Capítulo VIII

Geometría Afín de un Espacio Vectorial

Como en capítulos anteriores, E será un espacio vectorial sobre un cuerpo k.

1 Subvariedades Afines

Definición 1.1 Dado un subespacio vectorial F de E, llamaremos *subvariedad afín* de E de *subespacio director* F (ó de *dirección* F) a los subconjuntos de E de la forma

$$a + F = \{a + e : e \in F\} .$$

En particular, todo subespacio vectorial de E es una subvariedad afín.

Dado $e \in E$, la aplicación biyectiva $\mathfrak{t}_e : E \to E$, $v \mapsto \mathfrak{t}_e(v) = v + e$, se denomina *traslación* por el vector e; la aplicación $\mathfrak{t}_e$ es lineal sólo cuando $e = 0$, en cuyo caso es la identidad. Dada una subvariedad afín $X = a + F$ se satisface $X = \mathfrak{t}_a(F)$, es decir, las subvariedades afines son los trasladados de los subespacios vectoriales.

1.2 Obsérvese que, dado $a \in E$, $a + F$ son los vectores de E que están relacionados con a por la relación de equivalencia que F induce en E. Como consecuencia inmediata obtenemos:

(a) Dados $a, e \in E$ se satisface: $a + F = e + F \iff a - e \in F$.

(b) Si $X = a + F$, entonces para todo $e \in X$ se satisface $X = e + F$.

Definiciones 1.3 Diremos que dos subvariedades de E son *incidentes* si una de ellas está contenida en la otra, y diremos que son *paralelas* cuando sus direcciones sean incidentes; dadas dos subvariedades X e Y de E, la notación $X \| Y$ significará que son paralelas.

Se define la *dimensión* de una subvariedad afín como la dimensión de su dirección. Llamaremos *puntos* a las subvariedades de dimensión cero (es decir, a los vectores), *rectas* a las de dimensión uno, y *planos* a las dimensión dos. Diremos que una subvariedad afín es un *hiperplano* si su dirección es una hiperplano vectorial.

Observación **1.4** Aunque, por definición, los puntos coinciden con los vectores, haremos la siguiente distinción: cuando un vector lo estemos considerando como un punto (es decir, como una subvariedad afín), entonces lo denotaremos con letras mayúsculas. De este modo, dado un punto P y un vector e, $P+e$ lo interpretaremos como el punto que se obtiene al trasladar P por el vector e; dados puntos P y Q, el único vector por el que puede trasladarse P para obtener Q es el vector $Q-P$.

Proposición 1.5 *La intersección de una familia de subvariedades afines de E, ó es el vacío, ó es una subvariedad afín. En el último caso, la dirección de la subvariedad intersección es igual a la intersección de las direcciones de las subvariedades de la familia.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de subvariedades afines de E y para cada $i\in I$ sea F_i la dirección de X_i. Que el conjunto $X=\cap_{i\in I}X_i$ sea no vacío significa que existe un punto P en E tal que $P\in X_i$ para todo $i\in I$, es decir, $X_i=P+F_i$ para todo $i\in I$; por lo tanto

$$X=\underset{i\in I}{\cap}X_i=\underset{i\in I}{\cap}(P+F_i)=P+\left(\underset{i\in I}{\cap}F_i\right)$$

(compruébese la última igualdad), de modo que X es una subvariedad afín cuya dirección es $\underset{i\in I}{\cap}F_i$. ∎

Proposición 1.6 *Dadas subvariedades afines $X=P+F$ e $Y=Q+F'$ en E se satisfacen:*

(i) $X\subseteq Y \iff F\subseteq F'$ *y* $P-Q\in F'$.

(ii) $X\cap Y\neq\emptyset \iff P-Q\in F+F'$.

(iii) *La mínima subvariedad afín de E que contiene a X e Y es*

$$Z=P+\langle Q-P\rangle+F+F'.$$

(iv) *Si X e Y son paralelas y tienen algún punto en común, entonces son incidentes.*

Demostración. (i) Supongamos en primer lugar que $P+F\subseteq Q+F'$. Por una parte $P\in Q+F'$ (ya que $P\in P+F$) y por lo tanto $P+F'=Q+F'$, es decir, $P-Q\in F'$; por otra parte tendríamos $P+F\subseteq P+F'$, de lo que se deduce fácilmente la inclusión $F\subseteq F'$. Para demostrar la otra implicación basta invertir los razonamientos.

