Capítulo VII

Diagonalización de Endomorfismos

Fijemos, para todo este capítulo, un espacio vectorial E sobre un cuerpo k y un endomorfismo $T : E \to E$.

Vamos a estudiar cuándo existe una base de E respecto de la cual la matriz del endomorfismo T es una matriz diagonal [1], problema que está estrechamente relacionado con el estudio de los subespacios de E que son invariantes por T. En el desarrollo de dicho estudio aparecerán dos invariantes muy importantes asociados a cada endomorfismo: su polinomio anulador y su polinomio característico.

Para desarrollar este capítulo supondremos que el lector conoce las propiedades elementales del anillo de polinomios $k[x]$ (véanse [2], [7] ú [8]).

1 Polinomio Anulador

1.1 El endomorfismo T induce de modo natural la aplicación

$$\begin{array}{rcl} k[x] & \to & \mathrm{End}_k(E) \\ p(x) & \mapsto & p(T)\,, \end{array} \tag{1.1}$$

donde, dado $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \in k[x]$, $p(T)$ es el endomorfismo

$$\begin{array}{rcl} p(T) : E & \to & E \\ e & \mapsto & p(T)(e) := \alpha_0 e + \alpha_1 T(e) + \cdots + \alpha_n T^n(e) \end{array}$$

(es decir, $p(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_n T^n$, donde I es el endomorfismo identidad de E y $T^i = T \circ \overset{i)}{\cdots} \circ T$).

La aplicación (1.1) es un morfismo de anillos, es decir, manda la suma de polinomios a la suma de endomorfismos, el producto de polinomios a la composición de endomorfismos, y el polinomio 1 al endomorfismo identidad de E (compruébese).

[1] Una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ se dice que es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$.

Observación **1.2** Sabemos que el anillo $\mathrm{End}_k(E)$ es no conmutativo, pero al ser $k[x]$ un anillo conmutativo y (1.1) un morfismo de anillos se satisface: dados $p(x), q(x) \in k[x]$ los endomorfismos $p(T)$ y $q(T)$ conmutan:

$$p(T)\circ q(T) = q(T)\circ p(T)\,.$$

Observación **1.3** En todo este capítulo los polinomios no nulos que consideremos serán tales que su coeficiente principal es igual a 1. El motivo es el siguiente: dados polinomios no nulos $p(x), q(x) \in k[x]$, los ideales que generan son iguales si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que $p(x) = \lambda q(x)$; por lo tanto, como $k[x]$ es un "dominio de ideales principales", todo ideal no nulo de $k[x]$ tiene un único generador con coeficiente principal igual a 1.

Definición 1.4 El núcleo del morfismo de anillos $k[x] \to \mathrm{End}_k(E)$ inducido por T se denomina *ideal anulador* de T y se denota $\mathrm{Ann}(T)$. Si $\mathrm{Ann}(T) \neq 0$ entonces se define el *polinomio anulador* (ó *polinomio mínimo*) del endomorfismo T como el generador de $\mathrm{Ann}(T)$ (véase 1.3), y se denota $p_T(x)$; cuando $\mathrm{Ann}(T) = 0$ se toma $p_T(x) = 0$.

Es decir, cuando $\mathrm{Ann}(T) \neq 0$ el polinomio anulador de T es de la forma $p_T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n$ con $n \geq 1$, y está caracterizado por satisfacer las siguientes propiedades:
(i) $p_T(T) = 0$ (= endomorfismo nulo);
(ii) si $q(x) \in k[x]$ es tal que $q(T) = 0$, entonces $q(x)$ es múltiplo de $p_T(x)$.

Definición 1.5 Diremos que un subespacio E' de E es *invariante* por T cuando se satisfaga $T(E') \subseteq E'$.

1.6 Sea E' un subespacio de E que es invariante por T. Entonces la restricción de T a E' valora en E', por lo que tenemos definido un endomorfismo de E',

$$\begin{array}{rcl} T_{|_{E'}} : E' & \to & E' \\ e & \mapsto & T_{|_{E'}}(e) := T(e)\,, \end{array}$$

y tenemos el morfismo de anillos asociado a $T_{|_{E'}}$,

$$\begin{array}{rcl} k[x] & \to & \mathrm{End}_k(E') \\ p(x) & \mapsto & p(T_{|_{E'}})\,, \end{array}$$

cuyo núcleo es el ideal anulador de $T_{|_{E'}}$, $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$.

Obsérvese que, dado $p(x) \in k[x]$, el endomorfismo $p(T_{|_{E'}})$ de E' no es más que el endomorfismo $p(T)$ de E restringido a E': $p(T_{|_{E'}}) = p(T)_{|_{E'}}$. En particular tenemos: $p(x) \in \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$ si y sólo si el endomorfismo $p(T)$ de E se anula sobre todos los vectores de E'. Como consecuencia obtenemos

$$\mathrm{Ann}(T) \subseteq \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})\,.$$

Por otra parte, dado que E' es invariante por T, podemos considerar el único endomorfismo $\overline{T} : E/E' \to E/E'$ que hace conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ E/E' & \xrightarrow{\overline{T}} & E/E' \end{array}$$

siendo $\pi : E \to E/E'$ el morfismo de paso al cociente (véase I.4.6); dado $\pi(e) \in E/E'$ $(e \in E)$, $\overline{T}$ está definido por la igualdad $\overline{T}(\pi(e)) = \pi(T(e))$. De nuevo, $\overline{T}$ define un morfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} k[x] & \to & \mathrm{End}_k(E/E') \\ p(x) & \mapsto & p(\overline{T}) \,, \end{array}$$

cuyo núcleo es el ideal anulador de $\overline{T}$, $\mathrm{Ann}(\overline{T})$.

Ejercicio 1.7 Con la notación de 1.6, pruébese que para todo polinomio $p(x) \in k[x]$ y todo vector $e \in E$ se satisface $p(\overline{T})(\pi(e)) = \pi(p(T)(e))$. Pruébese también que si $p(x) \in \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$ y $q(x) \in \mathrm{Ann}(\overline{T})$, entonces $p(x)q(x) \in \mathrm{Ann}(T)$.

1.8 Un modo natural de encontrar subespacios de E que son invariantes por T es el siguiente: dado un polinomio no nulo $p(x) \in k[x]$, el núcleo del endomorfismo $p(T)$, $E' = \mathrm{Ker}\, p(T)$, es un subespacio invariante por T: dado $e \in E'$ (es decir, $e \in E$ tal que $p(T)(e) = 0$), como los endomorfismos T y $p(T)$ conmutan (véase 1.2) tenemos $p(T)(T(e)) = T(p(T)(e)) = T(0) = 0$, es decir $T(e) \in \mathrm{Ker}\, p(T) = E'$.

También es claro que el polinomio $p(x)$ está en el ideal anulador de la restricción de T al subespacio $\mathrm{Ker}\, p(T)$ (compruébese).

Observaciones **1.9** Fijemos un polinomio no nulo $p(x) \in k[x]$.

