1

CATEGORIAS Y FUNTORES*

1. Introducción

Cuando se dice *"sea G un grupo..."*, todos comprenden de modo inmediato que se trata de un "grupo abstracto". Ciertamente, se habla a veces también de "grupo abstracto" para indicar que el grupo del que se va a tratar no posee estructura suplementaria, por oposición, por ejemplo, con la expresión "grupo topológico", pero no mantendremos aquí este uso. El adjetivo "abstracto" es un testimonio de la evolución histórica: la noción de grupo fue introducida primitivamente a través de los grupos de los desplazamientos, de las transformaciones o de las, permutaciones. Es en un estadio relativamente avanzado cuando fue propuesta una definición axiomática y las propiedades de los grupos se estudiaron independientemente de su papel geométrico o combinatorio. Igualmente, sólo después de una prolongada exploración de las propiedades de las partes de un espacio euclídeo se antepuso una definición axiomática de los espacios topológicos abstractos.

Si, desde un punto de vista arbitrario, consideramos como abstracciones de primer nivel a conceptos tales como conjunto, grupo, espacio topológico, cuerpo..., la noción de categoría es entonces una abstracción de segundo nivel ya que sus concretizaciones aparecen en teoría de conjuntos, en teoría de grupos,

---

*Artículo de HILTON aparecido en el número 50 de *Mathematics Teaching*. Fue traducido del inglés al francés por J. Cl. Matthys y publicado en NICO 9, julio 1971.

en topología, etc. De igual manera a como hemos indicado que la noción axiomática de grupo o de espacio topológico estaba presente mucho antes de que se explicitara, igualmente la noción de categoría, así como los conceptos de *funtor* y de *transformación natural* que la acompañan, se transparentaba en filigrana en la literatura matemática mucho antes de que fuera abstraída y formalizada. Además, junto a la teoría de grupos y la de topología que, hoy, son teorías de una amplitud y complejidad impresionantes, la teoría de categorías se ha desarrollado siguiendo libremente sus propias tendencias, guiadas evidentemente por las exigencias de aplicaciones a otras partes de la matemática.

No entra en mis intenciones exponer la teoría de categorías, sino más bien introducir los conceptos base, conceptos que merecen ocupar un lugar en el bagaje de todo matemático. Aquí, un paralelismo con la teoría de grupos o la topología es legítimo y esclarecedor. (Se podría establecer un paralelismo aún más claro con la teoría de conjuntos: todo hombre honesto debe estar familiarizado con el *lenguaje* de la teoría de conjuntos. Ello ha conducido, en numerosas reformas propuestas para la educación matemática, a confundir esta auténtica exigencia con la necesidad ilusoria, en este estadio precoz, de una exposición desmesurada de una voraz teoría de conjuntos.) Todo matemático debe saber lo que es un grupo y tiene necesidad, además, de los conceptos de grupo conmutativo, homomorfismo, subgrupo, subgrupo distinguido y grupo cociente así como un conocimiento de sus enlaces fundamentales. Por el contrario, las delicadas cuestiones que se refieren a la estructura de los grupos finitos por ejemplo son tema del especialista. O igualmente, todo matemático debe estar familiarizado con el concepto de espacio topológico, parte abierta y parte cerrada, aplicación continua, espacio-cociente, espacio compacto, poliedro, variedad, homotopía, pero los problemas más finos de la topología algebraica o de la diferencial no son de su incumbencia. Se puede sostener de la misma forma que las nociones presentadas aquí son indispensables al matemático bien formado.

2. Categorías

Para definir una categoría $\mathcal{C}$, son necesarios tres tipos de datos:

1.° Una clase de *objetos* A, B, C, ...
2.° A todo par de objetos (A,B) de $\mathcal{C}$ está asociado un conjunto $\mathcal{C}$(A,B) de *morfismos de A hacia B;*
3.° A toda terna de objetos (A,B,C) de $\mathcal{C}$ corresponde una *ley de composición:*

$$\mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \longrightarrow \mathcal{C}(A,C).$$

Antes de citar los axiomas que definen una categoría, damos una terminología auxiliar y algunas notaciones que permitirán ver que aquello de lo que tratamos aquí es una generalización de nociones familiares.

Si f pertenece a $\mathcal{C}$(A,B), escribiremos

$$f\colon\ A \longrightarrow B \quad \text{o bien} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

El conjunto $\mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C)$ está formado por los pares ordenados (f,g) donde

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{y} \quad B \xrightarrow{g} C.$$

La composición de f y g se escribirá f o g o, simplemente, fg, así:

$$A \xrightarrow{fg} C\,.$$

Un ejemplo (o categoría concreta) es la categoría **Conj** cuyos objetos son los conjuntos, los morfismos son las aplicaciones y la ley de composición es la composición habitual de las aplicaciones. El único punto inhabitual en nuestra descripción de la categoría **Conj** es designar la compuesta de f y g por fg mientras que el lector está acostumbrado sin duda a escribir g(f(a)) o también gf(a) para la imagen del elemento a de A por la aplicación compuesta. Es puro asunto de convención y, con ocasión de presentar un concepto nuevo, no deseamos ni proponemos arrastrar con nosotros los inconvenientes de esta desafortunada tradición que impone escribir "gf" para decir "hacer *primero* f *y después* hacer g".

Volvamos a los axiomas. El primero es, de hecho, una convención, pero los dos siguientes son más sustanciales.

A 1 Los conjuntos $\mathcal{C}(A_1,B_1)$ y $\mathcal{C}(A_2,B_2)$ son disjuntos salvo si $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.

A 2 Si $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{h} D$, entonces $f(gh) = (fg)h$.

A 3 Para cada objeto A hay un morfismo $1_A : A \longrightarrow A$ tal que, para todo $f : A \longrightarrow B$ y todo $g : C \longrightarrow A$, se tiene:

$$1_A f = f \quad \text{y} \quad g 1_A = g .$$

Se ve inmediatamente que A determina el morfismo 1_A de manera única. Omitiremos corrientemente el índice y escribiremos 1 en lugar de 1_A. Por ejemplo: $1f = f$ y $g1 = g$. Estas últimas igualdades ilustran la forma con la que utilizaremos el símbolo 1 para designar el morfismo del axioma A3.

