Capítulo VI

Aplicaciones de los Tensores Hemisimétricos

En este capítulo, todos los espacios vectoriales serán de dimensión finita sobre un cuerpo k, y E será un espacio vectorial de dimensión finita igual a n (>0).

1 Determinantes

1.1 Sabemos que $\Lambda_p(E)=0$ cuando $p>n$, y es por eso que $\Lambda_n(E)$ se conoce como el "espacio vectorial de los tensores hemisimétricos sobre E de orden máximo". Sabemos también que $\dim(\Lambda_n(E))=\binom{n}{n}=1$, y por lo tanto los únicos endomorfismos de $\Lambda_n(E)$ son las homotecias; es decir, si $f:\Lambda_n(E)\to\Lambda_n(E)$ es una aplicación lineal, entonces existe un único $\lambda\in k$ tal que f es la homotecia de razón λ: $f(\Omega_n)=\lambda\Omega_n$ para todo $\Omega_n\in\Lambda_n(E)$.

Definición 1.2 Dado $T\in\operatorname{End}_k(E)$, llamaremos *determinante* del endomorfismo T a la razón de la homotecia $T_n^\wedge\in\operatorname{End}_k(\Lambda_n(E))$ (véase V.6.3), es decir, al único escalar $\det(T)\in k$ que satisface $T_n^\wedge(\Omega_n)=\det(T)\,\Omega_n$ para todo $\Omega_n\in\Lambda_n(E)$.

Ejemplo 1.3 Si I denota el endomorfismo identidad de E, entonces es claro que $I_n^\wedge$ es el endomorfismo identidad de $\Lambda_n(E)$, de modo que $\det(I)=1$.

Teorema 1.4 *Sea $T\in\operatorname{End}_k(E)$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *El determinante es multiplicativo, es decir, si $\overline{T}$ es otro endomorfismo de E, entonces* $\det(T\circ\overline{T})=\det(T)\det(\overline{T})$.

(ii) *Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de E y $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ es su base dual, entonces se tiene*

$$\det(T)=(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n)(T(e_1),\dots,T(e_n))\,.$$

(iii) *T es un automorfismo $\iff$ $\det(T)\neq 0$; además, si T es un automorfismo, entonces* $\det(T^{-1})=(\det(T))^{-1}$.

(iv) *Como E^* tiene dimensión finita, también tenemos definido los determinantes de los endomorfismos de E^*; se satisface* $\det(T^*)=\det(T)$.

(v) *Si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es la matriz de T en una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, entonces*

$$\det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}\,.$$

Demostración. (i) Si para cada $\lambda \in k$, $h_\lambda : \Lambda_n(E) \to \Lambda_n(E)$ denota la homotecia de razón λ, recuérdese que se satisface $h_\lambda \circ h_\alpha = h_{\lambda\alpha}$ (es decir, dadas dos homotecias, su composición es otra homotecia cuya razón es igual al producto de las razones de las homotecias dadas). Por lo tanto, para probar este apartado basta tener en cuenta que, según V.6.3, se satisface $(T \circ \overline{T})_n^\wedge = T_n^\wedge \circ \overline{T}_n^\wedge$.

(ii) El tensor hemisimétrico $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ es una base de $\Lambda_n(E)$, y sabemos que para cada $\Omega_n \in \Lambda_n(E)$ se tiene $\Omega_n = \lambda_{1\dots n} \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$, donde $\lambda_{1\dots n} = \Omega_n(e_1, \dots, e_n)$ (véase V.5.4); en particular para el tensor $T_n^\wedge(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)$ se satisface $T_n^\wedge(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = \alpha \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ con $\alpha = T_n^\wedge(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(e_1, \dots, e_n)$, y como $T_n^\wedge$ es la homotecia de razón $\det(T)$ obtenemos

$$\det(T) = \alpha = T_n^\wedge(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(e_1, \dots, e_n) = (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(T(e_1), \dots, T(e_n))\,.$$

(iii) Si T es un automorfismo, entonces existe su automorfismo inverso T^{-1} y tenemos:

$$1 = \det(I) = \det(T \circ T^{-1}) = \det(T)\det(T^{-1})$$

(donde I denota el endomorfismo identidad de E), por lo tanto debe ser $\det(T) \neq 0$ y $\det(T^{-1}) = (\det(T))^{-1}$.

Supongamos ahora que $\det(T) \neq 0$. Si elegimos bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de E^* que sean duales una de la otra, entonces$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \det(T) \neq 0$ y por lo tanto $\{T(e_1), \dots, T(e_n))\}$ es una base de E (véase V.5.5 (a)), es decir, T es un automorfismo.

(iv) Considerando el punto de vista dual, E^* es un espacio vectorial cuyo dual es E. Si tomamos bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de E^*, duales una de la otra, entonces el tensor hemisimétrico $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es una base de $\Lambda_n(E^*)$ que, segun (ii) y V.4.4 (v), satisface

$$\begin{aligned}
\det(T^*) &= (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)(T^*(\omega_1), \dots, T^*(\omega_n)) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\,(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n)\Big(T^*(\omega_{\sigma(1)}), \dots, T^*(\omega_{\sigma(1)})\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) \cdot e_1\Big(T^*(\omega_{\sigma(1)})\Big) \cdot \dots \cdot e_1\Big(T^*(\omega_{\sigma(1)})\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) \cdot \Big(\omega_{\sigma(1)} \circ T\Big)(e_1) \cdot \dots \cdot \Big(\omega_{\sigma(n)} \circ T\Big)(e_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) \cdot \omega_{\sigma(1)}\Big(T(e_1)\Big) \cdot \dots \cdot \omega_{\sigma(n)}\Big(T(e_n)\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\,(\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(n)})(T(e_1), \dots, T(e_n)) \\
&= (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \det(T)\,.
\end{aligned}$$

(v) Se obtiene inmediatamente de (ii) teniendo en cuenta que si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$, entonces $a_{ij} = \omega_i(T(e_j))$. ∎

Nota **1.5** Dado $T \in \mathrm{End}_k(E)$, $\det(T)$ es por definición una propiedad intrínseca de T (es decir, $\det(T)$ es un invariante de T); ya veremos su interpretación geométrica.

