ejemplo (d) de 2.4, escribamos $c_{hi} = c_i^h$, de modo que el superíndice indique la fila y el subíndice indique la columna.

Si denotamos $B = C^{-1}$, entonces la matriz de cambio de la base $\{\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n\}$ a la base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es $B^t = (C^{-1})^t$ (véanse III.3.2 y IV.4.3), es decir, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, la "fila" j-ésima de $B = (b_{jl})$ son las coordenadas del vector $\bar{\omega}_j$ en la base $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$:

$$\bar{\omega}_j = b_{jl}\omega_l = b_l^j \omega_l \qquad \text{(convenio de notación)}\,.$$

Sean ahora $T_p^q \in T_p^q(E)$, $\{\lambda_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}\}$ las coordenadas de T_p^q en la base $\{\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}\}$, y $\{\overline{\lambda}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}\}$ las coordenadas de T_p^q en la base $\{\bar{\omega}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\omega}_{i_p} \otimes \bar{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \bar{e}_{j_q}\}$; la relación entre las coordenadas de T_p^q en dichas bases es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} &= T_p^q(\bar{e}_{i_1}, \ldots, \bar{e}_{i_p}, \bar{\omega}_{j_1}, \ldots, \bar{\omega}_{j_q}) \\
&= T_p^q(c_{i_1}^{h_1} e_{h_1}, \ldots, c_{i_p}^{h_p} e_{h_p}, b_{l_1}^{j_1}\omega_{l_1}, \ldots, b_{l_q}^{j_q}\omega_{l_q}) \\
&= c_{i_1}^{h_1} \cdots c_{i_p}^{h_p}\, b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_q}^{j_q}\, T_p^q(e_{h_1}, \ldots, e_{h_p}, \omega_{l_1}, \ldots, \omega_{l_q}) \\
&= c_{i_1}^{h_1} \cdots c_{i_p}^{h_p}\, b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_q}^{j_q}\, \lambda_{h_1 \ldots h_p}^{l_1 \ldots l_q}\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.7 Veamos cómo cambia la matriz de una métrica T_2^0 sobre E al cambiar la base. Siguiendo con la notación de 2.6, sea $C = (c_i^h) = (c_{hi})$ la matriz de cambio de la base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$; si $A = (a_{ij}) = (T_2^0(e_i, e_j))$ es la matriz de T_2^0 en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\overline{A} = (\bar{a}_{ij}) = (T_2^0(\bar{e}_i, \bar{e}_j))$ es la matriz de T_2^0 en la base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, entonces de 2.6 se sigue

$$\bar{a}_{ij} = c_i^h c_j^l a_{hl} = \sum_{h,l=1}^{n} c_{hi} a_{hl} c_{lj}\,,$$

es decir, $\overline{A} = C^t A C$.

Ejercicio 2.8 Compárense las fórmulas dadas para el cambio de base en 2.6 con las ya estudiadas en los casos $T_0^1(E) = E$, $T_1^0(E) = E^*$ y $T_1^1(E) = \mathrm{End}_k(E)$.

3 Operación del Grupo Simétrico sobre los Tensores

En esta sección, el k-espacio vectorial E no necesariamente será de dimensión finita, p será un natural no nulo, $T_p(E)$ denotará el espacio vectorial de los tensores puramente covariantes de orden p sobre E, y S_p denotará el *grupo simétrico de orden p* (grupo de las permutaciones del conjunto $\{1,\dots,p\}$). En lo que sigue supondremos que el lector conoce las propiedades elementales del grupo S_p (véase [8]).

En esta sección estudiaremos cómo opera S_p en los tensores puramente covariantes de orden p sobre E; dicha operación hace que en $T_p(E)$ haya dos clases distinguidas de tensores: los simétricos y los hemisimétricos. Aquí definiremos los primeros, dejando el estudio detallado de los segundos para la próxima sección.

3.1 Para cada permutación $\sigma \in S_p$ y cada tensor $T_p \in T_p(E)$ definimos la aplicación ${}^{\sigma}T_p$ siguiente:

$$\begin{array}{rcl} {}^{\sigma}T_p : E^p & \to & k \\ (e_1,\dots,e_p) & \mapsto & {}^{\sigma}T_p(e_1,\dots,e_p) := T_p(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(p)})\,; \end{array}$$

${}^{\sigma}T_p$ es una aplicación multilineal (compruébese) y por lo tanto tenemos

$$\begin{array}{rcl} S_p \times T_p(E) & \to & T_p(E) \\ (\sigma, T_p) & \mapsto & {}^{\sigma}T_p \quad . \end{array} \tag{3.1}$$

Teorema 3.2 (i) *La aplicación* (3.1) *es lineal en su segundo argumento, es decir, dados $T_p, \overline{T}_p \in T_p(E)$, $\lambda, \mu \in k$ y $\sigma \in S_p$ se satisface*

$${}^{\sigma}\Big(\lambda T_p + \mu \overline{T}_p\Big) = \lambda\, {}^{\sigma}T_p + \mu\, {}^{\sigma}\overline{T}_p\,.$$

(ii) *La aplicación* (3.1) *es una* operación a la izquierda *del grupo S_p sobre $T_p(E)$; es decir, dados $T_p \in T_p(E)$ y $\rho, \sigma \in S_p$ se satisface*

$${}^{\rho\sigma}T_p = {}^{\rho}({}^{\sigma}T_p)\,.$$

(iii) *Cualesquiera que sean las formas lineales $\omega_1,\dots,\omega_p \in E^*$ y la permutación $\sigma \in S_p$ se satisface*

$$\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)} = {}^{\sigma^{-1}}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)\,. \tag{3.2}$$

Demostración. (i) Es inmediato y se deja como ejercicio.

(ii) Sean $T_p \in T_p(E)$ y $\sigma \in S_p$. Si dados vectores $e_1,\dots,e_p \in E$ denotamos $u_1 = e_{\rho(1)},\dots,u_p = e_{\rho(p)}$, entonces para cada $i \in \{1,\dots,p\}$ será $u_{\sigma(i)} = e_{\rho(\sigma(i))} = e_{\rho\sigma(i)}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} {}^{\rho}({}^{\sigma}T_p)(e_1,\dots,e_p) &= {}^{\sigma}T_p(e_{\rho(1)},\dots,e_{\rho(p)}) = {}^{\sigma}T_p(u_1,\dots,u_p) \\ &= T_p(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)}) = T_p(e_{\rho\sigma(1)},\dots,e_{\rho\sigma(p)}) \\ &= {}^{\rho\sigma}T_p(e_1,\dots,e_p)\,. \end{aligned}$$

(iii) Dados $e_1,\dots,e_p \in E$ tenemos

$$\Big(\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}\Big)(e_1,\dots,e_p) = \omega_{\sigma(1)}(e_1)\cdots\omega_{\sigma(p)}(e_p) = (*)\,;$$

ahora, como el producto en k es conmutativo, podemos reordenar los factores de $(*)$ de menor a mayor en los índices de las formas lineales y obtenemos

$$(*) = \omega_1(e_{\sigma^{-1}(1)})\cdots\omega_p(e_{\sigma^{-1}(p)}) = {}^{\sigma^{-1}}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)(e_1,\dots,e_p)\,. \quad \blacksquare$$

Definición 3.3 Dado $p \geq 1$, diremos que un tensor $T_p \in T_p(E)$ es *simétrico* si para toda permutación $\sigma \in S_p$ se satisface ${}^\sigma T_p = T_p$, es decir, si cualquiera que sea la familia $e_1, \dots, e_p$ de vectores se satisface $T_p(e_1, \dots, e_p) = T_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ para toda reordenación (permutación) $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}$ de dicha familia.

El conjunto de los tensores de $T_p(E)$ que son simétricos lo denotaremos $S_p(E)$, y es fácil comprobar que $S_p(E)$ es un subespacio vectorial de $T_p(E)$. Por definición se toma $S_0(E) = T_0(E) = K$.

3.4 Sea $T_p \in T_p(E)$. Si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ es una descomposición de una permutación $\sigma \in S_p$ como producto de trasposiciones, de 3.2 (ii) se sigue la igualdad

$$ {}^\sigma T_p = {}^{\tau_1 \cdots \tau_r} T_p = {}^{\tau_1} (\cdots {}^{\tau_{r-1}} ({}^{\tau_r} T_p) \cdots) \ ; $$

por tanto: T_p es simétrico si y sólo si ${}^\tau T_p = T_p$ para toda trasposición τ de S_p.

Es decir, para comprobar que T_p es simétrico basta ver que, cualesquiera que sean $i, j \in \{1, \dots, p\}$ distintos, se satisface

$$ T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_i}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_j}, \dots, e_p) = T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_j}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_i}, \dots, e_p) $$

para toda familia de vectores $e_1, \dots, e_p$, ya que el miembro de la derecha de la anterior igualdad es $T_p^\tau(e_1, \dots, e_p)$, donde τ es la trasposición que intercambia j e i.

Por ejemplo, una métrica T_2 sobre E es simétrica si cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface $T_2(e, v) = T_2(v, e)$.

4 Tensores Hemisimétricos

Definición 4.1 Sea $p \geq 2$ y sea $T_p \in T_p(E)$. Diremos que T_p es *hemisimétrico* (ó *alternado*) si satisface la siguiente propiedad: si en una familia $e_1, \dots, e_p$ de p vectores de E hay dos iguales, entonces $T_p(e_1, \dots, e_p) = 0$.

Se comprueba fácilmente que el conjunto de los tensores hemisimétricos de $T_p(E)$ es un subespacio vectorial de $T_p(E)$, el cual denotaremos $\Lambda_p(E)$. Por definición se toma $\Lambda_1(E) = T_1(E) = E^*$ y $\Lambda_0(E) = T_0(E) = k$.

Lema 4.2 *Sean $p \geq 2$ y $T_p \in T_p(E)$.*

Si T_p es hemisimétrico, entonces cualquiera que sea la permutación $\sigma \in S_p$ se satisface ${}^\sigma T_p = \mathrm{sig}(\sigma) T_p$ (donde $\mathrm{sig}(\sigma)$ denota el signo de σ).

El recíproco es cierto cuando la característica del cuerpo k es distinta de 2 (es decir, cuando $2 = 1 + 1$ es distinto de cero en k).