La categoría **Conj** de los conjuntos verifica manifiestamente los axiomas A2 y A3: la composición clásica de las aplicaciones es asociativa y cada conjunto tiene una aplicación identidad. Es de esta interpretación en **Conj** de la cual el morfismo 1_A obtiene su nombre de *morfismo identidad.*

Es necesario decir unas palabras sobre la interpretación del axioma A1 en **Conj.** Por ejemplo sea la función seno. Como existe una extensión bien conocida de esta función al cuerpo complejo, es necesario precisar, cuando se habla de la función seno, si se trata de sen: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o de sen: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ porque,

con toda claridad, ambas funciones son distintas. Incluso si se restringe al cuerpo real, podemos pensar en la función seno como aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ o como aplicación de $\mathbb{R}$ en el intervalo $[-1,1]$ ya que todas las imágenes por la función seno pertenecen a este intervalo. Podría parecer pedante insistir sobre la diferencia entre estas dos funciones y sin embargo señalaremos nítidamente esta distinción. Veremos en efecto que es útil precisar claramente tanto la imagen de una aplicación como su dominio. De hecho, como *dominio* e *imagen* (respectivamente A y B) juegan papeles simétricos en el axioma A1, es natural, y es un uso que se extiende cada vez más, reemplazar el término "imagen" por el término "codominio". Notemos que la composición de f y g no está permitida más que si el codominio de f es el dominio de g.

Diremos que el morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ es *inversible* si y sólo si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ de $\mathcal{C}$ tal que:

$$fg = 1_A \quad \text{y} \quad gf = 1_B .$$

Si f es inversible, escribiremos $g = f^{-1}$ y diremos que A y B son equivalentes. Es inmediato ver que se trata de una relación de equivalencia. Hay que destacar que en la categoría **Conj** los morfismos inversibles son las biyecciones. Que "una aplicación es inversible si y solamente si es inyectiva y suprayectiva sobre su codominio" es un *teorema* en Conj.

Examinemos algunos ejemplos de categorías (o categorías concretas). En cada uno de ellos, la ley de composición no es otra que la composición usual de las aplicaciones.

1. La categoría **Conj** de los conjuntos y de las aplicaciones.
2. La categoría **Top** de los espacios topológicos y de las aplicaciones continuas.
3. La categoría **Gr** de los grupos y de los homomorfismos de grupos.
4. La categoría **Ab** de los grupos conmutativos y de los homomorfismos de grupos conmutativos.

5. La categoría $\mathbf{V}_K$ de los vectoriales sobre el cuerpo **K** y de las aplicaciones lineales.
6. La categoría $\mathbf{G}_{cont}$ de los grupos topológicos y de los homomorfismos continuos.

Es evidente que esta lista podría ser prolongada indefinidamente. También, que cada categoría lleva en sí su propia noción de morfismo inversible y de objetos equivalentes. Así, en **Top** los morfismos inversibles son los homeomorfismos; en **Gr** , **Ab** y $\mathbf{V}_K$ los isomorfismos; en $\mathbf{G}_{cont}$, los isomorfismos continuos de inversa continua. Si el enunciado "Un morfismo es inversible si y solamente si es inyectivo y suprayectivo sobre su codominio" es un *teorema* en **Gr**. no lo es en $\mathbf{G}_{cont}$. Por ello es nefasto *definir* un isomorfismo de grupos como homomorfismo inyectivo y suprayectivo sobre su codominio.

Veamos ahora dos ejemplos de naturaleza muy diferente. Permitirán ampliar la perspectiva del concepto de categoría.

Sea un grupo G. Definimos una categoría $\mathcal{C}(G)$ tomando como único objeto el grupo mismo y como morfismos las traslaciones por la derecha de los elementos de **G**. Así, a todo elemento g de **G**, asociamos la aplicación

$$R_g : G \longrightarrow G$$

definida por

$$x R_g = xg$$

para todo elemento x de G. Está claro que R_g define a g y, por consiguiente, podemos identificar los elementos de G con los morfismos de $\mathcal{C}(G)$. Los axiomas de grupo garantizan el cumplimiento de los axiomas de categorías pero añaden también una propiedad muy particular: en la categoría $\mathcal{C}(G)$, todo morfismo es inversible. Esta situación muestra cómo la noción de categoría generaliza la de grupo.

Consideremos ahora un conjunto ordenado $(S, \leqslant)$. Formamos una categoría $\mathcal{C}(S)$ en la cual los objetos son los elementos de S. Si x e y son elementos de S, $\mathcal{C}(S)(x,y)$ es vacío salvo que $x \leqslant y$ en cuyo caso está formado por el único símbolo "$x \leqslant y$". La ley de composición expresa simplemente la transitividad de la relación de orden:

$$(x \leqslant y) \circ (y \leqslant z) = (x \leqslant z)$$

y la existencia de las identidades procede de la reflexividad de la relación de orden.

El lector podría tener la impresión de que, en los dos últimos ejemplos, se juega con las palabras. ¡Nada de eso! Se puede efectuar en las categorías un gran número de construcciones-tipo que, incluso en tales situaciones, tienen un sentido. Obtenemos así partido de la unificación introducida por el concepto de categoría. Además, este verdadero doble juego, concepto general abarcando una situación particular, sugiere que no se obtendrán teoremas profundos en teoría de categorías más que particularizando nuestras categorías. Esta permanente búsqueda del equilibrio entre generalidad y profundidad constituye el arte de una teoría matemática.

Volviendo a nuestros seis ejemplos, podemos notar el hecho siguiente: en los ejemplos 3 a 6, la categoría $\mathcal{C}$ en cuestión posee un objeto 0 tal que, para todo objeto X de $\mathcal{C}$, los conjuntos $\mathcal{C}(X,0)$ y $\mathcal{C}(0,X)$ se reducen a un solo elemento.