Definición 1.6 Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_k(k)$, se define el determinante de A como el escalar $|A|$ dado por la fórmula

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \,.$$

Ejemplos 1.7 (a) Si el orden de la matriz cuadrada A es 2, entonces $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, ya que $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Si el orden de A es 3, como las permutaciones de signo positivo de S_3 son

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y las de signo negativo son

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \,.$$

(c) Si $I_n = (\delta_{ij})$ es la matriz unidad de $M_n(k)$, entonces $|I_n| = 1$ (compruébese).

1.8 Fijemos una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E y sea $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ su base dual. Según III.2.10, la aplicación $\mathrm{End}_k(E) \to M_n(k)$, $T \mapsto A$, que a cada endomorfismo T de E le asocia su matriz A en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, es un isomorfismo de espacios vectoriales y es un isomorfismo de anillos, y según 1.4 dicha aplicación conserva los detrminantes: $\det(T) = |A|$ cuando A es la matriz de T en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

1.9 Dados vectores $e_1, \dots, e_p \in E$ y formas lineales $\omega_1, \dots, \omega_p \in E^*$, se satisface

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(e_1, \dots, e_p) = |\omega_i(e_j)| \,.$$

La demostración de la anterior igualdad se obtiene inmediatamente de las definiciones de "producto exterior de formas lineales" y "determinante de una matriz cuadrada".

1.10 Propiedades de los determinantes de las matrices cuadradas:
Se obtienen todas de 1.8 y 1.9. Dadas matrices $A, B \in M_n(k)$ se satisfacen:

(a) $|AB| = |A||B|$; se sigue de 1.4 (i).

(b) A es invertible $\iff$ $|A| \neq 0$ (es decir, $\mathrm{rg}\, A = n$ si y sólo si $|A| \neq 0$; véase IV.4.4); además, si A es invertible, entonces $|A^{-1}| = |A|^{-1}$; se sigue de 1.4 (iii).

(c) $|A^t| = |A|$; se sigue de 1.4 (iv) y IV.4.2.

(d) Si la matriz B se obtiene de A intercambiando dos columnas, entonces $|B| = -|A|$. En efecto, supongamos que dichas columnas son la h-ésima y la l-ésima con $h < l$; si fijamos bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ en E^*, duales una de la otra, y si para cada índice j definimos el vector v_j como aquel cuyas coordenadas en la base de E es la columna j-ésima de A, entonces

$$\begin{aligned} |A| = |\omega_i(v_j)| &= (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_h, \dots, v_l, \dots, v_n) \\ &= -(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_l, \dots, v_h, \dots, v_n) = -|B| \,. \end{aligned}$$

(e) Si la matriz B se obtiene de A multiplicando una de sus columnas por un escalar $\lambda \in k$, entonces $|B| = \lambda|A|$; pruébese como ejercicio.

(f) Supongamos ahora que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que A y B tienen todas sus columnas iguales menos las j-ésimas; si definimos la matriz $C \in M_n(k)$ como aquella cuya columna j-ésima es la suma de la j-ésima de A y la j-ésima de B, y tal que el resto de las columnas de C son iguales a las de A (y por lo tanto iguales a las de B), entonces $|C| = |A| + |B|$; pruébese como ejercicio.

(g) Puesto que el determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta, es claro que lo dicho en (d), (e) y (f) para las columnas es también válido para las filas.

(h) NO es cierto que se satisfaga siempre la igualdad $|A + B| = |A| + |B|$; tampoco es cierta la igualdad $|\lambda A| = \lambda|A|$; lo que sí se satisface es $|\lambda A| = \lambda^n|A|$ (compruébese).

2 Orientaciones y Formas de Volumen

En toda esta sección será $k = \mathbb{R}$; como en todo el capítulo, n (> 0) denotará la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E.

Definiciones 2.1 Llamaremos *forma de volumen* sobre E a todo vector no nulo del espacio vectorial $\Lambda_n(E)$ (es decir, a todo tensor hemisimétrico no nulo sobre E de orden máximo).

Fijada una forma de volumen $\Omega_n \in \Lambda_n(E)$ sobre E, dados n vectores $e_1, \dots, e_n \in E$, llamaremos *medida del volumen* (ó simplemente *volumen*) del paralelepípedo determinado por la familia de vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$, al número real no negativo $|\Omega_n(e_1, \dots, e_n)|$ (= valor absoluto de $\Omega_n(e_1, \dots, e_n)$). El número real $\Omega_n(e_1, \dots, e_n)$ lo llamaremos *volumen con signo* del paralelepípedo determinado por $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Nota **2.2** Fijar una forma de volumen sobre E se interpreta geométricamente como fijar una "unidad de medida de volúmenes". Se podrá comprobar más adelante, cuando se estudien los espacios vectoriales euclídeos, que la definición que hemos dado de "volumen de un paralelepípedo" coincide con la noción usual de volumen (base por altura en dimensión 2, área de la base por la altura en dimensión 3).

Lema 2.3 *Dados vectores $v_1, \dots, v_n \in E$, el paralelepípedo determinado por la familia $\{v_1, \dots, v_n\}$ tiene volumen distinto de cero (independientemente de la forma de volumen con la cual se mida) si y sólo si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base.*

Demostración. El enunciado del lema es otro modo de decir la siguiente propiedad: si $\Omega_n \in \Lambda_n(E)$ y $\Omega_n \neq 0$, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base si y sólo si $\Omega_n(v_1, \dots, v_n) \neq 0$; pero esta propiedad ya la conocemos (véase (a) de V.5.5). ∎

Teorema 2.4 *Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y sea $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ su base dual. Se satisfacen:*

(i) *La única forma de volumen sobre E para la cual el paralelepípedo determinado por la base B tiene volumen con signo igual a 1 es $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$.*

(ii) *Dados n vectores cualesquiera $v_1, \dots, v_n \in E$, si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es la matriz de coordenadas de la familia $\{v_1, \dots, v_n\}$ en la base B (es decir, la columna j-ésima de A son las coordenadas de v_j en la base B), entonces $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ y $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ son tensores de $\Lambda_n(E^*)$ que satisfacen*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = |A|\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\,.$$

(iii) *Con la misma notación de* (ii), *la única forma de volumen sobre E para la cual el paralelepípedo determinado por la base B tiene volumen con signo igual 1, da volumen con signo igual a $|A|$ al paralelepípedo determinado por la familia $\{v_1, \dots, v_n\}$:*

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_n) = |A|\,.$$

Demostración. (i) Ya sabemos que $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(e_1, \dots, e_n) = 1$ por ser $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ bases duales una de la otra; ahora, si $\Omega_n \in \Lambda_n(E)$ es tal que $\Omega_n(e_1, \dots, e_n) = 1$, entonces $\Omega_n = \alpha \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ con $\alpha = \Omega_n(e_1, \dots, e_n) = 1$.

