Capítulo X

Semejanzas y Movimientos en un Espacio Vectorial Euclídeo

Todos los espacios vectoriales que aparezcan en este capítulo serán espacios euclídeos, esto es, espacios vectoriales reales de dimensión finita dotados de un producto escalar.

1 Isometrías

Definición 1.1 Diremos que una aplicación lineal $T : E_1 \to E_2$ (entre espacios euclídeos) es una *isometría* si es un isomorfismo y conserva las distancias; es decir, la aplicación lineal T es una isometría si es biyectiva y si cualesquiera que sean $e, v \in E_1$ se satisface

$$\mathrm{d}(T(e), T(v)) = \mathrm{d}(e, v)\,.$$

Es claro que la composición de dos isometrías es otra isometría.

Ejercicio 1.2 Sea $T : E_1 \to E_2$ una aplicación lineal y epiyectiva. Pruébese que entonces T es una isometría si y sólo si conserva las distancias.

Lema 1.3 *Sea $T : E_1 \to E_2$ una aplicación lineal tal que $\dim E_1 = \dim E_2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *T es una isometría;*

(ii) *T conserva el producto escalar: $T(e) \cdot T(v) = e \cdot v$ cualesquiera que sean $e, v \in E_1$;*

(iii) *T lleva una base ortonormal de E_1 a una base ortonormal de E_2.*

Demostración. La equivalencia "(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" y la implicación "(ii) $\Rightarrow$ (i)" son fáciles de demostrar y se dejan como ejercicio. Para probar la implicación "(i) $\Rightarrow$ (ii)" basta tener en cuenta que, dados $e, v \in E_1$, se satisface $|e - v|^2 = |e|^2 + |v|^2 - 2(e \cdot v)$, y por lo tanto

$$e \cdot v = \frac{1}{2}\Big[|e|^2 + |v|^2 - |e - v|^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[(\mathrm{d}(0, e))^2 + (\mathrm{d}(0, v))^2 - (\mathrm{d}(e, v))^2\Big]\,. \quad \blacksquare$$

Corolario 1.4 *Dos espacios euclídeos de igual dimensión son isométricos (esto es, existe entre ellos una isometría). En particular, todo espacio euclídeo de dimensión n es isométrico a $\mathbb{R}^n$ con su producto escalar usual.*

Demostración. Se obtiene directamente de 1.3 teniendo en cuenta que en todo espacio euclídeo existen bases ortonormales. ∎

Ejemplo 1.5 Sea E un espacio euclídeo. Dado un subespacio vectorial V de E, llamaremos *simetría* respecto de V al único endomorfismo $\sigma_V : E \to E$ que es igual a la identidad sobre V y es igual a menos la identidad sobre $V^\perp$.

Sea $e \in E$. Como $E = V \oplus V^\perp$ existen vectores únicos $e_1 \in V$ y $e_2 \in V^\perp$ tales que $e = e_1 + e_2$ (obsérvese que e_1 es la proyección ortogonal de e sobre V y e_2 es la proyección ortogonal de e sobre $V^\perp$); entonces tenemos

$$\sigma_V(e) = \sigma_V(e_1) + \sigma_V(e_2) = e_1 - e_2 \,.$$

De lo anterior se sigue que si conocemos $\sigma_V(e)$, entonces podemos calcular las proyecciones ortogonales de e sobre los subespacios V y $V^\perp$:

$$e_1 = \frac{1}{2}(e + \sigma(e))\,, \qquad\qquad e_1 = \frac{1}{2}(e - \sigma(e))\,.$$

En particular, el pie de la perpendicular a V trazada desde e es igual al punto medio de e y $\sigma_V(e)$.

El endomorfismo σ_V es un automorfismo: si $\{e_1, \dots, e_r\}$ es una base de V y $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ es una base de $V^\perp$, entonces $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ es una base de E respecto de la cual la matriz de σ_V es la matriz invertible

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{r)}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \overset{n-r)}{\ddots} & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

El automorfismo σ_V es una isometría: sean $e, e' \in E$ y sean $e_1, e_1' \in V$, $e_2, e_2' \in V^\perp$ tales que $e = e_1 + e_2$ y $e' = e_1' + e_2'$; entonces

$$\begin{aligned} e \cdot e' &= (e_1 + e_2) \cdot (e_1' + e_2') = e_1 \cdot e_1' + e_2 \cdot e_2'\,, \\ \sigma_V(e) \cdot \sigma_V(e') &= (e_1 - e_2) \cdot (e_1' - e_2') = e_1 \cdot e_1' + e_2 \cdot e_2'\,. \end{aligned}$$

Es claro que la simetría σ_V es una involución, es decir, $\sigma_V^2 = I$ (= endomorfismo identidad de E). Veamos dos casos particulares.

– *Simetría respecto de un hiperplano vectorial.* Supongamos que $\dim V = n-1$ y sea u un vector unitario normal a V. Entonces $V^\perp = \langle u \rangle$ y la proyección ortogonal de un punto $x \in E$ sobre $V^\perp$ es $(u \cdot x)u$, luego

$$(u \cdot x)u = \frac{1}{2}(x - \sigma_V(x)) \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_V(x) = x - 2(u \cdot x)u\,.$$

– *Simetría respecto del origen.* Si $V = 0$, entonces $V^{\perp} = E$ y por lo tanto $\sigma_V = \sigma_0$ es igual a menos la identidad de E, es decir, $\sigma_0(e) = -e$ para todo $e \in E$.