(a) El subespacio invariante $E' = \mathrm{Ker}\, p(T)$ puede ser el cero, es decir, el endomorfismo $p(T)$ puede ser inyectivo. Por ejemplo, si $T = I$, $\lambda \in k$ $(\lambda \neq 1)$ y $p(x) = x - \lambda$, entonces $p(T) = T - \lambda I = (1 - \lambda)I$ es un automorfismo y por lo tanto $\mathrm{Ker}\, p(T) = 0$.

(b) Supongamos que $E' = \mathrm{Ker}\, p(T) \neq 0$. Hemos dicho en 1.8 que $p(x) \in \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$, pero puede ocurrir que $p(x)$ no sea un generador del ideal $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$, es decir, puede ocurrir que en $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$ haya polinomios no nulos de grado estrictamente más pequeño que el grado de $p(x)$. Por ejemplo, tomemos de nuevo $T = I$; para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface $T^n = I$, por lo tanto, si tomamos $n > 1$ y $p(x) = x^n - 1$, entonces $E' = \mathrm{Ker}\, p(T) = \mathrm{Ker}(T^n - I) = E$, y un generador de $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'}}) = \mathrm{Ann}(T)$ es $x - 1$.

Ejercicio 1.10 Con la notación de 1.9, supongamos que $E' = \mathrm{Ker}\, p(T) \neq 0$ y que el grado de $p(x)$ es igual a 1. Pruébese que entonces $p(x)$ sí es un generador del ideal $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$.

Lema 1.11 *Sean E' y E'' dos subespacios vectoriales de E que son invariantes por T, con lo que $E' + E''$ también es invariante por T. Se Satisface*

$$\mathrm{Ann}(T_{|_{E'+E''}}) = \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}}) \cap \mathrm{Ann}(T_{|_{E''}}) \,,$$

es decir, $p_{T_{|_{E'+E''}}}(x) = \mathrm{m.c.m.}\left(p_{T_{|_{E'}}}(x), p_{T_{|_{E''}}}(x)\right)$ *(m. c. m. = "mínimo común múltiplo").*

Demostración. La aplicación $T_{|_{E'}}$ es la restricción de $T_{|_{E'+E''}}$ al subespacio E' de $E' + E''$, por lo que $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'+E''}}) \subseteq \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}})$ (véase 1.6); del mismo modo $\mathrm{Ann}(T_{|_{E'+E''}}) \subseteq \mathrm{Ann}(T_{|_{E''}})$, y obtenemos

$$\mathrm{Ann}(T_{|_{E'+E''}}) \subseteq \mathrm{Ann}(T_{|_{E'}}) \cap \mathrm{Ann}(T_{|_{E''}}) \,.$$

Veamos la otra inclusión. Sea $q(x) \in \operatorname{Ann}(T_{|_{E'}}) \cap \operatorname{Ann}(T_{|_{E''}})$ y sea $e \in E' + E''$; existen $e' \in E'$ y $e'' \in E''$ tales que $e = e' + e''$, por lo que

$$q(T_{|_{E' + E''}})(e) = q(T)(e) = q(T)(e') + q(T)(e'') = 0 + 0 = 0\,;$$

es decir, la restricción del endomorfismo $q(T)$ de E al subespacio $E' + E''$ es nulo, y por lo tanto $q(x) \in \operatorname{Ann}(T_{|_{E' + E''}})$. ∎

Teorema 1.12 *Si el espacio vectorial E tiene dimensión finita, entonces el polinomio $p_T(x)$ es no nulo y de grado menor o igual que la dimensión de E.*

Demostración. Si fuera $p_T(x) = 0$, entonces el morfismo de anillos $k[x] \to \operatorname{End}_k(E)$ (que también es un morfismo de k-espacios vectoriales) sería inyectivo, y nos encontraríamos con que el espacio vectorial de dimensión finita $\operatorname{End}_k(E)$ contiene un subespacio vectorial de dimensión infinita: $k[x] = \langle 1, x, x^2, \dots \rangle$. Por lo tanto debe ser $p_T(x) \neq 0$.

Probemos, por inducción en $n = \dim E$, que el grado de $p_T(x)$ es menor o igual que n. Si $n = 1$, entonces existe $\lambda \in k$ tal que $T = \lambda I$ y por lo tanto $p_T(x) = x - \lambda$ (véase 1.10).

Supongamos ahora que $n > 1$ y que el enunciado del teorema es cierto para endomorfismos de k-espacios vectoriales cuya dimensión es menor o igual a $n-1$. Fijemos un vector $e \in E$, $e \neq 0$. Entonces es claro que existe $m \in \mathbb{N}$ con $1 \leq m \leq n$, tal que la familia $\{e, T(e), \dots, T^{m-1}(e)\}$ es libre y la familia $\{e, T(e), \dots, T^m(e)\}$ no es libre; es decir, si definimos el subespacio $E' = \langle e, T(e), \dots, T^{m-1}(e)\rangle$, entonces $\{e, T(e), \dots, T^{m-1}(e)\}$ es una base de E' y $T^m(e) \in E'$, por lo que existen escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ tales que $T^m(e) = \alpha_0 e + \alpha_1 T(e) + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1}(e)$.

Consideremos el polinomio $p(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \dots - \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m$ y veamos que E' es un subespacio invariante por T tal que $p_T(x) \in \operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$. Para probar que $T(E') \subseteq E'$, basta ver que existe una base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de E' para la que se satisface $T(e_i) \in E'$ $(i = 1, \dots, m)$; pero esa propiedad es trivialmente cierta para la base $\{e, T(e), \dots, T^{m-1}(e)\}$. Del mismo modo, para probar que $p(x) \in \operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$, basta ver que existe una base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de E' para la que se satisface $p(T)(e_i) = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, propiedad que satisface la base $\{e, T(e), \dots, T^{m-1}(e)\}$: si $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces

$$p(T)(T^i(e)) = T^i(p(T)(e)) = T^i(0) = 0\,,$$

ya que $p(T)(e) = -\alpha_0 e - \alpha_1 T(e) - \dots - \alpha_{m-1} T^{m-1}(e) + T^m(e) = 0$.

Consideremos ahora el endomorfismo $\overline{T}$ de E/E' inducido por T (véase 1.6). Como $\dim(E/E') = n - m < n$, por hipótesis de inducción tenemos que el polinomio $p_{\overline{T}}(x)$ es no nulo y de grado menor o igual que $n - m$, de modo que $p(x) p_{\overline{T}}(x)$ es un polinomio no nulo cuyo grado es menor o igual que $m + (n - m) = m$. Para concluir la demostración, basta tener en cuenta que $p(x) p_{\overline{T}}(x) \in \operatorname{Ann}(T)$ (véase 1.7), y que por lo tanto el grado de $p_T(x)$ es menor o igual al grado de $p(x) p_{\overline{T}}(x)$. ∎

Ejercicio 1.13 En el teorema 1.12 hemos visto que el polinomio $p(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \dots - \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m$ está en $\operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$. Pruébese que $p(x)$ es un generador del ideal $\operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$, es decir, pruébese que en $\operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$ no hay polinomios no nulos de grado estrictamente menor que el grado de $p(x)$. Como consecuencia se obtiene $p_{T_{|_{E'}}}(x) = p(x)$.

