# Capítulo IX

# Espacios Vectoriales Euclídeos

En este capítulo $E$ será un espacio vectorial real de dimensión finita igual a $n$.

## 1 Productos Escalares Euclídeos

Empezaremos recordando algunas nociones tratadas en capítulos anteriores.

**1.1** Una *métrica* sobre $E$ es un tensor de orden 2 sobre $E$, es decir, una aplicación $T_2 : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{aligned} T_2(e+e',v) &= T_2(e,v)+T_2(e',v)\,, \qquad & T_2(\lambda e,v) &= \lambda T_2(e,v)\,, \\ T_2(e,v+v') &= T_2(e,v)+T_2(e,v')\,, \qquad & T_2(e,\lambda v) &= \lambda T_2(e,v)\,, \end{aligned}$$

cualesquiera que sean $e, e', v, v' \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (véase V.1.4 (c)).

Dada una métrica $T_2 : E \times E \to \mathbb{R}$, para cada vector $e \in E$ es lineal la aplicación $T_2(e,\cdot) : E \to \mathbb{R}$, $e' \mapsto T_2(e,e')$, y por lo tanto tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : E &\to E^* \\ e &\mapsto \phi(e) := T_2(e,\cdot)\,, \end{aligned}$$

que es lineal y se denominada *polaridad* asociada a la métrica $T_2$ (véase V.7.6). El subespacio vectorial $\operatorname{Ker}\phi$ se llama *radical* de la métrica $T_2$ y se denota $\operatorname{rad} T_2$. Es clara la igualdad

$$\operatorname{rad} T_2 = \{e \in E \ :\ T_2(e,v) = 0 \ \ \forall\, v \in E\}\,.$$

Se dice que la métrica $T_2$ es *no singular* (ó *no degenerada*) si $\operatorname{rad} T_2 = 0$; es decir, $T_2$ es no singular si su polaridad asociada es inyectiva, en cuyo caso dicha polaridad es un isomorfismo (porque $\dim E = \dim E^* = n$).

**1.2** Sea $T_2$ una métrica no singular sobre $E$. Entonces la polaridad $\phi : E \to E^*$ es un isomorfismo y mediante él podemos trasladar la métrica $T_2$ definida sobre $E$ a la siguiente métrica sobre $E^*$:

$$\begin{aligned} T^2 : E^* \times E^* &\to \mathbb{R} \\ (\omega,\omega') &\mapsto T^2(\omega,\omega') := T_2(\phi^{-1}(\omega'),\phi^{-1}(\omega))\,. \end{aligned}$$

La métrica $T^2$ se denomina *métrica contravariada* asociada a $T_2$. Es fácil comprobar que la polaridad asociada a la métrica $T^2$ es el isomorfismo $\phi^{-1} : E^* \to E = E^{**}$; en particular tenemos que $T^2$ también es no singular.

**1.3** Sea $T_2$ una métrica sobre $E$. Dada una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$, se define la matriz de $T_2$ en dicha base como la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ determinada por las igualdades $a_{ij} = T_2(e_i, e_j)$ (véase V.2.4 (c)); además, si $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es otra base de $E$ y $\bar{A}$ es la matriz de $T_2$ en la nueva base, entonces se satisface

$$\bar{A} = C^t A C \,,$$

donde $C$ es la matriz de cambio de la nueva base a la base $B$ (véase V.2.7).

Por otra parte, si $B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es la base dual de la base $B$, entonces, dado $j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos (véase IV.1.5)

$$\begin{aligned} \phi(e_j) &= \phi(e_j)(e_1) \cdot \omega_1 + \cdots + \phi(e_j)(e_n) \cdot \omega_n \\ &= T_2(e_j, e_1) \cdot \omega_1 + \cdots + T_2(e_j, e_n) \cdot \omega_n \\ &= a_{j1}\omega_1 + \cdots + a_{jn}\omega_n \,, \end{aligned}$$

es decir, la matriz de $\phi$ en las bases $B$ y $B^*$ es igual a $A^t$. En particular obtenemos: $T_2$ es no singular $\iff$ $A^t$ es invertible $\iff$ $A$ es invertible.

Supongamos que $T_2$ es no singular. Hemos dicho en 1.2 que entonces la polaridad asociada a la métrica $T^2$ es el isomorfismo $\phi^{-1} : E^* \to E$, cuya matriz en las bases $B^*$ y $B$ es igual a $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$; por lo tanto, según lo dicho en el parrafo anterior, concluimos que la matriz de la métrica $T^2$ en la base $B^*$ es igual a $A^{-1}$.

**Definición 1.4** Llamaremos *producto escalar euclídeo* (ó simplemente *producto escalar*) sobre $E$, a toda métrica simétrica $T_2 : E \times E \to \mathbb{R}$ (véase V.3.3) que sea *definida positiva*, es decir, que satisfaga $T_2(e, e) > 0$ para todo vector no nulo $e \in E$.

Un *espacio vectorial euclídeo* (ó simplemente *espacio euclídeo*), es un espacio vectorial real de dimensión finita dotado de un producto escalar.

**1.5** En todo lo que resta de capítulo, para simplificar la terminología diremos "Sea $E$ un espacio euclídeo ...", y entenderemos con ello que $E$ es un espacio vectorial real de dimensión finita dotado de un producto escalar $T_2$ cuya polaridad asociada denotaremos $\phi : E \to E^*$. Además, escribiremos "$e \cdot v$" en lugar de $T_2(e, v)$ y diremos que "$\cdot$" es el producto escalar de $E$.

**1.6** Sea $E$ un espacio euclídeo. Dado un vector $e \in E$, la forma lineal $\phi(e) \in E^*$ es la aplicación "multiplicar escalarmente por el vector $e$"; por lo tanto, si $\phi(e) = 0$, entonces debe ser $e \cdot e = \phi(e)(e) = 0$, lo que implica $e = 0$. Es decir, el producto escalar de $E$ es una métrica no singular.

Según lo anterior la aplicación lineal $\phi : E \to E^*$ es un isomorfismo, y mediante él podemos trasladar el producto escalar de $E$ a una métrica sobre $E^*$ (véase 1.2):

$$\begin{array}{rcl} E^* \times E^* & \to & \mathbb{R} \\ (\omega, \omega') & \mapsto & \omega \cdot \omega' := \phi^{-1}(\omega) \cdot \phi^{-1}(\omega') \,. \end{array}$$

Es inmediato comprobar que dicha métrica sobre $E^*$ es simétrica y definida positiva, es decir, es un producto escalar.

Resumiendo, si $E$ es un espacio euclídeo entonces $E^*$ tiene una estructura de espacio euclídeo definida de modo natural por la de $E$.

# 2 Ortogonalidad

**Definición 2.1** Sea $E$ un espacio euclídeo. Diremos que dos vectores $e, v \in E$ son *ortogonales* si satisfacen $e \cdot v = 0$. Dado un subespacio $V$ de $E$, se define el *subespacio ortogonal* de $V$ como el subespacio $V^\perp$ de $E$ siguiente:

$$V^\perp := \phi^{-1}(V^\circ) = \{e \in E \ : \ e \cdot v = 0 \ \ \forall\, v \in V\}\,,$$

donde $V^\circ$ es el subespacio incidente de $V$ (véase IV.2.1).

**Proposición 2.2** *Sea $E$ un espacio euclídeo. Cualesquiera que sean los subespacios vectoriales $V, W$ de $E$ se satisfacen*

(i) $E^\perp = 0$, $0^\perp = E$;
(ii) $V \subseteq W \quad \Rightarrow \quad W^\perp \subseteq V^\perp$;
(iii) $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$;
(iv) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$;
(v) $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$;
(vi) $(V^\perp)^\perp = V$;
(vii) $V \cap V^\perp = 0$;
(viii) $E = V \oplus V^\perp$.

*Demostración.* Son sencillas y se dejan como ejercicio. Salvo (vii) (que se sigue de la definición de producto escalar) y (viii) (que se sigue de (ii) y (vii)), todas se obtienen de las propiedades del incidente teniendo en cuenta que $\phi : E \to E^*$ es un isomorfismo (véanse IV.2.3 y IV.3.8). ∎

**Definición 2.3** Sea $E$ un espacio eulídeo. Diremos que una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ es *ortogonal* si satisface $e_i \cdot e_j = 0$ cuando $i \neq j$ ; es decir, la base $B$ es ortogonal si y sólo si la matriz del produto escalar en $B$ es una matriz diagonal.

**Lema 2.4** *Sea $E$ un espacio euclídeo y sean $v_1, \dots, v_r$ vectores no nulos de $E$. Si $v_i \cdot v_j = 0$ cuando $i \neq j$, entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una familia libre.*

*Demostración.* Sean escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$. Dado $i \in \{1, \dots, r\}$, multiplicando escalarmente por $v_i$ obtenemos $\alpha_i (v_i \cdot v_i) = 0$, por lo que debe ser $\alpha_i = 0$ (porque $v_i \neq 0$). ∎

**Definición 2.5** Sea $E$ un espacio euclídeo. Dado un vector $e \in E$, como $e \cdot e \geq 0$ existe un único número real no negativo $|e|$ tal que $e \cdot e = |e|^2$ (es decir, $|e| = (e \cdot e)^{1/2}$ = raíz cuadrada positiva de $e \cdot e$); dicho número real $|e|$ se denomina *módulo* de $e$, y se dice que $e$ es *unitario* cuando $|e| = 1$. Obsérvese que se satisface: $|e| = 0 \iff e = 0$.

**Ejemplos 2.6** (a) Sea $E$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ cuyo grado es $\leq n$; una base de $E$ es $\{1, x, \ldots, x^n\}$. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto & p \cdot q := \sum_{i=0}^{n} p(i)q(i) \end{array}$$

es un produto escalar sobre $E$ (compruébese). El módulo de un polinomio $p \in E$ para dicho producto escalar es $|p| = \left[\sum_{i=0}^{n} (p(i))^2\right]^{1/2}$.

(b) Nosotros hemos definido los productos escalares sólo en dimensión finita (en cuyo caso la polaridad asociada es un isomorfismo y obtenemos notables propiedades fáciles de probar); sin embargo en la definición de producto escalar no interviene la dimensión del espacio. El siguiente es un ejemplo de producto escalar en un espacio de dimensión infinita, y es muy importante en Análisis Matemático.

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y sea $E = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \,:\, f$ es continua$\}$. Un producto escalar sobre $E$ es la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & f \cdot g := \int_a^b fg \,. \end{array}$$

Para demostrar la anterior afirmación sólo hay que usar las conocidas propiedades de linealidad de la integral y el siguiente hecho: "si $f \in E$ es tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$".

Dada $f \in E$, su módulo es $|f| = \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}$.

**Definición 2.7** Sea $E$ un espacio euclídeo. Diremos que una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $E$ es *ortonormal*, si es ortogonal y está formada por vectores unitarios; es decir, la base $B$ es ortonormal si y sólo si la matriz del produto escalar en $B$ es igual a la matriz unidad $I_n$.