(ii) Si existe $R\in X\cap Y$, entonces existe $v\in F$ tal que $R=P+v$ y existe $u\in F'$ tal que $R=Q+u$; por lo tanto $P-Q=u-v\in F+F'$. La demostración de la otra implicación se deja como ejercicio.

(iii) Es claro que Z es una subvariedad afín de E que contiene a X e Y. Probemos que es la menor: si $R+V$ es otra subvariedad afín de E que contiene a X e Y, entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} P+F\subseteq R+V & \Rightarrow & P-R\in V \text{ y } F\subseteq V \\ Q+F'\subseteq R+V & \Rightarrow & Q-R\in V \text{ y } F'\subseteq V \end{array}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$F\subseteq V,\ F'\subseteq V \text{ y } P-Q\in V \quad\Rightarrow\quad \langle P-Q\rangle+F+F'\subseteq V,$$

es decir, $Z\subseteq P+V$; para concluir basta tener en cuenta que $P+V=R+V$ porque $P-R\in V$.

(iv) Se deja como sencillo ejercicio. ∎

Proposición 1.7 *Con la notación de la proposición* 1.6, *si X e Y tienen dimensión finita se satisfacen:*

(i) $X \cap Y \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \dim Z = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)\,.$

(ii) $X \cap Y = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \dim Z \leq \dim X + \dim Y + 1\,.$

(iii) *Si $X \cap Y = \emptyset$, entonces:* $X \| Y \iff \dim Z = 1 + \max\{\dim X, \dim Y\}\,.$

Demostración. Recordemos que, por definición, tenemos $\dim X = \dim F$, $\dim Y = \dim F'$ y $\dim Z = \dim(\langle Q - P\rangle + F + F')$.

(i) Si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $Q - P \in F + F'$ y por lo tanto $\langle Q - P\rangle + F + F' = F + F'$; teniendo en cuenta que en este caso $X \cap Y$ es una subvariadad afín cuya dirección es $F \cap F'$, aplicando la fórmula de la dimensión de los subespacios vectoriales obtenemos

$$\begin{aligned}\dim Z &= \dim(F + F') = \dim F + \dim F' - \dim(F \cap F')\\ &= \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)\,.\end{aligned}$$

(ii) Si $X \cap Y = \emptyset$, entonces $\langle Q - P\rangle \cap (F + F') = 0$ y $Q - P \neq 0$ (compruébense), y por lo tanto

$$\begin{aligned}\dim Z &= \dim(\langle Q - P\rangle + F + F') = \dim(\langle Q - P\rangle) + \dim(F + F')\\ &= 1 + \dim F + \dim F' - \dim(F \cap F')\\ &\leq 1 + \dim F + \dim F' = 1 + \dim X + \dim Y\,.\end{aligned}$$

(iii) Se deja como sencillo ejercicio. ∎

1.8 Si denotamos por $\mathcal{V}(E)$ el conjunto de todas las subvariedades afines de E, entonces dicho conjunto esta parcialmente ordenado por la inclusión (la incidencia), y si convenimos en que "el vacío" es una subvariedad afín de E de dimensión -1, entonces $\mathcal{V}(E)$ tiene "primer elemento" y "último elemento" ($\emptyset$ y E, respectivamente); además, al introducir el vacío en $\mathcal{V}(E)$ la intersección de subvariedades afines es siempre otra subvariedad afín, de modo que en $\mathcal{V}(E)$ siempre existen el supremo y el ínfimo de dos cualesquiera de sus elementos (véase 1.5); es decir, "$\mathcal{V}(E)$ es un retículo con primer y último elemento" [1].

La geometría afín del espacio vectorial E es el estudio del retículo $\mathcal{V}(E)$, es decir, el estudio del conjunto de las subvariedades afines de E respecto de la relación de incidencia.

1.9 Una importante observación es que las traslaciones de E "son biyecciones que conservan la incidencia", es decir, son "isomorfismos de conjuntos ordenados" (biyecciones que conservan el orden); por lo tanto las traslaciones conservan los teoremas de la geometría afín de E: dada una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{V}(E)$ y dado $e \in E$, la familia de las imágenes, $\{\mathsf{t}_e(X_i)\}_{i\in I}$, satisface exactamente los mismos teoremas que la familia dada (véase 1.1). Este hecho nos permite escoger el origen arbitrariamente a la hora de resolver problemas.

---

[1] Un *retículo* es, por definición, un conjunto ordenado en el que todo subconjunto finito tiene supremo e ínfimo.

Ejercicio 1.10 Pruébense las siguientes propiedades de la incidencia en $\mathcal{V}(E)$:

(a) Por dos puntos distintos pasa una única recta.