Teorema 1.14 *Sea $p(x) \in k[x]$ un polinomio no nulo tal que el subespacio $E' = \operatorname{Ker} p(T)$ es no nulo. Si $p(x) = q_1(x)q_2(x)$ tal que $\operatorname{m.c.d.}\Big(q_1(x), q_2(x)\Big) = 1$ (es decir, $q_1(x)$ y $q_2(x)$ son primos entre sí), entonces los subespacios invariantes $E_1 = \operatorname{Ker} q_1(T)$ y $E_2 = \operatorname{Ker} q_2(T)$ satisfacen:*

(i) $E' = E_1 \oplus E_2$;

(ii) *Si además $p(x) = p_{T_{|_{E'}}}(x)$, entonces $p_{T_{|_{E_1}}}(x) = q_1(x)$ y $p_{T_{|_{E_2}}}(x) = q_2(x)$.*

Demostración. Como $q_1(x)$ y $q_2(x)$ son primos entre sí, existen polinomios $\gamma(x), \delta(x) \in k[x]$ tales que $1 = \gamma(x)q_1(x) + \delta(x)q_2(x)$; en particular, para todo $e \in E$ se satisface

$$e = \Big(\gamma(T)\circ q_1(T)\Big)(e) + \Big(\delta(T)\circ q_2(T)\Big)(e) . \tag{1.2}$$

Probemos $E' = E_1 \oplus E_2$. Por una parte, dado $e \in E'$ tenemos

$$q_1(T)\Big[\Big(\delta(T)\circ q_2(T)\Big)(e)\Big] = \delta(T)\Big[\Big(q_1(T)\circ q_2(T)\Big)(e)\Big] = \delta(T)(p(T)(e)) = \delta(T)(0) = 0 ,$$

y por lo tanto $\Big(\delta(T)\circ q_2(T)\Big)(e) \in E_1$; del mismo modo se prueba $\Big(\gamma(T)\circ q_1(T)\Big)(e) \in E_2$, por lo que basta tener en cuanta (1.2) para concluir que $E' = E_1 + E_2$. Por otra parte, si $e \in E_1 \cap E_2 = \operatorname{Ker} q_1(T) \cap \operatorname{Ker} q_2(T)$, entonces $q_1(T)(e) = 0$ y $q_2(T)(e) = 0$, y basta aplicar de nuevo (1.2) para obtener $e = 0$.

Supongamos ahora que $p(x) = p_{T_{|_{E'}}}(x)$. Ya sabemos que $q_1(x)$ es múltiplo de $p_{T_{|_{E_1}}}(x)$ y que $q_2(x)$ es múltiplo de $p_{T_{|_{E_2}}}(x)$ (véase 1.8), por lo que $p_{T_{|_{E_1}}}(x)$ y $p_{T_{|_{E_2}}}(x)$ también son primos entre sí y obtenemos (véase 1.11)

$$q_1(x)q_2(x) = p_T(x) = \operatorname{m.c.m.}\Big(p_{T_{|_{E_1}}}(x), p_{T_{|_{E_2}}}(x)\Big) = p_{T_{|_{E_1}}}(x)p_{T_{|_{E_2}}}(x) ;$$

por lo tanto $\operatorname{gr}(p_{T_{|_{E_1}}}(x)) = \operatorname{gr}(q_1(x))$ y $\operatorname{gr}(p_{T_{|_{E_1}}}(x)) = \operatorname{gr}(q_2(x))$, lo cual termina la demostración ($\operatorname{gr}(p(x))$ denota el grado de $p(x)$). (Al ser los polinomios $p_{T_{|_{E_1}}}(x)$ y $q_1(x)$ múltiplo uno del otro y tener el mismo grado, deben ser iguales, ya que ambos tienen el coeficiente principal igual a 1.) ∎

Corolario 1.15 (Teorema de descomposición) *Supongamos que el endomorfismo T tiene anulador no nulo, y sea $p_T(x) = (q_1(x))^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (q_r(x))^{\alpha_r}$ la descomposición de $p_T(x)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles distintos. Si para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ denotamos $E_i = \operatorname{Ker}(q_i(T))^{\alpha_i}$, entonces $E_1, \dots, E_r$ es una familia de subespacios de E que son invariantes por T y que satisfacen:*

(i) $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;

(ii) $p_{T_{|_{E_i}}}(x) = (q(x))^{\alpha_i}$ $(i = 1, \dots, r)$.

Demostración. Basta aplicar reiteradamente el teorema 1.14. ∎

2 Valores Propios y Vectores Propios

Definiciones 2.1 Un escalar $\lambda \in k$ se dice que es un *valor propio* (ó *autovalor*) del endomorfismo T si existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $T(e) = \lambda e$, es decir, si el endomorfismo $T - \lambda I$ (que lo denotaremos en lo que sigue $T - \lambda$) no es inyectivo. Si λ es un valor propio de T el subespacio no nulo $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$ se denomina *subespacio propio* de T asociado al valor propio λ, y si e es un vector no nulo de $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$ diremos que e es un *vector propio* (ó *autovector*) de T asociado al valor propio λ.

Lema 2.2 *Subespacios propios de T asociados a valores propios distintos están en suma directa. Es decir, si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son valores propios de T tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, y $E_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i)$ $(i = 1, \dots, r)$, entonces los subespacios $E_1, \dots, E_r$ están en suma directa.*

Demostración. Se obtiene aplicando reiteradamente 1.14 (i). ∎

Proposición 2.3 *Supongamos que el espacio vectorial E tiene dimensión finita, en cuyo caso el polinomio $p_T(x)$ es no nulo y de grado menor o igual que la dimensión de E (véase 1.12). Entonces se satisface que los valores propios de T son precisamente las raíces que el polinomio $p_T(x)$ tiene en k, y como consecuencia obtenemos que el número de valores propios de T es menor o igual que la dimensión de E.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\lambda \in k$ es un valor propio de T y consideremos el subespacio $E' = \operatorname{Ker}(T - \lambda)$. Entonces E' es un subespacio invariante por T tal que $p_{T_{|_{E'}}}(x) = x - \lambda$ (véase 1.10); como $p_T(x) \in \operatorname{Ann}(T) \subseteq \operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$ (véase 1.6), concluimos que el polinomio $p_T(x)$ es múltiplo de $x - \lambda$, es decir, λ es raíz de $p_T(x)$.