La expresión en coordenadas del producto escalar en una base ortonormal es muy sencilla: supongamos que la base $B$ es ortonormal y sean $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$; entonces tenemos

$$e \cdot v = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \,.$$

**Ejemplo 2.8** Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el producto "$\cdot$" siguiente: dados $e = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$e \cdot v := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \,.$$

Es claro que el anterior "producto" es una métrica simétrica definida positiva, la cual se conoce como "producto escalar usual" de $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base usual de $\mathbb{R}^n$, $u_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, . . . , $u_n = (0, \ldots, 0, 1)$, es fácil ver que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal para el produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. En este espacio euclídeo el módulo de un vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big]^{1/2} .$$

Se satisface el siguiente importante resultado:

**Teorema 2.9** *En todo espacio euclídeo existen bases ortonormales.*

*Demostración.* Sea $E$ un espacio euclídeo y procedamos por inducción sobre $n = \dim E$. Sea $\dim E = 1$. Si $e \in E$ es un vector no nulo y definimos $e_1 = |e|^{-1}e = e/|e|$, entonces $\{e_1\}$ es una base ortonormal de $E$.

Supongamos ahora que $n > 1$ y que el teorema es cierto para todo espacio euclídeo de dimensión $n-1$. Sea $e \in E$ un vector no nulo y denotemos $V = \langle e \rangle$, de modo que $\dim V^{\perp} = \dim E - \dim V = n-1$ (véase 2.2); como la restricción a $V^{\perp}$ del producto escalar de $E$ es un producto escalar sobre $V^{\perp}$, aplicando la hipótesis de inducción se sigue que existe una base $\{e_2, \dots, e_n\}$ de $V^{\perp}$ que es ortonormal; si denotamos $e_1 = e/|e|$, entonces $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $E$. ∎

**Ejercicio 2.10** Sea $E$ un espacio euclídeo y sean $e_1, \dots, e_r$ vectores de $E$ tales que $e_1 \cdot e_j = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $\delta_{ii} = 1$). Pruébese que $\{e_1, \dots, e_r\}$ es una familia libre que puede ampliarse a una base ortonormal de $E$ (véase 2.4).

**2.11 Método de ortonormalización de Gram-Schimdt:** Sea $E$ un espacio euclídeo y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $E$. Vamos a describir un método para construir, a partir de la base dada, una base que sea ortonormal.

Denotemos $v_1 = e_1$ y definamos $v_2 = e_2 + \lambda v_1$, donde $\lambda$ se determinará de modo que $v_1$ y $v_2$ sean ortogonales: $0 = v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot (e_2 + \lambda v_1) = v_1 \cdot e_2 + \lambda |v_1|^2 \Rightarrow \lambda = -(e_2 \cdot v_1)/|v_1|^2$; por lo tanto

$$v_2 = e_2 - \frac{e_2 \cdot v_1}{|v_1|^2}\, v_1 \,.$$

El paso siguiente consiste en calcular $v_3 = e_3 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ con las condiciones $v_3 \cdot v_1 = 0$ y $v_3 \cdot v_2 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = v_3 \cdot v_1 &= e_3 \cdot v_1 + \lambda_1 |v_1|^2 + \lambda_2 (v_2 \cdot v_1) = e_3 \cdot v_1 + \lambda_1 |v_1|^2 \,, \\ 0 = v_3 \cdot v_2 &= e_3 \cdot v_1 + \lambda_1 (v_1 \cdot v_2) + \lambda_2 |v_2|^2 = e_3 \cdot v_2 + \lambda_2 |v_2|^2 \,, \end{aligned}$$

de donde $\lambda_1 = -(e_3 \cdot v_1)/|v_1|^2$ y $\lambda_2 = -(e_3 \cdot v_2)/|v_2|^2$; por lo tanto

$$v_3 = e_3 - \frac{e_3 \cdot v_1}{|v_1|^2}\, v_1 - \frac{e_3 \cdot v_2}{|v_2|^2}\, v_2 \,.$$

Reiterando el proceso anterior obtenemos la familia de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ dada por las fórmulas

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 \,, \\ v_i &= e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{e_i \cdot v_k}{|v_k|^2}\, v_k, \qquad\qquad i = 2, \dots, n \,. \end{aligned}$$

Por construcción, es claro que los vectores de dicha familia son no nulos y satisfacen $v_i \cdot v_j = 0$ si $i \neq j$, de modo que de 2.4 se sigue que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de $E$. Por lo tanto $\{v_1/|v_1|, \dots, v_n/|v_n|\}$ es una base ortonormal de $E$.

**2.12 Proyección ortogonal sobre un subespacio:** Sea $V$ un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $E$. Según 2.2 se satisface $E = V \oplus V^\perp$, de modo que dado $e \in E$ existen vectores únicos $e_1 \in V$ y $e_2 \in V^\perp$ tales que $e = e_1 + e_2$, y diremos que $e_1$ es la *proyección ortogonal de $e$ sobre $V$*. Es decir, la proyección ortogonal de $e$ sobre $V$ es el único vector $e_1$ de $E$ determinado por las condiciones

$$e_1 \in V\,, \qquad\qquad e - e_1 \in V^\perp\,.$$

Según la terminología usada en I.6.6, la "proyección ortogonal sobre $V$" es precisamente la "proyección sobre $V$ paralelamente a $V^\perp$".

**Ejemplo 2.13** Sea $v$ un vector no nulo de un espacio euclídeo $E$ y veamos cómo es la proyección ortogonal sobre el subespacio $V = \langle v \rangle$, lo que se conoce como *proyección ortogonal sobre el vector $v$*. Dado $e \in E$, si $u$ es la proyección ortogonal de $e$ sobre $v$ entonces $u \in \langle v \rangle$ y $e - u \in \langle v \rangle^\perp$, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$ y $(e - \lambda v) \cdot v = 0$; por lo tanto

$$u = \frac{e \cdot v}{|v|^2}\, v\,.$$

**Ejercicio 2.14** Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortogonal de un espacio euclídeo $E$, entonces todo vector de $E$ es suma de sus proyecciones ortogonales sobre los vectores de $B$: dado $e \in E$,

$$e = \frac{e \cdot e_1}{|e_1|^2}\, e_1 + \cdots + \frac{e \cdot e_n}{|e_n|^2}\, e_n\,.$$

Como consecuencia, si $B$ es ortonormal tenemos $e = (e \cdot e_1)e_1 + \cdots + (e \cdot e_n)e_n$.

**2.15** Sea $E$ un espacio euclídeo y sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $E$. Si consideramos la base dual de $B$, $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, como la polaridad $\phi : E \to E^*$ asociada al producto escalar de $E$ es un isomorfismo se sigue que la familia de vectores $e^i = \phi^{-1}(\omega_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ es una base de $E$. Abusando de la terminología, la base $\{e^1, \dots, e^n\}$ se denomina *base dual* de la base $B$; no debe confundirse con $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, ya que $\{e^1, \dots, e^n\}$ es base de $E$ y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es base de $E^*$, y mientras que $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ sólo depende de $B$, la base $\{e^1, \dots, e^n\}$ depende de $B$ y del producto escalar de $E$.

Dado un vector $e \in E$, sabemos que las coordenadas de $e$ en la base $B$ son $(\omega_1(e), \dots, \omega_n(e))$; por lo tanto, como $\omega_i$ es la forma lineal "multiplicar escalarmente por $e^i$" obtenemos

$$e = (e \cdot e^1)\, e_1 + \cdot + (e \cdot e^n)\, e_n\,.$$

Si además la base $B$ es ortonormal entonces $e^i = e_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (compruébese), es decir, $B$ coincide con su base dual; como consecuencia obtenemos la fórmula pedida en 2.14: $e = (e \cdot e_1)e_1 + \cdots + (e \cdot e_n)e_n$.

**Ejercicio 2.16** Con la notación de 2.15, calcúlese $\{e^1, \dots, e^n\}$ sabiendo que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es ortogonal.

**2.17 Ecuaciones en un espacio euclídeo:** Fijemos un subespacio vectorial $V$ de un espacio euclídeo $E$ y una subvariedad afín $X = P + V$; denotemos $n = \dim E$, $r = \dim V$ y $s = n - r = \dim V^\circ = \dim V^\perp$.

Supongamos en primer lugar que conocemos una base $\{u_1, \ldots, u_s\}$ del subespacio $V^\perp$. Si $\xi_1 = \phi(u_1)$, ..., $\xi_s = \phi(u_s)$, entonces $\{\xi_1, \ldots, \xi_s\}$ es una base de $V^\circ$ y por lo tanto las ecuaciones implícitas de $X$ son (véase VII.(3.3))

$$\xi_1(e-P) = 0\,, \quad \ldots\,, \quad \xi_s(e-P) = 0\,;$$

como la forma lineal $\xi_i$ consiste en "multiplicar escalarmente por el vector $u_i$" obtenemos que las ecuaciones implícitas de $X$ son

$$\left.\begin{array}{rcl} u_1 \cdot (e-P) & = & 0 \\ & \vdots & \\ u_s \cdot (e-P) & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Por ejemplo, si $H$ es un hiperplano vectorial de $E$ y $u$ es un vector no nulo ortogonal a $H$, entonces la ecuación implícita de $H$ es $u \cdot e = 0$ (es decir, dado $e \in E$, $e \in H$ si y sólo si $e$ es ortogonal a $u$). Como consecuencia, todo hiperplano afín de $E$ que tanga a $H$ por dirección tendrá una ecuación implícita de la forma $u \cdot e = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Supongamos ahora que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $E$ y que las ecuaciones implícitas de $V$ en la base $B$ son

$$\left.\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

(véase VII.(3.4)). Sea $C = (c_{ij}) \in M_{s\times n}(\mathbb{R})$ la matriz del anterior sistema de ecuaciones, y sea $M = (e_i \cdot e_j)$ la matriz del producto escalar en la base $B$. Veamos cómo a partir de $C$ y de $M$ podemos obtener las ecuaciones paramétricas en la base $B$ de una subvariedad afín de $E$ cuya dirección sea $V^\perp$.

Por una parte, si $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es la base dual de $B$ y consideramos las formas lineales $\xi_1 = c_{11}\omega_1 + \cdots + c_{1n}\omega_n$, ... , $\xi_s = c_{s1}\omega_1 + \cdots + c_{sn}\omega_n$, entonces $\{\xi_1, \ldots, \xi_s\}$ es una base de $V^\circ$. La matriz de coordenadas de las formas lineales $\xi_1, \ldots, \xi_s$ en la base $B^*$ es $C^t$.