(b) Dos rectas distintas, ó son disjuntas, ó se cortan en un único punto.

(c) Por dos rectas paralelas y distintas pasa un único plano.

(d) Por una recta y un punto que no son incidentes pasa un único plano.

(e) Dadas dos rectas r y s que se cruzan (es decir, que no están en un mismo plano, o sea, ni se cortan ni son paralelas), existe un único plano π_r paralelo a s que contiene a r, y existe un único plano π_s paralelo a r que contiene a s; además $\pi_r \| \pi_s$.

(f) Si $\dim E = 2$, entonces dos rectas no paralelas se cortan en un único punto.

(g) Si $\dim E = 3$, entonces: (i) dos planos no paralelos se cortan en una única recta; (ii) un plano y una recta no paralelos se cortan en un único punto.

(h) Una recta y un hiperplano que no son paralelos se cortan en un único punto.

2 Proporcionalidad

Como ya hemos dicho, la geometria afín estudia si unas subvariedades dadas se cortan o no, si son paralelas, si se cortan en un punto o en un plano, etc; no hay en esta geometría “ángulos” ni “distancias”, nociones que aparecerán al introducir en E un “modo de medir” (lo cual será posible cuando k sea el cuerpo de los números reales, como estudiaremos en la geometría euclídea). Aunque en geometría afín no podemos comparar segmentos cualesquiera, lo que sí podemos hacer es comparar segmentos paralelos (segmentos con la misma dirección).

Definiciones 2.1 Llamaremos *segmento* en E a todo par de puntos distintos A y B de E, y lo denotaremos AB. Diremos que dos segmentos AB y CD son *paralelos* si la única recta que pasa por A y B es paralela a la única recta que pasa por C y D, es decir, si los vectores $B-A$ y $D-C$ son proporcionales.

Si AB y CD son segmentos paralelos, entonces se define la *proporción* del segmento AB al segmento CD como el único escalar $\frac{AB}{CD}$ que satisface la igualdad

$$B - A = \frac{AB}{CD}(D-C)\,.$$

Si denotamos $\frac{AB}{CD} = \alpha$, entonces es inmediato comprobar las siguientes igualdades:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{1}{\alpha}\,, \qquad \frac{BA}{CD} = \frac{AB}{DC} = -\alpha\,, \qquad \frac{BA}{DC} = \alpha\,.$$

La definición del escalar $\frac{AB}{CD}$ se puede generalizar admitiendo que $A = B$, en cuyo caso $\frac{AB}{CD} = 0$ porque $B - A = 0$; lo que no tendrá sentido será $\frac{AB}{CD}$ con $C = D$.

Si A, B y C son tres puntos distintos y alineados tales que $\frac{CA}{CB} = \lambda$, entonces se dice que el punto C divide al segmento AB en la proporción $\lambda : 1$.

Recordemos las definiciones de las figuras geométricas más sencillas.

Definiciones 2.2 Se define el *baricentro* de n puntos $A_1, \dots, A_n$ de E como el punto $\frac{1}{n}(A_1 + \dots + A_n)$ (supuesto que n no es múltiplo de la característica de k). El baricentro $\frac{1}{2}(A+B)$ de un segmento AB se denomina *punto medio* del segmento; si denotamos $P = \frac{1}{2}(A+B)$, es claro que P pertenece a la única recta que pasa por A y por B, y que la proporción del segmento AP al segmento AB es $\frac{1}{2}$, es decir $P - A = \frac{1}{2}(B - A)$.

Se denomina *triángulo* en E a toda terna de puntos no alineados de E; dichos puntos son los vértices del triángulo, y las rectas que pasan por dos de los vértices son los lados del triángulo.

Se denomina *cuadrilátero* en E a toda cuaterna ordenada $A_1A_2A_3A_4$ de puntos de E tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados; dichos puntos son los vértices del cuadrilátero, las rectas que pasan por dos vértices consecutivos son los lados del cuadrilátero (entendiendo que A_4 y A_1 son consecutivos), y las rectas que pasan por vértices no consecutivos son las diagonales del cuadrilátero. Dos vértices (lados) se dicen que son opuestos si no son consecutivos (si no tienen ningún vértice en común).

Un cuadrilátero se dice que es *alabeado* si sus cuatro vértices no están en un mismo plano. Un cuadrilátero se dice que es un *trapecio* si uno de sus dos pares de lados opuestos son paralelos, y se dice que es un *paralelogramo* si sus dos pares de lados opuestos son paralelos; los dos lados de un trapecio que son paralelos se denominan bases del trapecio. Es claro que un cuadrilátero alabeado no puede ser un trapecio (y mucho menos un paralelogramo).