En los ejemplos 3 y 4, todo grupo de un elemento es dicho objeto 0; en el ejemplo 5, tenemos el vectorial nulo y, en el ejemplo 6, todo grupo topológico de un elemento. Es fácil probar que, si una categoría $\mathcal{C}$ posee un objeto 0, cualquier otro candidato a ser 0 le es equivalente. Además, $\mathcal{C}(X,Y)$ posee en este caso un morfismo particular 0_{XY} que se puede factorizar de la manera siguiente:

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$$

y, para todo

$$f : W \longrightarrow X \quad \text{y todo } g : Y \longrightarrow Z$$

en $\mathcal{C}$ tenemos:

$$f\, 0_{XY} = 0_{WY} \qquad \text{y} \qquad 0_{XY}\, g = 0_{XZ}.$$

Al igual que en el caso del morfismo identidad, suprimiremos los índices y escribiremos simplemente 0 por 0_{XY}. Las igualdades precedentes explican claramente el empleo de la expresión *morfismo nulo*. El objeto 0 habitualmente se denomina *el objeto nulo*.

Volvamos al ejemplo 1 en el cual $\mathcal{C}$ = **Conj**, la categoría de los conjuntos (y, sobreentendido, de las aplicaciones; esta omisión es usual cuando se sabe sin ambigüedad cuáles son los morfismos de la categoría considerada).

En esta categoría, hay un objeto ϕ (el conjunto vacío) tal que Conj (ϕ, X) es un conjunto unitario, y un objeto $\{p\}$ (conjunto unitario) tal que Conj $(X, \{p\})$ queda reducido a un único elemento. Decimos entonces que ϕ es un *objeto inicial* de **Conj** mientras que $\{p\}$ es un *objeto terminal* de **Conj**. Un objeto nulo es un objeto que es inicial y terminal a la vez. Se establece fácilmente que si $\mathcal{C}$ posee un objeto nulo, entonces todo objeto inicial y todo objeto terminal son equivalentes a 0. Se sigue inmediatamente que **Conj** no puede tener un objeto nulo; en efecto, si fuera éste el caso, todo objeto inicial de **Conj** debería ser equivalente a todo objeto terminal mientras que, manifiestamente, ϕ no es equivalente al unitario $\{p\}$. Por la misma razón, **Top** no puede contener un objeto nulo.

El lector notará que los argumentos utilizados son de dos tipos: los argumentos puramente "categóricos" (por ejemplo "en toda categoría, todos los objetos iniciales son equivalentes") y los argumentos propios a la categoría particular considerada (por ejemplo, "ϕ no es equivalente a $\{p\}$"). Ello es característico de los razonamientos modernos; Saunders Mac LANE ha calificado de *"general abstract nonsense"* (generalidad abstracta sin interés) a la parte puramente categórica de una argumentación matemática pero no es preciso concluir de una boutade así que esta parte sea siempre trivial. Sin embargo, del hecho de la gran generalidad de los conceptos utilizados en teoría de categorías, se espera que la parte difícil del trabajo consista en la verificación de que una categoría particular, o un objeto de una categoría particular, posea una propiedad sobre la cual "las generalidades abstractas sin interés" puedan ejercerse.

3. Funtores

En una categoría dada, los conjuntos de morfismos $\mathcal{C}(X,Y)$ sirven para establecer las conexiones entre los diversos objetos de la categoría. Ahora bien, el lenguaje de categorías ha sido desarrollado para describir los diversos dominios de la matemática y una buena parte de la metodología matemática contemporánea estudia las relaciones que pueden ser establecidas de una manera natural entre estos dominios. Es pues necesario definir la noción de transformación de una categoría en otra. Se llamará funtor a toda transformación de este tipo. De manera precisa, un *funtor*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

es una regla que asocia a todo objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto XF de $\mathcal{D}$ y a todo morfismo f de $\mathcal{C}(X,Y)$ un morfismo (fF) de $\mathcal{D}$ (XF,YF), cumpliendo las condiciones:

$$(1) \qquad (fg)\,F = (fF)\,(gF)$$

$$(2) \qquad 1_X F = 1_{XF}.$$

Sin duda el lector evocará las propiedades de los homomorfismos algebraicos. De hecho, una categoría, como un grupo, posee cierta estructura y a los funtores se les impone respetar dicha estructura. En particular, el funtor identidad $1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ corresponde al automorfismo identidad de un grupo.

Antes de exponer ejemplos de funtores, hagamos algunas notas o introduzcamos un concepto importante. Ante todo, dados los funtores

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \qquad \text{y} \qquad G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

una ley de composición evidente da lugar al funtor

$$FG : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Por tanto, podemos hablar de *funtores inversibles* y de *categorías equivalentes.* Todo ello nos sugeriría introducir la "categoría de las categorías" $\mathfrak{U}$, cuyos objetos serían las categorías y por "morfismos" se admitirían los funtores. Sin embargo, quienes conocen la paradoja de Russell saben que ello sería exponerse a multitud de peligros fundamentales: la familia de los funtores de $\mathfrak{U}$ hacia $\mathfrak{U}$ no puede ser considerada, salvo riesgo de contradicción, como un conjunto. Actualmente, la noción de *pequeña categoría*, es decir categoría cuya colección de objetos es un conjunto, juega un papel importante en la literatura sobre las categorías ya que la familia de los funtores de una pequeña categoría $\mathcal{C}$ hacia otra $\mathfrak{D}$ es claramente un conjunto. Sin embargo, no basta para cubrir todas las necesidades y se han realizado numerosos trabajos para bordear estas dificultades conjuntistas. El desarrollo más apasionante hecho en este sentido quizá sea la introducción reciente por F. W. LAWVERE de la categoría de categorías como fundamento de la matemática *(Proceedings of the La Jolla Conference on Categorical Algebra;* Springer 1966).

He aquí algunos ejemplos de funtores. Dejamos al lector el cuidado de verificar que cumplen las condiciones funtoriales (1) y (2).