Por otra parte, si $u_1 = \phi^{-1}(\xi_1)$, ..., $u_s = \phi^{-1}(\xi_s)$ entonces $\{u_1, \ldots, u_s\}$ es una base de $V^\perp$ y por lo tanto, si $C'$ es la matriz de coordenadas de los vectores $u_1, \ldots, u_s$ en la base $B$, tenemos que las ecuaciones paramétricas de $V^\perp$ en dicha base son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix},$$

de modo que calculada $C'$ tendremos las ecuaciones paramétricas de $V^\perp$ en la base $B$.

Como la matriz del isomorfismo $\phi^{-1} : E^* \to E$ en las bases $B^*$ y $B$ es $M^{-1}$ (véase 1.3), la matriz columna de las coordenadas del vector $u_i = \phi^{-1}(\xi_i)$ en la base $B$ es $M^{-1}\begin{pmatrix} c_{i1} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix}$, es decir,

$$C' = M^{-1}C^t\,.$$

De todo lo anterior concluimos que, dado un punto $P = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, las ecuaciones paramétricas de la subvariedad afín $P + V^\perp$ en la base $B$ son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1}C^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

# 3 Distancias y Ángulos

**Teorema 3.1** *Sea $E$ un espacio euclídeo. Dados $e, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se satisfacen:*

(i) $|\lambda e| = |\lambda||e|$ *($|\lambda|$ = valor absoluto de $\lambda$).*

(ii) *Desigualdad de Schwarz:* $|e \cdot v| \leq |e||v|$, *y se da la igualdad si y sólo si $e$ y $v$ son linealmente dependientes.*

(iii) *Desigualdad triangular (ó de Minkowsky):* $|e + v| \leq |e| + |v|$.

(iv) *Teorema de Pitágoras:* $|e + v|^2 = |e|^2 + |v|^2 \iff e \cdot v = 0$.

(v) *Ley del paralelogramo:* $|e + v|^2 + |e - v|^2 = 2(|e|^2 + |v|^2)$.

*Demostración.* (i) Basta aplicar la definición de módulo de un vector y tener en cuenta que $\lambda e \cdot \lambda e = \lambda^2 (e \cdot e)$ (véase 2.5).

(ii) Si $e = 0$ es trivial. Supongamos entonces que $e \neq 0$ y consideremos el siguiente polinomio con coeficientes reales:

$$\begin{aligned} p(x) &= (xe + v) \cdot (xe + v) = (e \cdot e)x^2 + 2(e \cdot v)x + (v \cdot v) \\ &= |e|^2x^2 + 2(e \cdot v)x + |v|^2 . \end{aligned}$$

Como $p(\alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el discriminante de $p(x)$ debe ser menor o igual a cero, es decir

$$(e \cdot v)^2 - |e|^2|v|^2 \leq 0 ,$$

que es lo que queríamos probar. Además, dicho discriminante será cero si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) = 0$, es decir, $|e \cdot v| = |e||v|$ si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha e + v = 0$.

(iii) $|e + v|^2 = (e + v) \cdot (e + v) = |e|^2 + 2(e \cdot v) + |v|^2$, por lo tanto según (ii)

$$|e + v|^2 \leq |e|^2 + 2|e||v| + |v|^2 = (|e| + |v|)^2 ,$$

que es lo que queríamos probar.

(iv) Basta examinar la demostración de (iii).

(v) Se sigue de las igualdades $|e + v|^2 = (e + v) \cdot (e + v) = |e|^2 + 2(e \cdot v) + |v|^2$ y $|e - v|^2 = (e - v) \cdot (e - v) = |e|^2 - 2(e \cdot v) + |v|^2$. ∎

**Ejercicio 3.2** Si $E$ es un espacio euclídeo, entonces en $E$ tenemos definida la función módulo:

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ e & \mapsto & |e| := (e \cdot e)^{1/2} . \end{array}$$

Pruébese que el producto escalar de $E$ se puede recuperar a partir de dicha función.

**Definición 3.3** Sea $E$ un espacio euclídeo. Dados $e, v \in E$ se define la *distancia* de $e$ a $v$ como el escalar $\mathrm{d}(e,v) := |e-v|$. Tenemos así definida la función distancia

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d} : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (e,v) & \mapsto & \mathrm{d}(e,v) := |e-v| \,. \end{array}$$

**Teorema 3.4** *Sea $d : E \times E \to \mathbb{R}$ la función distancia definida en un espacio euclídeo $E$. Dados $e, v, u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisfacen:*

(i) $\mathrm{d}(e,v) \geq 0$*; además,* $\mathrm{d}(e,v) = 0 \iff e = v$.

(ii) $\mathrm{d}(e,v) = \mathrm{d}(v,e)$ *(*d *es simétrica).*

(iii) $\mathrm{d}(e,v) \leq \mathrm{d}(e,u) + \mathrm{d}(u,v)$ *(*d *cumple la desigualdad triangular).*

(iv) $\mathrm{d}(e+u, v+u) = \mathrm{d}(e,v)$ *(*d *es estable por traslaciones).*

(v) $\mathrm{d}(\lambda e, \lambda v) = |\lambda|\, \mathrm{d}(v,e)$ *(*d *es absolutamente homogénea).*

*Demostración.* Todas las propiedades de la función distancia que han sido enumeradas se siguen fácilmente de las propiedades de la función módulo (véase 3.1). ∎

*Observación* **3.5** La propiedad (v) de 3.4 es la versión euclídea del Teorema de Thales (véase VIII.2.3).

Las propiedades (i), (ii) y (iii) de 3.4 nos dicen que $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}$ es una distancia en sentido topológico; por lo tanto, como en cualquier espacio métrico, en un espacio euclídeo tenemos la noción de distancia entre dos conjuntos cualesquiera:

**Definición 3.6** Dados dos subconjuntos no vacíos $A$ y $B$ de un espacio euclídeo $E$, se define la *distancia entre $A$ y $B$* como el número real no negativo

$$\mathrm{d}(A,B) := \inf\{\mathrm{d}(P,Q) \ : \ P \in A, \ Q \in B\} \,.$$

El número real $\mathrm{d}(A,B)$ existe, ya que todo conjunto no vacío de números reales que esté acotado inferiormente tiene ínfimo, y el conjunto no vacío $\{\mathrm{d}(P,Q) \ : \ P \in A, \ Q \in B\}$ está acotado inferiormente por 0.

Nos interesará especialmente la distancia entre subvariedades afines de un espacio euclídeo. Veremos que el problema de calcular la distancia entre dos subvariedades afines se reduce a calcular la distancia de un punto a una subvariedad afín, y que el problema de calcular la distancia de un punto a una subvariedad afín se reduce a calcular la distancia entre dos puntos.

**Definición 3.7** Sea $E$ un espacio euclídeo. Diremos que dos subespacio vectoriales de $E$ son *ortogonales* si uno de ellos está contenido en el subespacio ortogonal del otro.

Dadas en $E$ una recta $r$ y una subvariedad afín $X$, diremos que $r$ es *perpendicular* a $X$ si las direcciones de $r$ y de $X$ son ortogonales.

**Teorema 3.8** *Sea $X$ una subvariedad afín no vacía de un espacio euclídeo $E$. Para cada punto $P$ de $E$ que no pertenece a $X$ existe una única recta $r$ que satisface las siguientes propiedades:*

*$r$ pasa por $P$, $r$ es perpendicular a $X$, y $r \cap X \neq \emptyset$. En particular $r \cap X = Q$ es un punto y se satisface*

$$\mathrm{d}(P, X) = \mathrm{d}(P, Q)\,.$$

*La recta $r$ se denomina* perpendicular a $X$ trazada desde $P$, *y el punto de corte $Q$ se conoce como* pie de la perpendicular a $X$ trazada desde $P$.

*Demostración.* Sea $V$ la dirección de $X$ y consideremos la subvariedad afín $Y = P + V^{\perp}$. Como $V + V^{\perp} = E$ las subvariedades afines $X$ e $Y$ tienen intersección no vacía; además, por ser $V \cap V^{\perp} = 0$ la intersección $X \cap Y = Q$ es un punto (véanse VIII.1.6 (ii) y VIII.1.5). Sea $r$ la única recta que pasa por $P$ y por $Q$ ($P \neq Q$ porque $P \notin X$ y $Q \in X$).

Veamos que $r$ satisface las condiciones del enunciado. Como $P, Q \in P + V^{\perp}$ debe ser $r \subseteq P + V^{\perp}$ y en particular la dirección de $r$ está contenida en $V^{\perp}$ (véase VIII.1.6 (i)); por tanto $r$ es perpendicular a $X$. Además $r$ corta a $X$ sólo en el punto $Q$, pues si en $r \cap X$ existiera otro punto distinto de $Q$ tendríamos $r \subseteq X$, en contra de la hipótesis $P \notin X$. Por último, si $s$ es una recta que pasa por $P$, que es perpendicular a $X$ y que corta a $X$, entonces $s \subseteq Y$ y $\emptyset \neq s \cap X \subseteq Y \cap X = Q$, de modo que $Q \in s$ y $s = r$.

Veamos que $\mathrm{d}(P, X) = \mathrm{d}(P, Q)$. Sea $R \in X$ tal que $R \neq Q$; entonces $Q - R \in V$ (porque $Q, R \in X$) y $P - Q \in V^{\perp}$ (porque $P, Q \in Y$), y por lo tanto $(P - Q) \cdot (Q - R) = 0$. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos (véase 3.1)

$$|P - R|^2 = |(P - Q) + (Q - R)|^2 = |P - Q|^2 + |Q - R|^2 > |P - Q|^2\,,$$

es decir, $\mathrm{d}(P, Q) < \mathrm{d}(P, R)$; por lo tanto $\mathrm{d}(P, Q) = \inf\{\mathrm{d}(P, R) \,:\, R \in X\} = \mathrm{d}(P, X)$. ∎

*Observaciones* **3.9** (a) En la demostración de 3.8 no sólo se prueba que la distancia de $P$ a $X$ se alcanza en el punto $Q$; también se prueba que $Q$ es el único punto donde se alcanza dicha distancia.

(b) Con la notación de 3.8, si $X = V$ es un subespacio vectorial entonces $Q$ es la proyección ortogonal de $P$ sobre $V$ (véase 2.12).