Se denomina *tetraedro* en E a toda cuaterna de puntos de E que no sean coplanarios; dichos puntos son los vértices del tetraedro, y dado un vértice, el plano generado por los otros tres se llama cara del tetraedro opuesta al vértice dado; las rectas que unen dos de los vértices se denominan aristas del tetraedro.

Ejercicios 2.3 (a) Dado un segmento AB, su punto medio es el único punto P de la recta que pasa por A y B que satisface $\frac{PA}{PB} = -1$; en particular, el punto medio de un segmento AB divide al segmento en la proporción $-1 : 1$.

(b) **Teorema de Tales:** Sean H, H' y H'' tres hiperplanos paralelos y distintos de un espacio vectorial. Si r es una recta no paralela a dichos hiperplanos, y P, P' y P'' son los puntos de corte de r con H, H' y H'' respectivamente, entonces la proporción entre los segmentos PP' y PP'' no depende de la recta r.

(c) **Teorema de Ceva:** Dados un triangulo ABC, un punto A' en el lado opuesto al vértice A, un punto B' en el lado opuesto al vértice B y un punto C' en el lado opuesto al vértice C, la condición necesaria y suficiente para que las rectas que contienen a los segmentos AA', BB' y CC' sean concurrentes, es que se satisfaga la igualdad

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1\,.$$

(d) **Teorema de Menelao:** Con las mismas notaciones del Teorema de Ceva, la condición necesaria y sufuciente para que los puntos A', B' y C' estén alineados es que se satisfaga la igualdad

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1\,.$$

(e) Las medianas de un triángulo (rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto) concurren en el baricentro del triángulo. Además el baricentro divide a cada mediana en la proporción $2 : 1$.

(f) Las paralelas a dos lados de un triángulo que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos iguales.

(g) Dado un cuadrilátero no alabeado, las rectas que unen cada vértice con el baricentro del triángulo formado por los restantes vértices concurren en el baricentro del cuadrilátero. Además, las bimedianas del cuadrilátero (rectas que unen los puntos medios de lados opuestos) también concurren en el baricentro del cuadrilátero.

(h) Las medianas de un tetraedro (rectas que unen cada vértice con el baricentro de la cara opuesta) concurren en el baricentro del tetraedro.

3 Representación en Coordenadas

En esta sección supondremos que el espacio vectorial E tiene dimensión finita y en él fijaremos una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$; $B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ será la base dual de B, $X = P + V$ será una subvariedad afín de E de dimensión r, y $(x_1, \dots, x_n)$ serán las coordenadas de un vector arbitrario e de E.

3.1 Supongamos en primer lugar que conocemos una base $\{v_1, \dots, v_r\}$ de V. Entonces, como sabemos que $e \in X$ si y sólo si $e - P \in V$, tenemos que e pertenece a X si y sólo si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ tales que

$$e = P + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \,; \tag{3.1}$$

(3.1) es la *ecuación vectorial-paramétrica* de X. Expresemos dicha ecuación en coordenadas respecto de la base B fijada: Si $(b_1, \dots, b_n)$ son las coordenadas de P y $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$ son las coordenadas de v_i $(i = 1, \dots, r)$, todas en la base B, entonces la igualdad vectorial (3.1) podemos expresarla matricialmente como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

que igualando coordenada a coordenada nos queda

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1 + \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{1r} \\ &\vdots \\ x_n &= b_n + \lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_r a_{nr} \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

Las (3.2) se denominan *ecuaciones paramétricas de* X *en la base* B, y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los *parámetros*; cuando dichos parámetros toman valores en k obtenemos una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ correspondiente a las coordenadas en la base B de un punto de X, y todo punto de X lo podemos obtener así.

Ejemplo 3.2 Sean Q y P dos puntos distintos cuyas coordenadas en B son $(a_1, \dots, a_n)$ y $(b_1, \dots, b_n)$ respectivamente; la única recta que pasa por Q y por P es $P + \langle Q - P \rangle$, y por lo tanto el vector e pertenece a dicha recta si y sólo si existe $\lambda \in k$ tal que $e = P + \lambda(Q - P)$; expresando en coordenadas la anterior igualdad obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & b_1 + \lambda(a_1 - b_1) \\ \vdots & & \\ x_n & = & b_n + \lambda(a_n - b_n) \end{array}\right\} ,$$

que son las ecuaciones paramétrica en la base B de la recta que pasa por Q y P (en este caso sólo tenemos un parámetro, ya que hay tantos parámetros como la dimensión de la subvariedad).