(ii) Sabemos que $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es base de $\Lambda_n(E^*)$ y que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \lambda \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ con $\lambda = (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)(\omega_1, \dots, \omega_n)$; basta entonce comprobar que $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)(\omega_1, \dots, \omega_n) = |A|$, lo cual es inmediato si se tiene en cuenta que $v_j(\omega_i) = \omega_i(v_j) = a_{ij}$.

(iii) Se demuestra igual que (ii), ya que se satisface $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_n) = (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)(\omega_1, \dots, \omega_n)$. ∎

Veamos la interpretación geométrica del determinante de un endomorfismo:

Teorema 2.5 *Sea $T \in \operatorname{End}_k(E)$. El valor absoluto de $\det(T)$ es el factor por el que quedan multiplicados los volúmenes de los paralelepípedos de E al tomar imagen por T; es decir, si $v_1, \dots, v_n \in E$, entonces, cualquiera que sea la forma de volumen Ω_n sobre E se satisface*

$$|\Omega_n(T(v_1), \dots, T(v_n))| = |\det(T)| \cdot |\Omega_n(v_1, \dots, v_n)|\,.$$

Demostración. Sean $\Omega_n \in \Lambda_n(E)$, $\Omega_n \neq 0$, y $v_1, \dots, v_n \in E$. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ no es base, entonces tampoco lo es $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ y obtenemos $\Omega_n(T(v_1), \dots, T(v_n)) = 0 = \Omega_n(v_1, \dots, v_n)$. Supongamos entonces que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base y sea $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ su base dual; como $\Omega_n = \lambda \cdot \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n$ con $\lambda = \Omega_n(v_1, \dots, v_n)$, tenemos

$$\begin{aligned} \Omega_n(T(v_1), \dots, T(v_n)) &= (\lambda \cdot \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n)(T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ &= \lambda \cdot \Big[(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n)(T(v_1), \dots, T(v_n))\Big] \\ &= \lambda \cdot \det(T) = \Omega_n(v_1, \dots, v_n) \cdot \det(T)\,. \quad ∎ \end{aligned}$$

2.6 Denotemos $\mathcal{F} = \Lambda_\backslash(\mathcal{E}) - \{/\}$, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de las formas de volumen sobre E. En $\mathcal{F}$ definimos la siguiente relación: dadas $\Omega_n, \overline{\Omega}_n \in \mathcal{F}$,

$$\Omega_n \sim \overline{\Omega}_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \Omega_n = \lambda\, \overline{\Omega}_n\,.$$

Es fácil comprobar que la anterior es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$. El conjunto cociente $\mathcal{F}/\sim$ sólo tiene dos clases de equivalencia, ya que, por ser $\dim(\Lambda_n(E)) = 1$, dadas $\Omega_n, \overline{\Omega}_n \in \mathcal{F}$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\Omega_n = \lambda\overline{\Omega}_n$, y sólo puede ser $\lambda > 0$ ó $\lambda < 0$. Además, dada una forma de volumen Ω_n cualquiera, Ω_n es representante de una de las clases y $-\Omega_n$ es representante de la otra clase.

Definiciones 2.7 Con la notación de 2.6, llamaremos *orientaciones* en E a los elementos del conjunto cociente $\mathcal{F}/\sim$. Un *espacio vectorial orientado* es un par (E, Ω_n), donde E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y Ω_n es (un representante de) una de las dos orientaciones que hay en E.

Sea (E, Ω_n) un espacio vectorial orientado. Diremos que la orientación que define Ω_n es la *positiva*, y que la otra orientación es la *negativa*; (es decir, un espacio vectorial orientado es un espacio vectorial real de dimensión finita donde se ha fijado una de sus dos orientaciones como la positiva). Una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E se dice que es *directa* si $\Omega_n(e_1, \ldots, e_n) > 0$, y en caso contrario se dice que es *inversa*.

Es claro que si cambiamos la orientación del espacio, entonces las bases directas se transforman en bases inversas, y viceversa. Es claro también que si E no está orientado, dada una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E podemos orientar el espacio de modo que dicha base sea directa: basta tomar la orientación que define $\Omega_n = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ donde $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es la base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Ejercicios 2.8 Sea (E, Ω_n) un espacio vectorial orientado y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E que es directa. Pruébense:

(a) Dada $\sigma \in S_n$, la base $\{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\}$ es directa si y sólo si $\operatorname{sig}(\sigma) = 1$ (y como consecuencia, $\{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\}$ es inversa si y sólo si $\operatorname{sig}(\sigma) = -1$).

(b) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es otra base de E y A es la matriz de coordenadas de $v_1, \ldots, v_n$ en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es directa si y sólo si $|A| > 0$; (es decir, dos bases son del mismo tipo si y sólo si la matriz de cambio de base de una de ellas a la otra tiene determinante mayor que 0).

2.9 Completemos ahora la interpretación geométrica del determinante de un endomorfismo. Sean (E, Ω_n) un espacio vectorial orientado, $T \in \operatorname{End}_k(E)$, y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base directa de E. Si $\det(T) = 0$ entonces $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ no es base de E y no tenemos nada que decir; si $\det(T) \neq 0$ entonces $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ es base de E, y de la igualdad $\Omega_n(T(v_1), \ldots, T(v_n)) = \det(T) \cdot \Omega_n(v_1, \ldots, v_n)$ probada en 2.5 obtenemos: $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ es directa si y sólo si $\det(T) > 0$. Es decir, si $\det(T) > 0$ entonces T conserva la orientación (manda bases directas a bases directas, y manda bases inversas a bases inversas), y si $\det(T) < 0$ entonces T invierte la orientación (manda bases directas a bases inversas, y viceversa).