**Ejemplos 3.10** (a) *Distancia de un punto a una recta.* Consideremos una recta $s = P' + \langle v \rangle$ y un punto $P \notin s$ en un espacio euclídeo $E$, y sea $Q = (P' + \langle v \rangle) \cap (P + \langle v \rangle^{\perp})$ el pie de la perpendicular a $s$ trazada desde $P$. Calculemos $Q$: por una parte existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P' + \lambda v$, y por otra parte $(Q - P) \cdot v = 0$; por lo tanto $(P' - P + \lambda v) \cdot v = 0$ y obtenemos

$$Q = P' - \frac{(P' - P) \cdot v}{|v|^2}\, v\,.$$

(b) *Distancia de un punto a un hiperplano.* Consideremos un hiperplano $X = P' + H$ y un punto $P \notin X$ en un espacio euclídeo $E$. Sea $\omega(x) = \alpha$ la ecuación implícita de $X$, es decir, sean $\omega \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $H = \operatorname{Ker} \omega = \langle \omega \rangle^{\circ}$ y $\alpha = \omega(P')$. Si $e_0 = \phi^{-1}(\omega)$, entonces

$$H^{\perp} = \phi^{-1}(H^{\circ}) = \phi^{-1}(\langle \omega \rangle) = \langle \phi^{-1}(\omega) \rangle = \langle e_0 \rangle\,.$$

Si $Q$ es el pie de la perpendicular a $X$ trazada desde $P$, entonces $Q \in P + \langle e_0 \rangle$ y por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P + \lambda e_0$; en particular tenemos $\mathrm{d}(P, X) = \mathrm{d}(P, Q) = |\lambda e_0|$. Ahora, por una parte

$$\omega(P) = \omega(Q) + \omega(\lambda e_0) = \alpha + \lambda \omega(e_0) = \alpha + \lambda(e_0 \cdot e_0) = \alpha + \lambda |e_0|^2$$

y por lo tanto $|\lambda||e_0|^2 = |\omega(P)-\alpha|$; por otra parte $|\lambda||e_0| = |\lambda e_0|$ y $|e_0| = |\omega|$ (por definición de $|\omega|$, véase 1.6). De todo lo anterior obtenemos la fórmula

$$\mathrm{d}(P,X) = \frac{|\omega(P)-\alpha|}{|\omega|}\,.$$

Recordemos qué ocurre en $\mathbb{R}^3$ con su producto escalar usual y su base usual: Sea $\pi$ un plano dado por la ecuación $ax+by+cz=d$; si consideramos el vector $e_0=(a,b,c)$ y la forma lineal $\omega$ dada por la fórmula $\omega(x,y,z)=ax+by+cz$, entonces $\phi^{-1}(\omega)=e_0$, es decir, $\omega$ es la aplicación "multiplicar escalarmente por $e_0$" (y en particular $e_0$ es un vector no nulo ortogonal a $\operatorname{Ker}\omega$, la dirección de $\pi$). En este caso dado $P=(x_0,y_0,z_0)$ tenemos

$$\mathrm{d}(P,\pi) = \frac{|\omega(P)-d|}{|\omega|} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{(a^2+b^2+c^2)^{1/2}}\,.$$

**Teorema 3.11** *Sean $X$ e $Y$ subvariedades afines no vacías de un espacio euclídeo $E$. Si $Z$ es la menor subvariedad afín de $E$ que contiene a $Y$ y es paralela a $X$, entonces cualquiera que sea $P\in X$ se satisface*

$$\mathrm{d}(X,Y) = \mathrm{d}(P,Z)\,.$$

*Demostración.* Si $Y=P'+V'$ y $V$ es la dirección de $X$, entonces la mínima subvariedad afín de $E$ que contiene a $Y$ y a la dirección de $X$ es $Z=P'+V+V'$ (véase VIII.1.6). Ahora, dado $P\in X$, como todo punto de $X$ es de la forma $P-v$ con $v\in V$ y todo punto de $Y$ es de la forma $P'+v'$ con $v'\in V'$, tenemos (véase 3.4 (iv))

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(X,Y) &= \inf\{\mathrm{d}(P-v,P'+v') \;:\; v\in V,\ v'\in V'\}\\ &= \inf\{\mathrm{d}(P,P'+v+v') \;:\; v\in V,\ v'\in V'\}\\ &= \inf\{\mathrm{d}(P,R) \;:\; R\in Z\} = \mathrm{d}(P,Z)\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Definición 3.12** Sean $e$ y $v$ vectores no nulos de un espacio euclídeo $E$. Como $|e||v|\neq 0$ de la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$-1 \le \frac{e\cdot v}{|e||v|} \le 1$$

(véase 3.1); por lo tanto existe un único $\theta\in[0,\pi]$ satisfaciendo

$$\cos\theta = \frac{e\cdot v}{|e||v|}\,.$$

El valor $\theta$ se denomina *médida en radianes del ángulo* (ó simplemente *ángulo*) formado por los vectores $e$ y $v$, y lo denotaremos $\angle(e,v)$:

$$\angle(e,v) = \arccos\frac{e\cdot v}{|e||v|} \quad (\in[0,\pi])\,.$$

De la definición se sigue la igualdad $e\cdot v = |e||v|\cos\angle(e,v)$.

**Ejercicio 3.13** Sean $e$ y $v$ vectores no nulos de un espacio euclídeo $E$, y sean $\lambda$ y $\mu$ escalares no nulos. Compruébense las siguientes afirmaciones:
(a) $\angle(e,v)=\frac{\pi}{2} \iff e$ y $v$ son ortogonales;
(b) $\angle(e,v)=0 \iff$ existe $\alpha>0$ tal que $e=\alpha v$;
(c) $\angle(e,v)=\pi \iff$ existe $\alpha<0$ tal que $e=\alpha v$;
(d) si $\lambda\mu>0$ entonces $\angle(e,v)=\angle(\lambda e,\mu v)$;
(e) si $\lambda\mu<0$ entonces $\angle(e,v)+\angle(\lambda e,\mu v)=\pi$.

**3.14** Sea $E$ un espacio euclídeo. Dados tres puntos distintos $A,B,C$ de $E$ denotaremos $\widehat{ABC}=\angle(A-B,C-B)$; si los tres puntos no están alineados diremos que $\widehat{ABC}=\widehat{CBA}$ es el ángulo del triángulo $ABC$ en su vértice $B$.

Dado un triángulo $ABC$ en $E$, para cada vector $e_0\in E$ podemos considerar el triángulo $A'B'C'$ que se obtiene trasladando el triángulo dado por el vector $e_0$, es decir, $A'=A+e_0$, $B'=B+e_0$ y $C'=C+e_0$, y es inmediato comprobar que se satisface $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$.

Supongamos ahora que tenemos en $E$ dos rectas distintas $r,s$ y sean $u,v\in E$ tales que $\langle u\rangle$ es la dirección de $r$ y $\langle v\rangle$ es la dirección de $s$. Definimos los ángulos que forman las rectas $r$ y $s$ como los ángulos $\angle(u,v)$ $(=\angle(-u,-v))$ y $\angle(u,-v)$ $(=\angle(-u,v))$.

Según el ejercicio 3.13, dichos ángulos no dependen de los vectores $u$ y $v$ que nos den las direcciones de $r$ y $s$, satisfaciendo

$$\angle(u,v)+\angle(u,-v)=\pi\,,$$

por lo que basta conocer uno de ellos para conocer el otro. Además, dado $e_0\in E$, si consideramos las rectas trasladadas, $r'=e_0+r$ y $s'=e_0+s$, entonces $r'$ y $r$ tienen la misma dirección, y $s'$ y $s$ tienen la misma dirección, por lo que los ángulos que forman las rectas $r'$ y $s'$ son iguales a los ángulos que forman las rectas $r$ y $s$.

**Ejemplo 3.15** En un espacio euclídeo $E$ de dimensión 3, sea $ABCD$ un tetraedro tal que las aristas $AB$, $AC$ y $AD$ tienen longitudes 1, 2 y 1, respectivamente, y forman ángulos

$$\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}\,,\qquad \widehat{BAD}=\frac{\pi}{4}\,,\qquad \widehat{CAD}=\frac{\pi}{3}\,.$$

Calculemos:
(a) el ángulo que forma la arista $BC$ con la perpendicular a la cara $ABD$ en el punto $B$;
(b) la distancia de $A$ al baricentro de la cara opuesta;
(c) la distancia de $C$ a su cara opuesta;
(d) la longitud de la proyección ortogonal de la arista $BC$ sobre la arista $BD$;
(e) la distancia de la recta $AB$ a la recta $CD$.

Según 3.4 (iv) y lo dicho en 3.14, para calcular lo que nos piden podemos suponer que el punto $A$ coincide con el origen de $E$, ya que si no fuera así, trasladando el tetraedro $ABCD$ por el vector $-A$ obtenemos otro tetraedro $A'B'C'D'$ con las mismas propiedades que el de partida y tal que $A'$ es el origen de $E$.

Sea entonces $A=0$ y consideremos los vectores $e_1=B$, $e_2=C$ y $e_3=D$. Que $ABCD$ sea un tetraedro significa que los vectores $e_1,e_2,e_3$ no se encuentran en un mismo plano, por lo que $\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base de $E$; además, según las hipótesis iniciales la matriz del producto escalar en dicha base es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} & 4 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Si $u$ es un vector perpendicular al plano $ABD$, entonces el ángulo que nos piden es el determinado por los vectores $u$ y $C - B = e_2 - e_1$. Calculemos $u$: $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ y $u \in \langle e_1, e_3 \rangle^\perp$, por lo tanto

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \cdot u = (1,0,0)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ e_3 \cdot u = (0,0,1)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{ecuaciones implícitas de} \\ \langle e_1, e_3 \rangle^\perp \text{ en la base } \{e_1, e_2, e_3\} \end{array} ;$$

si, por ejemplo, tomamos $u = -\sqrt{2}e_1 + e_2$, entonces

$$\theta = \arccos \frac{u \cdot (e_2 - e_1)}{|u||e_2 - e_1|} ,$$

donde

$$\begin{aligned} u \cdot (e_2 - e_1) &= (-\sqrt{2}, 1, 0)\, M\, (-1, 1, 0)^t = 2 , \\ |u| &= \left[(-\sqrt{2}, 1, 0)\, M\, (-\sqrt{2}, 1, 0)^t\right]^{1/2} = \sqrt{2} , \\ |e_2 - e_1| &= \left[(-1, 1, 0)\, M\, (-1, 1, 0)^t\right]^{1/2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

(b) El baricentro de la cara $BCD$ es el punto $P = 1/3(B + C + D)$, por lo tanto $\mathrm{d}(A, P) = |P - A| = |P| = 1/3|e_1 + e_2 + e_3|$, donde

$$|e_1 + e_2 + e_3| = \left[(1,1,1)\, M\, (1,1,1)^t\right]^{1/2} = \sqrt{8 + 3\sqrt{2}} .$$

(c) Nos piden calcular la distancia del punto $C$ al hiperplano $\langle e_1, e_3 \rangle$. Es claro que la ecuación implícita de dicho hiperplano en la base en la que estamos trabajando es $y = 0$, es decir, si $\omega$ es la forma lineal sobre $E$ definida por la igualdad

$$\omega(xe_1 + ye_2 + ze_3) = y ,$$

entonces la ecuación implícita del hiperplano $\langle e_1, e_3 \rangle$ es $\omega(e) = 0$; por lo tanto tenemos

$$\mathrm{d}(C, \langle e_1, e_3 \rangle) = \frac{|\omega(C) - 0|}{|\omega|} = \frac{1}{|\omega|} ,$$

es decir, debemos calcular $|\omega|$ (véase 1.6).