Demostración. Por las propiedades del grupo simétrico bastará probar que ${}^\tau T_p = -T_p$ para toda trasposición τ de S_p (véase 3.4). Sean índices $i, j \in \{1, \dots, p\}$ con $i < j$ y consideremos la trasposición τ que intercambia dichos índices; dados vectores $e_1, \dots, e_p \in E$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= T_p(e_1, \dots, e_i \overset{\overset{i}{\downarrow}}{+} e_j, \dots, e_i \overset{\overset{j}{\downarrow}}{+} e_j, \dots, e_p) \\
&= T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_i}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_i}, \dots, e_p) + T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_i}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_j}, \dots, e_p) \\
&\quad + T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_j}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_i}, \dots, e_p) + T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_j}, \dots \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_j}, \dots, e_p) \\
&= 0 + T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_i}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_j}, \dots, e_p) + T_p(e_1, \dots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{e_j}, \dots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{e_i}, \dots, e_p) + 0 \\
&= T_p(e_1, \dots, e_p) + {}^{\tau}T_p(e_1, \dots, e_p)\,,
\end{aligned}$$

por lo tanto ${}^{\tau}T_p(e_1, \dots, e_p) = -T_p(e_1, \dots, e_p)$.

Supongamos ahora que la característica de k es distinta de 2, y que para toda trasposición τ de S_p se satisface ${}^{\tau}T_p = -T_p$. Sean $e_1 \dots, e_p \in E$ tales que existen $i, j \in \{1, \dots, p\}$ con $i \neq j$ y $e_i = e_j$; si τ es la trasposición de S_p que intercambia j e i, entonces

$$-T_p(e_1, \dots, e_p) = {}^{\tau}T_p(e_1, \dots, e_p) = T_p(e_1, \dots, e_p)\,,$$

es decir, $2\,T_p(e_1, \dots, e_p) = 0$ y por lo tanto $T_p(e_1, \dots, e_p) = 0$. ∎

Definición 4.3 Sea $p \geq 2$. Se define el *operador de hemisimetrización* sobre el espacio de tensores $T_p(E)$ como la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}
h_p : T_p(E) &\;\to\; T_p(E) \\
T_p &\;\mapsto\; h_p(T_p) := \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}T_p\,.
\end{aligned}$$

Por definición se toma $h_p : T_p(E) \to T_p(E)$ como la identidad para $p \in \{0, 1\}$.

Teorema 4.4 *El operador de hemisimetrización tiene las siguientes propiedades:*

(i) *Es lineal y valora en $\Lambda_p(E)$.*

(ii) *Si $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$, entonces $h_p(\Omega_p) = p!\,\Omega_p$.*

(iii) *Dados $T_p \in T_p(E)$ y $T_q \in T_q(E)$ se satisface*

$$h_{p+q}(T_p \otimes T_q) = (-1)^{pq} h_{p+q}(T_q \otimes T_p)\,.$$

(iv) *Si $T_p \in \operatorname{Ker} h_p$, entonces cualquiera que sea $T_q \in T_q(E)$ se tiene $T_p \otimes T_q \in \operatorname{Ker} h_{p+q}$.*

(v) *Si $\omega_1, \dots, \omega_p \in E^*$, entonces $h_p(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, \omega_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{\sigma(p)}$.*

Demostración. Haremos las demostraciones para $p \geq 2$, ya que para $p = 0$ y $p = 1$ son triviales (por la propia definición de h_0 y h_1).

(i) La demostración de que h_p es lineal es sencilla y se deja como ejercicio. Sea $T_p \in T_p(E)$ y veamos que $h_p(T_p) \in \Lambda_p(E)$. Consideremos vectores $e_1, \dots, e_p \in E$ tales que existen índices distintos $i, j \in \{1, \dots, p\}$ con $e_i = e_j$; si τ es la trasposición de S_p que intercambia dichos índices, entonces cualquiera que sea $\sigma \in S_p$ se satisface

$$^{\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p) = {}^{\sigma}T_p(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}) = {}^{\tau\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p)\,.$$

Ahora, teniendo en cuenta que la aplicación $S_p \to S_p$, $\sigma \mapsto \tau\sigma$, es una biyección que hace corresponder las permutaciones pares con las permutaciones impares, obtenemos que S_p es la unión disjunta de los dos conjuntos

$$\begin{aligned} A_p &= \{\text{permutaciones pares de } S_p\}\,, \\ \{\tau\sigma : \sigma \in A_p\} &= \{\text{permutaciones impares de } S_p\}\,. \end{aligned}$$

De todo lo dicho (y teniendo en cuenta que $\operatorname{sig}(\tau\sigma) = \operatorname{sig}(\tau)\operatorname{sig}(\sigma) = -\operatorname{sig}(\sigma)$) se sigue:

$$\begin{aligned} h_p(T_p)(e_1, \dots, e_p) &= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p) \\ &= \sum_{\sigma \in A_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p) + \sum_{\sigma \in A_p} \operatorname{sig}(\tau\sigma)\, {}^{\tau\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p) \\ &= \sum_{\sigma \in A_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p) - \sum_{\sigma \in A_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\tau\sigma}T_p(e_1, \dots, e_p) = 0\,. \end{aligned}$$

(ii) Ejercicio.

(iii) Sean $p, q > 0$, $T_p \in \mathcal{T}_p(E)$ y $T_q \in \mathcal{T}_q(E)$. Consideremos la permutación $\varphi \in S_{p+q}$ siguiente

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+p \\ p+1 & \dots & p+q & 1 & \dots & p \end{pmatrix},$$

y para cada permutación $\sigma \in S_{p+q}$ denotemos $\bar{\sigma} = \sigma\varphi$.

Dados vectores $e_1 \dots, e_{p+q} \in E$ tenemos

$$\begin{aligned} h_{p+q}(T_p \otimes T_q)(e_1, \dots, e_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sig}(\sigma)\, (T_p \otimes T_q)(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p+q)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sig}(\sigma)\, T_p(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) T_q(e_{\sigma(p+1)}, \dots, e_{\sigma(p+q)}) \\ &= \sum_{\bar{\sigma} \in S_{p+q}} \operatorname{sig}(\bar{\sigma}\varphi^{-1})\, T_p(e_{\bar{\sigma}(q+1)}, \dots, e_{\bar{\sigma}(q+p)}) T_q(e_{\bar{\sigma}(1)}, \dots, e_{\bar{\sigma}(q)}) \\ &= \operatorname{sig}(\varphi^{-1}) \sum_{\bar{\sigma} \in S_{p+q}} \operatorname{sig}(\bar{\sigma})\, (T_q \otimes T_p)(e_{\bar{\sigma}(1)}, \dots, e_{\bar{\sigma}(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} h_{p+q}(T_p \otimes T_q)(e_1, \dots, e_{p+q})\,, \end{aligned}$$

ya que $\operatorname{sig}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sig}(\varphi) = (-1)^{pq}$ (compruébese).

(iv) Sean $T_p \in \mathcal{T}_p(E)$ y $T_q \in \mathcal{T}_q(E)$ tales que $h_p(T_p) = 0$. Consideremos cada permutación de S_p como una permutación de S_{p+q} que deja fijos los q últimos elementos, de modo que entonces S_p es un subgrupo de S_{p+q}. Las clases de equivalencia de la relación que S_p (como subgrupo) define en S_{p+q} forman una partición de S_{p+q}: si denotamos por $C_1, \dots, C_r$ dichas clases, entonces $S_{p+q} = C_1 \cup \dots \cup C_r$ y $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Tenemos

$$h_{p+q}(T_p \otimes T_q) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}(T_p \otimes T_q) = \sum_{\sigma \in C_1} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}(T_p \otimes T_q) + \dots + \sum_{\sigma \in C_r} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}(T_p \otimes T_q)\,.$$

Veamos que cada uno de los anteriores sumandos se anula. Fijada un índice $i \in \{1, \dots, r\}$ y un representante $\rho_i \in S_{p+q}$ de la clase C_i, entonces $C_i = \{\rho_i \bar{\sigma} : \bar{\sigma} \in S_p\}$ y por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in C_i} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}(T_p \otimes T_q) &= \sum_{\bar{\sigma} \in S_p} \operatorname{sig}(\rho_i \bar{\sigma})\, {}^{\rho_i \bar{\sigma}}(T_p \otimes T_q) = \operatorname{sig}(\rho_i)\, {}^{\rho_i}\Bigg(\sum_{\bar{\sigma} \in S_p} \operatorname{sig}(\bar{\sigma})\, {}^{\bar{\sigma}}(T_p \otimes T_q) \Bigg) \\
&= \operatorname{sig}(\rho_i)\, {}^{\rho_i}\Bigg(\sum_{\bar{\sigma} \in S_p} \operatorname{sig}(\bar{\sigma})\, ({}^{\bar{\sigma}}T_p \otimes T_q) \Bigg) = \operatorname{sig}(\rho_i)\, {}^{\rho_i}\Bigg(\Bigg(\sum_{\bar{\sigma} \in S_p} \operatorname{sig}(\bar{\sigma})\, {}^{\bar{\sigma}}T_p \Bigg) \otimes T_q \Bigg) \\
&= \operatorname{sig}(\rho_i)\, {}^{\rho_i}\Big(h_p(T_p) \otimes T_q \Big) = 0 \,,
\end{aligned}$$

ya que $h_p(T_p) = 0$ por hipótesis. (En las anteriores igualdades hemos usado la linealidad de la operación de las permutaciones sobre los tensores (véase 3.2), y la siguiente propiedad de fácil comprobación: si $\bar{\sigma} \in S_p$, entonces ${}^{\bar{\sigma}}(T_p \otimes T_q) = {}^{\bar{\sigma}}T_p \otimes T_q$.)