3 Menores de una Matriz

Definición 3.1 Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$. Llamaremos *matriz extraida* de A a toda matriz obtenida de A suprimiendo algunas de sus filas y columnas. Dado $p \leq \min\{m, n\}$, llamaremos *menores de orden* p de A a los determinantes de las matrices cuadradas de orden p extraidas de A.

Dados índices $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$ y $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m$, la matriz extraida de A que está formada por las filas $i_1, \dots, i_p$ y las columnas $j_1, \dots, j_p$ la denotaremos $A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$; es decir, $A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = (\bar{a}_{hl}) \in M_p(k)$ con $\bar{a}_{hl} = a_{i_h j_l}$.

Ejercicio 3.2 Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ base de E^*, duales una de la otra. Dados vectores $v_1, \dots, v_n \in E$, si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ es la matriz de coordenadas de dichos vectores en la base de E, pruébese que entonces se satisface la igualdad

$$\left|A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}\right| = (\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p})(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) \,.$$

(Téngase en cuenta 1.9.)

Proposición 3.3 (Cálculo del rango de una matriz) *Con la notación de* 3.2*, dados índices* $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$*, la familia de vectores* $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$ *es libre si y sólo si existe alguna sucesión de índices* $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m$ *tal que* $\left|A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}\right| \neq 0$*. Como consecuencia,* $\operatorname{rg} A$ *es el mayor de los ordenes de los menores no nulos de* A*.*

Demostración. Por una parte, la familia $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$ es libre si y sólo si existe algún tensor $\overline{\Omega}_p \in \Lambda_p(E)$ tal que $\overline{\Omega}_p(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) \neq 0$. Por otra parte, la familia de tensores hemisimétricos $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \,:\, 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m\}$ es una base de $\Lambda_p(E)$ (véase V.4.6 (i)). Por lo tanto, la familia $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$ es libre si y sólo si existe algún tensor básico que no se anule sobre ella, es decir, si y sólo si existe una sucesión de índices $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m$ tal que (véase 3.2)

$$\left|A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}\right| = (\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p})(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) \neq 0 \,. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3.4 Consideremos las siguientes matrices con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

La matriz A tiene rango 1 porque no es la matriz nula (tiene menores de orden 1 no nulos) y todos sus menores de orden 2 son nulos; obsérvese que todas sus columnas son proporcionales, es decir, la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ que generan las columnas de A es 1. La matriz B tiene rango 2, pues tiene dos columnas linealmente independientes y las tres columnas no forman una familia libre; se sigue entonces que $|B| = 0$ y que al menos un menor de orden 2 de B es no nulo.

Proposición 3.5 (Cálculo de determinantes) *Dada una matriz cuadrada* $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$*, para cada par de índices* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *denotemos por* A_{ij} *la matriz obtenida de* A *suprimiendo la fila* i *y la columna* j*, es decir,* $A_{ij} = A^{1 \dots i-1\, i+1 \dots n}_{1 \dots j-1\, j+1 \dots n}$.

Para cada índice $h \in \{1, \dots, n\}$ *se satisface*

$$|A| = (-1)^{1+h} a_{1h}|A_{1h}| + (-1)^{2+h} a_{2h}|A_{2h}| + \cdots + (-1)^{n+h} a_{nh}|A_{nh}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ih}|A_{ih}| \,,$$

fórmula que se conoce como desarrollo del determinante de A por la columna h-ésima. *Teniendo en cuenta que* $|A^t| = |A|$, *de la anterior fórmula obtenemos la siguiente*

$$|A| = (-1)^{h+1}a_{h1}|A_{h1}| + (-1)^{h+2}a_{h2}|A_{h2}| + \cdots + (-1)^{h+n}a_{hn}|A_{hn}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{h+j}a_{hj}|A_{hj}|\,,$$

la cual se conoce como desarrollo del determinante de A por la fila h-ésima.

Demostración. Sean E un espacio vectorial de dimensión n, $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ su base dual. Si $v_1, \dots, v_n \in E$ son los vectores cuya matriz de coordenadas en la base de E es A, entonces tenemos (véanse V.5.10 y 3.2)

$$\begin{aligned}
|A| &= (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_n) \\
&= (-1)^{h+1}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_h, v_1, \dots, v_{h-1}, v_{h+1}, \dots, v_n) \\
&= (-1)^{h+1}\Big[i_{v_h}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)\Big](v_1, \dots, v_{h-1}, v_{h+1}, \dots, v_n) \\
&= (-1)^{h+1}\Big[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\,\omega_i(v_h)\cdot(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_n)\Big](v_1, \dots, v_{h-1}, v_{h+1}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+h}\,\omega_i(v_h)\cdot(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_n)(v_1, \dots, v_{h-1}, v_{h+1}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+h}\,a_{ih}\cdot\left|A^{1\dots i-1\,i+1\dots n}_{1\dots h-1\,h+1\dots n}\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+h}\,a_{ih}\cdot|A_{ih}|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 3.6 Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(k)$, se define la *matriz adjunta* de A como la matriz $A^* = (a^*_{ij}) \in M_n(k)$ definida por la igualdades

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|\,, \qquad\qquad i, j \in \{1, \dots, n\}\,;$$

es decir, A^* es la matriz traspuesta de la matriz $\Big((-1)^{i+j}|A_{ij}|\Big)$.

Proposición 3.7 (Propiedad de la matriz adjunta) *Para toda matriz cuadrada A de orden n se satisfacen las igualdades*

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|I_n\,.$$

Demostración. Pongamos $A^*A = (c_{ij})$. Dados índices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos (véase 3.5)

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a^*_{ih}a_{hj} = \sum_{h=1}^{n}(-1)^{i+h}a_{hj}|A_{hi}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1j} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{nj} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\,,$$

es decir, si M_{ij} es la matriz que obtenemos de A poniendo la columna j-ésima de A en el lugar de la i-ésima, entonces $c_{ij} = |M_{ij}|$; por tanto cuando $i \neq j$ la matriz M_{ij} tiene dos columnas iguales y debe ser $c_{ij} = |M_{ij}| = 0$, y cuando $i = j$ obtenemos $c_{ij} = |A|$; queda probado que $A^*A = |A|I_n$. La igualdad $AA^* = |A|I_n$ se prueba de modo análogo. ∎

Corolario 3.8 (Cálculo de matrices inversas) *Si $A \in M_n(k)$ es invertible (es decir, si $|A| \neq 0$), entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.*

4 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definiciones 4.1 Llamaremos *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* a todo par $(T : E_n \to F_m,\ v_0 \in F_n)$, donde T es una aplicación lineal definida en un espacio vectorial E_n de dimensión n y que valora en un espacio vectorial F_m de dimensión m, y v_0 es un vector de F_m; abreviadamente lo denotaremos $T(x) = v_0$.