Por definición, $|\omega| = |\phi^{-1}(\omega)|$ donde $\phi^{-1}(\omega)$ es el único vector de $E$ tal que $\omega$ es la forma lineal "multiplicar escalarmente por $\phi^{-1}(\omega)$"; en particular, $\phi^{-1}(\omega) \in \langle e_1, e_3 \rangle^\perp$ (porque

$\omega(e_1) = \omega(e_3) = 0$), y por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\phi^{-1}(\omega) = \lambda u$, siendo $u$ el vector calculado en el apartado (a). Ahora, para todo $e = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ se satisfacen

$$\begin{aligned} &\phi^{-1}(\omega) \cdot e = (\lambda u) \cdot e = (-\lambda\sqrt{2}, \lambda, 0)\, M\, (x, y, z)^t = 2\lambda y\,, \\ &\phi^{-1}(\omega) \cdot e = \omega(e) = y\,; \end{aligned}$$

por lo tanto será $\lambda = 1/2$, $\phi^{-1}(\omega) = (-\sqrt{2}/2)e_1 + (1/2)e_2$ y

$$|\omega| = |\phi^{-1}(\omega)| = \Big[(-\sqrt{2}/2, 1/2, 0)\, M\, (-\sqrt{2}/2, 1/2, 0)^t\Big]^{1/2}.$$

Otro modo de calcular $\phi^{-1}(\omega)$ es el siguiente: si $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ es la base dual de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, entonces la matriz del isomorfismo $\phi : E \to E^*$ en las anteriores bases es $M$ (véase 1.3); por lo tanto, dado que $\omega = \omega_2$, tenemos que las coordenadas de $\phi^{-1}(\omega)$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ son $M^{-1}(0, 1, 0)^t$.

También podríamos haber calculado directamente $|\omega|$ teniendo en cuenta que la matriz en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ del producto escalar inducido en $E^*$ es $M^{-1}$:

$$|\omega| = |\omega_2| = \Big[(0, 1, 0)\, M^{-1}\, (0, 1, 0)^t\Big]^{1/2}.$$

En todo lo anterior hemos usado que $\langle e_1, e_3\rangle$ es un hiperplano de $E$. Calculemos ahora $\mathrm{d}(C, \langle e_1, e_3\rangle)$ como se haría para una subvariedad afín arbitraria: $\mathrm{d}(C, \langle e_1, e_3\rangle) = \mathrm{d}(C, Q)$ donde $Q = \langle e_1, e_3\rangle \cap (C + \langle e_1, e_3\rangle^\perp)$ es el pie de la perpendicular a $\langle e_1, e_3\rangle$ trazada desde $C$; por una parte existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $Q = \alpha e_1 + \beta e_3$, y por otra parte $Q - e_2 \in \langle e_1, e_3\rangle^\perp$; por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} (\alpha e_1 + \beta e_3 - e_2) \cdot e_1 = 0 \\ (\alpha e_1 + \beta e_3 - e_2) \cdot e_3 = 0 \end{aligned}\right\},$$

que es un sencillo sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

(d) La proyección ortogonal de la arista $BC$ sobre la arista $BD$ es igual a la proyección ortogonal del vector $C - B = e_2 - e_1$ sobre el vector $D - B = e_3 - e_1$, que es

$$v = \frac{(e_2 - e_1) \cdot (e_3 - e_1)}{|e_3 - e_1|^2}\,(e_3 - e_1)\,,$$

y la longitud de dicha proyección es

$$|v| = \frac{|(e_2 - e_1) \cdot (e_3 - e_1)|}{|e_3 - e_1|^2}\,|e_3 - e_1| = \frac{|(e_2 - e_1) \cdot (e_3 - e_1)|}{|e_3 - e_1|}\,.$$

(e) La recta $AB$ es $r_1 = \langle e_1\rangle$ y la recta $CD$ es $r_2 = e_2 + \langle e_3 - e_2\rangle$, por lo tanto la distancia entre $r_1$ y $r_2$ es igual a $\mathrm{d}(0, \pi)$, donde $\pi = e_2 + \langle e_3 - e_2, e_1\rangle$ (véase 3.11). Se trata entonces de calcular la distancia de un punto a un hiperplano, para lo cual podemos proceder, igual que en el apartado (c), de varias formas.

# 4 Espacio Euclídeo Orientado

**4.1** Sea $E$ un espacio euclídeo de dimensión $n$ y sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dos bases ortonormales de $E$. Si $A = (a_{ij})$ es la matriz de cambio de la base $B'$ a la base $B$, entonces la matriz $C = (c_{ij}) = A^t A$ es igual a la matriz unidad $I_n$, es decir, $A^{-1} = A^t$. En efecto: por una parte, por ser $B$ ortonormal, tenemos

$$c_{ij} = (a_{1i}, \dots, a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = e'_i \cdot e'_j \,,$$

y por otra parte, al ser $B'$ ortonormal, obtenemos $c_{ij} = e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij}$.

Como consecuencia de lo anterior se sigue que la matriz de cambio de una base ortonormal a otra base ortonormal tiene determinante igual a $\pm 1$:

$$|A|^2 = |A||A| = |A^t||A| = |A^t A| = |I_n| = 1 \,.$$

Supongamos ahora que $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es la base dual de la base $B$ y sea $\Omega_n = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ la única forma de volumen sobre $E$ que da volumen con signo igual a 1 al paralelepípedo determinado por $B$ (véanse VI.2.1 y VI.2.4). Dados vectores $v_1, \dots, v_n \in E$, si $A$ es la matriz de coordenadas de dichos vectores en la base $B$ se satisface

$$\Omega_n(v_1, \dots, v_n) = |A| \, \Omega_n(e_1, \dots, e_n) = |A| \,;$$

en particular, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de $E$ entonces $A$ es la matriz de cambio de $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $B$ y por lo tanto $\Omega_n(v_1, \dots, v_n) = \pm 1$.

Resumiendo, en el espacio euclídeo $E$ hay dos únicas formas de volumen que toman valor $\pm 1$ sobre las bases ortonormales. Es claro que si $\Omega_n$ es una de dichas formas de volumen, entonces la otra es $-\Omega_n$.

**Definición 4.2** Un *espacio euclídeo orientado* es un par $(E, \Omega_n)$, donde $E$ es un espacio euclídeo de dimensión $n$ y $\Omega_n$ es una de las dos formas de volumen sobre $E$ que sobre las bases ortonormales toman valor $\pm 1$ (véase VI.2.7).

Sea $(E, \Omega_n)$ un espacio euclídeo orientado. Dada una familia $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $n$ vectores de $E$, llamaremos *volumen* del paralelepípedo determinado por dicha familia, al volumen que $\Omega_n$ da a dicha familia (véase de nuevo VI.2.1):

$$\begin{matrix} \text{volumen del paralelepípedo deter-} \\ \text{minado por los vectores } \{v_1, \dots, v_n\} \end{matrix} \; := \; \Big| \Omega_n(v_1, \dots, v_n) \Big| \,.$$

**Ejercicio 4.3** Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ (ortonormal ó no), compruébese que se satisface la igualdad

$$\Omega_n(e^1, \dots, e^n) = \frac{1}{\Omega_n(e_1, \dots, e_n)} \,,$$

donde $\{e^1, \dots, e^n\}$ es la base dual de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ (véase 2.15).

**4.4** Sea $(E, \Omega_3)$ un espacio euclídeo orientado de dimensión 3. Dados vectores $u, v \in E$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Omega_3(u, v, \cdot\,) : E & \to & \mathbb{R} \\ e & \mapsto & \Omega_3(u, v, e) \end{array}$$

es una forma lineal, de modo que existe un único vector en $E$, que denotaremos $u \times v$, tal que dicha forma lineal es "multiplicar escalarmente por $u \times v$": para todo $e \in E$,

$$\Omega_3(u, v, e) = (u \times v) \cdot e\,.$$

**Definición 4.5** Con la notación de 4.4, el vector $u \times v$ determinado unívocamente por el par ordenado $(u, v)$ se denomina *producto vectorial* de $u$ por $v$. De la definición se sigue que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u \times v \end{array}$$

es bilineal, ya que $\Omega_3$ es un tensor.

**Proposición 4.6** *Sea $(E, \Omega_3)$ un espacio euclídeo orientado de dimensión 3. Dados vectores $u, v \in E$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $u \times v = -(v \times u)$ *;*

(ii) $u \times v \neq 0 \iff \{u, v\}$ *es libre;*

(iii) *si $\{u, v\}$ es libre, entonces $u \times v$ es el único vector ortogonal al plano $\langle u, v \rangle$, cuyo módulo es igual al área que en dicho plano determinan $u$ y $v$, y tal que $\{u, v, u \times v\}$ es una base directa (véase* VI.2.7*);*

(iv) *sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $E$ y sea $\{e^1, e^2, e^3\}$ su base dual; si $u = a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3$ y $v = b_1 e^1 + b_2 e^2 + b_3 e^3$, entonces*

$$u \times v = \frac{1}{\Omega_3(e_1, e_2, e_3)} \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3 \right) ;$$

*abusando de la notación suele escribirse*

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} ,$$

*con lo que nos queda la igualdad*

$$u \times v = \frac{1}{\Omega_3(e_1, e_2, e_3)} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

*Demostración.* Las propiedades (i) y (ii) se siguen de la definición, ya que $\Omega_3$ es un tensor hemisimétrico.

(iii) Supongamos que los vectores $u$ y $v$ son linealmente independientes. Consideremos el subespacio $V = \langle u, v \rangle$ y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de $E$ tal que $\{e_1, e_2\}$ es base de

$V$, con lo que $V^{\perp} = \langle e_3 \rangle$. El tensor hemisimétrico $\Omega_2 := \Omega_3(\,\cdot\,,\,\cdot\,, e_3)$ sobre $V$ es tal que $\Omega_2$ y $-\,\Omega_2$ son las dos formas de volumen sobre $V$ que sobre las bases ortonormales toman valor $\pm 1$ (véase 4.1). El vector $u \times v$ es ortogonal a $V$ :

$$(u \times v) \cdot u = \Omega_3(u, v, u) = 0\,, \qquad (u \times v) \cdot v = \Omega_3(u, v, v) = 0\,.$$

La base $\{u, v, u \times v\}$ es directa:

$$\Omega_3(u, v, u \times v) = (u \times v) \cdot (u \times v) = |u \times v|^2 > 0\,.$$

Calculemos el módulo del vector $u \times v$: Como $u \times v \in V^{\perp} = \langle e_3 \rangle$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u \times v = \lambda e_3$ y por lo tanto

$$|u \times v| = |\lambda| = |\lambda(e_3 \cdot e_3)| = |(u \times v) \cdot e_3| = |\Omega_3(u, v, e_3)| = |\Omega_2(u, v)|\,,$$

donde $|\Omega_2(u, v)|$ es el área del paralelogramo que $\{u, v\}$ determina en $V$.