3.3 Supongamos ahora que conocemos una base $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ de V° (donde $s = n-r = \dim V^\circ$) (véase la sección IV.2). Igual que antes, $e \in X$ si y sólo si $e - P \in V$, pero además sabemos que dado un vector $u \in E$ se tiene

$$u \in V \quad \iff \quad \xi_1(u) = \cdots = \xi_s(u) = 0\,;$$

por lo tanto el vector e está en X si y sólo si se satisfacen

$$\left.\begin{array}{c} \xi_1(e) = \xi(P) \\ \vdots \\ \xi_s(e) = \xi(P) \end{array}\right\} ; \tag{3.3}$$

(3.3) son las *ecuaciones vectoriales-implícitas* de X. Expresemos dichas ecuaciones en coordenadas respecto de la base B fijada: Si $(c_{1i}, \dots, c_{ni})$ son las coordenadas de la forma lineal ξ_i $(i = 1, \dots, s)$ en la base B^*, entonces se satisface

$$\xi_i(e) = (c_{1i}\omega_1 + \cdots + c_{ni}\omega_n)(e) = c_{1i}x_1 + \cdots + c_{ni}x_n\,,$$

y por lo tanto las ecuaciones (3.3) nos quedan

$$\left.\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + \cdots + c_{n1}x_n & = & d_1 \\ & \vdots & \\ c_{1s}x_1 + \cdots + c_{ns}x_n & = & d_s \end{array}\right\} , \tag{3.4}$$

donde $d_i = \xi_i(P) = c_{1i}b_1 + \cdots + c_{ni}b_n$. Las (3.4) se denominan *ecuaciones implícitas de X en la base B*; los puntos de X son aquellos cuyas coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la base B satisfacen las ecuaciones (3.4).

Ejemplos 3.4 (a) Supongamos que X es un hiperplano, es decir, que $\dim V = n - 1$; en este caso $\dim V^\circ = 1$ y por lo tanto existe $\omega \in E^*$, $\omega \neq 0$, tal que $V^\circ = \langle\omega\rangle$. Si $(c_1, \dots, c_n)$ son las coordenadas de ω en B^* y $d = \omega(P) = c_1b_1 + \cdots + c_nb_n$, entonces los puntos de X son aquellos cuyas coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en la base B satisfacen

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = d\,.$$

En este caso X viene dada por una sólo ecuación. En general, el número de ecuaciones es $\dim E - \dim X$, es decir, una subvariedad de dimensión r viene dada por $n - r$ ecuaciones implícitas (o lo que es lo mismo, una subvariedad de dimensión r es intersección de $n-r$ hiperplanos).

Si Y es otro hiperplano de E cuya ecuación implícita en la base B es $c'_1x_1+\cdots+c'_nx_n = d'$, entonces es un sencillo ejercicio demostrar la siguiente equivalencia: $X\|Y \iff$ las n-uplas $(c_1,\dots,c_n)$ y $(c'_1,\dots,c'_n)$ son proporcionales.

(b) Sean Q y P como en el ejemplo 3.2, con lo que no todos los escalares a_i-b_i $(i=1,\dots,n)$ son nulos; si suponemos, por ejemplo, que $a_1-b_1\neq 0$, entonces una base de $V^\circ = \langle Q-P\rangle^\circ$ es

$$\{(b_2-a_2)\omega_1-(b_1-a_1)\omega_2\,,\ \dots\ ,\,(b_n-a_n)\omega_1-(b_1-a_1)\omega_n\}$$

(compruébese), de modo que las ecuaciones implícitas de la recta $P+\langle Q-P\rangle$ en la base B son

$$\left.\begin{array}{rcl}(b_2-a_2)x_1-(b_1-a_1)x_2 & = & b_2a_1-b_1a_2\\ & \vdots & \\ (b_n-a_n)x_1-(b_1-a_1)x_n & = & b_na_1-b_1a_n\end{array}\right\}\,;$$

cuando todos los escalares a_i-b_i $(i=1,\dots,n)$ son no nulos las anteriores ecuaciones se pueden expresar del siguiente modo:

$$\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1}=\frac{x_2-a_2}{b_2-a_2}=\cdots=\frac{x_n-a_n}{b_n-a_n}\,.$$

3.5 Veamos la relación que hay entre las ecuaciones paramétricas y las implícitas. Por una parte, si la matriz de coordenadas de los vectores $\{v_1,\dots,v_r\}$ ($=$ base de V) en la base B es