Un vector $e \in E_n$ se dice que es una *solución* del sistema $T(x) = v_0$ cuando $T(e) = v_0$; por lo tanto el sistema tiene soluciones si y sólo si $v_0 \in \operatorname{Im} T$. Un sistema se dice que es *compatible* si tiene soluciones, *incompatible* si no tiene soluciones, y *determinado* si tiene una única solución.

Un sistema de ecuaciones lineales $T(x) = v_0$ se dice que es *homogéneo* cuando $v_0 = 0$. Es claro que todo sistema homogéneo es compatible (pues siempre es cierto que $0 \in \operatorname{Im} T$), y que el conjunto de sus soluciones es el subespacio vectorial $\operatorname{Ker} T$ de E. Cada sistema de ecuaciones lineales $T(x) = v_0$ tiene asociado el sistema homogéneo $T(x) = 0$.

Proposición 4.2 *Sea $T(x) = v_0$ un sistema de ecuaciones lineales que es compatible. Si $e_0 \in E_n$ es una solución suya, entonces el conjunto de todas las soluciones del sistema es*

$$e_0 + \operatorname{Ker} T = \{e_0 + e : e \in \operatorname{Ker} T\}.$$

Es decir, las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se obtienen sumando a una solución particular suya las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Demostración. Es muy sencilla y se deja como ejercicio. ∎

4.3 Sea $(T : E_n \to F_m,\ v_0 \in F_m)$ un sistema de ecuaciones lineales y consideremos bases $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B_F = \{v_1, \dots, v_m\}$ de E y F, respectivamente. Si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(k)$ es la matriz de T en las bases fijadas y $(b_1, \dots, b_m)$ son las coordenadas de v_0 en la base B_F, entonces, dado un vector $e = x_1e_2 + \cdots + x_ne_n$ de E, la condición necesaria y suficiente para que e sea solución del sistema $T(x) = v_0$ es que se satisfaga la igualdad

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} ; \tag{4.1}$$

las ecuaciones (4.1) son la expresión en coordenadas del sistema lineal $T(x) = v_0$ en las bases B_E y B_F. La matriz A se denomina *matriz del sistema*, y la matriz B que se obtiene añadiendo a A la matriz columna de las coordenadas de v_0,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

se llama *matriz ampliada del sistema*, .

Proposición 4.4 (Teorema de Rouché-Fröbenius) *Con la misma notación de* 4.3, *la condición necesaria y suficiente para que el sistema* $T(x) = v_0$ *sea compatible es que las matrices* A *y* B *tengan el mismo rango.*

Demostración. Por una parte, decir que el sistema es compatible significa que existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ tales que el vector $e = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ es solución del sistema, es decir, que existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ satisfaciendo las igualdades

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mn}\alpha_n &= b_m \end{aligned}\right\};$$

por otra parte, decir que las matrices A y B tienen igual rango significa que la columna añadida a A para obtener B es combinación lineal de las columnas de A, es decir, que existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ que satisfacen la igualdad

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

a la vista de lo anterior es claro que el sistema es compatible si y sólo si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. ∎

Veamos a continuación los dos métodos más conocidos para resolver sistemas de ecuaciones lineales expresados en coordenadas. (Aunque en el segundo de los métodos que expondremos no aparecen determinantes –es decir, no es una aplicación de los tensores hemisimétricos–, lo describiremos en este capítulo debido a su estrecha relación con el resto de la materia de esta sección).

4.5 (Método de Cramer) Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es de *Cramer* cuando tiene igual número de cuaciones que de incógnitas y es determinado.

Si $(E_n \xrightarrow{T} F_n,\ v_0 \in F_n)$ es un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, entonces será de Cramer si y sólo si T es un isomorfismo, en cuyo caso su única solución será el vector $e = T^{-1}(v_0)$. Si consideramos la expresión en coordenadas del sistema respecto de ciertas bases,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}, \tag{4.2}$$

entonces la matriz de coeficientes A será cuadrada, y el sistema será de Cramer si y sólo si $|A| \neq 0$, en cuyo caso la única solución del sisema vendrá dada por la igualdad

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta 3.8, será

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{1n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^* & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

de donde para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se obtiene

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ji}^* b_i}{|A|} = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_i |A_{ij}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Supongamos ahora que tenemos un sitema de ecuaciones lineales (con n y m arbitrarios) expresado en coordenadas,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}, \tag{4.3}$$

del que sabemos que es compatible. Con la notación de 4.4, existe $r \in \mathbb{N}$ ($r \leq n$, $r \leq m$) tal que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$, y en particular existe una matriz cuadrada de orden r extraida de A con determinante no nulo; supongamos por comodidad en la notación que es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Si consideramos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right\}, \tag{4.4}$$

entonces tenemos que cada una de las $m-r$ últimas ecuaciones del sistema (4.3) es combinación lineal de las ecuaciones del sistema (4.4), por lo que las soluciones del sistema (4.3) son las mismas que las del sistema (4.4) (compruébese).

Veamos las soluciones de (4.4). Cualesquiera que sean los escalares $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in k$ obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r & = & b_1 - (a_{1,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + a_{1n}\lambda_n) \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r & = & b_r - (a_{r,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + a_{rn}\lambda_n) \end{array}\right\},$$

que es de Cramer porque su matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, y cuya solución es: dado $j \in \{1, \dots, r\}$,

$$x_j = \frac{\begin{array}{c} \phantom{a_{11}\ \dots\ a_{1,j-1}\ } \overset{j}{\downarrow} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & \overbrace{b_1 - (a_{1,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + a_{1n}\lambda_n)} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & b_r - (a_{r,r+1}\lambda_{r+1} + \cdots + a_{rn}\lambda_n) & a_{r,j+1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}}. \tag{4.5}$$

Concluyendo, las soluciones del sistema (4.4) (y por lo tanto las de (4.3)) son los vectores cuyas coordenadas (en la base fijada en E_n) son de la forma $(x_1, \dots, x_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ son escalares arbitrarios (denominados *parámetros*) y $x_1, \dots, x_r$ se obtienen en función de $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ según la fórmula (4.5).