(iv) Supongamos que $u \times v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ y veamos qué vale, por ejemplo, $x_1$ : si $A$ es la matriz de coordenadas de la familia de vectores $\{u, v, e^1\}$ en la base $\{e^1, e^2, e^3\}$, entonces

$$x_1 = (u \times v) \cdot e^1 = \Omega_3(u, v, e^1) = |A|\, \Omega_3(e^1, e^2, e^3)\,;$$

teniendo en cuenta el ejercicio 4.3 y la igualdad

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\,,$$

obtenemos

$$x_1 = \frac{1}{\Omega_3(e_1, e_2, e_3)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\,.$$

Del mismo modo se calculan $x_2$ y $x_3$. ∎

**Corolario 4.7** *Sea $(E, \Omega_3)$ un espacio euclídeo orientado y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de $E$. Dados vectores $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ se satisface:*

$$u \times v = + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{si la base } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ es directa}\,,$$

$$u \times v = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{si la base } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ es inversa}\,.$$

*Demostración.* Si la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal, entonces $\Omega_3(e_1, e_2, e_3) = 1$ si la base es directa y $\Omega_3(e_1, e_2, e_3) = -1$ si la base es inversa; para concluir basta tener en cuenta que $\{e_1, e_2, e_3\}$ coincide con su base dual (véase 2.15). ∎

**Definición 4.8** Sea $(E, \Omega_3)$ un espacio euclídeo orientado. Dados vectores $u, v, e \in E$, se llama el *producto mixto* de $u$, $v$ y $e$ (por ese orden) como el escalar $[u, v, e]$ definido por la igualdad

$$[u, v, e] := (u \times v) \cdot e = \Omega_3(u, v, e)\,.$$

Es decir, $[u, v, e]$ es el volumen con signo que la forma $\Omega_3$ da al paralelepípedo determinado por $\{u, v, e\}$.

**4.9** Con la notación de 4.8, si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de $E$ y si

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\,, \qquad v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3\,, \qquad e = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3\,,$$

entonces

$$[u, v, e] = \Omega_3(u, v, e) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Omega_3(e_1, e_2, e_3) = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\,,$$

donde el signo depende de que la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sea directa o inversa.

Las propiedades del producto mixto se siguen de las propiedades de los tensores hemisimétricos; por ejemplo:

$$[u, v, e + e'] = \Omega_3(u, v, e + e') = \Omega_3(u, v, e) + \Omega_3(u, v, e') = [u, v, e] + [u, v, e']\,,$$

$$[u, v, e] = \Omega_3(u, v, e) = -\Omega_3(u, e, v) = -[u, e, v]\,.$$

**Ejercicio 4.10** Sea $(E, \Omega_3)$ un espacio euclídeo orientado. Pruébese que cualesquiera que sean los vectores $e, u, v, \bar{u}, \bar{v} \in E$ se satisfacen:

(a) $(u \times v) \times e = (u \cdot e)v - (v \cdot e)u$;

(b) identidad de Jacobi: $(u \times v) \times e + (v \times e) \times u + (e \times u) \times v = 0$;

(c) identidad de Lagrange:

$$(u \times v) \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \begin{vmatrix} u \cdot \bar{u} & v \cdot \bar{u} \\ u \cdot \bar{v} & v \cdot \bar{v} \end{vmatrix}\,;$$

(d) $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$; como consecuencia, si $u$ y $v$ son no nulos entonces

$$|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen} \angle(u, v)\,.$$

[Indicación: Para probar (a) y (c) téngase en cuenta el siguiente hecho: si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de $E$ entonces

$$e_1 \times e_2 = e_3\,, \qquad e_2 \times e_3 = e_1\,, \qquad e_3 \times e_1 = e_2$$

si la base es directa, y

$$e_1 \times e_2 = -e_3\,, \qquad e_2 \times e_3 = -e_1\,, \qquad e_3 \times e_1 = -e_2$$

si la base es inversa.]

# 5 Problemas

En todos los siguientes enunciados $E$ denotará un espacio euclídeo.

**5.1** Supóngase que $E$ tiene dimensión 2.

(a) Dados dos puntos distintos $A$ y $B$ de $E$, pruébese que el lugar geométrico de los puntos $P \in E$ que satisfacen $\mathrm{d}(P,A) = \mathrm{d}(P,B)$ es una recta; dicha recta se denomina *mediatriz* del segmento $AB$.

(b) Pruébese que las mediatrices de los tres lados de un triángulo de $E$ se cortan en un punto, llamado *circuncentro* del triángulo.

(c) Dado un punto $C \in E$ y dado un número real positivo $\alpha$, se define la *circunferencia de centro* $C$ *y radio* $\alpha$, como el lugar geométrico de los puntos de $E$ cuya distancia a $C$ es igual a $\alpha$. Dado un triángulo en $E$, pruébese que existe una única circunferencia que pasa por los vértices de dicho triángulo; dicha circunferencia se denomina *circunscrita al triángulo* dado y tiene su centro en el circuncentro del triángulo.

(d) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia en $E$ de centro $P$. Se denomina *diámetro* de $\mathcal{C}$ a toda recta que pase por el punto $P$. Dado un punto $Q \in \mathcal{C}$ y dada una recta $r$ que pasa por $Q$, pruébese: $Q = r \cap \mathcal{C} \iff r$ es perpendicular al diámetro de $\mathcal{C}$ determinado por $Q$.

Se deduce que existe una única recta que pasa por $Q$ sin cortar a $\mathcal{C}$ en otro punto; dicha recta se denomina *tangente* a $\mathcal{C}$ en $Q$

(e) Sean $r$ y $r'$ dos rectas distintas de $E$. Se llaman *bisectrices* de $r$ y $r'$ al lugar geométrico de los puntos $P \in E$ que satisfacen $\mathrm{d}(P,r) = \mathrm{d}(P,r')$. Pruébese que si $r$ y $r'$ se cortan en un punto $Q$, entonces las bisectrices de $r$ y $r'$ son dos rectas distintas que se cortan perpendicularmente en $Q$. Pruébese también que si $r$ y $r'$ son paralelas, entonces las bisectrices de $r$ y $r'$ son una sóla recta $r''$ que es paralela a las rectas dadas y satisface $\mathrm{d}(r,r'') = \mathrm{d}(r',r'')$.

(f) Dados vectores $u, v \in E$, se define la *semirecta con vértice en* $u$ *y dirección* $v$, como el conjunto $s(u,v) = \{u + \lambda v \, : \, \lambda \geq 0\}$.

Considérese un punto $P \in E$ y una base $\{e_1, e_2\}$ de $E$, con lo que tenemos las semirectas distintas $s(P,e_1)$ y $s(P,e_2)$, ambas con vértice en $P$. Definimos, igual que antes, la bisectriz de dichas semirectas, como el lugar geométrico de los puntos que distan igual de ambas semirectas. Pruébese que la bisectriz de las semirectas $s(P,e_1)$ y $s(P,e_2)$ es una recta que tiene la siguiente propiedad: si $u$ es un vector no nulo de $E$ que tiene la dirección de la bisectriz, entonces $\angle(e_1,u) = \angle(e_2,u)$.

(g) Según el apartado (f) deben quedar claras las nociones de “bisectriz interior” y “bisectriz exterior” en un vértice de un triángulo. Dado un triángulo en $E$, pruébese que las tres bisectrices interiores del triángulo se cortan en un punto, el cual se denomina *incentro* del triángulo. Pruébese también que existe una circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo y que tiene su centro en el incentro; dicha circunferencia se denomina *inscrita al triángulo* dado.

**5.2** En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ (con su producto escalar usual), sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base $e_1 = (1,-1,0,1)$, $e_2 = (1,0,0,1)$, $e_3 = (0,1,1,0)$, $e_4 = (0,-1,0,1)$, y sea $\pi_1$ el plano de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones implícitas en dicha base son

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} .$$

Calcúlense las ecuaciones del plano $\pi_2$ que es perpendicular a $\pi_1$ y que pasa por el punto $P = (3, 0, -1, 0)$, y hállese $\pi_1 \cap \pi_2$.

**5.3** Dada la base $B = \{e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (0, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, supongamos definido un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ tal que su matriz en $B$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcúlese una base ortonormal.
(b) Calcúlese la matriz del producto escalar en la base usual de $\mathbb{R}^3$.
(c) Dado el subespacio $V$ de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la base usual es $z = 0$, calcúlense las ecuaciones de $V^\perp$ en la base $B$.

**5.4** Considérese sobre $\mathbb{R}_2[x]$ el producto escalar

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R} \\ (p(x), q(x)) & \mapsto & p(x) \cdot q(x) := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)\,. \end{array}$$

(a) Calcúlese la matriz del producto escalar en la base $B = \{1, x, x^2\}$.
(b) Hállense los módulos de los vectores de la base $B$, así como los ángulos que forman dichos vectores entre sí.
(c) Calcúlese la distancia de $p_0(x) = x^2 - 2$ al plano que en la base $B$ tiene por ecuación $a - 2b + c = -1$.
(d) Hállese la distancia entre la subvariedad $X = 1 + \langle -x^2 + 2x\rangle$ y la subvariedad $Y = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, p'(1) = 2,\ p'(-1) = 0\}$.
(e) Calcúlese la distancia de cada polinomio $p(x)$ al subespacio generado por su primera y segunda derivada.
(f) Hállese una base ortonormal.

**5.5** En un plano euclídeo se da una base con las condiciones siguientes: $|e_1| = 1$, $|e_2| = 2$ y $\angle(e_1, e_2) = \pi/3$. Calcúlense:
(a) las ecuaciones de las bisectrices de las rectas cuyas ecuaciones implícitas en la base dada son

$$r_1 \equiv 3x + 2y = 0\,, \qquad r_2 \equiv x - y = 0\,;$$

(b) la circunferencia de centro $P = e_1 - 2e_2$ y radio 1.

**5.6** Supóngase que $E$ tiene dimensión 3 y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base suya tal que

$$|e_1| = 1\,, \quad |e_2| = 2\,, \quad |e_3| = \sqrt{2}\,, \quad \angle(e_1, e_2) = \pi/2\,, \quad \angle(e_1, e_3) = \pi/3\,, \quad \angle(e_2, e_3) = \pi/4\,.$$

Calcúlese la distancia del origen al plano determinado por los vectores $e_1$, $e_2$ y $e_3$.

**5.7** Sean $e_1, \ldots, e_r$ vectores de $E$ y sea $A = (a_{ij}) \in M_r(\mathbb{R})$ la matriz definida por las igualdades $a_{ij} = e_i \cdot e_j$ $(i, j = 1, \ldots, r)$. Se denomina *determinante de Gram de la familia de vectores* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ al escalar

$$G(e_1, \ldots, e_r) := |A| \,.$$

(a) Pruébese que se satisface $G(e_1, \ldots, e_r) \geq 0$; además, $G(e_1, \ldots, e_r) = 0$ si y sólo si la familia $\{e_1, \ldots, e_r\}$ no es libre.