Ejercicio 1.6 Dada una isometría $T : E \to E$, pruébese que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de T, entonces $\lambda = \pm 1$. Además, si 1 y -1 son valores propios de T, y E_1 y E_{-1} son los correspondientes subespacios propios, entonces E_1 y E_{-1} son ortogonales.

1.7 En el grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ vamos a definir la siguiente relación de equivalencia: dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \sim \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \beta = \alpha + 2k\pi\,.$$

Dicha relación de equivalencia es compatible con la suma de $\mathbb{R}$, es decir,

$$\alpha \sim \beta\,, \quad \alpha' \sim \beta' \qquad \Rightarrow \qquad (\alpha + \alpha') \sim (\beta + \beta')\,;$$

por lo tanto tenemos el grupo cociente $(\mathbb{R}/\sim, +)$, el cual denotaremos $\widetilde{[0,2)}$. Por último, recordemos que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface

$$\cos\alpha = \cos\beta\,,\ \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta \ \text{ en el grupo cociente } \widetilde{[0,2)}\,.$$

1.8 Isometrías del plano euclídeo: Sea E un plano euclídeo y sea $T : E \to E$ una isometría. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de E y $T(e_1) = ae_1 + be_2$, $T(e_2) = ce_1 + de_2$, entonces tenemos

$$1 = e_1 \cdot e_1 = T(e_1) \cdot T(e_1) = a^2 + b^2\,, \tag{1.1}$$
$$1 = e_2 \cdot e_2 = T(e_2) \cdot T(e_2) = c^2 + d^2\,, \tag{1.2}$$
$$0 = e_1 \cdot e_2 = T(e_1) \cdot T(e_2) = ac + bd\,. \tag{1.3}$$

De (1.1) se sigue que existe un úunico $\alpha \in \widetilde{[0,2)}$ tal que $a = \cos\alpha$ y $b = \operatorname{sen}\alpha$ (véase 1.7); de (1.3) obtenemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(c, d) = \lambda(b, -a)$, y de (1.2) se deduce que $\lambda = \pm 1$. En definitiva, existe un único $\alpha \in \widetilde{[0,2)}$ tal que la matriz de T en la base $\{e_1, e_2\}$ es

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix};$$

en el primer caso $|A_1| = 1$ y en el segundo caso $|A_2| = -1$. Cuando la matriz de T es como A_1 ($\Leftrightarrow \det(T) = 1 \Leftrightarrow T$ conserva orientaciones) se dice que T es un *giro*.

Veamos cómo es T cuando su matriz es A_2. El polinomio característico de A_2 es

$$(x - \cos\alpha)(x + \cos\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)\,,$$

de modo que 1 y -1 son valores propios de T, por lo que (según 1.6) existe una base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ tal que la matriz de T es ella es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que es la matriz en la base $\{u_1, u_2\}$ de la simetría respecto de la recta vectorial $\langle u_1\rangle$.

Hemos probado: "Toda isometría de un plano euclídeo, ó es un giro ó es una simetría." Además, es fácil ver que todo giro puede ponerse como producto de dos simetrías, una de ellas elegida arbitrariamente. En efecto, si T es un giro, dada una simetría cualquiera $\sigma : E \to E$ tenemos

$$\det(T\circ\sigma) = \det(T)\cdot\det(\sigma) = 1\cdot(-1) = -1\,,$$

es decir, $T\circ\sigma$ es una simetría; basta tener en cuenta que toda simetría es una involución para concluir.

Ejercicio 1.9 Con la notación de 1.8 y teniendo en cuenta las propiedades de las funciones "sen" y "cos", pruébese: Si T_1 y T_2 son dos giros de E, entonces $T_1\circ T_2 = T_2\circ T_1$.

En 1.8 hemos visto que toda isometría de un plano euclídeo puede ponerse como producto de, a lo sumo, dos simetrías. Esto es un hecho general:

Teorema 1.10 *Sea E un espacio euclídeo de dimensión n. Si $n \geq 2$, entonces toda isometría de E es un producto de simetrías respecto de hiperplanos vectoriales, en número $\leq n$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n, habiéndose probado el caso $n = 2$ en 1.8. Sea entonces $n > 2$ y supongamos que el teorema es cierto para espacios euclídeos de dimensión $n-1$. Sea $T : E \to E$ una isometría y distingamos dos casos.