Ejemplo 4.6 El sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & & & - & 3x_3 & = & -1 \end{array}\right\}$$

es compatible porque $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$ (compruébese); además

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,.$$

Resolvámoslo por el método de Cramer descrito en 4.5. Como en el menor de orden 2 no nulo que hemos considerado aparecen las filas primera y tercera de A, consideraremos el sistema formado por las ecuaciones primera y tercera; como en dicho determinante no aparece la columna segunda, la incognita x_2 la tomamos como parámetro, $x_2 = \lambda$. Nos queda entonces el sistema de Cramer

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_3 & = & 2 - 2\lambda \\ 2x_1 & - & 3x_3 & = & -1 \end{array}\right\},$$

cuya solución es

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2-2\lambda & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{-1} = 7 - 6\lambda\,, \qquad x_2 = \lambda\,, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-2\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 3 - 4\lambda\,.$$

4.7 (Método de Gauss) Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales ($T : E_n \to F_m$, $v_0 \in F_m$), y que $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ son bases de E_n y F_m, respectivamente. Si A es la matriz de T en las bases $\{e_j\}$ y $\{v_i\}$, y si $(b_1, \dots, b_m)$ son las coordenadas del vector v_0 en la base de F_m, entonces sabemos que las solucines del sistema $T(x) = v_0$ son los vectores de E_n cuyas coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la base de E_n satisfacen

$$A(x_1, \dots, x_n)^t = (b_1, \dots, b_m)^t \, . \tag{4.6}$$

La justificación teórica del método que vamos a describir es la siguiente: Supongamos que cambiamos la base de F_m por otra base $\{v'_1, \dots, v'_m\}$; si A' es la matriz de T en las bases $\{e_j\}$ y $\{v'_i\}$, y si $(b'_1, \dots, b'_m)$ son las coordenadas de v_0 en la nueva base de F_m, entonces las solucines del sistema $T(x) = v_0$ son los vectores de E_n cuyas coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la base de E_n satisfacen

$$A'(x_1, \dots, x_n)^t = (b'_1, \dots, b'_m)^t \, , \tag{4.7}$$

es decir, los sistemas (4.6) y (4.7) tienen las mismas soluciones; por lo tanto, efectuando cambios en la base de F_m podemos conseguir que la representación en coordenadas del sistema $T(x) = v_0$ tenga una matriz lo bastante simple como para que encontrar su solución general no precise de ningún cálculo.

Los cambios que haremos en la base de F_m serán muy sencillos y se agrupan en los tres tipos siguientes (en lo que sigue, B y B' denotarán la matriz ampliada del sistema $T(x) = v_0$ en las bases $\{e_j\}$, $\{v_i\}$ y $\{e_j\}$, $\{v'_i\}$, respectivamente):

(i) Permutar el orden de los vectores de la base $\{v_1 \dots, v_m\}$. En este caso la matriz B' se obtiene permutando las filas de B.

(ii) Sustituir un vector v_i de la base por λv_i con $\lambda \in k^*$. Entonces $v_0 = b_1 v_1 + \dots + (b_i \lambda^{-1}) \lambda v_i + \dots + b_m v_m$ y, dado $j \in \{1, \dots, n\}$, $T(e_j) = a_{1j} + \dots + (a_{ij} \lambda^{-1}) \lambda v_i + \dots + a_{mj} v_m$; es decir, B' se obtiene multiplicando la fila i-ésima de B por λ^{-1}.

(iii) Sustituir un vector v_i de la base por $v_i + \lambda v_h$ con $i \neq h$. Entonces

$$\begin{aligned} v_0 &= b_1 v_1 + \dots + b_i (v_i + \lambda v_h) + \dots + (b_h - \lambda b_i) v_h + \dots + b_m v_m \, , \\ T(e_j) &= a_{1j} v_1 + \dots + a_{ij} (v_i + \lambda v_h) + \dots + (a_{hj} - \lambda a_{ij}) v_h + \dots + a_{mj} v_m \qquad j \in \{1, \dots, n\} \, ; \end{aligned}$$

es decir, B' se obtiene de B restándole a la fila h la fila i multiplicada por λ.

El método de Gauss consiste en lo siguiente: Haciendo cambios de los tipos descritos y permutanto, si es necesario, el orden de las incógnita (lo que equivale a permutar el orden de las n primeras columnas de B), obtenemos una matriz B' de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

(donde $r = \operatorname{rg} A$), y por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & \vdots & \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots c_{rn}x_n & = & d_r \\ 0 & = & d_{r+1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & d_m \end{array}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el sistema original (salvo, tal vez, el orden de las incógnitas). Obtenemos entonces que el sistema es compatible si y sólo si $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$, en cuyo caso la solución general es

$$\begin{array}{l} x_{r+1}, \dots, x_n \in k\,, \\ x_j = d_j - (c_{j,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{jn}x_n)\,, \qquad j = 1, \dots, r\,. \end{array}$$

Los cambios en la matriz B suelen hacerse según los siguientes pasos: Si todos los elementos de la primera columna son nulos, entonces esta columna se pasa al lugar n-ésimo; si hay un elemento no nulo en la primera columna, entonces se permutan las filas de modo que dicho elemento quede en la primera fila; con un cambio del tipo (ii) se consigue que este elemento sea 1, y con cambios del tipo (iii) se consigue que el resto de los elementos de la primera columna sean 0. De este modo, la primera columna queda en la forma deseada. Supongamos que tenemos h columnas en la forma deseada. Si en la columna $(h+1)$-ésima los elementos de las filas $h+1, \dots, m$ son todos nulos, entonces la colocamos en el lugar n-ésimo; en caso contrario, permutando sólamente las filas $h+1, \dots, m$ colocamos un elemento no nulo en la fila $h+1$, y con cambios del tipo (ii) y (iii) podemos conseguir que este elemento sea 1 y que el resto de los elementos de la columna $(h+1)$-ésima sean nulos (obsérvese que procediendo como hemos descrito, las h primeras columnas no varían). El proceso continúa hasta obtener la matriz buscada.