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nr}\end{pmatrix},$$

entonces las ecuaciones paramétricas de X en la base B son

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},$$

donde $(b_1,\dots,b_n)$ son las coordenadas de P en la base B; en particular, las ecuaciones paramétricas en la base B del subespacio V considerado como subvariedad afín son

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix}.$$

Por otra parte, si la matriz de coordenadas de las formas lineales $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ ($=$ base de V°) en la base B^* es

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & \dots & c_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \dots & c_{ns}\end{pmatrix},$$

entonces las ecuaciones implícitas de X en la base B son

$$C^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_s \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_s \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

en particular, las ecuaciones implícitas en la base B del subespacio V son

$$C^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ahora tenemos: V° es un subespacio vectorial de E^*, B^* es una base de E^*, $E^{**} = E$, la base dual de B^* es B, una base de V° es $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$, y una base del incidente de V°, $V^{\circ\circ} = V$, es $\{v_1, \dots, v_r\}$. Por lo tanto, aplicando a V° lo dicho anteriormente para V obtenemos que si las coordenadas de una forma lineal ω en la base B^* son $(y_1, \dots, y_n)$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $\omega \in V^\circ$;

(ii) existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tales que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix};$$

(iii) se satisface

$$A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0\,.$$

En definitiva, hemos obtenido que las ecuaciones paramétricas de V en la base B "coinciden" con las ecuaciones implícitas de V° en la base B^* en el siguiente sentido:

paramétricas de V en B — implícitas de V° en B^*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} \qquad\qquad A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0\,.$$

Del mismo modo "coinciden" las ecuaciones implícitas de V en la base B con las ecuaciones paramétricas de V° en la base B^*:

implícitas de V en B — paramétricas de V° en B^*

$$C^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.6 ¿Cómo se pueden obtener las ecuaciones paramétricas de una subvariedad afín en cierta base si se conocen sus ecuaciones implícitas en dicha base? ¿Y cómo se pueden obtener las implícitas si se conocen las paramétricas?

3.7 Siguiendo con la notación de 3.5, nos planteamos ahora determinar todos los hiperplanos de E que contienen a la subvariedad X. Si un hiperplano de E contiene a X entonces debe ser de la forma $P+H$ donde H es un hiperplano vectorial que contiene a V. Si $\omega \in E^*$ es tal que $H^\circ = \langle \omega \rangle$, entonces $\omega \in \langle \xi_1, \dots, \xi_s \rangle = V^\circ$, es decir, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ no todos nulos (porque $\omega \neq 0$) tales que $\omega = \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_s \xi_s$. En definitiva, los hiperplanos que contienen a X son los de la forma $P + \langle \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_s \xi_s \rangle^\circ$, donde los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ no son todos nulos (para que la forma lineal $\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_s \xi_s$ no sea nula). Según lo anterior, si

$$\left.\begin{array}{rcl} \xi_1(e-P) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \xi_s(e-P) & = & 0 \end{array}\right\}$$

son las ecuaciones vectoriales-implícitas de X, entonces todo hiperplano que contenga a X debe tener una ecuación de la forma

$$(\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_s \xi_s)(e-P) = 0$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ no todos nulos. En coordenadas sería: Si las ecuaciones implícitas de X en la base B son

$$\left.\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n - d_1 & = & 0 \\ & \vdots & \\ c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n - d_s & = & 0 \end{array}\right\},$$

entonces todo hiperplano que contenga a X debe tener una ecuación en la base B de la forma

$$\lambda_1(c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n - d_1) + \cdots + \lambda_s(c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n - d_s) = 0$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ no todos nulos.

4 Problemas

En esta sección, cuando hablemos de ecuaciones paramétricas o implícitas de subvariedades afines de $\mathbb{R}^n$ sin especificar la base, estaremos entendiendo que dichas ecuaciones están referidas a la base usual.

4.1 Demuéstrese que un subconjunto X de un espacio vectorial es una subvariedad afín, si y sólo si, la recta que determinan dos puntos distintos cualesquiera de X está contenida en X.

4.2 En un espacio vectorial de dimensión 3, pruébese que dadas dos rectas r y s y dado un punto P exterior a ellas, existe una única recta que pasa por P y que corta a r y a s.

4.3 En el plano afín $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$:
(a) ¿Cuántos puntos hay?
(b) ¿Cuántas rectas hay?
(c) ¿Cuántos puntos tiene cada recta?
(d) ¿Cuántas rectas paralelas hay a una dada?