1. Para toda categoría $\mathcal{C}$, existe una noción evidente de subcategoría $\mathcal{C}_0$. La prolongación de $\mathcal{C}_0$ en $\mathcal{C}$ es un funtor. Por ejemplo, podemos prolongar la categoría **Ab** de los grupos conmutativos en la categoría **Gr** de grupos, o la categoría de espacios compactos en la categoría **Top** de espacios topológicos. Son ejemplos de lo que se llaman prolongamientos de *subcategoría-plena* o prolongamientos *plenos*:

   $\mathcal{C}_0$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}$ si, siendo X e Y objetos de $\mathcal{C}_0$, se tiene $\mathcal{C}_0(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$.

   Contraejemplo: la categoría de espacios compactos y de prolongamientos topológicos no es subcategoría plena de **Top**.

2. A partir de cualquier grupo G, se puede obtener un grupo conmutativo G_1 "abelianizando" G. Se puede considerar a G_1 como el grupo construido sobre G agregando las relaciones: gh = hg, para cualesquiera g y h de G, o, de manera equivalente, por paso al cociente $G_1 = G/G'$ de G por el subgrupo conmutador (o derivado) G'. Entonces, todo homomorfismo $\mathfrak{f} : G \longrightarrow H$ en **Gr** aplica G' en H' y, por tanto, provoca un homomorfismo $\mathfrak{f}_1 : G_1 \longrightarrow H_1$. Así, poniendo $G\mathrm{Ab} = G_1$ y $\mathfrak{f}\,\mathrm{Ab} = \mathfrak{f}_1$, se define un funtor

$$\mathrm{Ab} : \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{Gr}$$

   llamado *funtor de abelianización.*

3. Sea C un conjunto. Podemos construir el grupo abeliano libre A_C sobre C. Toda aplicación $f : C \longrightarrow F$ induce, de manera natural, un homomorfismo $A_f : A_C \longrightarrow A_F$ que provoca el funtor abeliano libre

$$\mathrm{Fr} : \mathbf{Conj} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

   definido por $C\mathrm{Fr} = A_C$ y $f\mathrm{Fr} = A_f$. Existen evidentemente otros funtores *libres* del mismo tipo, por ejemplo, de **Conj** hacia **Gr** o de **Conj** hacia $\mathbf{V_K}$.

4. Todo espacio topológico tiene un conjunto-base: el conjunto sobre el cual está definido. Se obtiene un *funtor de olvido*

$$\mathrm{U} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Conj}$$

   dejando de lado ("olvidando") la estructura topológica. El lector no tendrá dificultad alguna para reunir gran número de funtores de olvido. A primera vista, estos funtores podrían parecer fantasías. Nada de eso: los funtores de olvido juegan un papel primordial, no solamente en las formulaciones funtoriales, sino también en los desarrollos realmente elaborados de la teoría de categorías.

5. El conjunto de *grupo fundamental* es uno de los más conocidos y de los más importantes de la topología. Permite asociar un grupo $\pi(X,x_0)$ a todo espacio X en el cual se ha distinguido un punto x_0. Se puede considerar a π como un funtor de la categoría **Top*** de los espacios topológicos de punto distinguido y de las aplicaciones continuas que respetan los puntos distinguidos hacia la categoría de grupos.

6. Hemos mostrado que todo grupo puede ser considerado como una categoría. Desde esta perspectiva, los funtores entre estas categorías son precisamente los homomorfismos de grupos.

Antes de llegar a la última de las nociones centrales que será expuesta en este capítulo, la noción de transformación natural, llamaremos la atención sobre una técnica muy útil. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos construir una nueva categoría $\mathcal{C}^{op}$ (con "op" por "opuesta") que tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ pero tal que

$$\mathcal{C}^{op}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$$

y cuya ley de composición se deriva naturalmente de la de $\mathcal{C}$. Se dice frecuentemente que $\mathcal{C}^{op}$ se ha obtenido a partir de $\mathcal{C}$ "poniendo las flechas al revés"; en efecto:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ en } \mathcal{C}^{op} \text{ si y sólo si } f : X \longleftarrow Y \text{ en } \mathcal{C}.$$

Este uso formal nos permite definir un funtor *contravariante* $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ como funtor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$. Hay que señalar que, para un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se tiene:

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ entonces } fF \in \mathcal{D}(YF,XF),\ (fg)F = (gF)(fF).$$

Un solo ejemplo debería bastar: el concepto de espacio vectorial dual da lugar a un funtor contravariante

$$* : V_K \longrightarrow V_K .$$

4. Transformaciones naturales

La idea que abordamos puede considerarse la fuente primitiva de la teoría de categorías ya que EILENBERG y Mac LANE fueron llevados a introducir el lenguaje de categorías y funtores al intentar precisar la noción de transformación natural.

Sean F y G funtores de la categoría $\mathcal{C}$ hacia la categoría $\mathcal{D}$. Una *transformación natural* t de F hacia G es una regla que asocia a todo objeto X de $\mathcal{C}$ un morfismo

$$t_X : XF \longrightarrow XG \quad \text{de } \mathcal{D}$$

tal que, para todo morfismo $f: X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} XF \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "fF"'] & XG \arrow[d, "fG"] \\ YF \arrow[r, "t_Y"] & YG \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, es decir que

$$t_X \circ fG = fF \circ t_Y .$$

Si, para todo X, t_X es inversible, entonces t se llama *equivalencia natural.* La definición

$$(t^{-1})_X = t_X^{-1}$$

provoca en este caso una equivalencia natural de G hacia F. Si $\mathcal{C}$ es una pequeña categoría, podemos formar una categoría cuyos objetos (que forman una clase) son los funtores de $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales de estos funtores. Se dispone en efecto de una definición evidente de la composición de las transformaciones naturales y las equivalencias naturales son exactamente las transformaciones que son inversibles para esta composición.

Veamos unos ejemplos. El último de ellos es precisamente la primera situación en la cual se observa una transformación natural.