– El endomorfismo T tiene valores propios, es decir, existe un vector no nulo $e \in E$ tal que $T(e) = \pm e$ (véase 1.6). Entonces $\langle e\rangle$ es un subespacio invariante por T y como T es una isometría el subespacio $\langle e\rangle^\perp$ también es invariante por T, de modo que $T_{|_{\langle e\rangle^\perp}} : \langle e\rangle^\perp \to \langle e\rangle^\perp$ es una isometría. Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existen en $\langle e\rangle^\perp$ hiperplanos vectoriales $H_1, \dots, H_r$ $(r \leq n-1)$ tales que $T_{|_{\langle e\rangle^\perp}} = \bar\sigma_1\circ\dots\circ\bar\sigma_r$, donde $\bar\sigma_i : \langle e\rangle^\perp \to \langle e\rangle^\perp$ es la simetría respecto de H_i. Si para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, $\sigma_i : E \to E$ es la simetría respecto del hiperplano $\langle e\rangle \oplus H_i$ se satisface (compruébese)

$$\begin{aligned} T &= \sigma_1\circ\dots\circ\sigma_r & \quad &\text{si } T(e) = e\,,\\ T &= \sigma\circ\sigma_1\circ\dots\circ\sigma_r & &\text{si } T(e) = -e\,, \end{aligned}$$

donde $\sigma : E \to E$ es la simetría respecto del hiperplano vectorial $\langle e\rangle^\perp$.

– El endomorfismo T no tiene valores propios. Consideremos un vector no nulo $e \in E$ y sea $v = T(e)$. Si $\sigma : E \to E$ es la simetría respecto del hiperplano $\langle e - v\rangle^\perp$, entonces $\sigma(v) = e$ (porque los vectores $e + v$ y $e - v$ son ortogonales). Como la isometría $\sigma\circ T$ deja fijo al vector e, basta aplicar el caso anterior para concluir la demostración. ∎

Ejercicio 1.11 ¿Por qué el teorema 1.10 no es cierto para $n = 1$?

Definición 1.12 Sea $T : E \to E$ una isometría. Como el determinante de la simetría respecto de un hiperplano vectorial es igual a -1 (véase 1.5), de 1.10 se sigue que $\det(T) = \pm 1$. Diremos que la isometría T es *directa* (ó que es un *giro*) si su determinante es igual a 1, y diremos que es *inversa* (ó que es una *reflexión*) si su determinante es igual a -1.

Los giros son las isometrías que conservan la orientación, y son composición de un número par de simetrías respecto de hiperplanos vectoriales; las reflexiones son las isometrías que invierten la orientación, y son composición de un número impar de simetrías respecto de hiperplanos vectoriales.

Ejercicio 1.13 Pruébese que una isometría de un espacio euclídeo de dimensión 3 es de uno de los siguientes tipos:
(a) La identidad; todo punto del espacio es fijo.
(b) La simetría respecto de un plano vectorial; los puntos fijos son los de dicho plano.
(c) Un giro ($\neq$ identidad); tiene una recta vectorial de puntos fijos llamada *eje de giro*.
(d) Producto de un giro ($\neq$ identidad) por una simetría respecto de un plano vectorial, tales que el plano y el eje de giro son perpendiculares; el único punto fijo es el origen.

2 Semejanzas y Movimientos

Definiciones 2.1 Sea E un espacio euclídeo. Diremos que una biyección $T : E \to E$ es una *semejanza* si existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface

$$\mathrm{d}(T(e), T(v)) = \rho\, \mathrm{d}(e, v)\,,$$

en cuyo caso $\rho > 0$ y es único, y se denomina *razón* de la semejanza T. Llamaremos *movimientos* de E a las semejanzas de E de razón 1, es decir, a las biyecciones de E en E que conservan las distancias.

Diremos que una semejanza (ó un movimiento) es *lineal* si además es una aplicación lineal. Obsérvese que los movimientos lineales de E son justamente las isometrías de E.

Ejercicio 2.2 Sea E un espacio euclídeo. Pruébese que el conjunto de todas las semejanzas de E forman un grupo respecto de la composición, y que la razón define un morfismo de grupos entre dicho grupo y el grupo multiplicativo $(\mathbb{R}_+, \cdot)$; es decir, si T_1 y T_2 son semejanzas de E de razones ρ_1 y ρ_2, respectivamente, entonces $T_1 \circ T_2$ es una semejanza de razón $\rho_1\rho_2$. El núcleo de dicho morfismo de grupos son los movimientos de E; por lo tanto los movimientos de E forman un subgrupo normal del grupo de las semejanzas.

Ejemplos 2.3 Sea E un espacio euclídeo.

(a) Dado $e \in E$, la traslación $t_e : E \to E$, $v \mapsto e + v$, es un movimiento. El conjunto de todas las traslaciones es un subgrupo del grupo de las semejanzas; además, dicho subgrupo es conmutativo (compruébese).

(b) Dado $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la *homotecia de razón* λ,

$$\begin{array}{rcl} h_\lambda : E & \to & E \\ e & \mapsto & h_\lambda(e) := \lambda e\,, \end{array}$$

es una semejanza lineal de razón $|\lambda|$. Pruébese que el conjunto de todas las homotecias es un subgrupo conmutativo del grupo de las semejanzas.