(b) Supóngase que la familia $\{e_1, \ldots, e_r\}$ es libre y sea $F$ el subespacio vectorial que genera. Pruébese que cualquiera que sea el punto $P \in E$ se satisface:

$$\mathrm{d}(P, F) = \sqrt{\frac{G(P, e_1, \ldots, e_r)}{G(e_1, \ldots, e_r)}} \,.$$

**5.8** Sea $ABCD$ un tetraedro *regular* en $E$ (es decir, sus seis aristas tienen la misma longitud). Pruébese que la suma de las distancias de un punto interior a las cuatro caras del tetraedro es una cantidad constante independiente del punto considerado. (Un punto $P \in E$ se dice que es *interior al tetraedro* $ABCD$, si existen escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ tales que $P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ y $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.)

**5.9** En una base ortonormal de un espacio euclídeo de dimensión 3, la recta $r$ y el plano $\pi$ tienen las siguientes ecuaciones

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array}\right\} , \qquad \pi \equiv 4x + y + z = 9 \,.$$

Calcúlense las ecuaciones de la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$.

**5.10** En una base ortonormal de un espacio euclídeo de dimensión 4, las ecuaciones de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ son

$$\pi_1 \equiv \left.\begin{array}{r} y - z - t = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} , \qquad \pi_2 \equiv \left.\begin{array}{r} x + y - z - t = 1 \\ 2x + y - 2z - 3t = 0 \end{array}\right\} .$$

(a) Estúdiese la posición relativa de $\pi_1$ y $\pi_2$.

(b) Hállense las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(4, 1, 2, 0)$ y corta perpendicularmente al plano $\pi_1$.

**5.11** Sean $a$ y $b$ las orillas paralelas de un río, $v$ una dirección (es decir, $v$ un vector no nulo), y $M, N$ dos pueblos separados por el río. ¿Entre qué puntos $X$ e $Y$ de las orillas $a$ y $b$ se debe construir un puente paralelo a la dirección $v$ para que el camino $MXYN$ tenga longitud mínima?

**5.12** En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ considérese la aplicación

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & (x_1, y_1) * (x_2, y_2) := x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 y_1 y_2 \,. \end{array}$$

(a) Pruébese que "$*$" es un producto escalar.

(b) Calcúlese, en la base usual, la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio 1.

(c) Hállese la distancia del punto $(0,-1)$ a la recta de ecuación $y=1$.

(d) Obténgase una base ortonormal.

**5.13** Hállense los valores $a,b\in\mathbb{R}$ que hacen mínimo el escalar

$$\int_0^1 (bx^2+a-x)^2\,\mathrm{d}x\,.$$

**5.14** Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $F$ y considérese una métrica simétrica $T_2$ sobre $F$. Si $A=(a_{ij})$ es la matriz de $T_2$ en la base fijada (que será una matriz simétrica), pruébese: $T_2$ es definida positiva $\iff$ todos los menores principales de la matriz $A$ son positivos[1].

**5.15** Considérese sobre $\mathbb{R}^3$ la métrica $T_2$ cuya matriz en la base usual es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(a) Pruébese que $T_2$ es un producto escalar.

(b) Hállese una base ortonormal para $T_2$.

(c) Calcúlese el módulo de $(1,3,-2)$ y la distancia entre $(1,-2-2)$ y $(2,1,0)$.

(d) Con el producto escalar inducido en $(\mathbb{R}^3)^*$ por $T_2$, calcúlese el módulo de la forma lineal $\omega:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto -3x+2y$. Hállese $\langle\omega\rangle^\perp$.

(e) Sea $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ la base dual de la hallada en el apartado (b). Calcúlese la distancia entre las formas lineales $4\omega_1-\omega_2$ y $2\omega_2+3\omega_1$.

(f) Hállese el subespacio ortogonal del subespacio generado por las dos formas lineales del apartado (e).

**5.16** Sea $F$ el espacio vectorial de las matrices simétricas reales de orden dos.

(a) Hállese una base de $F$.

(b) Pruébese que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} F\times F & \to & \mathbb{R}\\ (A,B) & \mapsto & A\cdot B := \mathrm{tra}(AB)\end{array}$$

es un producto escalar y obténgase su matriz en la base hallada en el apartado (a).

---

[1] Los *menores principales* de la matriz $A$ son los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr}\end{vmatrix} \qquad (r=1,\dots,n)\,.$$

(c) Calcúlese una base ortonormal.

(d) Hállense la distancia entre las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

y el subespacio ortogonal de $\langle A, B\rangle$.

**5.17** Considérese sobre $M_2(\mathbb{R})$ el producto escalar dado por la igualdad $A \cdot B := \operatorname{tra}(A^t B)$ $(A, B \in M_2(\mathbb{R}))$.

(a) Calcúlese el ortogonal del subespacio $V$ de las matrices diagonales de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determínese la proyección ortogonal de cada matriz $X \in M_2(\mathbb{R})$ sobre $V$.

(c) Calcúlese $\mathrm{d}(J, V)$ donde $J$ es la matriz cuyos coeficientes son todos iguales a 1.

**5.18** Sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $E$, $V$ un subespacio de $E$, $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base de $V$ y $A$ la matriz de coordenadas de $v_1, \dots, v_k$ en la base $B$.

(a) Pruébese que $A^t A$ es invertible.

(b) Dado un vector $e = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, demuéstrese que las coordenadas de la proyección ortogonal de $e$ sobre $V$ son

$$A(A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(c) Aplíquese lo anterior para calcular, en $\mathbb{R}^4$ con su producto escalar usual, la proyección ortogonal de $(-1, 2, -3, -1)$ sobre $V = \langle (1, 3, -2, 0), (3, 2, 0, 0)\rangle$.

**5.19** Sea $ABC$ un triángulo en un espacio euclídeo y sea $Q$ el pié de la perpendicular al lado $BC$ trazada desde $A$. Se define la *altura* de dicho triángulo relativa al vértice $A$ como la recta que pasa por $A$ y por $Q$; también de denomina "altura" del triángulo $ABC$ relativa al vértice $A$ al número real $\mathrm{d}(A, Q)$.

Considérese ahora un triángulo $ABC$ en un plano euclídeo orientado $(E, \Omega_2)$, de modo que $\{B - A, C - A\}$ es una base de $E$. Si se define el *área* del triángulo $ABC$ como el volumen del paralelepípedo determinado por $\{B - A, C - A\}$, pruébese que dicha área es igual a $\frac{1}{2}$ (longitud de uno de los lados $\times$ altura relativa al vértice opuesto a dicho lado).

**5.20** En un espacio euclídeo orientado $(E, \Omega_3)$, defínase la "altura" de un tetraedro relativa a uno de sus vértices y pruébese la conocida fórmula: "volumen de un tetraedro $= \frac{1}{2}$ (área de la base $\times$ altura)".

**5.21** Un *triángulo rectángulo* es un triángulo de un plano euclídeo que tiene uno de sus ángulos *recto*, esto es, igual a $\pi/2$. Los dos lados de un triángulo rectángulo que determinan el ángulo recto se denominan *catetos* y el otro lado se denomina *hipotenusa*.

Pruébese que las dos mediatrices de los catetos de un triángulo rectángulo se cortan en el punto medio de la hipotenusa; en consecuencia, la circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa pasa por el vértice del ángulo recto.

**5.22** Dada una circunferencia $\mathcal{C}$ de un plano euclídeo, se denomina *cuerda* de $\mathcal{C}$ a todo segmento que tenga sus extremos sobre $\mathcal{C}$. Calcúlense:

(a) fijado un número real positivo $\alpha$, el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de $\mathcal{C}$ de longitud $\alpha$;

(b) el luger geométrico de los puntos medios de las cuerda de $\mathcal{C}$ que pasan por un punto dado.

**5.23** Dado un triángulo en $E$, pruébese que la longitud de uno de sus lados es menor estrictamente que la suma de las longitudes de los otros dos.

**5.24** Supóngase que $E$ tiene dimensión 2 y sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro $P_0$ y radio $\alpha$. Dado un punto $P$ que dista $\beta$ de $P_0$, pruébese que el mayor de los segmentos que unen $P$ con los puntos de $\mathcal{C}$ se encuentra sobre la recta que pasa por $P$ y $P_0$, y su longitud es $\alpha+\beta$, y que el menor de tales segmentos también está en dicha recta y su longitud es $|\beta-\alpha|$.

**5.25** Demuéstrese que de dos cuerdas de desigual longitud de una circunferencia, la de mayor longitud es la que dista menos del centro.

**5.26** Dado un triángulo $ABC$ de un plano euclídeo, se define su *perímetro* como la suma de las longitudes de los segmentos $AB$, $BC$ y $CA$, y se define su *semiperímetro* como un medio del perímetro. Un punto $P$ del plano se dice que es *interior al triángulo $ABC$*, si existen escalares $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tales que $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ y $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

Pruébese que la suma de las distancias de un punto interior del triángulo a sus vértices, es menor que el perímetro y mayor que el semiperímetro.

**5.27** Un triángulo de un plano euclídeo se dice que es *isósceles* si dos de sus lados tienen igual longitud, en cuyo caso, el tercer lado se denomina *base* del triángulo isósceles. Pruébese que la suma de las distancias de los puntos de la base de un triángulo isósceles a los lados es constante.

**5.28** Un triángulo de un plano euclídeo se dice que es *equilátero* si sus tres lados tienen igual longitud. Pruébese que la suma de las distancias de un punto interior de un triángulo equilátero a los lados es constante.

**5.29** En un plano euclídeo, dada una circunferencia de centro $P_0$ y radio $\alpha$ y dado un punto $P$, se dice que $P$ es un punto *interior a la circunferencia* si $\mathrm{d}(P, P_0) < \alpha$, y se dice que $P$ es un punto *exterior a la circunferencia* si $\mathrm{d}(P, P_0) > \alpha$.

Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de un plano euclídeo, pruébese que si $\mathcal{C}$ pasa por un punto exterior y otro interior a $\mathcal{C}'$, entonces las circunferencias son *secantes*, esto es, se cortan en dos puntos.

**5.30** En un plano euclídeo, dadas dos circunferencias de radio $\alpha$ y $\beta$, sea $d$ la distancia entre sus centros.
Si $\alpha < \beta$ se satisfacen:

(a) las dos circunferencias son exteriores cuando $d > \alpha+\beta$;

(b) son tangentes (su intersección es un único punto) exteriormente cuando $d = \alpha+\beta$;

(c) son secantes cuando $d < \alpha + \beta$ y $d > \beta - \alpha$ ;
(d) la de radio $\alpha$ es tangente interiormente a la otra cuando $d = \beta - \alpha$ ;
(e) la de radio $\alpha$ es interior a la otra cuando $d < \beta - \alpha$ .
Si $\alpha = \beta$ se satisfacen:
(f) las dos circunferencias son exteriores cuando $d > 2\alpha$ ;
(g) son tangentes exteriormente cuando $d = 2\alpha$ ;
(h) son secantes cuando $d < 2\alpha$ .