Supongamos ahora que $\lambda \in k$ es una raíz de $p_T(x)$, en cuyo caso existe un polinomio $q(x) \in k[x]$ y existe $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 1$, tales que $p_T(x) = (x - \lambda)^\alpha q(x)$ y λ no es raíz de $q(x)$ (o sea, $(x - \lambda)^\alpha$ y $q(x)$ son primos entre sí). Si consideramos el subespacio $E' = \operatorname{Ker}(T - \lambda)^\alpha$, entonces, según 1.14, E' es un subesapacio no nulo de E que es invariante por T y tal que $p_{T_{|_{E'}}}(x) = (x - \lambda)^\alpha$. Luego el endomorfismo $(T - \lambda)^\alpha$ no es inyectivo y por lo tanto $(T - \lambda)$ tampoco es inyectivo, es decir, λ es valor propio de T. ∎

Definición 2.4 Si el espacio vectorial E es de dimensión finita, entonces diremos que el endomorfismo T es *diagonalizable* si existe una base de E formado por vectores propios de T.

2.5 Supongamos que E tiene dimensión finita igual a n y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los valores propios de T ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ y, según 2.3, $r \leq n$). Si para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ denotamos $E_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i)$ (= subespacio propio asociado al valor propio λ_i), entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:
(a) T es diagonalizable;
(b) existe una base de E respecto de la cual la matriz de T es diagonal;
(c) $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$.

La equivalencia $(a) \iff (b)$ es sencilla y se deja como ejercicio. Probemos que (a) es equivalente a (c). Supongamos en primer lugar que T es diagonalizable, en cuyo caso, según la definición 2.4, el subespacio $E_1+\cdots+E_r$ contiene una base de E y por tanto $E=E_1+\cdots+E_r$; de 2.2 concluimos la igualdad $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_r$.

Supongamos ahora que $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_r$. Tomando bases en cada uno de los subespacios E_i $(i=1,\dots,r)$ y reuniéndolas, obtenemos una base de E formada por vectores propios de T, de modo que T es diagonalizable.

Teorema 2.6 (Criterio de diagonalización por el polinomio anulador)
Si el espacio vectorial E tiene dimensión finita, entonces: el endomorfismo T es diagonalizable si y sólo si su polinomio anulador descompone en $k[x]$ en producto de factores lineales distintos (es decir, si y sólo si $p_T(x)=(x-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)$ con $\lambda_i\in k,\ \lambda_i\neq\lambda_j$ si $i\neq j$).

Demostración. Supongamos primero que T es diagonalizable. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in k$ son todos los valores propios distintos de T y denotamos $E_i=\operatorname{Ker}(T-\lambda_i)$ $(i=1,\dots,r)$, entonces $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_r$ (véase 2.5). En estas condiciones se satisfacen $p_T(x)=\text{m.c.m.}\Big(p_{T_{|E_1}}(x),\dots,p_{T_{|E_r}}(x)\Big)$ y $p_{T_{|E_i}}(x)=x-\lambda_i$ (véanse 1.10 y 1.11), y por lo tanto tenemos

$$p_T(x)=\text{m.c.m.}\Big(x-\lambda_1,\dots,x-\lambda_r\Big)=(x-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)\,.$$

Supongamos ahora que el polinomio $p_T(x)$ descompone en producto de factores lineales distintos, es decir, $p_T(x)=(x-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)$ con $\lambda_i\neq\lambda_j$ si $i\neq j$. Aplicando el teorema de descomposición 1.15 obtenemos

$$E=\operatorname{Ker}(T-\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(T-\lambda_r)\,;$$

basta tener en cuenta que, según 2.3, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ son los valores propios de T para concluir que T es diagonalizable (véase 2.5). ∎

3 Polinomio Característico

En esta sección supondremos que el espacio vectorial E tiene dimensión finita igual a n.

Hemos visto en la anterior sección que el polinomio anulador del endomorfismo T es útil para determinar los valores propios de T y para estudiar si T es diagonalizable, pero ocurre que, en general, no es fácil conocer dicho polinomio porque no disponemos de un algoritmo sencillo que nos permita calcularlo. Vamos a introducir otro polinomio asociado de modo natural al endomorfismo T que tiene propiedades similares al polinomio anulador y que sí es fácilmente calculable.

3.1 Dada una matriz cuadrada $A=(a_{ij})\in M_n(k)$, podemos considerar la nueva matriz cuadrada

$$xI_n-A=\begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x-a_{nn}\end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz unidad de $M_n(k)$; dicha matriz $xI_n - A$ tiene sus coeficientes en el cuerpo $k(x)$ (= cuerpo de las fracciones polinómicas con coeficientes en k), y por lo tanto podemos considerar su determinante, que será un elemento de $k(x)$: $|xI_n - A| \in k(x)$. Concretamente, $|xI_n - A|$ es un polinomio de grado n con coeficientes en k y de coeficiente principal igual a 1, es decir, existen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in k$ tales que

$$|xI_n - A| = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

(la anterior afirmación puede probarse por inducción en el orden n de la matriz, aplicando el desarrollo de los determinantes por los elementos de una fila o columna). El polinomio $|xI_n - A|$ se denomina *polinomio característico* de la matriz A y se denota $\aleph_A(x)$. (El símbolo "$\aleph$" representa a la letra hebrea llamada "alef".)

3.2 Supongamos ahora que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ son bases de E, y que A y A' son las matrices del endomorfismo T en las bases B y B', respectivamente. Si U es la matriz de cambio de la base B a la base B', entonces $A = U^{-1}A'U$ y por lo tanto

$$xI_n - A = U^{-1}(xI_n)'U - U^{-1}A'U = U^{-1}(xI_n - A')U\,,$$

con lo que obtenemos

$$|xI_n - A| = |U^{-1}||xI_n - A'||U| = |xI_n - A'|\,;$$

es decir, el polinomio $\aleph_A(x) = \aleph_{A'}(x)$ no depende de la base elegida en E para representar al endomorfismo T.

Definición 3.3 Llamaremos *polinomio característico* del endomorfismo T, y lo denotaremos $\aleph_T(x)$, al polinomio característico de la matriz de T en una base cualquiera de E (véanse 3.1 y 3.2): $\aleph_T(x) = \aleph_A(x)$, A = matriz de T en una base de E.

Lema 3.4 *Dado $\lambda \in k$, λ es un valor propio de T si y sólo si λ es raíz de $\aleph_T(x)$. Por lo tanto, los polinomios $p_T(x)$ y $\aleph_T(x)$ tienen las mismas raíces en k (véase 2.3).*

Demostración. Si A es la matriz de T en cierta base de E, entonces $\lambda I_n - A$ es la matriz del endomorfismo $\lambda - T$ en la misma base y tenemos: λ es valor propio de T $\iff$ $\lambda - T$ no es inyectivo $\iff$ $\lambda - T$ no es automorfismo $\iff$ $|\lambda I_n - A| = 0$ $\iff$ λ es raíz de $|xI_n - A| = \aleph_T(x)$. ∎

3.5 Sea $\lambda \in k$. Si $p(x)$ es un polinomio de $k[x]$ que tiene a λ por raíz, entonces existe $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$, tal que $p(x) = (x - \lambda)^\beta q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio de $k[x]$ que no tiene a λ por raíz; dicho natural no nulo β se denomina "multiplicidad de λ como raíz del polinomio $p(x)$".