(c) Dado $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y dado $e_0 \in E$, se define la *homotecia de centro* e_0 *y razón* λ como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} h_{e_0,\lambda} : E & \rightarrow & E \\ e & \mapsto & h_{e_0,\lambda}(e) := e_0 + \lambda(e - e_0)\,; \end{array}$$

es decir, la imagen de $e_0 + e$ por $h_{e_0,\lambda}$ es $e_0 + \lambda e$. La aplicación $h_{e_0,\lambda}$ es una semejanza de razón $|\lambda|$, y es lineal si y sólo si $e_0 = 0$, en cuyo caso $h_{e_0,\lambda} = h_{0,\lambda} = h_\lambda$. Las homotecias centradas en el origen (es decir, las consideradas en (b)) las llamaremos "homotecias lineales". Es fácil probar que se satisface la igualdad

$$h_{e_0,\lambda} = t_{e_0} \circ h_\lambda \circ t_{-e_0}\,.$$

(d) Sea X una subvariedad lineal de E. Se define la *simetría* respecto de X como la aplicación $\sigma_X : E \rightarrow E$ definida del siguiente modo: dado $e \in E$, si v es el pie de la perpendicular a X trazada desde e, entonces v es el punto medio de e y $\sigma_X(e)$, es decir, $\sigma_X(e) = 2v - e$ ($\Leftrightarrow$ $v = 1/2(e + \sigma_X(e))$).

Si $X = a + V$ ($a \in X$ y V es la dirección de X) y σ_V es la simetría respecto del subespacio V (véase 1.5), entonces es fácil ver que se satisface

$$\sigma_X = t_a \circ \sigma_V \circ t_{-a}\,.$$

La simetría σ_X es una involución: $\sigma_X^2 = I$ (= aplicación identidad de E en E).

Nota **2.4** Dado $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $\sigma_0 : E \rightarrow E$ es la simetría respecto del origen (véase 1.5), entonces se comprueba fácilmente la igualdad $h_\lambda = -h_{|\lambda|} = \sigma_0 \circ h_{|\lambda|}$. Por este motivo, para estudiar las semejanzas es suficiente con considerar homotecias de razón positiva.

Teorema 2.5 *Una semejanza* $\sigma : E \rightarrow E$ *es lineal si y sólo si* $\sigma(0) = 0$.

Demostración. Es claro que si σ es una aplicación lineal, entonces $\sigma(0) = 0$. Supongamos que $\sigma(0) = 0$ y probemos que σ es lineal. Empecemos demostrando que, dados $e, v \in E$, se satisface

$$\sigma(e) \cdot \sigma(v) = \rho^2 (e \cdot v)\,,$$

donde ρ es la razón de σ:

$$\begin{aligned} \sigma(e) \cdot \sigma(v) &= \frac{1}{2}\Big[|\sigma(e)|^2 + |\sigma(v)|^2 - |\sigma(e) - \sigma(v)|^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(\mathrm{d}(0, \sigma(e)))^2 + (\mathrm{d}(0, \sigma(v)))^2 - (\mathrm{d}(\sigma(e), \sigma(v)))^2\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(\rho\, \mathrm{d}(0, e))^2 + (\rho\, \mathrm{d}(0, v))^2 - (\rho\, \mathrm{d}(e, v))^2\Big] \\ &= \rho^2 \frac{1}{2}\Big[|e|^2 + |v|^2 - |e - v|^2\Big] = \rho^2 (e \cdot v)\,. \end{aligned}$$

Ahora, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, de la igualdad probada se sigue que cualquiera que sea $x \in E$ se satisface

$$\Big(\sigma(\lambda e + \mu v) - \lambda \sigma(e) - \mu \sigma(v)\Big) \cdot \sigma(x) = \rho^2 [(\lambda e + \mu v - \lambda e - \mu v) \cdot x] = 0\,,$$

y como σ es biyectiva obtenemos $\sigma(\lambda e + \mu v) - \lambda \sigma(e) - \mu \sigma(v) = 0$, es decir, σ es lineal. ∎

Lema 2.6 *Toda semejanza descompone, de modo único, como producto de una traslación y una semejanza lineal.*

Demostración. Sea $\sigma : E \to E$ una semejanza de razón ρ y consideremos el vector $a = \sigma(0)$. La aplicación $\sigma' = t_{-a} \circ \sigma$ es una semejanza de razón ρ tal que $\sigma = t_a \circ \sigma'$; además tenemos $\sigma'(0) = \sigma(0) - a = a - a = 0$, por lo que, según 2.5, σ' es lineal.

La demostración de la unicidad es sencilla y se deja como ejercicio. ∎

Lema 2.7 *Toda semejanza lineal descompone, de modo único, como producto de una homotecia lineal de razón positiva y un movimineto lineal. Además, la homotecia y el movimiento conmutan.*

Demostración. Sea $\sigma : E \to E$ una semejanza lineal de razón ρ. La aplicación $\tau = h_{\rho^{-1}} \circ \sigma$ es una semejanza lineal (porque es composición de semejanzas lineales) cuya razón es $\rho^{-1}\rho = 1$, es decir, τ es un movimiento lineal. Por definición se satisface $\sigma = h_\rho \circ \tau$, y es claro que $h_\rho \circ \tau = \tau \circ h_\rho$ (porque τ es lineal).