4.4 Hállense las ecuaciones paramétricas e implícitas del hiperplano de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $e = (1, -1, 1 - 0)$, $u = (1, 1, 0, 1)$ y $v = (1, 0, 1, 1)$.

4.5 Sea $B = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0, 0), e_3 = (1, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$. Hállense las ecuaciones paramétricas en la base B de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:
(a) $E_1 = \{(x, y, z, t) \,:\, x + y = z + t\}$;
(b) $E_2 = \{(a, -a, 0, b) \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$;
(c) $E_3 = \langle (1, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle$.

4.6 Calcúlese la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinada por las condiciones: (a) la restricción de T al plano $x + y + z = 0$ es una homotecia de razón 3; (b) T deja invariante a la recta $2x + 4y + 3x = 0$, $x + 2y + z = 0$; (c) $T(0, 0, -1) = (10, -5, -3)$. (Sugerencia: considérese la base $B = \{e_1 = (1, -1, 0), e_2 = (1, 0, -1), e_3 = (-2, 1, 0)\}$.)

4.7 En $\mathbb{R}^3$, dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + 4y + 5z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x + y + z = 2$, y dados los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (-1, 4, 2)$, hállese la ecuación del plano que pasa por $\pi_1 \cap \pi_2$ y por el punto medio del segmento AB.

4.8 Dados tres puntos distintos y alineados A, B, C de un plano, si elegimos un punto G exterior a la recta AB y un punto F de la recta GC que no sea ni G ni C, entonces se satisface que el punto de corte de la recta AB con la recta que pasa por los puntos $AF \cap BG$ y $AG \cap BF$ no depende de los puntos F y G elegidos.

4.9 Dadas dos rectas paralelas y distintas, r y r', y pares de puntos distintos, $A, B \in r$ y $A', B' \in r'$, la recta que pasa por los puntos $AA' \cap BB'$ y $AB' \cap A'B$ corta al segmento AB en su punto medio.

4.10 En $\mathbb{R}^3$, una recta está contenida en el plano $x + y + z = 4$ y pasa por el punto $(2, 1, 1)$. Hállese su ecuación sabiendo además que es paralela al plano $x - y + z = 0$.

4.11 En $\mathbb{R}^3$, calcúlese la ecuación del plano que contiene a la recta r_1 y es paralela a la recta r_2, donde

$$r_1 \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}, \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

4.12 En un espacio vectorial de dimensión 3, sea r una recta y sea π un plano paralelo a r. Pruébese que el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos que tienen un vértice sobre r y los otros dos vértices sobre π es un plano paralelo a π.

4.13 En $\mathbb{R}^3$, hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$, es coplanaria con la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, y es paralela al plano $x-2y-z=0$.

4.14 En $\mathbb{R}^3$, calcúlese la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,0,2)$ y se apoya en las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}\,, \qquad r_2 \equiv \frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}\,.$$

4.15 En $\mathbb{R}^4$, hállese la recta que pasa por el origen y se apoya en las dos rectas siguientes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1+2\lambda \\ t = 3-2\lambda \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 7\mu \\ y = 1 \\ z = 1+\mu \\ t = -1+2\mu \end{cases}$$

4.16 Hállese la menor subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que contiene a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=0 \\ 3x-t=0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-z-1=0 \\ t=0 \end{cases}$$

4.17 En $\mathbb{R}^4$, hállese la familia de hiperplanos que son incidentes con el plano determinado por los puntos $A=(1,-2,3,1)$, $B=(0,0,1,5)$ y $C=(3,-1,5,0)$.

4.18 En $\mathbb{R}^5$, hállense las ecuaciones de la mínima subvariedad afín que pasa por las rectas

$$r_1 \equiv x_1=x_2=x_3=x_4=x_5\,, \qquad r_2 \equiv \frac{x_1-1}{5}=\frac{x_2}{3}=x_3-2=\frac{x_4+1}{7}=\frac{x_5}{-4}\,.$$

4.19 Sean $A=(1,3)$, $B=(3,5)$ y $C=(5,1)$ puntos de $\mathbb{R}^2$, y sean A', B' y C' los puntos medios de los segmentos BC, AC y AB, respectivamente. Hállense las ecuaciones de la aplicación afín de $\sigma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que satisface $\sigma(A')=A$, $\sigma(B')=B$ y $\sigma(c')=C$. [2]

4.20 En el plano real $\mathbb{R}^2$, consideremos los subespacios $E_1\equiv 2x-3y=0$, $E_2\equiv x-2y=0$. Se define una aplicación $\sigma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera: dado $e\in\mathbb{R}^2$, sea r la recta paralela a E_2 que pasa por e y sea m el punto de intersección de r con E_1 (m existe); sea e' el punto definido por la condición de que m sea el punto medio del segmento ee'; se define $\sigma(e)=e'$. Pruébese que σ es una aplicación lineal involutiva ($\sigma^2=$ identidad de $\mathbb{R}^2$) y calcúlense sus ecuaciones.