Definición 3.6 Sea $\lambda \in k$ un valor propio del endomorfismo T. Diremos que λ es un *valor propio de T de multiplicidad β* ($\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 1$), si β es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio $\aleph_T(x)$ (véanse 3.4 y 3.5).

Lema 3.7 *Sea $\lambda \in k$ un valor propio del endomorfismo T. La dimensión del subespacio propio asociado a λ es menor o igual que la multiplicidad del valor propio λ.*

Demostración. Sea β la multiplicidad del valor propio λ y sea $E' = \operatorname{Ker}(T-\lambda)$ el subespacio propio asociado a λ. Sea $\{e_1,\dots,e_m\}$ una base de E' (donde $m = \dim E' \leq n$) y ampliémosla a una base $\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n\}$ de E ; en esta última base la matriz de T será de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_m & A_1 \\ N & A_2 \end{pmatrix},$$

donde I_m es la matriz unidad de $M_m(k)$, $A_1 \in M_{m\times(n-m)}(k)$, $A_2 \in M_{n-m}(k)$, y N es la matriz nula de $M_{(n-m)\times m}(k)$; tenemos

$$\aleph_T(x) = |xI_n - A| = \begin{vmatrix} (x-\lambda)I_m & -A_1 \\ N & xI_{n-m}-A_2 \end{vmatrix} = (x-\lambda)^m \aleph_{A_2}(x)\,,$$

es decir, la multiplicidad de λ como raíz de $\aleph_T(x)$ es mayor o igual a $m = \dim E'$. ∎

Teorema 3.8 (Criterio de diagonalización por el polinomio característico)
El endomorfismo T es diagonalizable si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) *el polinomio $\aleph_T(x)$ tiene (contando multiplicidades) n raíces en k ($n = \dim E$);*

(ii) *para cada valor propio de T, su multiplicidad coincide con la dimensión del subespacio propio asociado a él.*

Es decir, T es diagonalizable, si y sólo si, existen escalares distintos $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in k$ y naturales no nulos $\beta_1,\dots,\beta_r$ tales que

$$\aleph_T(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1}\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)^{\beta_r}\,,$$

y además $\dim(\operatorname{Ker}(T-\lambda_i)) = \beta_i$ *para todo* $i \in \{1,\dots,r\}$.

Demostración. Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in k$ todos los valores propios de T ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $j \neq j$) de multiplicidades respectivas $\beta_1,\dots,\beta_r$, y denotemos $E_i = \operatorname{Ker}(T-\lambda_i)$, $n_i = \dim E_i$. Entonces

$$\aleph_T(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1}\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)^{\beta_r} q(x)\,,$$

donde $q(x) \in k[x]$ no tiene raíces en k; además, según 3.7, para todo $i \in \{1,\dots,r\}$ se satisface $n_i \leq \beta_i$.

Supongamos en primer lugar que T es diagonaliable. Entonces $E = E_1 \oplus\dots\oplus E_r$ y tenemos

$$\begin{aligned} \beta_1+\dots+\beta_r &= \operatorname{gr}\Big((x-\lambda_1)^{\beta_1}\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)^{\beta_r}\Big) \leq \operatorname{gr}(\aleph_T(x)) \\ &= n = \dim(E_1\oplus\dots\oplus E_r) = \dim E_1+\dots+\dim E_r \\ &= n_1+\dots+n_r \leq \beta_1+\dots+\beta_r\,, \end{aligned}$$

por lo tanto $n_1+\dots+n_r = \beta_1+\dots+\beta_r$ y como consecuencia $n_i = \beta_i$ para todo $i \in \{1,\dots,r\}$; como además

$$\operatorname{gr}\Big((x-\lambda_1)^{\beta_1}\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)^{\beta_r}\Big) = \operatorname{gr}(\aleph_T(x))$$

y ambos polinomios tienen coeficiente principal igual a 1, debe satisfacerse $\aleph_T(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1}\cdot\dots\cdot(x-\lambda_r)^{\beta_r}$.

Supongamos ahora que $\aleph_T(x) = (x-\lambda_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x-\lambda_r)^{\beta_r}$ y $n_i = \beta_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Entonces $\beta_1 + \dots + \beta_r = \mathrm{gr}(\aleph_T(x)) = n$ y obtenemos

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = \dim E_1 + \dots + \dim E_r = n_1 + \dots + n_r = \beta_1 + \dots + \beta_r = n\,,$$

es decir, $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ y por lo tanto T es diagonalizable. ∎

Corolario 3.9 *Si $\aleph_T(x)$ tiene n raíces distintas en k (es decir, si T tiene n valores propios distintos, que deben ser de multiplicidad 1), entonces T es diagonalizable.*

Demostración. Si $\lambda \in k$ es un valor propio de T de multiplicidad 1, entonces el subespacio propio asociado a λ tiene dimensión 1 (compruébese); basta aplicar 3.8 para concluir. ∎

3.10 Sea $\lambda \in k$. En relación con 3.8, veamos cómo calcular la dimensión del subespacio $\mathrm{Ker}(T-\lambda)$. Si A es la matriz de T en una base de E, entonces la matriz de $T-\lambda$ en la misma base es $A - \lambda I_n$, de modo que $\dim(\mathrm{Im}(T-\lambda)) = \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ y por lo tanto

$$\dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda)) = \dim E - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)\,.$$

Probemos a continuación una importante propiedad del polinomio característico:

Teorema 3.11 (Aditividad del polinomio característico) *Sea E' un subespacio de E que es invariante por T. Con la notación dada en 1.6, se satisface:*

$$\aleph_T(x) = \aleph_{T_{|_{E'}}}(x)\,\aleph_{\overline{T}}(x)\,.$$

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base de E' y completémosla a una base $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ de E. Entonces $\{\pi(e_{m+1}), \dots, \pi(e_n)\}$ es una base de E/E' (compruébese), y por lo tanto la matriz de T la base de E es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ N & A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 es la matriz de $T_{|_{E'}}$ en la base de E', A_2 es la matriz de $\overline{T}$ en la base de E/E', y la matriz N es nula. Tenemos

$$\begin{aligned} \aleph_T(x) = |xI_n - A| &= \begin{vmatrix} xI_m - A_1 & -C \\ N & xI_{n-m} - A_2 \end{vmatrix} \\ &= |xI_m - A_1|\,|xI_{n-m} - A_2| = \aleph_{T_{|_{E'}}}(x)\,\aleph_{\overline{T}}(x)\,. \end{aligned}$$ ∎

Corolario 3.12 *Si $E_1, \dots, E_r$ es una colección de subespacios de E que son invariantes por T y tales que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, entonces se satisface*

$$\aleph_T(x) = \aleph_{T_{|_{E_1}}}(x) \cdot \dots \cdot \aleph_{T_{|_{E_r}}}(x)\,.$$

Demostración. Es sencilla y no la haremos. Basta probar el caso $r = 2$, el cual se puede demostrar a partir del teorema 3.11. ∎

Como consecuencia del teorema de aditividad del polinomio característico vamos a obtener la relación que existe entre el polinomio anular y el polinomio característico de un endomorfismo. Antes proponemos un sencillo ejercicio (que generaliza a 1.10).