(v) Sean $\omega_1, \dots, \omega_p \in E^*$. Teniendo en cuenta la igualdad (3.2) y que la aplicación $S_p \to S_p$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$, es una biyección, obtenemos

$$\begin{aligned}
h_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) &= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, {}^{\sigma}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma^{-1})\, {}^{\sigma^{-1}}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)} \,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observación **4.5** La aplicación lineal h_p la hemos definido de $T_p(E)$ en $T_p(E)$ pero hemos visto que valora en $\Lambda_p(E)$, es decir, $\operatorname{Im} h_p \subseteq \Lambda_p(E)$; por este motivo en adelante siempre consideraremos dicha aplicación como

$$h_p : T_p(E) \to \Lambda_p(E) \,.$$

Teorema 4.6 *Supongamos que E tiene dimensión finita igual a n, y sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ su base dual.*

(i) *Si $1 \le p \le n$, entonces la familia de tensores hemisimétricos*

$$\Big\{ h_p(\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p}) \,:\, 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n \Big\}$$

es una base del espacio vectorial $\Lambda_p(E)$; por lo tanto se satisface $\dim(\Lambda_p(E)) = \binom{n}{p}$. Además, la expresión de un tensor $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$ en la anterior base es

$$\Omega_p = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \lambda_{i_1 \dots i_p}\; h_p(\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_p}) \,,$$

donde $\lambda_{i_1 \dots i_p} = \Omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$.

(ii) *Si $n < p$, entonces $\Lambda_p(E) = 0$.*

(iii) *Para todo p, la aplicación lineal $h_p : T_p(E) \to \Lambda_p(E)$ es epiyectiva.*

Demostración. (i) Si $p=1$, entonces es claro que $\{h_1(\omega_1),\dots,h_1(\omega_n)\}=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ es una base de $\Lambda_1(E)=E^*$. Supongamos que $2\le p\le n$ y sea $\Omega_p\in\Lambda_p(E)$. Según vimos en 2.3 se satisface

$$\begin{aligned}\Omega_p &= \sum_{(h_1,\dots,h_p)\in \mathrm{VR}(n,p)} \Omega_p(e_{h_1},\dots,e_{h_p})\,\omega_{h_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{h_p}\\ &= \sum_{\substack{(h_1,\dots,h_p)\in \mathrm{VR}(n,p)\\ h_i\neq h_j \text{ si } i\neq j}} \Omega_p(e_{h_1},\dots,e_{h_p})\,\omega_{h_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{h_p} = (*)\ ,\end{aligned}$$

ya que los sumandos correspondientes a variaciones $(h_1,\dots,h_p)$ con índices repetidos se anulan por ser Ω_p hemisimétrico. Ahora, si $(h_1,\dots,h_p)$ no tiene índices repetidos, entonces existen una permutación $\sigma\in S_p$ y una variación $(i_1,\dots,i_p)$ con $1\le i_1<\cdots<i_p\le n$, tales que $(h_1,\dots,h_p)=(i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(p)})$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\Omega_p(e_{h_1},\dots,e_{h_p})\,\omega_{h_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{h_p} &= \Omega_p(e_{i_{\sigma(1)}},\dots,e_{i_{\sigma(p)}})\,\omega_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_{\sigma(p)}}\\ &= \mathrm{sig}(\sigma)\,\Omega_p(e_{i_1},\dots,e_{i_p})\,{}^{\sigma^{-1}}\!(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p})\,.\end{aligned}$$

Además, habrá tantas variaciones $(h_1,\dots,h_p)$ sin índices repetidos en las que intervengan $i_1,\dots,i_p$ como permutaciones tiene S_p (es decir, como reordenaciones hay de $(i_1,\dots,i_p)$); por tanto

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\text{sumandos de } (*) \text{ en los que}\\ \text{intervienen los índices } i_1,\dots,i_p\end{pmatrix} &= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\Omega_p(e_{i_1},\dots,e_{i_p})\,{}^{\sigma^{-1}}\!(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p})\\ &= \Omega_p(e_{i_1},\dots,e_{i_p})\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma^{-1}}\!(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p})\\ &= \Omega_p(e_{i_1},\dots,e_{i_p})h_p(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p})\,.\end{aligned}$$

De todo lo dicho concluimos que

$$\Omega_p=(*)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}\Omega_p(e_{i_1},\dots,e_{i_p})h_p(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p})\,.$$

Lo anterior prueba que la familia de tensores $\{h_p(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p}) : 1\le i_1<\cdots<i_p\le n\}$ genera el espacio vectorial $\Lambda_p(E)$; para probar que dicha familia es libre basta tener en cuanta que, por ser $\{e_1,\dots,e_n\}$ y $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ bases duales una de la otra, se satisface la siguiente propiedad: cualesquiera que sean $1\le j_1<\cdots<j_p\le n$ y $1\le i_1<\cdots<i_p\le n$ se tiene

$$h_p(\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_p})(e_{j_1},\dots,e_{j_p})=\begin{cases}1 & \text{si } (i_1,\dots,i_p)=(j_1,\dots,j_p)\,,\\ 0 & \text{si } (i_1,\dots,i_p)\neq(j_1,\dots,j_p)\,.\end{cases}$$

(ii) Sean $\Omega_p\in\Lambda_p(E)$ y $v_1,\dots,v_p\in E$. Como $n<p$, necesariamente la familia $\{v_1,\dots,v_p\}$ no es libre y por lo tanto uno de sus vectores es combinación lineal del resto; supongamos, por comodidad en la notación, que es v_1 combinación lineal de $v_2,\dots,v_p$, es decir, $v_1=\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_pv_p$; entonces

$$\begin{aligned}\Omega_p(v_1,\dots,v_p)&=\Omega_p(\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_pv_p,v_2,\dots,v_p)\\ &=\lambda_2\Omega_p(v_2,v_2,\dots,v_p)+\lambda_3\Omega_p(v_3,v_2,v_3,\dots,v_p)+\cdots+\lambda_p\Omega_p(v_p,\dots,v_p)=0\,.\end{aligned}$$

(iii) La demostración de este apartado se deja como ejercicio. ∎

5 Producto Exterior

En toda esta sección supóndremos que el espacio vectorial E tiene dimensón finita igual a n. Entonces, según 4.6 (iii), la aplicación $h_p : T_p(E) \to \Lambda_p(E)$ es epiyectiva y por lo tanto el espacio vectorial $\Lambda_p(E)$ lo identificamos con el espacio vectorial cociente $T_p(E)/\operatorname{Ker} h_p$; por este motivo, si $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$ y $T_p \in T_p(E)$ son tales que $h_p(T_p) = \Omega_p$, entonces diremos que T_p *es un representante de* Ω_p.

Definición 5.1 Dados $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$ y $\Omega_q \in \Lambda_q(E)$, se define el *producto exterior* de Ω_p por Ω_q como el tensor hemisimétrico $\Omega_p \wedge \Omega_q \in \Lambda_{p+q}(E)$ definido por la igualdad

$$\Omega_p \wedge \Omega_p := h_{p+q}(T_p \otimes T_q)\,,$$

donde T_p y T_q son representantes de Ω_p y Ω_q, respectivamente. Veamos que la definición dada no depende de los representantes, es decir, sean $\overline{T}_p \in T_p(E)$ y $\overline{T}_q \in T_q(E)$ tales que $\Omega_p = h_p(\overline{T}_p)$ y $\Omega_q = h_q(\overline{T}_q)$, y probemos que $h_{p+q}(T_p \otimes T_q) = h_{p+q}(\overline{T}_p \otimes \overline{T}_q)$: por hipótesis tenemos $T_p - \overline{T}_p \in \operatorname{Ker} h_p$ y $T_q - \overline{T}_q \in \operatorname{Ker} h_q$, por lo que, según (iii) y (iv) de 4.4, se satisfacen $(T_p - \overline{T}_p) \otimes T_q \in \operatorname{Ker} h_{p+q}$ y $\overline{T}_p \otimes (T_q - \overline{T}_q) \in \operatorname{Ker} h_{p+q}$, es decir, $h_{p+q}(T_p \otimes T_q) = h_{p+q}(\overline{T}_p \otimes T_q) = h_{p+q}(\overline{T}_p \otimes \overline{T}_q)$.

Observaciones **5.2** (a) Si $\lambda \in \Lambda_0(E) = k$, entonces, dado un representante $T_q \in T_q(E)$ de un tensor hemisimétrico $\Omega_q \in \Lambda_q(E)$, tenemos

$$\lambda \wedge \Omega_q = h_{0+q}(\lambda \otimes T_q) = h_q(\lambda T_q) = \lambda h_q(T_q) = \lambda \Omega_q\,.$$

(b) Con la identificcación $\Lambda_p(E) = T_p(E)/\operatorname{Ker} h_p$, el producto exterior definido en $\Lambda_p(E)$ no es más que trasladar el producto tensorial de $T_p(E)$ al cociente $T_p(E)/\operatorname{Ker} h_p$, es decir, “el producto (exterior) de dos clases de equivalencia es igual a la clase del producto (tensorial) de los representantes”. Veremos que las propiedades que tiene el producto tensorial las hereda el producto exterior.

(c) Si la característica del cuerpo k es cero, entonces, dado $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$, en la igualdad $h_p(\Omega_p) = p!\,\Omega_p$ podemos dividir por $p!$ y obtenemos que un representante de Ω_p es $\frac{1}{p!}\,\Omega_p$; en particular tenemos

$$\Omega_p \wedge \Omega_p = h_{p+q}\left(\frac{1}{p!}\,\Omega_p \otimes \frac{1}{q!}\,\Omega_q\right) = \frac{1}{p!q!}\,h_{p+q}(\Omega_p \otimes \Omega_q)\,.$$

Proposición 5.3 (i) *El producto exterior es bilineal, es decir, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_p(E) \times \Lambda_q(E) & \to & \Lambda_{p+q}(E) \\ (\Omega_p, \Omega_q) & \mapsto & \Omega_p \wedge \Omega_q \end{array}$$

es bilineal.

(ii) *El producto exterior es asociativo:* $\Omega_p \wedge (\Omega_{p'} \wedge \Omega_{p''}) = (\Omega_p \wedge \Omega_{p'}) \wedge \Omega_{p''}$.

(iii) *El producto exterior es anti-conmutativo:* $\Omega_p \wedge \Omega_q = (-1)^{pq}\,(\Omega_q \wedge \Omega_p)$.