La unicidad de la descomposición es sencilla de probar y se deja como ejercicio. ∎

Definiciones 2.8 Sea σ una semejanza de E. Si ρ es la razón de σ y $a = \sigma(0)$, entonces de 2.6 y 2.7 se sigue que existe un único movimiento lineal τ (es decir, una única isometría τ) tal que

$$\sigma = t_a \circ h_\rho \circ \tau \,.$$

Diremos que τ es la *isometría asociada* (ó el *movimiento lineal asociado*) a σ. La semejanza lineal $\sigma' = h_\rho \circ \tau$ (la que aparece en 2.6) se denomina *semejanza lineal asociada* a σ.

Una semejanza se dice que es *directa* si su isometría asociada es directa, y se dice que es inversa si su isometría asociada es inversa. Los movimientos que son semejanzas directas se llaman *giros*, y los movimientos que son semejanzas inversas se llaman *reflexiones*. (Véase 1.12.)

Ejercicio 2.9 Sea $\sigma : E \to E$ una semejanza lineal y sea A la matriz de σ en alguna base de E. Pruébese que σ es directa si y sólo si $|A| > 0$. Como consecuencia, σ es inversa si y sólo si $|A| < 0$.

En el teorema 1.10 probamos que (cuando $\dim E \geq 2$) todo movimiento lineal de E puede ponerse como producto de cierto número de simetrías respecto de hiperplanos vectoriales. En el siguiente teorema vamos a generalizar dicho resultado.

Teorema 2.10 *Sea E un espacio euclídeo de dimensión n. Si $n \geq 2$, entonces todo movimiento de E es un producto de simetrías respecto de hiperplanos, en número $\leq n+1$.*

Demostración. Dados dos puntos distintos A y B de E, siempre existe una isometría respecto de un hiperplano que transforma uno en el otro: si X es el hiperplano que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular a la recta que pasa por A y B, entonces $\sigma_X(A) = B$ y $\sigma_X(B) = A$.

Sea $\tau : E \to E$ un movimiento y sea $a = \tau(0)$. Si $a = 0$ entonces τ es una isometría y el teorema se sigue de 1.10. Si $a \neq 0$ entonces, según lo dicho al principio de esta demostración, existe un hiperplano X tal que $\sigma_X(0) = a$, de modo que el movimiento $\sigma_X \circ \tau$ es una isometría y concluimos aplicando 1.10. ∎

Un hecho importante y que ofrece mucha información sobre la naturaleza de una semejanza es la existencia de subvariedades de puntos fijos (como puede comprobarse en 1.13). Tenemos la siguiente importante propiedad:

Teorema 2.11 *Toda semejanza $\sigma : E \to E$ que no sea un movimiento (es decir, cuya razón no sea igual a* 1*) tiene un único punto fijo c, el cual se denomina* centro de la semejanza. *Además se satisface (siendo σ' la semejanza lineal asociada a σ)*

$$\sigma = t_c \circ \sigma' \circ t_{-c} \,.$$

Demostración. Recordemos que si $a = \sigma(0)$ entonces $\sigma = t_a \circ \sigma'$, de modo que los puntos fijos de σ son las soluciones de la ecuación $a + \sigma'(x) = x$, esto es, las soluciones de la ecuación $(I - \sigma')(x) = a$. Al ser $|\sigma'(x)| = \rho|x|$ para todo $x \in E$ con $\rho \neq 1$, el escalar 1 no es valor propio de σ' y por lo tanto $I - \sigma'$ es un endomorfismo inyectivo de E; como E tiene dimensión finita, $I - \sigma'$ es un automorfismo y concluimos que la única solución de la ecuación planteada es

$$c = (I - \sigma')^{-1}(a) \,;$$

además, dado $v \in E$, $(t_c \circ \sigma' \circ t_{-c})(v) = c + \sigma'(v) - \sigma'(c) = a + \sigma'(v) = \sigma(v)$, lo que concluye la demostración. ∎

Generalicemos el teorema 2.7 para las semejanza no necesariamente lineales de razón distinta de 1.

Teorema 2.12 *Toda semejanza $\sigma : E \to E$ que no sea un movimiento descompone, de modo único, como producto de una homotecia de razón positiva y un movimiento que conmutan. Si c y ρ son, respectivamente, el centro y la razón de σ, entonces la homotecia es $h_{c,\rho}$ y el movimiento deja fijo a c.*

Demostración. Véase 2.8. Por una parte, si τ es la isometría asociada a σ entonces τ y la homotecia h_ρ conmutan (véase 2.7); por otra parte, si σ' es la semajanza lineal asociada a σ entonces $\sigma' = h_\rho \circ \tau = \tau \circ h_\rho$ (véase 2.6). Por lo tanto de 2.11 se sigue

$$\sigma = t_c \circ \tau \circ h_\rho \circ t_{-c} = t_c \circ h_\rho \circ \tau \circ t_{-c} \,,$$

y si definimos $\tau' = t_c \circ \tau \circ t_{-c}$ tenemos que τ' es un movimiento que deja fijo a c y satisface

$$\begin{aligned} \sigma &= (t_c \circ h_\rho \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ \tau \circ t_{-c}) = h_{c,\rho} \circ \tau' \,, \\ \sigma &= (t_c \circ \tau \circ t_{-c}) \circ (t_c \circ h_\rho \circ t_{-c}) = \tau' \circ h_{c,\rho} \,. \end{aligned}$$