Ejercicio 3.13 Sea $p(x) \in k[x]$ tal que el subespacio invariante $E' = \operatorname{Ker} p(T)$ es no nulo. Si $p(x)$ es primo y su coeficiente principal es igual a 1, entonces $p_{T_{|_{E'}}}(x) = p(x)$. (En general, si el coeficiente principal de $p(x)$ es λ, entonces $p_{T_{|_{E'}}}(x) = \lambda^{-1}p(x)$.)

Teorema 3.14 (Hamilton-Cayley) *Si la descomposición en factores primos del polinomio anulador del endomorfismo T es*

$$p_T(x) = (q_1(x))^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (q_r(x))^{\alpha_r} \qquad (\alpha_i \geq 1,\ q_i(x) \neq q_j(x) \text{ si } i \neq j\,),$$

entonces para el polinomio característico de T se satisface

$$\aleph_T(x) = (q_1(x))^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (q_r(x))^{\beta_r}$$

con $\beta_i \geq \alpha_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Es decir, el polinomio característico de T es multiplo del polinomio anulador de T, y todos los factores primos del polinomio característico lo son también del polinomio anulador.

En particular tenemos $\aleph_T(x) \in \operatorname{Ann}(T)$, es decir, $\aleph_T(T) = 0$.

Demostración. La haremos en varias etapas.

(1) Supongamos que $p_T(x) = q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{s-1}x^{s-1} + x^s$ es un polinomio primo ($s \geq 1$). En este caso, si $e \in E$ es un vector no nulo, entonces $E' = \langle e, T(e), \dots, T^{s-1}(e)\rangle$ es un subespacio no nulo invariante por T tal que $q(x) \in \operatorname{Ann}(T_{|_{E'}})$ (véase la demostración de 1.12); por lo tanto $q(x)$ es múltiplo del polinomio anulador de $T_{|_{E'}}$, y como $q(x)$ es primo, debe ser $p_{T_{|_{E'}}}(x) = q(x)$. Como consecuencia obtenemos además que $\{e, T(e), \dots, T^{s-1}(e)\}$ es una base de E' (compruébese). La matriz de T en la base $\{e, T(e), \dots, T^{s-1}(e)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{s-2} \\ & & & 1 & -a_{s-1} \end{pmatrix},$$

de donde resulta $\aleph_{T_{|_{E'}}}(x) = q(x)$.

Se procede ahora por inducción en $n = \dim E$ ($n \geq s = \dim E'$). Si $n = s$, entonces $E = E'$ y por lo tanto $\aleph_T(x) = \aleph_{T_{|_{E'}}}(x) = q(x)$. Supongamos que $n > s$. Como E' es un subespacio invariante por T podemos considerar el endomorfismo $\overline{T} : E/E' \to E/E'$ (véase 1.6), y como $q(T) = 0$ es fácil ver que $q(\overline{T}) = 0$, es decir, $q(x)$ es múltiplo del polinomio anulador de $\overline{T}$; por lo tanto $p_{\overline{T}}(x) = q(x)$ (porque $q(x)$ primo), y aplicando la hipótesis de inducción (porque $\dim(E/E') = n - s < n$) tenemos $\aleph_{\overline{T}}(x) = (q(x))^{\beta}$. Basta aplicar 3.11 para obtener $\aleph_T(x) = (q(x))^{\beta+1}$.

(2) Supongamos ahora que $p_T(x) = (q(x))^\alpha$ con $\alpha \geq 1$ y $q(x)$ primo de coeficiente principal igual a 1. Se procede por inducción en el exponente α.

Si $\alpha = 1$, entonces es el caso anterior. Sea $\alpha > 1$ y consideremos el subespacio invariante $E' = \operatorname{Ker}(q(T))^{\alpha-1}$. Es claro que E' es no nulo (por ser $\alpha > 1$) y que $(q(x))^{\alpha-1}$ es múltiplo de $p_{T_{|_{E'}}}(x)$, por lo tanto debe ser $p_{T_{|_{E'}}}(x) = (q(x))^m$ con $\alpha - 1 \geq m \geq 1$; como para todo vector $e \in E$ se satisface $q(T)(e) \in \operatorname{Ker}(q(T))^{\alpha-1} = E'$, el endomorfismo $(q(T))^{m+1}$ de E es nulo y por lo tanto $m+1 \geq \alpha$. De todo lo dicho se sigue la igualdad $p_{T_{|_{E'}}}(x) = (q(x))^{\alpha-1}$, y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existe $\gamma \geq \alpha - 1$ tal que $\aleph_{T_{|_{E'}}}(x) = (q(x))^\gamma$.

Por otra parte, el endomorfismo $\overline{T} : E/E' \to E/E'$ inducido por T satisface $q(\overline{T}) = 0$ (véase 1.7), es decir, $q(x)$ es múltiplo de $p_{\overline{T}}(x)$; por lo tanto $p_{\overline{T}}(x) = q(x)$, y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existe $\delta \geq 1$ tal que $\aleph_{\overline{T}}(x) = (q(x))^\delta$. De la aditividad del polinomio característico se sigue $\aleph_T(x) = (q(x))^{\gamma+\delta}$ con $\gamma + \delta \geq \alpha$.

(3) Veamos ahora el caso general. De la igualdad

$$p_T(x) = (q_1(x))^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (q_r(x))^{\alpha_r} ,$$

obtenemos la descomposición

$$E = \operatorname{Ker}(q_1(T))^{\alpha_1} + \cdots + \operatorname{Ker}(q_r(T))^{\alpha_r}$$

(véase 2.2), donde cada subespacio $E_i = \operatorname{Ker}(q_i(T))^{\alpha_i}$ es invariante por T y tal que $p_{T_{|_{E_i}}}(x) = (q_i(x))^{\alpha_i}$ $(i = 1, \dots, n)$; aplicando el caso anterior a cada uno de dichos subespacios obtenemos $\aleph_{T_{|_{E_i}}}(x) = (q_i(x))^{\beta_i}$ $(\beta_i \geq \alpha_i,\ i = 1, \dots, n)$, y basta tener en cuenta 3.12 para concluir la demostración. ∎

4 Triangulación

Seguiremos suponiendo, como en la sección anterior, que el espacio vectorial E tiene dimensión finita igual a n.

Definición 4.1 Diremos que el endomorfismo T es *triangulable* si existe una serie de composición en E formada por subespacios que son invariantes por T (véase II.1.5): T es triangulable si existe una serie de composición en E,

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E ,$$

que satisface $T(E_i) \subseteq E_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ejercicio 4.2 (a) Si T es diagonalizable, entonces T es triangulable.

(b) T es triangulable si y sólo si existe una base de E respecto de la cual la matriz de T es triangular, es decir, de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{\Large 0} & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Teorema 4.3 (Criterio de triangulación) *El endomorfismo T es triangulable si y sólo si el polinomio $\aleph_T(x)$ tiene todas sus raíces en k.*

Demostración. Es claro, teniendo en cuenta el ejercicio 4.2 (b), que si T es triangulable, entonces

$$\aleph_T(x) = (x - a_{11}) \cdot \dots \cdot (x - a_{nn})$$

para ciertos escalares $a_{11}, \dots, a_{nn} \in k$, que son la raíces de $\aleph_T(x)$.