Demostración. Las demostraciones se siguen de la definición del producto exterior y de las propiedades del producto tensorial (véanse 1.6 y 4.4 (iii)). ∎

5.4 Por ser asociativo el producto exterior, dadas formas lineales $\omega_1, \dots, \omega_p \in E^*$ tenemos el tensor (véase 4.4 (v))

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = h_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}\,,$$

y cualquiera que sea $\sigma \in S_p$ se satisface

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(p)} = \operatorname{sig}(\sigma)\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\,.$$

Efectivamente, fijada una permutación $\sigma \in S_p$ la aplicación $S_p \to S_p$, $\rho \mapsto \rho\sigma^{-1}$, es una biyección, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(p)} = h_p(\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}) &= \sum_{\rho \in S_p} \operatorname{sig}(\rho)\, {}^{\rho}(\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}) \\
&= \sum_{\rho \in S_p} \operatorname{sig}(\rho)\, {}^{\rho\sigma^{-1}}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) \\
&= \operatorname{sig}(\sigma) \sum_{\rho \in S_p} \operatorname{sig}(\rho\sigma^{-1})\, {}^{\rho\sigma^{-1}}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) \\
&= \operatorname{sig}(\sigma)\, h_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \operatorname{sig}(\sigma)\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\,.
\end{aligned}$$

Además, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es su base dual, el teorema 4.6 dice que la familia de tensores hemisimétricos $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} : 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n\}$ es una base del espacio vectorial $\Lambda_p(E)$.

Ejercicios 5.5 (a) Dados vectores $v_1, \dots, v_p \in E$ pruébese la siguiente equivalencia: la familia $\{v_1, \dots, v_p\}$ es libre si y sólo si existe $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$ tal que $\Omega_p(v_1, \dots, v_p) \neq 0$.

(b) Para las formas lineales tenemos una propiedad similar a la (a): dadas formas lineales $\omega_1, \dots, \omega_p \in E^*$, la familia $\{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ es libre si y sólo si $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0$.

5.6 En el próximo teorema probaremos una propiedad muy importante del producto exterior, y para ello introduciremos una nueva notación que nos simplifique dicha demostración. Dado un vector $e \in E$ y un tensor $T_p \in T_p(E)$ (con $p > 0$), definimos el tensor $\widetilde{\imath}_e T_p \in T_{p-1}(E)$ por la siguiente fórmula: si $e_2, \dots, e_p \in E$, entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{\imath}_e T_p(e_2, \dots, e_p) &= T_p(e, e_2, \dots, e_p) - T_p(e_2, e, e_3, \dots, e_p) + \cdots + (-1)^{p-1} T_p(e_2, \dots, e_p, e) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} T_p(e_2, \dots, e_i, e, e_{i+1}, \dots, e_p)\,.
\end{aligned}$$

Denotemos $e_1 = e$ y, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, consideremos la permutación

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots p \\ 2 & 3 & \dots & i & 1 & i+1 & \dots p \end{pmatrix}$$

(donde para $i = 1$ es $\sigma_1 =$ identidad); entonces $\operatorname{sig}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$ (compruébese) y el sumando i-ésimo de $\widetilde{\imath}_e T_p(e_2, \dots, e_p)$ es

$$\begin{aligned}
(-1)^{i-1} T_p(e_2, \dots, e_i, e_1, e_{i+1}, \dots, e_p) &= \operatorname{sig}(\sigma_i)\, {}^{\sigma_i} T_p(e_1, e_2, \dots, e_p) \\
&= \operatorname{sig}(\sigma_i) \Big(i_{e_1}\, {}^{\sigma_i} T_p \Big)(e_2, \dots, e_p)\,;
\end{aligned}$$

por lo tanto, teniendo en cuenta la linealidad de la contracción interior por un vector (véase 1.9), obtenemos $\widetilde{\imath}_{e_1} T_p(e_2,\dots,e_p) = i_{e_1}\Big(\sum_{i=1}^p \operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\sigma_i}T_p\Big)(e_2,\dots,e_p)$, es decir,

$$\widetilde{\imath}_e T_p = i_e\left(\sum_{i=1}^p \operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\sigma_i}T_p\right).$$

La anterior igualdad prueba además que, efectivamente, $\widetilde{\imath}_e T_p$ es un tensor de tipo $(p-1,0)$ (porque es una combinación lineal de tensores de tipo $(p-1,0)$).

Lema 5.7 *Cualesquiera que sean $T_p \in T_p(E)$ y $e\in E$ se satisface*

$$h_{p-1}\Big(\widetilde{\imath}_e T_p\Big) = i_e h_p(T_p)\,.$$

Es decir, dados un tensor hemisimétrico Ω_p y un representante suyo T_p, para cada vector $e\in E$, el tensor $i_e\Omega_p$ también es hemisimétrico y un representante suyo es $\widetilde{\imath}_e T_p$.

Demostración. Fijemos $e\in E$ y $T_p\in T_p(E)$. Consideremos el grupo S_{p-1} como un subgrupo de S_p identificando S_{p-1} con las permutaciones de S_p que dejan fijo a 1, $S_{p-1}=\{\sigma\in S_p : \sigma(1)=1\}$, y para cada $i=1,\dots,p$ definamos $O_i=\{\sigma\in S_p : \sigma(i)=1\}$; es claro que $S_p = O_1\cup\dots\cup O_p$ y que $O_i\cap O_j=\emptyset$ si $i\neq j$, y por lo tanto $h_p(T_p)=\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma}T_p = \sum_{\sigma\in O_1}\operatorname{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma}T_p+\dots+\sum_{\sigma\in O_p}\operatorname{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma}T_p$. Ahora, si $\bar\sigma\in S_{p-1}$, entonces $\bar\sigma\sigma_i\in O_i$ (véase 5.6 para la definición de σ_i), de modo que la biyección $S_p\to S_p$, $\sigma\mapsto\sigma\sigma_i$, identifica O_i con S_{p-1} y obtenemos

$$\sum_{\sigma\in O_i}\operatorname{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma}T_p = \sum_{\bar\sigma\in S_{p-1}}\operatorname{sig}(\bar\sigma\sigma_i)\,{}^{\bar\sigma\sigma_i}T_p = \sum_{\bar\sigma\in S_{p-1}}\operatorname{sig}(\bar\sigma)\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\bar\sigma}\Big({}^{\sigma_i}T_p\Big)\,;$$

por lo tanto

$$i_e h_p(T_p) = i_e\Bigg[\sum_{\substack{\bar\sigma\,\in\, S_{p-1}\\ i\,=\,1,\dots,p}}\operatorname{sig}(\bar\sigma)\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\bar\sigma}\Big({}^{\sigma_i}T_p\Big)\Bigg].$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
h_{p-1}(\widetilde{\imath}_e T_p) &= h_{p-1}\left(i_e\left[\sum_{i=1}^p\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\sigma_i}T_p\right]\right) = \sum_{\bar\sigma\in S_{p-1}}\operatorname{sig}(\bar\sigma)\,{}^{\bar\sigma}\left(i_e\left[\sum_{i=1}^p\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\sigma_i}T_p\right]\right)\\
&= \sum_{\bar\sigma\in S_{p-1}}\operatorname{sig}(\bar\sigma)\,i_e\left({}^{\bar\sigma}\left[\sum_{i=1}^p\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\sigma_i}T_p\right]\right) = \sum_{\bar\sigma\in S_{p-1}}\operatorname{sig}(\bar\sigma)\,i_e\left[\sum_{i=1}^p\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\bar\sigma}\Big({}^{\sigma_i}T_p\Big)\right]\\
&= i_e\Bigg[\sum_{\substack{\bar\sigma\,\in\, S_{p-1}\\ i\,=\,1,\dots,p}}\operatorname{sig}(\bar\sigma)\operatorname{sig}(\sigma_i)\,{}^{\bar\sigma}\Big({}^{\sigma_i}T_p\Big)\Bigg],
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. (En las anteriores igualdades hemos usado que ${}^{\bar\sigma}(i_e[\dots]) = i_e({}^{\bar\sigma}[\dots])$ porque la permutación $\bar\sigma$ deja fijo a 1; también hemos usado que "elevar a una permutación es lineal" y que "el producto interior por un vector es lineal".) ▮

Lema 5.8 *Cualesquiera que sean $T_p \in T_p(E)$, $T_q \in T_q(E)$ y $e \in E$ se satisface*

$$\widetilde{\imath}_e(T_p \otimes T_q) = (\widetilde{\imath}_e T_p) \otimes T_q \; + \; (-1)^p T_p \otimes (\widetilde{\imath}_e T_q)\,.$$

Demostración. Dados $e_2, \ldots, e_{p+q} \in E$, tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\imath}_e(T_p \otimes T_q)(e_2, \ldots, e_{p+q}) = {} & (T_p \otimes T_q)(e, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}) \\ & + \;\ldots\; + (-1)^{p-1}(T_p \otimes T_q)(e_2, \ldots, e_p, e, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}) \\ & + (T_p \otimes T_q)(-1)^p(e_2, \ldots, e_{p+1}, e, e_{p+2}, \ldots, e_{p+q}) \\ & + \;\ldots\; + (-1)^{p+q-1}(T_p \otimes T_q)(e_2, \ldots, e_{p+q}, e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Big[T_p(e, e_2, \ldots, e_p) + \;\ldots\; + (-1)^{p-1}T_p(e_2, \ldots, e_p, e)\Big]T_q(e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}) \\ &\quad + (-1)^p T_p(e_2, \ldots, e_{p+1})\Big[T_q(e, e_{p+2}, \ldots, e_{p+q}) + \;\ldots\; + (-1)^{q-1}T_q(e_{p+2}, \ldots, e_{p+q}, e)\Big] \\ &= \Big[\Big(\widetilde{\imath}_e T_p\Big) \otimes T_q\Big](e_2, \ldots, e_{p+q}) + (-1)^p\Big[T_p \otimes \Big(\widetilde{\imath}_e T_q\Big)\Big](e_2, \ldots, e_{p+q}) \\ &= \Big[\Big(\widetilde{\imath}_e T_p\Big) \otimes T_q + (-1)^p T_p \otimes \Big(\widetilde{\imath}_e T_q\Big)\Big](e_2, \ldots, e_{p+q})\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 5.9 *La contracción interior por un vector es para el producto exterior una anti*-derivación, *es decir, dado $e \in E$, cualesquiera que sean $\Omega_p \in \Lambda_p(E)$ y $\Omega_q \in \Lambda_q(E)$ se satisface*

$$i_e(\Omega_p \wedge \Omega_q) = (i_e\Omega_p) \wedge \Omega_q \; + \; (-1)^p \Omega_p \wedge (i_e\Omega_q)\,.$$