Ejemplo 4.8 El método de Gauss se puede aplicar simultáneamente a sistemas de ecuaciones lineales distintos que tengan la misma matriz de coeficientes. Por ejemplo, resolvamos simultáneamente los sistemas

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 & = & 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = & -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 3x_5 & = & -7 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 & = & -3 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 & = & -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 3x_5 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 & = & 2 \end{array}\right\}.$$

Consideremos la matriz

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 & 5 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 7 & 3 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -3 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde la fila añadida arriba indica el orden de las columnas correspondientes a la matriz A. Como el primer elemento de la primera columna es igual a 1, haciendo cambios del tipo (iii) podemos anular el resto de los elementos de dicha columna y obtenemos

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrrrr} 1 & -2 & 3 & 5 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 11 & -11 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array} ;$$

ahora, permutando las filas segunda y tercera, y haciendo cambios de los tipos (ii) y (iii) obtenemos

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrrrr} 1 & 0 & 1 & 11 & -26 & 24 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -11 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 10 & -8 \end{array}\right) \end{array} ;$$

para poder continuar tenemos que cambiar el orden de las columnas, ya que los dos últimos elementos de la tercera columna son nulos.

Si continuamos aplicando el método según se a descrito en 4.7 llagamos a la matriz

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & & \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array} ,$$

de la que se sigue que el segundo de los sistemas es incompatible (porque $-3 \neq 0$), y que el primero es compatible y sus soluciones son las mismas que las del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 - 4x_5 & = & 2 \\ x_2 - x_3 - 5x_5 & = & 5 \\ x_4 - 2x_5 & = & 2 \end{array}\right\} ,$$

es decir, $x_1 = 2 - x_3 + 4x_5$, $x_2 = 5 + x_3 + 5x_5$ y $x_4 = 2 + 2x_5$.

Ejercicio 4.9 (Cálculo de matrices inversas) Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(k)$ que sea invertible, el método de Gauss nos permite calcular la matriz A^{-1}. En efecto: se trata de encontrar una matriz $A^{-1} \in M_n(k)$ que satisfaga $AA^{-1} = I_n$, es decir, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, la columna i-ésima de A^{-1} debe ser la única solución del sistema

$$A(x_1, \ldots, x_n)^t = (0, \ldots, 0, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, 0, \ldots, 0)^t ;$$

por lo tanto, si partimos de la matriz $(A, I_n) \in M_{n\times 2n}(k)$ y operamos en ella según el método de Gauss para obtener simultáneamente las soluciones de los n sistemas que se plantean llegaremos a la matriz (I_n, A^{-1}).

5 Problemas

5.1 Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(k)$, pruébese que si todos los elementos de una fila (ó columna) de A son nulos entonces $|A| = 0$.

5.2 Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$, y se dice A es *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Calcúlese $|A|$ en ambos casos.

5.3 Calcúlense los siguientes determinantes[1]:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & \theta^2 \\ 1 & \theta^2 & \theta \end{vmatrix} \quad \text{donde } \theta = e^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

5.4 Hállense los valores de x que anulan los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}.$$

5.5 Se llama *determinante de Vandermonde* de unos escalares $(x_1 \dots, x_n)$ al determinante definido por la igualdad

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pruébese la siguiente relación de recurrencia:

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_1) \cdot (x_{n-1} - x_1) \cdot \dots \cdot (x_2 - x_1) \cdot V(x_2, \dots, x_n).$$

Conclúyase de lo anterior la siguiente igualdad: $V(x_1, \dots, x_n) = \Pi_{i<j}(x_j - x_i)$. Como consecuencia, el determinante de Vandermonde de unos escalares es igual a 0 si y sólo si entre dichos escalares hay dos iguales.

[1] Las funciones "coseno hiperbólico" y "seno hiperbólico" están definidas del siguiente modo:

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \qquad \operatorname{sh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

5.6 Pruébese que se satisface la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (n-1)!\,.$$

5.7 Resuélvanse las ecuaciones $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ x^2 & 1 & -1 & -1 \\ x^3 & -1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{vmatrix} = 0\,,\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 0\,.$

5.8 Calcúlense los determinantes $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ & & & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}\,.$

5.9 Resuélvase la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x-2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-3 & \dots & 1 \\ & & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & x-(n-1) \end{vmatrix} = 0\,.$

5.10 Pruébese que el polinomio $(x-1)^3$ divide al polinomio $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{vmatrix}\,.$

5.11 Calcúlese $|A|$ en los siguientes supuestos: (a) $A \in M_4(\mathbb{Z}_3)$; (b) $A \in M_4(\mathbb{Z}_7)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

5.12 Calcúlese $|A|$, donde $A \in M_n(\mathbb{R})$ es tal que $a_{ij} = i - j$.

5.13 Dadas matrices cuadradas $A = (a_{ij}) \in M_p(k)$, $B = (b_{ij}) \in M_q(k)$, pruébense las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & & & \\ \vdots & & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| \,,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \\ a_{11} & \dots & a_{1p} & & & \\ \vdots & & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{pq} \cdot |A| \cdot |B| \,.$$

5.14 Con la notación de 5.13, calcúlense los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ & & & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} \,, \qquad \begin{vmatrix} & & & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{q1} & \dots & b_{qq} \\ a_{11} & \dots & a_{1p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \,.$$

5.15 Calcúlense los determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \,, \qquad \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & x+2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x-1 & 3 \\ -3 & -5 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \,.$$

5.16 Sea $f : E \to E$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es su base dual, entonces el espacio vectorial $\Lambda_{n-1}(E)$ tiene dimensión n y una base suya es la familia de tensores $\{\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_{i+1} \wedge \dots \wedge \omega_n \,:\, i = 1, \dots, n\}$ (véase V.4.6 (i)).

(a) Si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es la matriz de f en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, calcúlese la matriz del endomorfismo inducido $f^\wedge_{n-1} : \Lambda_{n-1}(E) \to \Lambda_{n-1}(E)$ en la base mencionada.