Supongamos ahora que el polinomio característico de T tiene todas sus raíces en k (es decir, $\aleph_T(x)$ tiene, contando multiplicidades, n raíces en k), y probemos que entonces T es triangulable. Lo haremos por inducción en $n = \dim E$, siendo trivial para $n = 1$. Sea $n > 1$ y consideremos una raíz $\lambda \in k$ de $\aleph_T(x)$. Entonces λ es un valor propio de T y por lo tanto existe un vector $e_1 \in \operatorname{Ker}(T - \lambda)$ que es no nulo, de modo que el subespacio vectorial $E' = \langle e_1 \rangle$ es invariante por T y se satisface $\aleph_{T_{|_{E'}}}(x) = x - \lambda$. Si de nuevo consideramos el endomorfismo $\overline{T} : E/E' \to E/E'$ inducido por T, de la aditividad del polinomio característico se sigue que $\aleph_{\overline{T}_{|_{E'}}}(x)$ tiene $n-1$ raíces en k, y como $\dim(E/E') = n - 1$, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existe en E/E' una serie de composición

$$0 = \overline{E}_0 \subset \overline{E}_1 \subset \dots \subset \overline{E}_{n-1} = E/E'$$

formada por subespacios invariantes por $\overline{T}$. Pero entonces

$$0 = E_0 \subset E' = \pi^{-1}(\overline{E}_0) \subset \pi^{-1}(\overline{E}_1) \subset \dots \subset \pi^{-1}(\overline{E}_{n-1}) = E$$

es una serie de composición de E formada por subespacios que son invariantes por T. ∎

Corolario 4.4 *Si $k = \mathbb{C}$, entonces T es triangulable.*

Demostración. Basta tener en cuenta que todo polinomio de grado n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{C}$ tiene (contando multiplicidades) n raíces en $\mathbb{C}$. ∎

5 Problemas

En los enunciados siguientes, dada una matriz cuadrada A de orden n con coeficientes en un cuerpo k, usaremos expresiones como "... valor propio de A ...", "... vector propio de A ...", "... polinomio característico (ó mínimo) de A ...", "... A es diagonalizable ...", etc. En dichos casos, A debe entenderse como la matriz respecto de cierta base de un endomorfismo de un k-espacio vectorial de dimensión n (por ejemplo, k^n con su base usual).

Sea $A \in M_n(k)$. Que A sea diagonalizable significa que el endomorfismo T al que representa es diagonalizable, es decir, que existe una base del espacio vectorial respecto de la cual la matriz de T es diagonal, en cuyo caso, si U es la matriz de cambio de la primera base a la que está formada por vectores propios de T, entonces UAU^{-1} es una matriz diagonal.

Dos matrices $A, B \in M_n(k)$ se dice que son *semejantes*, si existe una matriz invertible $U \in M_n(k)$ tal que $B = UAU^{-1}$. Por lo tanto, que A sea diagonalizable es equivalente a que A sea semejante a una matriz diagonal. Del mismo modo, que A sea triangulable es equivalente a que A sea semejante a una matriz triangular.

Si A es diagonalizble (ó triangulable) y B es su diagonalización (ó triangulación), entonces la matriz invertible U que satisface $B = UAU^{-1}$ se denomina *matriz de paso* de A a B.

5.1 Dada una matriz $A \in M_n(k)$ que es diagonalizable, pruébese que la matriz diagonal a la que es semejante es única salvo el orden de los elementos de la diagonal.

Dicha unicidad no es cierta para las matrices triangulables, como puede verse comprobando que las dos siguientes matrices son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Sea $A \in M_n(k)$ la matriz formada íntegramente por unos. Calcúlese el polinomio característico y el polinomio mínimo de A. Pruébese que A es diagonalizable, calculándose su matriz diagonal y la matriz de paso.

5.3 Sea A una matriz cuadrada real de orden n tal que $A^2 + I_n = 0$. Pruébese que A no tiene valores propios reales. Dedúzcase que n debe ser par.

5.4 Dada una matriz $A \in M_n(k)$, pruébese que si A es semejante a la matriz unidad I_n entonces $A = I_n$. Aplíquese lo anterior al estudio de la diagonalización de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 Demuéstrese que si dos matrices cuadradas son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico. ¿Es cierto el recíproco?

5.6 ¿De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hay dos de ellas que puedan representar a un mismo endomorfismo?

5.7 Pruébese que los valores propios de un endomorfismo nilpotente son todos nulos. ¿Es cierto el recíproco?

5.8 Calcúlese el polinomio anulador de las siguientes matrices cuadradas con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, y estúdiese si son diagonalizables:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.9 Calcúlese el polinomio anulador de las siguientes matrices cuadradas con coeficientes reales, y estúdiese si son diagonalizables:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.10 Estúdiese si son diagonalizables las siguientes matrices cuadradas con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.11 Estúdiese (según los valores de a, b, c), primero sobre $\mathbb{R}$ y luego sobre $\mathbb{C}$, si son diagonalizables las matrices

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.12 Estúdiese, según los valores de a, b, si son diagonalizables las matrices reales siguientes:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.13 Sea $A \in M_n(k)$ tal que la suma de los elementos de cada una de sus filas es igual a 1. Pruébese que 1 es valor propio de A.

5.14 Dada una matriz no nula $A \in M_2(k)$ tal que $A^2 = 0$, pruébese que para todo $\lambda \in k$ se satisface $|\lambda I - A| = \lambda^2$.

5.15 Estúdiese si es igual a la matriz unidad alguna potencia de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.16 Sea $T : E \to E$ un endomorfismo de un k-espacio vectorial de dimensión finita. Pruébense:

(a) T es diagonalizable $\iff$ T^* es diagonalizable.

(b) Dado un subespacio vectorial V de E, V es invariante por T $\iff$ V° es invariante por T^*.

(c) T es triangulable $\iff$ T^* es triangulable.

5.17 Dado un endomorfismo $T \in \operatorname{End}_k E$ y dado $\lambda \in k$, si T es invertible, entonces: λ es valor propio de T $\iff$ $\lambda \neq 0$ y λ^{-1} es valor propio de T^{-1}.

5.18 Pruébese que todo endomorfismo de un espacio vectorial complejo de dimensión finita tiene algún subespacio invariante de dimensión 1.

5.19 Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $T : E \to E$ un endomorfismo. Si existe un numero complejo $\alpha + \beta\mathrm{i}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$), que es raíz del polinomio característico de T, entonces existen vectores $u, v \in E$ que no son simultáneamente nulos y satisfacen

$$T(u) = \alpha u - \beta v\,, \qquad T(v) = \beta u + \alpha v\,.$$

Dedúzcase de lo anterior que todo endomorfismo de un espacio vectorial real de dimensión finita tiene algún subespacio invariante de dimensión 1 ó de dimensión 2.