La demostración de la unicidad se deja como ejercicio. ∎

3 Ángulos Orientados

3.1 Sea (E, Ω_2) un plano euclídeo orientado (véanse IX.4.1 y IX.4.2.). Si $\tau : E \to E$ es un giro lineal (es decir, una isometría directa) y $\{e_1, e_2\}$ es una base directa ortonormal de E, entonces vimos en 1.8 que existe un único $\theta \in \widetilde{[0,2)}$ tal que la matriz de τ en la base $\{e_1, e_2\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Sea $\{u_1, u_2\}$ otra base ortonormal de E positivamente orientada y probemos que la matriz de τ en ella es también A. Sea B la matriz de cambio de la nueva base a la base $\{e_1, e_2\}$; si $T : E \to E$ es el único endomorfismo cuya matriz en la base $\{e_1, e_2\}$ es B, entonces T es una isometría (porque $\{T(e_1), T(e_2)\} = \{u_1, u_2\}$) y por lo tanto $|B| = \pm 1$; como además ambas bases tienen la misma orientación debe ser $|B| = 1$, es decir, T es un giro. Entonces tenemos $AB = BA$ (véase 1.9), es decir, $B^{-1}AB = A$, y concluimos teniendo en cuenta que $B^{-1}AB$ es la matriz de τ en la base $\{u_1, u_2\}$.

El resultado probado justifica la siguiente definición.

Definición 3.2 Sea (E, Ω_2) un plano euclídeo orientado. Llamaremos *medida en radianes del ángulo de giro* (ó simplemente *ángulo de giro*) de un giro lineal τ de E, al único $\theta \in \widetilde{[0,2)}$ tal que la matriz de τ en cualquier base ortonormal positivamente orientada de E es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.3 ¿Cómo cambia el ángulo de giro de un giro lineal de E si se cambia la orientación de E?

3.4 Sean ahora u y $\bar{u}$ dos vectores unitarios de un plano euclídeo orientado E, y probemos que existe un único giro lineal τ de E satisfaciendo $\tau(u) = \bar{u}$. Si v es un vector unitario ortogonal a u, entonces es fácil ver que los dos únicos vectores unitarios ortogonales a u son v y $-v$; además las bases $\{u, v\}$ y $\{u, -v\}$ tienen distinta orientación. En definitiva, existe un unico vector u' tal que $\{u, u'\}$ es una base ortonormal directa de E. Análogamente, existe un único vector $\bar{u}'$ tal que $\{\bar{u}, \bar{u}'\}$ es una base ortonormal directa de E.

Si $\tau : E \to E$ es el único endomorfismo que manda la base $\{u, u'\}$ a la base $\{\bar{u}, \bar{u}'\}$, entonces τ es una isometría que conserva la orientación, es decir, τ es un giro. Si $\tau' : E \to E$ es otro giro lineal que manda u a $\bar{u}$, entonces $\{\bar{u}, \tau'(u')\}$ debe ser una base ortonormal directa y por lo tanto $\tau'(u') = \bar{u}'$.

El resultado probado justifica la siguiente definición.

Definición 3.5 Dados vectores no nulos e, v de un plano euclídeo orientado E, llamaremos *medida en radianes del ángulo orientado* (ó simplemente *ángulo orientado*) formado por los vectores e y v (en ese orden), al ángulo de giro del único giro lineal $\tau : E \to E$ que satisface $\tau(e/|e|) = v/|v|$. El ángulo orientado formado por los vectores e y v lo denotaremos $\angle^{\mathrm{or}}(e, v)$, y dados tres puntos distintos A, B, C de E, escribiremos $\widehat{ABC}^{\mathrm{or}} = \angle^{\mathrm{or}}(A - B, C - B)$.

Ejercicio 3.6 Dados vectores no nulos e, u, v de un plano euclídeo orientado E, pruébense las siguientes igualdades:
(a) $\angle^{\rm or}(e,v) = \angle(e,v)$ ó $\angle^{\rm or}(e,v) = -\angle(e,v)$ (véase IX.3.13);
(b) $\angle^{\rm or}(e,v) + \angle^{\rm or}(v,u) = \angle^{\rm or}(e,u)$;
(c) $\angle^{\rm or}(\lambda e,v) = \angle^{\rm or}(e,v)$ para todo $\lambda > 0$;
(d) $\angle^{\rm or}(-e,v) = \angle^{\rm or}(e,v) + \pi$.

Ejercicio 3.7 (a) Sea E un plano euclídeo orientado y sea Ω_2 la única forma de volumen sobre E que toma valor 1 en las bases ortonormales directas. Pruébese que cualesquiera que sean los vectores no nulos $e, v \in E$ se satisface

$$\Omega_2(e,v) = |e||v| \operatorname{sen} \angle^{\rm or}(e,v)\,.$$

[Ténganse en cuenta VI.2.4 (iii) y el siguiente hecho: si τ es el giro de ángulo $\angle^{\rm or}(e,v)$, entonces $v = |v||e|^{-1}\tau(e)$.]