1. Sea un grupo G y su abelianizado G_1. Se sabe que existe una suprayección natural

$$t_G : G \longrightarrow G_1 = G/G'$$

y t es una transformación natural del funtor identidad sobre **Gr** hacia el funtor de abelianización sobre **Gr.**

2. Sea A un grupo abeliano y A_L el grupo abeliano libre sobre A. Se dispone visiblemente de un homomorfismo

$$t_A : A_L \longrightarrow A$$

(que deja en su lugar cada elemento de A) y t es una transformación natural del funtor UL : **Ab** $\longrightarrow$ **Ab** hacia el funtor identidad sobre **Ab.** Aquí U : **Ab** $\longrightarrow$ **Conj** es el funtor de olvido y L : **Conj** $\longrightarrow$ **Ab** es el funtor libre.

3. (Para quienes están familiarizados con la topología algebraica.) El célebre homomorfismo de HUREWICZ (ver, por ejemplo, HILTON y WYLIE, *Homology theory*, Cambridge University Press 1962, p. 349) entre grupos de homotopía y grupos de homología es una transformación natural entre funtores de $\mathbf{Top}_*$ hacia **Ab.**

4. Sea V un vectorial sobre el cuerpo K, V* y V** su dual y bidual respectivamente. Existe una aplicación lineal i_V de V en V** definida por

$$(f)((x)\, i_V) = (x)\, f$$

para todo x de V y todo f de V*. Por tanto, i es una

transformación natural del funtor identidad de $\mathbf{V_K}$ hacia el funtor bidual ** sobre $\mathbf{V_K}$. Designemos por $\mathbf{V_K^f}$ la subcategoría plena de $\mathbf{V_K}$ constituida por los vectoriales de dimensión finita sobre K. Un teorema-clave de álgebra lineal enuncia que la restricción de i a $\mathbf{V_K^f}$ es una equivalencia natural. La demostración de este teorema descansa en el hecho de que, si V es de dimensión finita, entonces V y V* son isomorfos. Sin embargo, este último isomorfismo, contrariamente al isomorfismo i_V, no es "natural": para definirlo, es necesario fijar una base $(v_1,...,v_n)$ de V y hacerle corresponder la base dual $(v'_1,..., v'_n)$ de V*. Así, el isomorfismo $v_i \longrightarrow v'_i$ depende de la elección de una base y, por ello, no posee el carácter natural del isomorfismo i_V entre V y V**. Sin embargo, podemos definir un funtor dual:

$$* : \mathbf{V_K} \longrightarrow \mathbf{V_K^{op}}$$

(es decir, un funtor contravariante de $\mathbf{V_K}$ hacia $\mathbf{V_K}$) que aplica todo vectorial sobre su dual y toda aplicación lineal sobre su traspuesta. Este funtor dual * establece un isomorfismo (en el sentido de las categorías) entre la categorías $\mathbf{V_K^f}$ y su categoría opuesta.

5. Conclusión

Este capítulo no es en forma alguna un alegato para la introducción de la teoría de categorías como disciplina matemática indispensable. He expuesto, simplemente, los rudimentos del vocabulario fundamental del lenguaje de categorías y de funtores. Sin embargo, estoy convencido que este lenguaje debería ser familiar, y lo será pronto, a todo estudiante que aborde un ciclo matemático en la Universidad y sin duda alguna incluso antes. Creo además que el lenguaje de categorías mostrará cuán próximas se encuentran numerosas teorías matemáticas diferentes e indicará cómo pueden ligarse unas a otras. Por su generalidad, la teoría de categorías es una fuente preciosa de *conjeturas* matemáticas significativas; en contrapartida, siempre en virtud (!), de su generalidad, también es rica en teoremas superficiales.

Para quienes deseen proseguir, recomiendo la obra de S. Mac LANE y G. BIRKHOFF, *Algebra*, Mac Millan, N.Y. 1967 (598 p.), traducida al francés en Gauthier-Villars donde se ha publicado en dos tomos (1970-1971) y se ha honrado con un prefacio de J. Dieudonné. Se trata de una exposición de álgebra moderna en la óptica categórica. (En castellano, Ed. Tecnos tiene en preparación la publicación de esta obra.) El experto en potencia consultará el libro más especializado de B. MITCHELL, *Theory of Categories*, Academic Press, New York 1965, 273 p.

2

EL LENGUAJE DE CATEGORIAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA*

1. Introducción

Constituye para mí una satisfacción esta ocasión que me permite presentar mis reflexiones sobre la conveniencia **del lenguaje de categorías** en el panorama matemático de la enseñanza secundaria y en el cuadro de la formación de los profesores de matemática que enseñarán en este nivel. He meditado largamente esta cuestión y no se presta a una comunicación breve. Sin embargo, me parece que en el curso de estas dos lecciones de hora y cuarto, seguidas de un tiempo sustancial de discusión, debería ser capaz de presentaros una introducción amplia y accesible al problema y comunicar mis ideas sobre esta materia.

Vosotros juzgaréis si he logrado el objetivo.

En general, una exposición avanza según cinco etapas: *motivación, definición, argumentación, ilustración y aplicación.*

He aquí algunos comentarios respecto a estas cinco componentes de mi comunicación.

En primer lugar, la *motivación* debería preceder, desde mi punto de vista, a la *definición*. No lo digo por iniciar una controversia sobre la oportunidad de las motivaciones. Ciertamente, es práctica corriente en los cursos de matemática organizados, comenzar por el enunciado de las definiciones. Y,

* Texto de dos conferencias de HILTON, pronunciadas ante el Primer Congreso Internacional de ZWIN (Knokke, mayo 1972), organizado por el Centro Belga de Pedagogía matemática.

desde luego, ello es perfectamente aceptable en un artículo matemático ya que el lector puede cubrir, si lo cree oportuno, su deseo de motivación antes de abordar la lectura de las definiciones precisas. Por el contrario, estimo que es desafortunado comenzar una charla enunciando la lista de las definiciones precisas. Carente de motivación, se exige al auditorio en este caso una atención muy sostenida pero totalmente ciega. Evidentemente, se podría temer que presentando la motivación en primer lugar, no se delimiten con precisión los conceptos motivados. No creo que exista obstáculo insuperable y, en todo caso, este argumento es insuficiente para convencerme de comenzar una conferencia sin motivar las definiciones.