**5.31** En un plano euclídeo, pruébese que una recta no puede cortar a una circunferencia en más de dos puntos, y que si pasa por un punto interior, entonces la corta en dos puntos.

**5.32** En un plano euclídeo, pruébese que si un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia (la circunferencia es tangente a sus cuatro lados), entonces las sumas de sus lados opuestos son iguales. Recíprocamente, si un cuadrilátero tiene las sumas de sus lados opuestos iguales, entonces es circunscriptible a alguna circunferencia.

**5.33** En un plano euclídeo, un *rectángulo* es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos, y un *rombo* es un paralelogramo cuyos cuatro lados tienen igual longitud. Un *cuadrado* es un paralelogramo que es rectangulo y rombo.
(a) Pruébese que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
(b) Constrúyase un cuadrado cuyos lados pasen por cuatro puntos dados.

**5.34** Pruébese que en un plano euclídeo se satisfacen:
(a) los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales;
(b) los dos ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales;
(c) ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, y la suma de los cuatro ángulos de un paralelogramo es igual a $2\pi$;
(d) la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a $\pi$.

**5.35** En un plano euclídeo, dada una circunferencia y un diámetro suyo, si una cuerda de la circunferencia no pasa por el centro, entonces se satisface: el diámetro pasa por el punto medio de la cuerda $\iff$ el diámetro es perpendicular a la cuerda.

**5.36** Dado un triángulo en un plano euclídeo, pruébese que existen cuatro circunferencias que son tangentes a los tres lados del triángulo. Una de ellas es interior al triángulo (la circunferencia inscrita, que tiene su centro en el incentro), y las otras tres son exteriores al triángulo. Las últimas se dice que son *exinscritas al triángulo*, y sus centros reciben el nombre de *exincentros* del triángulo.

**5.37** En un plano euclídeo, pruébese que las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto, llamado *ortocentro* del triángulo.

**5.38** Sea $ABC$ un triángulo en un plano euclídeo, y sea $P$ un punto interior al triángulo que se encuentra sobre la bisectriz interior en el vértice $A$. Pruébese: $P$ es el incentro de $ABC$ $\iff$ $\widehat{BPC} = \pi/2 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

**5.39** Un triángulo de un plano euclídeo se dice que es *acutángulo* si sus tres ángulos son menores que $\pi/2$. Dado un triángulo acutángulo, el triángulo que forman los pies de sus altura se denomina *triángulo órtico* asociado al triángulo dado. Pruébense:

(a) Las bisectrices interiores del triángulo órtico son las alturas del triángulo dado; en particular, el incentro del triángulo órtico es igual al ortocentro del triángulo dado.

(b) Las bisectrices exteriores del triángulo órtico son los lados del triángulo dado.

(c) Los exincentros del triángulo órtico son los vértices del triángulo dado.

**5.40** Dado un triángulo en un plano euclídeo, pruébese que la circunferencia cincunscrita a él pasa por: los puntos de intersección de cada mediatriz con la bisectriz interior del ángulo opuesto, los puntos medios de los lados del triángulo formado por los exincentros, y los puntos medios de los segmentos que unen los exincentros con el incentro.

**5.41** Dado un triángulo acutángulo en un plano euclídeo, pruébese que la circunferencia cincunscrita a su triángulo órtico pasa (además de por los pies de las alturas del triángulo dado) por: los puntos medios de los lados del triángulo dado, y los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro del triángulo dado.

Dicha circunferencia recibe el nombre de *circunferencia de Feuerbach* (ó *de los nueve puntos*) asociada al triángulo acutángulo dado.

**5.42** **Endomorfismo adjunto:** Sea $E$ un espacio euclídeo de dimensión $n$ y sea $T : E \to E$ un endomorfismo. Se dice que un endomorfismo $T' : E \to E$ es *adjunto* de $T$, si cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface

$$T(e) \cdot v = e \cdot T'(v) \,.$$

(a) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $E$ y sea $A$ la matriz de $T$ en dicha base. Pruébese que si existe un endomorfismo $T'$ de $E$ que es adjunto de $T$, entonces la matriz de $T'$ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ es $A^t$. Dedúzcase de lo anterior la existencia y unicidad del endomorfismo adjunto de $T$, el cual denotaremos $T'$.

(b) Dados $f, g \in \operatorname{End}(E)$ pruébese que se satisfacen: $(f')' = f$, $(f+g)' = f' + g'$, $(f \circ g)' = g' \circ f'$, $I' = I$ ($I$ es el endomorfismo identidad de $E$), y si $f$ es un automorfismo, entonces $f'$ también es un automorfismo y $(f^{-1})' = (f')^{-1}$.

**5.43** **Endomorfismos autoadjuntos:** Con la notación de 5.42, diremos que un endomorfismo $T$ de $E$ es autoadjunto si $T = T'$, es decir, si cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface

$$T(e) \cdot v = e \cdot T(v) \,.$$

Según lo dicho en 5.42, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $E$, entonces los endomorfismos autoadjuntos de $E$ son aquellos cuya matriz en dicha base es simétrica. Pruébese que dados endomorfismos autoadjuntos $f$ y $g$ se satisfacen:

(a) $f + g$ es un endomorfismo autoadjunto;

(b) $f \circ g$ es un endomorfismo autoadjunto $\iff$ $f$ y $g$ conmutan;

(c) si $f$ es un automorfismo, entonces $f^{-1}$ también es autoadjunto.

**5.44 Diagonalización de matrices simétricas reales:** Sea $T$ un endomorfismo de un espacio euclídeo $E$ y sea $T'$ el endomorfismo adjunto de $T$. Pruébense:

(a) Si $F$ es un subespacio de $E$ que es invariante por $T$, entonces el subespacio $F^\perp$ es invariante por $T'$. Como consecuencia, si el endomorfismo $T$ es autoadjunto y $F$ es un subespacio de $E$ que es invariante por $T$, entonces $F^\perp$ también es invariante por $T$.

(b) Si el endomorfismo $T$ es autoadjunto, entonces su polinomio característico tiene todas sus raíces reales. [Indicación: Úsese la primera parte del ejercicio VII.5.19.]

(c) Si el endomorfismo $T$ es autoadjunto, entonces existe una base ortonormal de $E$ formada por vectores propios de $T$. [Indicación: Demuéstrese por inducción en $n = \dim E$. Ténganse en cuenta los apartados anteriores y el siguiente hecho: si $T$ es autoadjunto y $F$ es un subespacio invariante por $T$, entonces $T_{|_F}$ es un endomorfismo autoadjunto de $F$.]

(d) Dedúzcase del apartado anterior que toda matriz simétrica real es diagonalizable. Más aún, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces existe una matriz invertible $U \in M_n(\mathbb{R})$ que satisface: $UAU^{-1}$ es diagonal y las columnas de $U$ forman una base de $\mathbb{R}^n$ que es ortonormal para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$; en particular $U^{-1} = U^t$ (véase 4.1).

**5.45 Métricas simétricas en un espacio euclídeo:** Sea $E$ un espacio euclídeo y sea $T_2$ una métrica simétrica sobre $E$.

(a) Pruébese que existe un único endomorfismo autoadjunto $T$ de $E$ que satisface

$$T_2(e,v) = e \cdot T(v)$$

cualesquiera que sean $e, v \in E$. [Indicación: Si existe el endomorfismo $T$ y $A$ es la matriz de la métrica $T_2$ en una base ortonormal de $E$, entonces $A$ es también la matriz de $T$ en dicha base; además $A$ es simétrica.]

(b) Pruébese que existe una base ortonormal en $E$ respecto de la cual la matriz de $T_2$ es diagonal. ¿Cómo se obtiene dicha matriz diagonal? (Véase 1.3.)

(c) Si la expresión matricial de $T_2$ en cierta base de $E$ es la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

¿cuál es la condición necesaria y suficiente para que $T_2$ sea un producto escalar sobre $E$? (Véase el problema 5.14.)

**5.46 Formas cuadráticas en un espacio euclídeo:** Sea $E$ un espacio euclídeo. Diremos que una aplicación $q : E \to \mathbb{R}$ es una *forma cuadrática*, si existe una métrica simétrica $T_2$ sobre $E$ satisfaciendo $q(e) = T_2(e,e)$ $(e \in E)$, en cuyo caso se dice que $q$ es la forma cuádrática asociada a la métrica simétrica $T_2$.

Sea $T_2$ una métrica simétrica sobre $E$ y sea $q$ su forma cuadrática asociada. Dada una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ podemos identificar $E$ con $\mathbb{R}^n$ asociando a cada vector $e \in E$ sus coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en $B$, de modo que podemos considerar $q$ como una función de $n$ variables reales:

$$\begin{array}{rcl} q : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & q(x_1, \dots, x_n) := q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\,; \end{array}$$

en particular, si $A$ es la matriz de $T_2$ en la base $B$ tenemos

$$q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \tag{5.1}$$

se dice que (5.1) es la expresión en coordenadas en la base $B$ de la forma cuadrática $q$. Pruébense:

(a) Existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y existe una base ortonormal en $E$ tales que la expresión en coordenadas de la forma cuadrática $q$ respecto de dicha base es

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 .$$

(b) Existen $t, s \in \mathbb{N}$, $t + s \leq n$, y existe una base ortogonal de $E$, tales que la expresión en coordenadas de la forma cuadrática $q$ respecto de dicha base es

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_t^2 - x_{t+1}^2 + \cdots - x_{t+s}^2 .$$

(c) *Ley de inercia de Sylvester:* Supóngase que $B_1$ y $B_2$ son bases ortogonales de $E$ tales que: la expresión en coordenadas de $q$ respecto de $B_1$ es

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_t^2 - x_{t+1}^2 + \cdots - x_{t+s}^2 ,$$

y la expresión en coordenadas de $q$ respecto de $B_2$ es

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{t'}^2 - x_{t'+1}^2 + \cdots - x_{t'+s'}^2 .$$

Entonces se satisface $t = t'$ y $s = s'$.

**5.47** Sobre un espacio euclídeo de dimensión 4 considérese la forma cuadrática cuya ecuación en cierta base ortonormal es $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 5z^2 + 6t^2 + 2xz - 4yz$. Redúzcase $q$ a una forma diagonal mediante una transformación ortonormal de coordenadas.

**5.48** Dada una matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$, se dice que $A$ es *definida positiva* si todos sus menores principales son estrictamente mayores que 0, y se dice que $A$ es *semidefinida positiva* si todos sus menores principales son mayores o iguales a 0 (véase 5.14). Pruébese que si $A$ es definida positiva existe una matriz triangular $B$ tal que $A = B^t B$. Pruébese también que si $A$ es semidefinida positiva, entonces $A$ tiene una única raíz cuadrada simétrica y semidefinida positiva.