4.21 Generalicemos el problema 4.20. Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita n, siendo k un cuerpo de característica distinta de 2. Sea H un hiperplano de E y sea E_1 una recta de E que no es paralela a H. Se define una aplicación $\sigma:E\to E$ de la siguiente manera: dado $e\in E$, sea r la recta paralela a E_1 que pasa por e; r corta a H en un único punto m; sea

[2] Una aplicación $f:E\to F$ entre espacios vectoriales se dice que es una *aplicación afín*, si es la composición de una aplicación lineal $T:E\to F$ con una traslación $\mathfrak{t}_v:F\to F$ ($v\in F$); es decir, si existe un vector $v\in F$ y existe una aplicación lineal $T:E\to F$ tales que $f(e)=v+T(e)$ para todo $e\in E$.

e' el único punto de E para el cual m es el punto medio del segmento ee'; se define $\sigma(e) = e'$. Pruébese que σ es un endomorfismo involutivo de E; σ se denomina *simetría afín* asociada al hiperplano H y de dirección la recta E_1.

4.22 Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y sea $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ su base dual. Considérese una forma lineal $\omega = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n$ y un vector $e = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ tales que $\omega(e) = 0$. Hállese la matriz en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de la simetría afín asociada al hiperplano $\operatorname{Ker}\omega$ y de dirección la recta $\langle e \rangle$.

4.23 En $\mathbb{R}^3$, hállense las ecuaciones de la simetría afín asociada al plano $x + y + z = 0$ y de dirección la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$.

4.24 **Teorema de Desargues:** Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ sin vértices comunes y de lados paralelos (AB es paralelo a $A'B'$, AC es paralelo a $A'C'$ y BC es paralelo a $B'C'$), se satisface que las tres rectas AA', BB' y CC son paralelas ó concurrentes.

4.25 Pruébese que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

4.26 Pruébese que los puntos medios de los cuatro lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

Obténgase como consecuencia que las bimedianas del cuadrilátero (las rectas que unen los puntos medios de los lados opuesos) se cortan en su punto medio. Este resultado es también cierto para cuadriláteros alabeados.

4.27 Dado un paralelogramo $ABCD$, si E y F son los puntos medios de los lados AB y CD, entonces se satisface que DE y FB dividen en tres partes iguales a la diagonal AC.

4.28 Las diagonales de un trapecio se dividen en partes proporcionales a las bases.

4.29 Si P es el punto de corte de las diagonales de un trapecio, entonces la paralela a las bases que pasa por P corta a los dos lados restantes en puntos cuyo punto medio es P.

4.30 Sean k un cuerpo de característica distinta de 2, r una recta de un k-espacio vectorial de dimensión mayor ó igual a 2, y A, B, P tres puntos distintos de r.

(a) Si un punto Q de la recta r que satisface

$$\frac{PA}{PB} = -\frac{QA}{QB},$$

entonces Q es distinto de A, B y P, y se dice que la pareja (A, B) *separa armónicamente* a la pareja (P, Q). Pruébese que si (A, B) separa armónicamente a (P, Q), entonces (P, Q) separa armónicamente a (A, B).

(b) Pruébese que existe un único punto $Q \in r$ tal que las parejas (A, B) y (P, Q) se separan armónicamente (cuando P es el punto medio del segmento AB, entonces Q es el "punto del infinito" de la recta r). Se dice que Q es el *conjugado armónico* de P respecto de la pareja (A, B). Además, si Q es el conjugado armónico de P respecto de la pareja (A, B), entonces P es el conjugado armónico de Q respecto de la pareja (A, B).

(c) El conjugado armónico de P respecto de la pareja (A, B) puede construirse de la siguiente forma: trazadas rectas paralelas r_1, r_2 y r_3 que pasen por A, B y P, respectivamente, y eligiendo un punto X de r_3 distinto de P, la recta s que pasa por los puntos $r_1 \cap BX$ y $r_2 \cap AX$ corta a la recta AB en el conjugado armónico buscado. Cuando el punto P es el punto medio del segmento AB, la recta s es paralela a r y por lo tanto el conjugado armonico es el "punto del infinito" de la recta r.

(Compárese con los problemas 4.8 y 4.9.)