Demostración. Dados representantes T_p y T_q de Ω_p y Ω_q, respectivamente, aplicando 5.7 y 5.8 obtenemos

$$\begin{aligned}i_e\Big(\Omega_p \wedge \Omega_q\Big) &= i_e h_{p+q}\Big(T_p \otimes T_q\Big) = h_{p+q-1}\Big[\widetilde{\imath}_e\Big(T_p \otimes T_q\Big)\Big] \\ &= h_{p+q-1}\Big[\Big(\widetilde{\imath}_e T_p\Big) \otimes T_q + (-1)^p T_p \otimes \Big(\widetilde{\imath}_e T_q\Big)\Big] \\ &= h_{p+q-1}\Big[\Big(\widetilde{\imath}_e T_p\Big) \otimes T_q\Big] \; + \; (-1)^p h_{p+q-1}\Big[T_p \otimes \Big(\widetilde{\imath}_e T_q\Big)\Big] \\ &= (i_e\Omega_p) \wedge \Omega_q \; + \; (-1)^p \Omega_p \wedge (i_e\Omega_q)\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Corolario 5.10 *Cualesquiera que sean $e \in E$ y $\omega_1, \ldots, \omega_p \in E^*$ se satisface*

$$i_e(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\omega_i(e)\cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_p\,,$$

donde $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_p \; := \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_p$.

Demostración. Probémoslo por inducción sobre p, siendo inmediato para $p = 1$. Si $p > 1$, entonces de 5.9 obtenemos

$$i_e(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) = i_e(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1}) \wedge \omega_p \ + \ (-1)^{p-1}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \cdot \omega_p(e)\,,$$

y para concluir basta tener en cuenta que por hipótesis de inducción se satisface

$$i_e(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1}) = \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}\omega_i(e) \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1}\,. \quad \blacksquare$$

6 Morfismos Inducidos en los Espacios de Tensores

Fijemos en esta sección una aplicación lineal $\phi : E \to F$ entre dos k-espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita).

Definición 6.1 Para cada tensor $\overline{T}_p \in T_p(F)$ definimos la aplicación $\phi_p^*(\overline{T}_p)$ como

$$\begin{array}{rcl} \phi_p^*(\overline{T}_p) : E^{\,p} & \to & k \\ (e_1, \ldots, e_p) & \mapsto & \phi_p^*(\overline{T}_p)(e_1, \ldots, e_p) := \overline{T}_p(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_p))\,. \end{array}$$

Es fácil demostrar que $\phi_p^*(\overline{T}_p)$ es un tensor de tipo $(p, 0)$, de modo que la aplicación lineal $\phi : E \to F$ induce una aplicación entre los espacios de tensores,

$$\begin{array}{rcl} \phi_p^* : T_p(F) & \to & T_p(E) \\ \overline{T}_p & \mapsto & \phi_p^*(\overline{T}_p)\,, \end{array}$$

que es lineal (compruébese) [2].

Teorema 6.2 (i) *La aplicación ϕ_p^* es compatible con el producto tensorial en el siguiente sentido: dados $\overline{T}_p \in T_p(F)$ y $\overline{T}_q \in T_q(F)$ se satisface*

$$\phi_{p+q}^*(\overline{T}_p \otimes \overline{T}_q) = \phi_p^*(\overline{T}_p) \otimes \phi_q^*(\overline{T}_q)\,.$$

(ii) *Si $\varphi : G \to E$ es otra aplicación lineal, entonces $(\phi \circ \varphi)_p^* = \varphi_p^* \circ \phi_p^*$.*

(iii) *La aplicación ϕ_p^* conmuta con el operador de hemisimetrización, es decir, dado $\overline{T}_p \in T_p(F)$ se satisface*

$$h_p(\phi_p^*(\overline{T}_p)) = \phi_p^*(\bar{h}_p(\overline{T}_p))\,,$$

donde h_p y $\bar{h}_p$ son los operadores actuando sobre $T_p(E)$ y $T_p(F)$, respectivamente.

(iv) *La aplicación ϕ_p^* transforma tensores hemisimétricos en tensores hemisimétricos (y tensores simétricos en tensores simétricos).*

[2] Obsérvese que para $p = 1$ se tiene $\phi_1^* = \phi^*$ (= aplicación traspuesta de ϕ); por este motivo, algunos autores llaman a ϕ_p^* "aplicación traspuesta generalizada".

Demostración. (i) Es sencillo y se deja como ejercicio.

(ii) Dadas las aplicaciones lineales ϕ y φ, cualesquiera que sean $v_1, \dots, v_p \in G$ y $\overline{T}_p \in T_p(F)$ tenemos

$$\begin{aligned}(\phi\circ\varphi)^*_p(\overline{T}_p)(v_1,\dots,v_p) &= \overline{T}_p\Big(\phi\circ\varphi(v_1),\dots,\phi\circ\varphi(v_p)\Big) = \overline{T}_p\Big(\phi(\varphi(v_1)),\dots,\phi(\varphi(v_p))\Big)\\ &= \phi^*_p(\overline{T}_p)(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_p)) = \Big[\varphi^*_p(\phi^*_p(\overline{T}_p))\Big](v_1,\dots,v_p)\\ &= \Big[\varphi^*_p\circ\phi^*_p\Big](\overline{T}_p)(v_1,\dots,v_p)\,.\end{aligned}$$

(iii) Sea $\overline{T}_p \in T_p(F)$. Veamos en primer lugar que para toda permutación $\sigma \in S_p$ se satisface $\phi^*_p({}^{\sigma}\overline{T}_p) = {}^{\sigma}\Big[\phi^*_p(\overline{T}_p)\Big]$: dados vectores $e_1,\dots,e_p \in E$ tenemos

$$\begin{aligned}\phi^*_p({}^{\sigma}\overline{T}_p)(e_1,\dots,e_p) &= {}^{\sigma}\overline{T}_p(\phi(e_1),\dots,\phi(e_p)) = \overline{T}_p(\phi(e_{\sigma(1)}),\dots,\phi(e_{\sigma(p)}))\\ &= \phi^*_p(\overline{T}_p)(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(p)}) = {}^{\sigma}\Big[\phi^*_p(\overline{T}_p)\Big](e_1,\dots,e_p)\,.\end{aligned}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}\phi^*_p(\bar{h}_p(\overline{T}_p)) &= \phi^*_p\left(\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma}\overline{T}_p\right) = \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\,\phi^*_p({}^{\sigma}\overline{T}_p)\\ &= \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\,{}^{\sigma}\Big[\phi^*_p(\overline{T}_p)\Big] = h_p(\phi^*_p(\overline{T}_p))\,.\end{aligned}$$

(iv) El que la aplicación ϕ^*_p transforma tensores hemisimétricos en tensores hemisimétricos (y tensores simétricos en tensores simétricos) se sigue inmediatamente de las definiciones. ∎

Corolario 6.3 *La aplicación lineal $\phi : E \to F$ induce aplicaciones lineales entre los espacios de tensores hemisimétricos,*

$$\begin{aligned}\phi^{\wedge}_p : \Lambda_p(F) &\;\to\; \Lambda_p(E)\\ \overline{\Omega}_p &\;\mapsto\; \phi^{\wedge}_p(\overline{\Omega}_p) := \phi^*_p(\overline{\Omega}_p)\,.\end{aligned}$$

Además, si $\varphi : G \to E$ es otra aplicación lineal, entonces $(\phi\circ\varphi)^{\wedge}_p = \varphi^{\wedge}_p\circ\phi^{\wedge}_p$.

Demostración. La aplicación $\phi^{\wedge}_p$ no es otra que la aplicación ϕ^*_p restringida a los tensores hemisimétricos (véase (iv) de 6.2). La última parte es consecuencia de 6.2 (ii). ∎

Teorema 6.4 *Supongamos que E y F son de dimensión finita, en cuyo caso tenemos definido el producto exterior sobre los espacios vectoriales $\Lambda_p(E)$ y $\Lambda_p(F)$. Entonces la aplicación lineal $\phi^{\wedge}_p$ es compatible con el producto exterior en el siguiente sentido: dados $\overline{\Omega}_p \in \Lambda_p(F)$ y $\overline{\Omega}_q \in \Lambda_q(F)$ se satisface*

$$\phi^{\wedge}_{p+q}(\overline{\Omega}_p \wedge \overline{\Omega}_q) = \phi^{\wedge}_p(\overline{\Omega}_p) \wedge \phi^{\wedge}_q(\overline{\Omega}_q)\,.$$

En particular (como $\phi^{\wedge}_1 = \phi^*_1 = \phi^*$), dadas formas lineales $\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_p \in F^*$ tenemos

$$\phi^{\wedge}_p(\bar{\omega}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\omega}_p) = \phi^{\wedge}_1(\bar{\omega}_1)\wedge\cdots\wedge\phi^{\wedge}_1(\bar{\omega}_p) = \phi^*(\bar{\omega}_1)\wedge\cdots\wedge\phi^*(\bar{\omega}_p)\,.$$

Demostración. Dados representantes $\overline{T}_p \in T_p(F)$ y $\overline{T}_q \in T_q(F)$ de $\overline{\Omega}_p$ y $\overline{\Omega}_q$, respectivamente, del apartado (iii) de 6.2 se sigue que $\phi_p^*(\overline{T}_p)$ y $\phi_q^*(\overline{T}_q)$ son representantes de $\phi_p^\wedge(\overline{\Omega}_p)$ y $\phi_q^\wedge(\overline{\Omega}_q)$, respectivamente. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\phi_{p+q}^\wedge(\overline{\Omega}_p \wedge \overline{\Omega}_q) &= \phi_{p+q}^*\Big(\bar{h}_{p+q}(\overline{T}_p \otimes \overline{T}_q)\Big) = h_{p+q}\Big(\phi_{p+q}^*(\overline{T}_p \otimes \overline{T}_q)\Big) \\ &= h_{p+q}\Big(\phi_p^*(\overline{T}_p) \otimes \phi_q^*(\overline{T}_q)\Big) = \phi_p^\wedge(\overline{\Omega}_p) \wedge \phi_q^\wedge(\overline{\Omega}_q)\,. \ \blacksquare\end{aligned}$$

7 Problemas

En los siguientes ejercicios E denotará siempre un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k, $\{e_1, \dots, e_n\}$ denotará una base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ denotará la correspondiente base dual en E^*.