Mi segunda observación se refiere a la diferencia que conviene señalar entre la *aplicación* y la *ilustración.* Supongamos que nos ocupamos de una zona particular A de la matemática y de cualquier otro tema B (que puede ser matemático o no). En este caso, diré que B es una ilustración de A si y solo si una comprensión de B esclarece el sentido de A. Por otro lado, B es una aplicación de A si y sólo si la comprensión de A clarifica B. En los cursos habituales de matemática, en todos los niveles, las ilustraciones se proponen frecuentemente en lugar y sitio de las aplicaciones. No sólo este proceso no es honesto sino que, además, deja en mal lugar al profesor que quiere persuadir a su público de la utilidad real del dominio matemático del que habla. Por el contrario, una ilustración, presentada como tal, juega un papel muy importante y no corre el peligro de no hacer gracia incluso si se muestra como muy artificial. Las ilustraciones son indispensables sobre todo cuando se introducen nuevas nociones matemáticas. Adoptan muy frecuentemente la forma de casos particulares cuyas interacciones no habían sido señaladas aún.

Precisado lo anterior, querría desarrollar ahora una motivación a las grandes ideas de la **teoría de categorías**, motivación que satisfaga las exigencias de las personas preocupadas por la enseñanza de la matemática en el nivel secundario o en los primeros años de la Universidad.

Se puede señalar en primer término que la teoría matemática actualmente necesaria es *elemental*, es decir, simple.

Si se comparan los pasos utilizados en teoría elemental de categorías con los que corrientemente se utilizan en un curso tradicional de geometría por ejemplo, no hay duda alguna de que los razonamientos geométricos son incomparablemente más elaborados y, por consiguiente, más difíciles. Esta diferencia se debe al hecho de que la estructura matemática de la geometría euclídea es mucho más rica que la de la teoría de categorías. Que no se venga pues a oponerse a la introducción de la teoría de categorías con el pretexto de que sería complicada: ¡es verdaderamente trivial! Ahora bien, trivialidad y generalidad van muy frecuentemente unidas. En el estudio o la enseñanza de la matemática, no siempre es posible evitar la trivialidad, pero es esencial reconocer siempre explícitamente sus intervenciones y no recurrir a ella más que en la medida en que se muestre útil. La utilidad de un razonamiento trivial depende de su generalidad; ahora bien, yo pretendo justamente que los razonamientos triviales de la teoría de categorías son útiles porque el lenguaje de categorías es una lengua universal para la matemática. Es una lengua que se apoya sobre la unidad profunda de los conceptos matemáticos y la pone de relieve de manera decisiva. El lenguaje de categorías rompe las barreras artificiales y aún va más allá: sirve para expresar y explicar los enlaces que unen las diversas partes de la matemática y suministra una manera de traducir las construcciones de un dominio matemático en otro. En fin, permite poner de relieve las etapas fundamentales que en matemática son la abstracción, la generalización y la aplicación. Ilustraré estos diversos puntos con ejemplos concretos desde que disponga de las definiciones precisas indispensables.

Un segundo argumento que viene en favor del lenguaje de categorías es que éste, no contento con señalar la unidad de la matemática, nos hace capaces de distinguir las partes profundas de las partes triviales de un razonamiento matemático. Todo el que esté al corriente de las investigaciones actuales, especialmente en álgebra y topología, no habrá dejado de sorprenderse por la repetición siempre creciente, en contextos no necesariamente particulares, de pequeñas deducciones elementales cuya acumulación acaba por formar una parte enmarañada y delicada del razonamiento global. El lenguaje de categorías es un cedazo que identifica y aisla las partes triviales, y por tanto universales, de un razonamiento, permitiéndonos entonces concentrar toda nuestra atención sobre las partes profundas y difíciles de este razonamiento, sobre las dificultades propias de la situación considerada. Propondré en su momento algunos ejemplos que ilustren este fenómeno.

Una tercera razón para introducir el lenguaje de categorías: se trata de un lenguaje cómodo y adecuado. No engendra ambigüedad, los términos utilizados poseen un sentido particular que, lejos de entrañar la confusión, contribuye a disiparla. La utilización de este lenguaje en situaciones particulares la muestra en seguida como casos particulares de resultados generales. La aplicación en un contexto particular de construcciones clásicas de la teoría de categorías nos sugiere inmediatamente conjeturas significativas. También esto será ilustrado con ejemplos.

Dicho esto, voy a intentar responder con la mayor objetividad que pueda a ciertas objeciones serias que se han opuesto al programa que preconizo.

Es necesario insistir, inmediatamente, en el hecho de que siendo el lenguaje de categorías un fermento unificador en matemática, quien desee utilizarlo con provecho debería ampliar previamente su experiencia matemática a fin de disponer de los materiales indispensables para esta unificación. Sería absurdo introducir este lenguaje sin que el alumno, o el profesor, esté impregnado del saber de muy numerosas situaciones matemáticas: no estaría en condiciones de apreciar el valor de las generalizaciones de conceptos y la sistematización de algunos razonamientos. A este respecto, la teoría de categorías puede ser comparada a la teoría de grupos, por ejemplo. Esta pone en relación distintas partes de las matemáticas tradicionales, la teoría de categorías enlaza diversos dominios de la matemática. Ahora bien, sabemos perfectamente que la introducción del concepto de grupo carecería de interés si no se cumplieran dos condiciones previas:

1) el alumno debe conocer numerosos ejemplos de grupos;
2) debe estar en condiciones de razonar al nivel del grupo abstracto sin estar obligado a recurrir a la imaginería de un grupo particular.