(b) Dedúzcase de (a) que si $\operatorname{rg} f = n-1$ entonces $\operatorname{rg} f^\wedge_{n-1} = 1$.

(c) Pruébese la igualdad $\det f^\wedge_{n-1} = (\det f)^{n-1}$.

5.17 Sea $T : E \to E$ un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita igual a n. Sabemos que para toda familia de vectores $v_1 \dots, v_n$ de E se satisface

$$T(v_1) \wedge \dots \wedge T(v_n) = \det T \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n \,. \qquad (*)$$

Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E y sea $A=(a_{ij})$ la matriz de T en dicha base. Teniendo en cuenta la igualdad (*) pruébense:

(a) Para cada par de índices $i,j\in\{1,\dots,n\}$ se satisface

$$T(e_1)\wedge\cdots\wedge T(e_{j-1})\wedge \overset{\substack{j\\ \downarrow}}{e_i}\wedge T(e_{j+1})\wedge\cdots\wedge T(e_n)=\Delta_{ij}\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n\,, \tag{**}$$

donde $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ (véase la notación de 3.5). Obténgase como consecuencia la fórmula del desarrollo del determinante de A por su columna h-ésima. (Por supuesto, para probar la igualdad (**) no debe usarse dicha fórmula.)

(b) Para cada par de índices $i,j\in\{1,\dots,n\}$ se satisface

$$e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge \overset{\substack{i\\ \downarrow}}{T(e_j)}\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n=a_{ij}\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n\,.$$

Como aplicación, supuesto que A es invertible (es decir, si T es invertible), calcúlese A^{-1}.

5.18 Hállense la inversa de las siguientes matrices calcúlandose previamente sus respectivas matrices adjuntas:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1+\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&1-2\mathrm{i}\\1&1&\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Obténganse también la inversa de las matrices anteriores utilizándose el método de Gauss.

5.19 Sea $N\in M_n(k)$ una matriz nilpotente. Pruébese que la matriz I_n-N es invertible y calcúlese $(I_n-N)^{-1}$ en función de N. Aplíquese esto al cálculo de la matriz inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

5.20 Calcúlese el rango de la matriz $\begin{pmatrix}2&2&2&1&1&4\\-1&-1&-3&0&2&-1\\1&2&1&1&1&3\\3&1&2&-2&-1&-1\\4&-2&-2&-6&0&8\end{pmatrix}$.

5.21 Resuélvanse, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales:

$$\left.\begin{aligned}2x-y+3z&=9\\3x-5y+z&=-4\\4x-7y+z&=5\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}3x+5y+4z&=3\\2x+3y+5z&=10\\x+2y+2z&=3\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}5x+2y+3z&=-2\\2x-2y+5z&=0\\3x+4y+2z&=-10\end{aligned}\right\}.$$

5.22 Calcúlese $|A|$, donde $A\in M_n(\mathbb{R})$ es tal que $a_{ij}=1$ si $i\neq j$ y $a_{ii}=0$.

5.23 Hállense los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que el siguiente sistemas de ecuaciones lineales es compatible:

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & 1 \\ x + \lambda y + z & = & \lambda \\ x + y + \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right\} .$$

Resuélvase el sistema cuando tenga solución.

5.24 Calcúlese el rango de las matrices A, B y C en los siguientes supuestos: (a) tienen los coeficientes en $\mathbb{Q}$; (b) tienen los coeficientes en $\mathbb{Z}/(\ntrianglelefteq)$; (c) tienen los coeficientes en $\mathbb{Z}/(\ntriangleright)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

5.25 Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales según los valores de los distintos parámetros:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by + z & = & 1 \\ x + aby + z & = & b \\ x + by + az & = & 1 \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{rcl} 4bcx + acy - 2abz & = & 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz & = & -abc \\ 3bcx + 2acy - abz & = & 4abc \end{array}\right\} \quad (abc \neq 0) .$$

5.26 Discútase el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos según los valores de los distintos parámetros:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z & = & a \\ x + \omega y + \omega^2 z & = & b \\ x + \omega^2 y + \omega z & = & b \end{array}\right\} \quad (\omega \in \mathbb{C} \text{ con } \omega^3 = 1 \text{ y } \omega \neq 1) .$$

5.27 Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales utilizando el método de Cramer:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z & = & 2 \\ x + -2y - 2z & = & -3 \\ 2x - 3z & = & -1 \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{rcl} 2x + 3y + 4z & = & a \\ 5x + 6y + 7z & = & b \\ 8x + 9y + 9z & = & c \end{array}\right\} .$$

5.28 Resuélvase, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x + 3y + 2z + 3t + 4u & = & 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + 3u & = & 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + u & = & 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2u & = & 1 \end{array}\right\} .$$

5.29 Resuélvase, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - 2z + t & = & 2 \\ 2x - y - z - t & = & 1 \\ -x + y + 2z - t & = & 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3t & = & -1 \end{array}\right\} .$$

5.30 Hállense los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es indeterminado:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & 0 \\ x_0 + \lambda x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & x_1 \\ x_0 + x_1 + \lambda x_2 + \cdots + x_n & = & 2x_2 \\ & \vdots & \\ x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + \lambda x_n & = & n x_n \end{array}\right\} .$$

5.31 Resuélvase, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y + z - t & = & 1 \\ 2x - 3y + z + t & = & 2 \\ x + 9y + 2z - 4t & = & 1 \end{array}\right\} .$$

5.32 Hállese la inversa de la siguiente matriz calcúlandose previamente su matriz adjunta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Obténgase también la inversa de las matriz anterior utilizándose el método de Gauss.

5.33 Estúdiense de modo simultáneo la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + t & = & 2 \\ x + y - z - t & = & 0 \\ x - y + 2z - t & = & -1 \\ 3x + 2y + z - t & = & 1 \\ x + y + z + t & = & 0 \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + t & = & 3 \\ x + y - z - t & = & 0 \\ x - y + 2z - t & = & 1 \\ 3x + 2y + z - t & = & 5 \\ x + y + z + t & = & 4 \end{array}\right\} ,$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + t & = & 1 \\ x + y - z - t & = & -1 \\ x - y + 2z - t & = & 1 \\ 3x + 2y + z - t & = & -1 \\ x + y + z + t & = & 1 \end{array}\right\} .$$