7.1 Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ las formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$ definidas por las igualdades

$$\omega_1(x, y, z) = x + 2y - z\,, \qquad \omega_2(x, y, z) = -x - 2y + 3z\,, \qquad \omega_3(x, y, z) = 2x + y - z\,.$$

Si $u = (2, 3, 0)$, $v = (0, 1, 2)$, $e = (1, 2, -1)$, calcúlense:

(a) $(\omega_1 \otimes \omega_2)(u, v)$, $(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3)(e, u, v)$;

(b) $(\omega_2 \wedge \omega_3)(u, v)$, $(\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1)(u, u, v)$, $(\omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1)(e, u, v)$.

7.2 Sea $\{e_1, e_2\}$ la base usual de $\mathbb{R}^2$ y sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ su base dual. Considérese la aplicación $T_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad

$$T_3((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = x_1 y_2 x_3 - 2 y_1 x_2 y_3 + 4 x_1 x_2 x_3\,.$$

(a) Pruébese que $T_3 \in T_3(\mathbb{R}^2)$ y calcúlense sus coordenadas en la base de $T_3(\mathbb{R}^2)$ definida por la base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) Defínase un tensor cualquiera $T_2 \in T_2(\mathbb{R}^2)$ y hállense los tensores $T_2 \otimes T_3$ y $T_3 \otimes T_2$.

(c) ¿Es T_3 hemisimétrico?

7.3 Considérese el tensor $\Omega_2 \in T_2(\mathbb{R}^3)$ definido por la igualdad

$$\Omega_2((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 3x_1 y_2 + 4x_1 z_2 - y_1 z_2 - 3y_1 x_2 - 4z_1 x_2 + z_1 y_2\,.$$

(a) Pruébese que Ω_2 es hemisimétrico.

(b) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$ y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Calcúlense las coordenadas de Ω_2 en la base de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ definida por la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) Si $\bar{\Omega}_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + 2\omega_2 \wedge \omega_3$, hállense $\Omega_2 \wedge \bar{\Omega}_2$ y $\bar{\Omega}_2 \wedge \Omega_2$.

7.4 Supóngase que $\dim E = 3$. Calcúlese la matriz del endomorfismo $T_1^1 = 3\omega_1 \otimes e_1 - 2\omega_1 \otimes e_2 + \omega_3 \otimes e_3 \in T_1^1(E) = \mathrm{End}_k(E)$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

7.5 Dados $v_1, \dots, v_p \in E = E^{**}$, $v_1, \dots, v_p$ son formas lineales sobre E^* y se tiene el siguiente tensor hemisimétrico de orden p sobre E^*:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p := \Sigma_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} .$$

(a) Demuéstrese que cualesquiera que sean $t_1, \dots, t_p \in E^*$ se satisface

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)(t_1, \dots, t_p) = (t_1 \wedge \cdots \wedge t_p)(v_1, \dots, v_p) .$$

(b) Pruébese que la familia $\{v_1, \dots, v_p\}$ es libre si y sólo si $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$.

7.6 Para cada aplicación lineal $\phi : E \to E^*$ se define la aplicación $T_\phi : E \times E :\to k$ por la fórmula $T_\phi(e, v) = \phi(e)(v)$ $(e, v \in E)$. Pruébese que T_ϕ es una métrica sobre E y que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_k(E, E^*) & \to & T_2(E) \\ \phi & \mapsto & T_\phi \end{array}$$

es un isomorfismo. Dada una métrica $T_2 \in T_2(E)$, la aplicación lineal $\phi_{T_2} \in \operatorname{Hom}_k(E, E^*)$ que se corresponde con T_2 por el anterior isomorfismo (es decir, la única aplicación lineal de E en E^* que para cada vector $e \in E$ satisface $\phi_{T_2}(e) = i_e T_2$), se denomina *polaridad asociada a la métrica* T_2.

7.7 Sea $\phi \in \operatorname{Hom}_k(E, E^*)$ tal que, según la notación del problema anterior, existen escalares $\lambda_{ij} \in k$ satisfaciendo $T_\phi = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\, \omega_i \otimes \omega_j$. Calcúlese la matriz de ϕ en las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

7.8 Dada $\Omega_2 \in \Lambda_2(E)$, pruébese que para toda $\omega \in E^*$ se satisface $\omega \wedge \Omega_2 = \Omega_2 \wedge \omega$.

7.9 Considérese el conjunto $N(T_2) = \{(e, v) \in E \times E : T_2(e, v) = 0\}$. ¿Es cierto ó falso que $N(T_2)$ es un subespacio vectorial de $E \times E$? Razónese la respuesta.

7.10 Supóngase que $\dim E = 3$. Dado el endomorfismo $f : E \to E$ determinado por las condiciones $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ y $f(e_3) = e_1$, y dado el tensor $T_2 = \omega_1 \otimes \omega_1 + \omega_2 \otimes \omega_2 - \omega_1 \otimes \omega_3 - \omega_2 \otimes \omega_3$, calcúlese $f_2^*(T_2)$. Calcúlese también $\omega \wedge \omega'$, siendo $\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ y $\omega' = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$.

7.11 Sean $E = \{$ polinomios de $\mathbb{R}[x]$ de grado $\leq 2\}$, $B = \{1, x, x^2\}$ base de E y $B^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Considérense las aplicaciones $t_1, t_2, t_3 : E \to \mathbb{R}$ definidas como

$$t_1(q(x)) = q(-1) + q(0) + q(1) , \qquad t_2(q(x)) = -q(-1) + q(1) , \qquad t_3(q(x)) = q(-1) + q(1) .$$

(a) Pruébese que $t_1, t_2, t_3 \in E^*$ y que $\{t_1, t_2, t_3\}$ es base de E^*.
(b) Calcúlense las coordenadas de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ en la base $\{t_1, t_2, t_3\}$.
(c) Pruébese que es una métrica simétrica la aplicación $T_2 : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad $T_2(p(x), q(x)) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
(d) Calcúlese la matriz en las bases B y B^* de la polaridad asociada a T_2.

7.12 Sea $\omega_0 \in E^*$, $\omega_0 \neq 0$. Para cada $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ definimos la aplicación lineal $f_p : \Lambda_p(E) \to \Lambda_{p+1}(E)$ por la fórmula $f_p(\Omega_p) = \omega_0 \wedge \Omega_p$ $(\Omega_p \in \Lambda_p(E))$. Pruébese que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to \Lambda_0(E) \xrightarrow{f_0} \Lambda_1(E) \xrightarrow{f_1} \ \ldots \ \xrightarrow{f_{n-1}} \Lambda_n(E) \to 0\,.$$

7.13 Tensores simétricos:
Sea $p \geq 2$. Se define el *operador de simetrización* sobre el espacio de tensores $T_p(E)$ como la siguiente aplicación (aquí E no necesariamente es de dimensión finita)

$$\begin{array}{rcl} s_p : T_p(E) & \to & T_p(E) \\ T_p & \mapsto & s_p(T_p) := \displaystyle\sum_{\sigma \in S_p} {}^{\sigma}T_p\,. \end{array}$$

Por definición se toma $s_p : T_p(E) \to T_p(E)$ como la identidad para $p \in \{0, 1\}$.

(a) Demuéstrese que el operador s_p es lineal y valora en $S_p(E)$.

(b) Si $P_p \in S_p(E)$ compruébese la igualdad $s_p(P_p) = p!\, P_p$.

(c) Pruébese que cualesquiera que sean $\omega_1, \ldots, \omega_p \in E^*$ se satisface

$$s_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}\,.$$

La aplicación lineal s_p la hemos definido de $T_p(E)$ en $T_p(E)$ pero según (a) valora en $S_p(E)$, motivo por el cual se considera dicha aplicación como $s_p : T_p(E) \to S_p(E)$.

(d) Supóngase que E tiene dimensión finita igual a n y sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ su base dual. Para cada entero positivo p sea $\mathbb{N}_p^n$ el conjunto de las n-uplas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números naturales tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p$. Pruébese que la familia de tensores simétricos

$$\left\{ s_p(\omega_1 \otimes \overset{\alpha_1}{\cdots} \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n \otimes \overset{\alpha_n}{\cdots} \otimes \omega_n) \,:\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_p^n \right\}$$

es una base del espacio vectorial $S_p(E)$. Además, la expresión de un tensor $P_p \in S_p(E)$ en la anterior base es

$$P_p = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_p^n} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} s_p(\omega_1 \otimes \overset{\alpha_1}{\cdots} \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n \otimes \overset{\alpha_n}{\cdots} \otimes \omega_n)\,,$$

donde

$$\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = P_p(e_1, \overset{\alpha_1}{\cdots}, e_1, \ldots, e_n, \overset{\alpha_n}{\cdots}, e_n)\,.$$

(e) Obténgase como consecuencia de lo anterior que si E es de dimensión finita n, entonces s_p es epiyectiva y se satisface la igualdad $\dim(S_p(E)) = \binom{n+p-1}{p}$.