¡Este último punto es capital! Es ridículo, desde mi punto de vista, introducir el concepto de grupo cuando no se está en condiciones de obtener realmente fruto de la *estructura* de grupo. Observar simplemente que algo es un grupo no presenta ningún tipo de interés. Ello amenaza, incluso, con agostar el interés futuro. Por el contrario, señalar que la resolución de la ecuación $ax = b$ depende exclusivamente de los tres axiomas clásicos de los grupos y que, por consiguiente, se aplica sin modificación alguna en no importa qué grupo constituye una reflexión matemática sustancial y llena de sentido. Lo mismo ocurre en el lenguaje de categorías. No solamente no puede ser introducido sin estar alimentado por el conocimiento profundo de un cierto número de situaciones matemáticas sino, además, antes de abordar el estudio de las construcciones fundamentales, pero elementales, de la teoría de categorías, es necesario haber explorado y practicado el tipo de manipulaciones que se desea abstraer. La familiarización con el razonamiento propio de ciertas categorías concretas es pues un requisito previo esencial del programa que propongo.

Antes de entrar en mi segunda objeción, querría insistir sobre un rasgo de la teoría de categorías que quizá os haya presentado en mis consideraciones precedentes. Al igual que la noción de grupo generaliza los diversos ejemplos familiares de grupos, igualmente el concepto de categoría generaliza diversas teorías matemáticas como, por ejemplo, la teoría de grupos, la teoría de anillos, el álgebra lineal, la topología, etc. Por consiguiente, desde un plano informal, la teoría de categorías puede ser considerada como una abstracción de segundo grado. Ciertamente, se trata aquí de un punto de vista relativo ya que el grado cero, consistente por ejemplo en casos particulares de grupos, comprende ya en sí mismo abstracciones de situaciones concretas. Volveremos sobre este punto.

Paso ahora a la segunda objeción. Estoy lejos de militar en favor de la presentación del lenguaje de categorías a *todos* los alumnos. Más modestamente, sugiero que puede ser razonable considerar la sustitución de algunas materias tradicionales por materias que no han sido estimadas indispensables hasta aquí a todo alumno de la escuela secundaria. Sin embargo, reconozco que, en un contexto social determinado, consideraciones más globales podrían predominar en el momento de la elección de un programa. Suponiendo incluso que el alumno aspire a desarrollar y profundizar su comprensión de la matemática, es posible que se deba tener en cuenta las exigencias de las probabilidades y estadística, del cálculo diferencial e integral, aplicaciones de la matemática a las ciencias físicas, biológicas o sociales, de la teoría y práctica de ordenadores... Cada uno de estos dominios o su coalición podría presidir la elección de un programa en el cual los programas tradicionales quedarían reemplazados ventajosamente por materiales mejor apropiados a las necesidades de *algunos* alumnos. Evidentemente, hay medio de mostrarse más radical sugiriendo que muchos alumnos, en un cierto nivel de su educación en el nivel secundario, podrían suprimir sin dificultad el curso de matemática de su programa escolar. Lejos de mí el punto de vista según el cual la matemática debe ser venerada como una vaca sagrada de la educación y que es esencial someter a todos los alumnos a una instrucción matemática durante toda su estancia en el nivel secundario. Aunque no desee defender aquí esta opinión, quiero sin embargo afirmar nítidamente que reconozco la potencia y lo bien fundado de estos argumentos. Podrían llevar a la conclusión, válidamente, de que, en ciertas circunstancias, algunos alumnos no tendrían que iniciarse en el lenguaje de categorías.

Se podría formular una tercera objeción, a propósito de la teoría de categorías misma. Estoy totalmente persuadido de la utilidad real de adoptar la visión categórica en numerosas ramas de la matemática, sobre todo en álgebra y topología. Desgraciadamente, los problemas que surgen en una categoría particular no se resuelven siempre únicamente a la luz de la generalización categórica, ya he señalado este hecho. Además, hay dominios matemáticos inmensos y de gran importancia en los cuales parece prematuro intentar formulaciones categóricas, por ejemplo la teoría de las probabilidades y el análisis estadístico, la matemática aplicada... No pretendo que el lenguaje categórico sea la clave de toda la matemática. Ciertamente, he llegado a pensar que la óptica categórica invadirá progresivamente todo el panorama matemático, pero, en cada momento de esta evolución, habrá siempre territorios matemáticos para los cuales el lenguaje de categorías no estará aún adaptado, materias donde la utilización de este lenguaje no será esclarecedor. ¡Lejos de mí el defecto de insinuar que esas partes de la matemática sean las menos importantes simplemente porque el lenguaje categórico no se las aplique! Frecuentemente, por el contrario, son los terrenos más nuevos, aquéllos que se prestan menos a la fomalización, quienes ofrecerán también las menores facilidades para las formulaciones categóricas.

Sin embargo, como ya he señalado, la teoría de categorías procura una lengua para discutir ideas matemáticas verdaderamente muy ricas, suministra una trama auténticamente unificadora y separa las *"general abstract nonsense"*, según la boutade de Saunders Mac LANE, de las dificultades matemáticas "concretas". Desearía sugerir que su papel en matemática, en el nivel secundario, se parece al que juega el lenguaje conjuntista en matemática elemental. Si las formulaciones categóricas ayudan a la comprensión y a la comunicación, no debe dudarse en utilizarlas. Sin embargo, hay que tener cuidado en no paralizar un buen material matemático convirtiéndolo en una espuma formal rígida, prematura o inadecuada. También, al igual que la teoría formal de conjuntos no tiene nada que hacer en las recomendaciones para la enseñanza elemental, los puntos avanzados de la teoría de categorías proseguirán su progreso autónomo mucho más allá del nivel familiar del alumno.