(b) Supongamos ahora que el espacio auclídeo E tiene dimensión $n \geq 2$ y no consideramos sobre él ninguna orientación. Dados vectores no nulos $e, v \in E$, pruébese que se satisface

$$\Omega_2(e,v) = \pm|e||v| \operatorname{sen} \angle(e,v)\,,$$

donde ahora Ω_2 denota una de las dos formas de volumen que existen sobre un plano vectorial de E que contenga a dichos vectores, y que sobre las bases ortonormales del plano toman valor ± 1.

3.8 Sea E un espacio euclídeo (no necesariamente orientado). Según IX.3.14 y IX.3.13 las traslaciones y las homotecias conservan ángulos, y como las isometrías también conservan ángulos (porque conservan el producto escalar), de 2.8 se sigue que las semejanzas son biyecciones que conservan los ángulos: si $\sigma : E \to E$ es una semejanza y A, B, C son tres puntos distintos, entonces $\sigma(A)\widehat{\sigma(B)}\sigma(C) = \widehat{ABC}$. Veamos seguidamente que dicha propiedad caracteriza a las semejanzas.

Teorema 3.9 *Si* $\dim E \geq 2$ *y* $\sigma : E \to E$ *es una biyección que conserva los ángulos, entonces* σ *es una semejanza.*

Demostración. Convénzase el lector de que es suficiente probar lo siguiente: dado un triángulo ABC en E, si denotamos $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $C' = \sigma(C)$, y consideramos los números reales positivos ρ_1, ρ_2, ρ_3 tales que

$$\mathrm{d}(A',B') = \rho_1\, \mathrm{d}(A,B)\,, \qquad \mathrm{d}(A',C') = \rho_2\, \mathrm{d}(A,C)\,, \qquad \mathrm{d}(B',C') = \rho_3\, \mathrm{d}(B,C)\,,$$

entonces $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$.

Escribamos $u = B - A$, $v = C - A$, $u' = B' - A'$, $v' = C' - A'$, de modo que entonces $|u'| = \rho_1|u|$, $|v'| = \rho_2|u|$, $|u - v| = \rho_3|u' - v'|$, y por hipótesis se satisfacen las igualdades $\angle(u,v) = \angle(u',v')$, $\angle(u, u-v) = \angle(u', u'-v')$ y $\angle(v, u-v) = \angle(v', u'-v')$.

Si Ω_2 es una forma de volumen sobre $\langle u, v\rangle$ y Ω_2' es una forma de volumen sobre $\langle u', v'\rangle$, ambas elegidas como en 3.7 (b), entonces tenemos

$$\Omega_2'(u',v') = \pm|u'||v'| \operatorname{sen} \angle(u',v') = \pm\rho_1\rho_2|u||v| \operatorname{sen}\angle(u,v) = \pm\rho_1\rho_2\Omega_2(u,v)\,;$$

del mismo modo se obtiene la igualdad $\Omega_2'(u', u'-v') = \pm\rho_1\rho_3\Omega_2(u, u-v)$, es decir, $\Omega_2'(u', v') = \pm\rho_1\rho_3\Omega_2(u, v)$, y como cada ρ_i es positivo concluimos que $\rho_2 = \rho_3$. De la misma forma se probaría la igualdad $\rho_1 = \rho_3$, lo que concluiría la demostración. ∎

Ejercicio 3.10 ¿Por qué el teorema 3.9 no es cierto para $n = 1$?

3.11 Dos triángulos de un espacio euclídeo E se dice que son *semejantes* si existe una correspondencia entre sus vértices tal que la proporción entre la longitud de un lado y la longitud de su lado correspondiente en el otro triángulo es igual para los tres lados. Lo que realmente hemos probado en 3.9 es que si dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales, entonces son semejantes, y la parte que se ha dejado como ejercicio es: "si $\sigma : E \to E$ es una biyección tal que cada triángulo y su triángulo imagen por σ son semejantes, entonces σ es una semejanza".

Pruébese que una condición necesaria y suficiente para que dos triángulos de E sean semejantes es que exista una semejanza de E que transforma uno de ellos en el otro.

Ejercicio 3.12 Sea E un plano euclídeo orientado y sea σ una semejanza de E. Pruébese que σ es directa si y sólo si conserva los ángulos orientados, y que σ es inversa si y sólo si cada ángulo lo manda a su opuesto.

4 Problemas

De los enunciados siguientes, aquellos en los que aparezcan coordenadas supondremos que se refieren a $\mathbb{R}^2$ con su base usual y su producto escalar usual.

4.1 ¿Cómo son las semejanzas de una recta euclídea?

4.2 ¿Cómo son los movimientos sin puntos fijos de un plano euclídeo? ¿Y los movimientos sin puntos fijos de un espacio euclídeo de dimensión 3?

4.3 Dadas dos circunferencias no concéntricas en un plano euclídeo, pruébese que existen dos homotecias que transforman la primera en la segunda.