(f) Se llama *producto simétrico* de p formas lineales $\omega_1, \ldots, \omega_p$ al tensor $\omega_1 \bullet \ldots \bullet \omega_p \in S_p(E)$ dado por la igualdad

$$\omega_1 \bullet \ldots \bullet \omega_p := s_p(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)\,.$$

Pruébese que para toda permutación $\sigma \in S_p$ se satisface

$$\omega_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \omega_{\sigma(p)} = \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_p .$$

Dadas formas lineales $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sobre E y $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_p^n$, para simplificar la notación suele escribirse $\omega_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \omega_n^{\alpha_n}$ en lugar de $\omega_1 \cdot \overset{\alpha_1}{\ldots} \cdot \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_n \cdot \overset{\alpha_n}{\ldots} \cdot \omega_n$; con esta notación, en las condiciones del apartado (d) se tiene que la base de $S_p(E)$ se escribe

$$\{\omega_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \omega_n^{\alpha_n} \, : \, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_p^n\} .$$

(g) Considérese ahora una aplicación lineal $\phi : E \to F$. La aplicación $\phi_p^* : T_p(F) \to T_p(E)$ transforma tensores simétricos en tensores simétricos, de modo que se tiene la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} \phi_p^{\boldsymbol{\cdot}} : S_p(F) & \to & S_p(E) \\ \overline{P}_p & \mapsto & \phi_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\overline{P}_p) := \phi_p^*(\overline{P}_p) . \end{array}$$

Además, si $\varphi : G \to E$ es otra aplicación lineal entonces $(\phi \circ \varphi)_p^{\boldsymbol{\cdot}} = \varphi_p^{\boldsymbol{\cdot}} \circ \phi_p^{\boldsymbol{\cdot}}$.

Pruébese que cualesquiera que sean las formas lineales $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_p \in F^*$ se satisface la igualdad

$$\phi_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\bar{\omega}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{\omega}_p) = \phi^*(\bar{\omega}_1) \cdot \ldots \cdot \phi^*(\bar{\omega}_p) .$$

7.14 Si ω y ω' son dos formas lineales no nulas sobre E demuéstrese que $\omega \otimes \omega' = \omega' \otimes \omega$ si y sólo si $\omega' = \lambda\omega$ para algún escalar $\lambda \in k$. Si $e, e' \in E$ son dos vectores no nulos, ¿es cierto que $e \otimes e' = e' \otimes e$ si y sólo si e y e' son proporcionales?

7.15 Dadas formas lineales ω_1, ω_2 sobre E, dígase de cada uno de los siguientes enunciados si es verdadero ó falso (razonándose las respuestas):

(a) $\omega_1 \cdot \omega_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \{\omega_1, \omega_2\}$ es libre;
(b) $\omega_1 \cdot \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\omega_1, \omega_2\}$ no es libre;
(c) $\omega_1 \otimes \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0$ ú $\omega_2 = 0$;
(d) $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0$ ú $\omega_2 = 0$;
(e) $\omega_1 \cdot \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0$ ú $\omega_2 = 0$.

7.16 Determínense las coordenadas en la base $\{\omega_i \otimes e_j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ del tensor de tipo (1,1) definido por el endomorfismo identidad de E.

7.17 Dados $T_p^q \in T_p^q(E)$ y $\omega \in E^*$ ($q \geq 2$), se define el tensor $i_\omega T_p^q \in T_p^{q-1}(E)$ por la igualdad

$$i_\omega T_p^q(v_1, \ldots, v_p, \omega_1, \ldots, \omega_{q-1}) := T_p^q(v_1, \ldots, v_p, \omega, \omega_1, \ldots, \omega_{q-1}) .$$

Sea T_1^1 el tensor definido por un endomorfismo $T : E \to E$. Demuéstrese que $i_e T_1^1 = T(e)$ para todo vector $e \in E$, y que $i_\omega T_1^1 = T^*(\omega)$ para toda forma lineal $\omega \in E^*$.

7.18 Demuéstrese la existencia de un isomorfismo canónico $T_p^q(E) = T_q^p(E^*)$. Pruébese que el isomorfismo $\mathrm{End}_k(E) = T_1^1(E) = T_1^1(E^*) = \mathrm{End}_k(E^*)$ transforma cada endomorfismo $T \colon E \to E$ en el endomorfismo traspuesto $T^* \colon E^* \to E^*$.

7.19 Para cada métrica T_2 sobre E, pruébese que la aplicación $T_2^t : E \times E \to k$ definida por la igualdad $T_2^t(e,v) := T_2(v,e)$ también es una métrica. Demuéstrese que la aplicación $\mathcal{T}_2(E) \to \mathcal{T}_2(E)$, $T_2 \mapsto T_2^t$, así obtenida es un isomorfismo lineal.

Dada $T_2 \in \mathcal{T}_2(E)$, pruébese que $S_2 := T_2 + T_2^t$ es una métrica simétrica y que $H_2 := T_2 - T_2^t$ es una métrica hemisimétrica. Dedúzcase que si la característica de k no es 2, entonces toda métrica sobre E descompone en suma de una métrica simétrica y otra hemisimétrica. ¿Es única esta descomposición?

7.20 Sea T_2 una métrica (simétrica ó hemisimétrica) sobre E. Pruébese que su *radical*

$$\operatorname{rad} T_2 := \{e \in E\colon\ T_2(e,v) = 0\ ,\ \forall v \in E\}$$

es un subespacio vectorial de E. Se dice que la métrica T_2 es *no singular* cuando su radical es nulo, y en caso contrario se dice que es *singular*. Demuéstrese que $\operatorname{rad} T_2 = \operatorname{Ker}\phi$, donde ϕ es la polaridad asociada a T_2 (véase el ejercicio 6), y conclúyase que el que T_2 sea no singular equivale a que ϕ sea un isomorfismo.

Pruébese que si T_2 es no singular, entonces existe una única métrica contravariante T^2 (métrica sobre E^*), llamada *métrica dual* de T_2, tal que

$$T^2(\phi(e), \phi(v)) = T_2(e,v)\,,$$

y demuéstrese que T^2 también es no singular. Al ser T^2 una métrica no singular sobre E^*, define una métrica dual $\bar{T}_2$ en $E^{**} = E$. Pruébese que $\bar{T}_2 = T_2$ en el caso simétrico y $\bar{T}_2 = -T_2$ en el caso hemisimétrico.

7.21 Si $n = 3$ y $T_2 = \omega_1 \otimes \omega_2 + \omega_2 \otimes \omega_1 - \omega_3 \otimes \omega_3 - \omega_2 \otimes \omega_3 - \omega_3 \otimes \omega_2$, compruébese que T_2 es no singular y calcúlense las coordenadas de la métrica dual T^2 en la base $e_i \otimes e_j$, $1 \le i,j \le 3$, de $\mathcal{T}_2(E^*) = \mathcal{T}^2(E)$.

7.22 Sea $T_2 = \sum_{ij} a_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ una métrica simétrica no singular. Determínense las coordenadas de la métrica dual T^2 en la base $e_i \otimes e_j$.

7.23 Sea T_2 una métrica sobre E. Si V es un subespacio vectorial de E, pruébese que su *ortogonal*

$$V^\perp := \{e \in E\colon\ T_2(e,v) = 0,\ \forall v \in V\}$$

es un subespacio vectorial de E. Pruébense además:

(a) Si ϕ denota la polaridad asociada a T_2, pruébese la igualdad $V^\perp = \phi^{-1}(V^o)$. Dedúzcase que $\dim V^\perp \ge \dim E - \dim V$, y que se da la igualdad cuando la métrica es no singular.

(b) Estúdiese si es cierto que $V^\perp \cap V = 0$ cuando la métrica es no singular; ¿y si es una métrica simétrica no singular?

7.24 Si $n = 3$ y $T_2 = \omega_1 \otimes \omega_3 - \omega_3 \otimes \omega_1 - 2\omega_2 \otimes \omega_3 + 2\omega_3 \otimes \omega_2 + 3\omega_1 \otimes \omega_3 - 3\omega_3 \otimes \omega_1$, calcúlese la matriz de la polaridad asociada $\phi\colon E \to E^*$ en las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Determínese el radical de T_2 y los subespacios ortogonales de $V_1 =< e_1 + e_2 + e_3 >$ y $V_2 =< e_1, e_3 >$.

7.25 Sea T_2 una métrica sobre E. Pruébese que las aplicaciones $T_i, T_d\colon E \to E^*$ definidas por las igualdades

$$T_i(e)(x) := T_2(e,x) \qquad , \qquad T_d(e)(x) := T_2(x,e) \qquad\qquad e, x \in E$$

son lineales (suele decirse que T_i es la *polaridad por la izquierda* (ó simplemente polaridad, véase el ejercicio 6) definida por T_2, y que T_d es la *polaridad por la derecha*). Demuéstrense

(a) $(T_i)^* = T_d$ y $(T_d)^* = T_i$;
(b) T_i y T_d tienen igual rango ;
(c) T_2 es simétrico si y sólo si $T_i = T_d$;
(d) T_i es un isomorfismo si y sólo si T_d es un isomorfismo.

7.26 Supóngase que la característica de k no es 2. Pruébese que T_2 es hemisimétrico si y sólo si $T_i = -T_d$. Demuéstrese que la relación de ortogonalidad definida por T_2 es simétrica (en el sentido de que, dados $e, v \in E$, se satisface $T_2(e,v) = 0 \Rightarrow T_2(v,e) = 0$) si y sólo si T_2 es simétrico ó hemisimétrico. [*Indicación:* Pruébese primero que para cada $e \in E$ existe $\lambda \in k$ tal que $T_i(e) = \lambda T_d(e)$, y luego que λ no depende de e. Concluir que $\lambda^2 = 1$].

7.27 Demuéstrese que la aplicación $T_2(E) \to \operatorname{Hom}_k(E, E^*)$, $T_2 \mapsto T_i$, es un isomorfismo lineal. ¿Es también un isomorfismo la aplicación $T_2 \mapsto T_d$?

7.28 Si $n = 3$ y $T_2 = \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_3 + 2\omega_3 \otimes \omega_3 - 3\omega_3 \otimes \omega_1$, calcúlense las matrices de T_i y T_d en las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

7.29 Si $T_2 = \sum_{ij} a_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$, calcúlense las matrices de T_i y T_d en las bases $\{e_i\}$ y $\{\omega_i\}$.

7.30 Sea $V := E \times E^*$. Defínase un isomorfismo canónico $\phi\colon V \to V^*$ y determínese el tensor covariante de orden 2 sobre V cuya polaridad por la izquierda es ϕ, y aquél cuya polaridad por la derecha es ϕ. Defínanse sobre V, sin necesidad de elegir una base, una métrica simétrica no nula y otra hemisimétrica no nula. ¿Son no singulares estas métricas?