5.20 Sea T un endomorfismo sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial E de dimensión finita. Pruébese que T es diagonalizable, si y sólo si, para todo subespacio de E que es invariante por T existe un subespacio suplementario que también es invariante por T.

5.21 Dados endomorfismos T y T' de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial E de dimensión finita, pruébese que si T y T' conmutan, entonces T y T' tienen vectores propios comunes.

5.22 Dados endomorfimos T y T' de un k-espacio vectorial E de dimensión finita, pruébense:

(a) Si T es diagonalizable, entonces para todo subespacio F de E que es invariante por T el endomorfismo $T_{|F}$ también es diagonalizable.

(b) Si T y T' conmutan, entonces los subespacios propios de T son invariantes por T', y recíprocamente.

(c) Los endomorfismos T y T' son simultáneamente diagonalizables (esto es, existe una base de E formada por vectores que son propios para los dos endomorfismos) $\iff$ T y T' son diagonalizables y conmutan.

5.23 Diagonalícense simultáneamente los endomorfismos T y T' de $\mathbb{R}^3$ definidos como $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 5y + 2z, -2x - 5y - 2z)$ y $T'(x, y, z) = (-2y - 2z, 0, 2y + 2z)$.

5.24 Sea $\aleph_T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + x^n$ el polinomio característico de un endomorfismo $T : E \to E$. Pruébese que α_0 es igual al determinante de T; dedúzcase que si T es invertible entonces T^{-1} puede ponerse como un polinomio en T.

Enúnciese la anterior propiedad para las matrices cuadradas.

5.25 Sea T un endomorfimos de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial E de dimensión finita, y sea $\aleph_T(x) = (x - \alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n)$ la descomposición del polinomio característico de T en factores lineales. Dado un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, pruébese la igualdad

$$\aleph_{p(T)}(x) = (x - p(\alpha_1)) \cdot \cdots \cdot (x - p(\alpha_n))\,.$$

Dedúzcase: $p(T)$ es un automorfismo $\iff$ $p(x)$ y $\aleph_T(x)$ son primos entre sí.

5.26 Sean $A, C \in M_n(k)$. Dado $r \in \mathbb{N}$, diremos que C es una *raíz r-ésima* de A si $C^r = A$. Supuesto que la matriz A es diagonalizable, encuéntrense condiciones nacesarias y suficientes para que existan raíces r-ésimas de A.

5.27 Calcúlense raíces cuadradas de la matriz real $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -6 & 9 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5.28 Calcúlense $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{1234}$.

5.29 Sea G un grupo finito y sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Dado un morfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$, pruébese que para cada $x \in G$ el automorfismo $\rho(x)$ es diagonalizable.

5.30 **Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias finitas:** Supóngase que se tienen sucesiones incógnita con coeficientes en un cuerpo k, $(x^1_m)_{m\in\mathbb{N}}, \dots, (x^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tales que el término $(m+1)$-ésimo de cada una de ellas es función lineal de los términos m-ésimos de todas las sucesiones; es decir, tales que existe una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ satisfaciendo

$$\left.\begin{array}{rcl} x^1_{m+1} & = & a_{11}x^1_m + \cdots + a_{1n}x^n_m \\ \vdots & & \\ x^n_{m+1} & = & a_{n1}x^1_m + \cdots + a_{nn}x^n_m \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

para todo $m \geq 1$.

Si partimos de los primeros términos de las sucesiones, $x^1_0, \dots, x^n_0$, entonces es fácil comprobar que para todo $m > 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} x^1_m \\ \vdots \\ x^n_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} x^1_0 \\ \vdots \\ x^n_0 \end{pmatrix},$$

de modo que encontrar las sucesiones solución (en función de los valores $x^1_0, \dots, x^n_0$) es equivalente a encontrar la expresión (en función de m) de la matriz A^m. Si la matriz A es diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

entonces se satisface

$$A^m = \begin{pmatrix} \lambda^m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^m_n \end{pmatrix},$$

y por lo tanto es muy fácil resolver el sistema de ecuaciones (5.1).

Si la matriz A del sistema no es diagonal pero es diagonalizable, ¿cómo puede resolverse dicho sistema?

5.31 Discútase, según los valores de α, x_0, y_0, la convergencia de las sucesiones complejas (x_m), (y_m) soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{m+1} & = & \alpha(x_m + \sqrt{3}y_m) \\ y_{m+1} & = & \alpha(-\sqrt{3}x_m + y_m) \end{array}\right\}.$$

5.32 Encuéntrense, reduciéndola primero a un sistema lineal de ecuaciones en diferencias finita, las sucesiones reales (x_m) que satisfacen la ecuación $x_{m+2} = 2x_{m+1} + x_m$ (en función de x_0, x_1). Encuéntrense también las sucesiones reales (x_m) que satisfacen la ecuación $x_{m+2} = x_{m+1} + x_m$. (Cuando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, la solución de la última ecuación se denomina *sucesión de Fibonacci*.)

5.33 Encuéntrense las sucesiones reales (x_m), (y_m) soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{m+2} &=& 2x_{m+1} + y_{m+1} + y_m \\ y_{m+1} &=& 7x_{m-1} + y_{m-1} \end{array}\right\} .$$

5.34 Encuéntrense las sucesiones reales (x_m), (y_m), (z_m) soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{m+2} &=& 2x_{m+1} + y_{m+1} - y_m \\ y_{m+1} &=& 4x_{m-1} + y_{m-1} \end{array}\right\} .$$

5.35 **Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales:** Supóngase que se tienen unas funciones incógnita $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son diferenciables y satisfacen

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1' &=& a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots && \\ x_n' &=& a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

para cierta matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Si A es diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

entonces el sistema (5.2) es muy fácil resolverlo:

$$\begin{array}{lll} x_i' = \lambda_i x_i \quad \Rightarrow & \dfrac{x_i'}{x_i} = \lambda_i \quad \Rightarrow & (\ln x_i)' = \lambda_i \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow & \ln x_i = \lambda_i t + \alpha_i \quad \Rightarrow & x_i = \mathrm{e}^{\lambda_i t + \alpha_i} = \beta_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} ; \end{array}$$

es decir, todas las soluciones se obtienen dando valores reales a $\beta_1, \dots, \beta_n$ en las igualdades

$$x_1(t) = \beta_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} , \qquad \dots , \qquad x_n(t) = \beta_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} .$$

Si la matriz A del sistema (5.2) no es diagonal pero es diagonalizable, ¿cómo puede resolverse dicho sistema?

5.36 Resuélvanse los siguientes sistemas lineales de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& y \\ y' &=& x \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{rcl} x' &=& -x - 2z \\ y' &=& 6x + y + 6z \\ z' &=& x + 2z \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{rcl} x' &=& x - y + z \\ y' &=& 2y - z \\ z' &=& z \end{array}\right\} .$$

5.37 Resuélvanse, reduciéndolas primero a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones: (a) $x'' - x' = x$; (b) $x'' - x = 0$.