4.4 Sea T un endomorfismo de un espacio euclídeo de dimensión 3 que deja invariante la esfera unidad. Pruébese que T es una isometría. Dedúzcase que si T no tiene puntos fijos en la esfera unidad, entonces existe al memos un punto de ésta que se aplica en su antípoda.

4.5 Dado un paralelogramo en un plano euclídeo, pruébese que el paralelogramo que se obtiene al unir los puntos medios consecutivos de sus lados, y el que se obtiene al trazar por los extremos de cada diagonal las paralelas a la otra, son homotéticos. Determínese al centro de la homotecia.

4.6 Pruébese que el producto de una traslación y una homotecia es una homotecia. Determínese su centro.

4.7 ¿Qué semejanzas son producto de dos homotecias?

4.8 Se denomina *ángulo* de un giro (= movimiento directo) al ángulo de su giro lineal (= movimiento directo lineal) asociado.

Pruébese que un movimiento τ de un plano euclídeo es un giro si y sólo si tiene un único punto fijo, el cual se denomina *centro de giro*. Si τ es un giro de centro C y τ' es su giro lineal asociado, pruébese que se satisface $\tau = t_C \circ \tau' \circ t_{-C}$.

4.9 Dadas dos rectas distintas en un plano euclídeo, determínese el lugar geométrico de los centros de los giros (movimientos directos) que transforman una de las rectas en la otra.

4.10 Dos triángulos de un plano euclídeo se dicen que son *congruentes*, si existe un movimiento del plano que transforma uno de ellos en el otro. Dados dos triángulos no congruentes en un plano euclídeo tales que sus lados son paralelos, pruébese que son homotéticos.

4.11 En un plano euclídeo, dada una recta r y un punto $P \in r$, si g es un giro con centro en P y σ es la simetría respecto de r, entonces $\sigma \circ g \circ \sigma$ es el giro inverso de g.

4.12 En un espacio euclídeo, pruébense:
(a) El producto de dos simetrías respecto de puntos es una traslación.
(b) El producto de una simetría respecto de un punto y una traslación es una simetría respecto de un punto.
(c) El producto de tres simetrías respecto de puntos es una simetría respecto de un punto. Determínese su centro en función de los centros de las tres simetrías dadas.

4.13 Dados dos giros de un plano euclídeo, la condición necesaria y suficiente para que su composición sea una traslación es que sus ángulos de giro sean opuestos.

4.14 En un espacio euclídeo de dimensión 3, el producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a la dirección de la traslación, es un giro de eje paralelo al eje del giro dado.

4.15 En un plano euclídeo, el producto de tres simetrías respecto de puntos no alineados, es otra simetría centrada en un punto que forma un paralelogramo con los otros tres.

4.16 En un espacio euclídeo de dimensión tres, dadas dos circunferencias congruentes situadas en planos diferentes que se cortan, pruébese que existen dos giros que transforman una de ellas en la otra. ¿Qué ocurre si los planos son paralelos?

4.17 En un espacio euclídeo de dimensión 3, discútase el producto de dos giros según la posición relativa de sus ejes.

4.18 Calcúlese la transformada de la recta de ecuación $x + y = 1$ al realizar un giro lineal de ángulo $\pi/3$.

4.19 Considérense la recta $r \equiv x - y = 2$ y el punto $P = (-1, 1)$. Calcúlese la imagen de P por la simetría respecto de r. Calcúlese también la transformada de la recta $2x - y = 1$ por dicha simetría.

4.20 Se sabe que el simétrico del punto $P = (1,0)$ respecto de una recta r es el punto $Q = (2,-1)$. Calcúlese la recta r. ¿Existe algún giro lineal que transforme P en Q?

4.21 Sea τ un giro de un plano euclídeo que está centrado en un punto C, y sean P, Q puntos de dicho plano tales que $\tau(P) = Q$. Pruébese que C se encuentra sobre la mediatriz del segmento PQ.

4.22 Hállese la imagen del punto $(2,1)$ por el giro centrado en el punto $(1,-1)$ y de ángulo $\pi/4$.

4.23 Se sabe que τ es un giro de ángulo $\pi/6$ y que transforma el punto $(1,-2)$ en el punto $(2,4)$. Hállese el centro de τ.

4.24 Calcúlense los movimientos del plano euclídeo que dejan invariante a un triángulo isósceles dado. Demuéstrese que forman un grupo.

4.25 Calcúlense los movimientos del plano euclídeo que dejan invariante a un triángulo equilátero dado. Demuéstrese que forman un grupo.

4.26 Calcúlense los movimientos del plano euclídeo que dejan invariante a un cuadrado dado. Calcúlense los movimientos del plano euclídeo que dejan invariante a un rectángulo (no cuadrado) dado.

4.27 Un polígono de n vértices de un plano euclídeo se dice que es *regular* si todos sus lados tienen la misma longitud.

Dado un polígono regular de n vértices y dado el giro centrado en el baricentro del polígono y de ángulo $2\pi/n$, demuéstrese que el giro deja invariante al polígono.

4.28 En un plano euclídeo orientado, pruébese que la suma de los tres ángulos orientados de un triángulo es igual a π.