7.31 Supóngase que la característica de k no es 2 y que la dimensión de E es impar. Pruébese que toda métrica hemisimétrica sobre E es singular. [*Indicación*: Si una matriz cuadrada A coincide con la opuesta de su traspuesta y tiene un número impar de columnas, entonces su determinante es nulo.]

7.32 Sea F el espacio vectorial formado por todas las aplicaciones $E \to k$ (no necesariamente lineales) y sea $Q(E)$ el subespacio vectorial de F generado por los productos $\omega'\omega$ de pares de formas lineales. Los elementos de $Q(E)$ reciben el nombre de *formas cuadráticas* sobre E. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

(a) $Q(E)$ es un espacio vectorial de F de dimensión $n(n+1)/2$, y una base suya está formada por los productos dobles $\omega_i\omega_j$, $1 \le i \le j \le n$.

(b) Si T_2 es una métrica sobre E, entonces $q(e) := T_2(e,e)$ $(e \in E)$ es una forma cuadrática; denotemos $q = \phi(T_2)$.

(c) La aplicación $\phi\colon T_2(E) \to Q(E)$ es lineal y epiyectiva, y su núcleo es $\Lambda_2(E)$.

7.33 Supóngase que la característica del cuerpo base k no es 2. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

(a) $S_2(E) \cap \Lambda_2(E) = 0$ (y por tanto $T_2(E) = S_2(E) \oplus \Lambda_2(E)$; véase el ejercicio 19).

(b) La aplicación $\phi\colon S_2(E) \to Q(E)$, que a cada métrica simétrica T_2 asocia su forma cuadrática $q(e) := T_2(e,e)$, es un isomorfismo lineal.

(c) Una aplicación $q\colon E \to k$ es una forma cuadrática si y sólo si $q(\lambda e) = \lambda^2 q(e)$ para cualesquiera $\lambda \in k,\ e \in E$, y $T_2(e,v) := q(e+v) - q(e) - q(v)$ es una aplicación bilineal.

(d) La aplicación $\psi\colon Q(E) \to S_2(E)$, que a cada forma cuadrática q asocia la métrica simétrica $T_2(e,v) := q(e+v) - q(e) - q(v)$, es un isomorfismo lineal.

(e) $\phi\psi = 2 \cdot I_{Q(E)}\,,\ \ \psi\phi = 2 \cdot I_{S_2(E)}$.

(f) Si q es la forma cuadrática asociada a una métrica simétrica T_2, entonces

$$T_2(e,v) = \frac{1}{2}\Big[q(e+v) - q(e) - q(v)\Big]\,.$$

7.34 Supóngase que la característica del cuerpo base k es 2 y que la dimensión n de E es ≥ 2. Estúdiese si es cierta la igualdad $S_2(E) \cap \Lambda_2(E) = 0$, y demuéstrense las siguientes afirmaciones:

(a) La aplicación lineal $\phi\colon S_2(E) \to Q(E)$, $(\phi T_2)(e) := T_2(e,e)$, no es epiyectiva y su imagen está generada por las formas cuadráticas ω_i^2, $1 \leq i \leq n$.

(b) Si q es una forma cuadrática sobre E, entonces $T_2(e,v) := q(e+v) - q(e) - q(v)$ es una métrica simétrica sobre E. La aplicación lineal $\psi\colon Q(E) \to S_2(E)$ así obtenida no es epiyectiva y su imagen está generada por las métricas $\omega_i \otimes \omega_j + \omega_j \otimes \omega_i$, $1 \leq i < j \leq n$.

(c) $\phi\psi = 0\,,\ \ \psi\phi = 0$.

(d) $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Ker}\psi\,,\ \ \operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\phi$.

7.35 Sean p, q enteros positivos y sea $T_p^q \in T_p^q(E)$. Para cada par de índices $i \in \{1,\dots,p\}$, $j \in \{1,\dots,q\}$ se define el tensor $C_i^j T_p^q \in T_{p-1}^{q-1}(E)$ por la fórmula:

$$C_i^j T_p^q(v_1,\dots,v_{p-1},t_1,\dots,t_{q-1}) = \sum\nolimits_{h=1}^{n} T_p^q(v_1,\dots,v_{i-1},e_h,v_i,\dots,v_{p-1},\\ t_1,\dots,t_{j-1},\omega_h,t_j,\dots,t_{q-1})$$

donde $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de E y $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ es su base dual. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

(a) La definición de $C_i^j T_p^q$ no depende de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E.

(b) La aplicación $C_i^j : T_p^q(E) \to T_{p-1}^{q-1}(E)$ así obtenida es lineal.

7.36 Dados $T, \bar{T} \in \operatorname{End}_k(E)$, demuéstrense las igualdades $T \circ \bar{T} = C_1^2(T \otimes \bar{T})$ y $\bar{T} \circ T = C_2^1(T \otimes \bar{T})$, donde en la expresión $T \otimes \bar{T}$, T y $\bar{T}$ denotan los tensores de tipo (1,1) con los que se corresponde cada uno de los endomorfismos.

7.37 Se define la *traza* de un endomorfismo $T\colon E \to E$ como el escalar $\mathfrak{t}T := C_1^1(T)$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

(a) La traza define una aplicación lineal y epiyectiva $\mathfrak{t}\colon \operatorname{End}_k(E) \to k$.

(b) $\mathfrak{t}(T \circ \bar{T}) = \mathfrak{t}(\bar{T} \circ T)$ para cualesquiera $T, \bar{T} \in \operatorname{End}_k(E)$.

(c) La traza define una métrica simétrica no singular $T_2(T, \bar{T}) := \mathfrak{t}(T \circ \bar{T})$ sobre $\operatorname{End}_k(E)$.

(d) Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de $T \in \operatorname{End}_k(E)$ en la base $\{e_i\}$, calcúlese $\mathfrak{t}T$.

(e) Si $k = \mathbb{R}$ y $n = 2$, ¿es cierto que la métrica de la traza es definido positiva? (Una métrica simétrica T_2 sobre un espacio vectorial real E se dice que es *definida positiva* si $T_2(e,e) > 0$ para todo $e \in E$.)

7.38 Teoría de la Relatividad Especial:
En el sistema de coordenadas (t, x_1, x_2, x_3) que usa un observador inercial se ha comprobado que la velocidad de la luz siempre es una constante c, independiente del observador y del estado de movimiento de la fuente de luz: las trayectorias de la luz emitida aquí-ahora vienen definidas por la anulación de la forma cuadrática $t^2 - c^{-2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Por eso en la Teoría Especial de la Relatividad se admite que los sucesos forman un *espacio de Minkowski* (E_4, g) de dimensión 4; i.e., un espacio vectorial real E_4 de dimensión 4 dotado de una métrica simétrica g que en alguna base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ tiene la matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-2} \end{pmatrix}$$

Tales bases de E_4 reciben el nombre de *sistemas de referencia inerciales*, la recta $< e_0 >$ es la *trayectoria* del observador (ó móvil) inercial y las rectas $< e_1 >$, $< e_2 >$ y $< e_3 >$ son los *ejes* del sistema de referencia. Si (t, x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un suceso en tal base, se dice que t es el *tiempo observado* y que $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ es la *posición espacial observada*. En general, los vectores *espaciales* son los del subespacio vectorial $< e_1, e_2, e_3 >$.

Fijado un sistema de referencia inercial $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, demuéstrense las siguientes afirmaciones:

(a) La coordenada temporal coincide con $i_{e_0} g$.

(b) Los vectores espaciales son los vectores ortogonales, según g, a los vectores $< e_0 >$ de la trayectoria del observador. Es decir, dos sucesos son simultáneos cuando el vector e que determinan verifica que $g(e_0, e) = 0$.

(c) Si (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas espaciales de dos sucesos simultáneos para el observador, la *distancia*

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

observada entre ambos coincide con $\sqrt{-c^2 g(\vec{e}, \vec{e})}$, donde

$$\vec{e} := (y_1 - x_1)e_1 + (y_2 - x_2)e_2 + (y_3 - x_3)\,.$$

Es decir, es el módulo del vector espacial que determinan ambos sucesos, respecto de la métrica $-c^2 g$, que por eso recibe el nombre de *métrica espacial*.

(d) El tiempo $|t' - t|$ transcurrido entre dos sucesos $(t, 0, 0, 0)$ y $(t', 0, 0, 0)$ de la trayectoria del observador coincide con el módulo $\sqrt{g(e, e)}$ del vector e que determinan ambos sucesos respecto de la métrica g, que por eso recibe el nombre de *métrica del tiempo*.

Considérese ahora otro observador inercial, y sea $\vec{v} := v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ su velocidad aparente para nosotros (el primer observador), en el sentido de que $e_0 + \vec{v}$ es un vector de la trayectoria del nuevo observador.

(e) Pruébese que su *velocidad aparente* $v := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ es menor que c. (Ningún móvil puede alcanzar la velocidad de la luz).

(f) Si (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas espaciales de dos sucesos simultáneos para nosotros, determínese el tiempo transcurrido entre ambos sucesos para el nuevo observador.

(g) Si entre dos sucesos de la trayectoria del nuevo observador medimos un tiempo t, determínese el tiempo transcurrido entre ambos sucesos para el nuevo observador.

Supóngase de ahora en adelante, para simplificar los cálculos, que los sucesos forman un espacio de Minkowski de dimensión 2, en el sentido de que nosotros determinamos una base $\{e_0, e_1\}$ en la que la métrica del tiempo es

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^{-2} \end{pmatrix}$$

(h) Si vemos que dos móviles inerciales se alejan de nosotros en direcciones opuestas a dos tercios de la velocidad de la luz, ¿Qué velocidad aparente tiene cada uno de estos para el otro?

(i) Si la vida media de cierto tipo de partículas, en reposo, es de t segundos, determínese la vida media de las mismas partículas cuando se aceleran hasta alcanzar una velocidad v.

(j) Si la longitud de una varilla, en reposo, es de l metros, calcúlese la longitud de tal varilla para otro observador que se aleje de nosotros con velocidad v. ¿Y para un observador que se acerque con velocidad v?

(k) (Efecto Doppler) Si un observador se aleja de nosotros con velocidad v y emite fotones a intervalos regulares (digamos que f fotones cada segundo) ¿con qué frecuencia recibimos los fotones?. ¿Y si se acerca con velocidad v?