No querría consagrar mucho tiempo a una objeción que, desde mi punto de vista, descansa en una mala concepción de la naturaleza del pensamiento matemático y su enseñanza. He admitido ya explícitamente que el lenguaje de categorías es altamente abstracto. Sin embargo, no considero esto como una objeción pertinente si, como he dicho, el alumno está familiarizado con las ideas introducidas por numerosos ejemplos prácticos. Es bien conocido que los alumnos no quedan asustados por las abstracciones, y que más bien somos nosotros, los vejestorios, quienes nos perturbamos en este terreno. Hay que notar también que lo abstracto de una generación es lo concreto de la generación siguiente. Además, carece de sentido preguntarse si tal concepto es concreto o abstracto. Cada concepto es más o menos concreto *y* más o menos abstracto. A buen seguro, las generalizaciones estériles y las manipulaciones de símbolos puramente formales deben ser proscritas sin piedad alguna. Pero intentar evitar en matemática la abstracción natural y sana conduciría al enmascaramiento de la materia entera. El proceso de abstracción es uno de los hilos conductores de la historia de la matemática. Desearíamos que los alumnos del nivel secundario estudien la historia de la matemática y tomen conciencia de cómo, de hecho, se han elaborado estas abstracciones que manejan hoy con la facilidad de lo concreto.

Pongo término aquí a mis intentos de motivación y a mis reservas en cuanto al papel del lenguaje de categorías para abordar la parte, siempre más fácil, de la presentación precisa de los conceptos y de la exposición matemática propiamente dicha. Sin embargo, en el caso presente, es particularmente necesario conservar en el espíritu constantemente los diversos ejemplos de las nociones examinadas.

Espero fervientemente que los ejemplos que suministre iluminarán estas definiciones formales y propongo que busquéis ejemplos suplementarios si es necesario.

2. Dualidad

La noción de dualidad categórica es extremadamente delicada y engañosa. A primera vista, este concepto parece tan trivial que es imposible creer que conduzca a algo útil. Y sin embargo, espero convenceros con ejemplos que realmente es muy útil. Conforme a los ejemplos, y también a las explicaciones suplementarias que seguirán a las definiciones precisas, aparecerá claramente, creo, que la idea aparentemente superficial de la dualidad categórica crea enlaces verdaderamente muy profundos entre algunos pares de enunciados matemáticos.

Pasemos a la definición en forma correcta:

Definición 2.1

Dada una categoría $\mathcal{C}$, se puede definir una categoría $\mathcal{C}^{op}$ como sigue:

$\mathcal{C}^{op}$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$;

$\mathcal{C}^{op}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$

Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son morfismos de $\mathcal{C}^{op}$, definimos su composición en $\mathcal{C}^{op}$ por: $f \text{ op } g = g \circ f$.

Se dice frecuentemente que se pasa de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{C}^{op}$ "poniendo las flechas al revés", es decir, que si f es de dominio B y codominio A en $\mathcal{C}$, admitirá A y B respectivamente como dominio y codominio en $\mathcal{C}^{op}$.

$\mathcal{C}^{op}$ es evidentemente una categoría y $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$. Los morfismos identidad de $\mathcal{C}^{op}$ son manifiestamente los de $\mathcal{C}$ y, si $\mathcal{C}$ tiene morfismos nulos, también son morfismos nulos en $\mathcal{C}^{op}$.

$\mathcal{C}^{op}$ será llamada *categoría opuesta*, o categoría *dual*, de $\mathcal{C}$. No penséis que $\mathcal{C}^{op}$ pueda ser interesante simplemente porque $\mathcal{C}$ lo sea: la categoría $\mathcal{C}^{op}$ se introduce puramente como un artificio que nos permite construir los duales de proposiciones, definiciones y otras formulaciones expresadas en $\mathcal{C}$. Supongamos por ejemplo que P sea una proposición cuyo enunciado tenga un sentido en toda categoría. Podemos en este caso expresar este enunciado en particular en la categoría $\mathcal{C}^{op}$, donde, evidentemente, será bien verdadero, bien falso. Sin embargo, como todos los términos utilizados en la descripción de la categoría $\mathcal{C}^{op}$ son traducibles en $\mathcal{C}$, el enunciado P en $\mathcal{C}^{op}$ también se traduce en una proposición sobre $\mathcal{C}$. Expresándolo formalmente, se dirá que una nueva proposición P^{op} está definida por

$$P^{op}(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C}^{op}).$$

La proposición P^{op} también tiene un sentido en toda categoría.

La denominaremos *dual* de la proposición P. Si aplicamos exactamente la misma marcha a una definición que tuviera sentido en toda categoría, obtendríamos la opuesta, o dual, de esta definición.

Mostremos esto con un ejemplo. Se trata además de una situación elegida para introducir varios aspectos característicos de las formulaciones categóricas, principalmente la noción de *definición por propiedad universal*.

Situémonos en la categoría **Conj** de los conjuntos y aplicaciones. Entre las aplicaciones interesantes se encuentran las inyecciones.

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si y sólo si $(x_1)f = (x_2)f$ implica $x_1 = x_2$.

(Utilizo aquí la notación (x)f en lugar de la notación tradicional f(x). Se aviene mejor con mi empleo de la convención "izquierda-derecha" para la composición de los morfismos.)

Este concepto no es inmediatamente generalizable a una categoría arbitraria. En efecto, la definición precedente hace intervenir los elementos de un conjunto y la noción de elemento no aparece en nuestra descripción de categoría.

Para generalizar una noción a toda categoría, es necesario poder expresarla exclusivamente en términos de morfismos. Henos aquí pues a la búsqueda de una propiedad caracterizadora de las aplicaciones inyectivas y que sea expresable únicamente en términos de morfismos de **Conj**.

Sea U el conjunto unitario que contiene a u. La definición de la inyectividad se reformula como sigue:

Cualesquiera que sean las aplicaciones $g_1, g_2 : U \longrightarrow X$, si $g_1 f = g_2 f$ entonces $g_1 = g_2$.

Para reencontrar el enunciado habitual, bastará tomar para g_1 y g_2 las aplicaciones definidas sobre U por $ug_1 \; x = x_1$; $ug_2 = x_2$.

Notemos que esta última caracterización de las aplicaciones inyectivas queda válida para toda elección de un conjunto U y de las aplicaciones g_1 y g_2. Es fácil de establecer. Hemos obtenido así el

Teorema 2.2

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si y solamente si para todo conjunto U y toda aplicación $g_1, g_2 : U \longrightarrow X$,

$$g_1 f = g_2 f \text{ implica } g_1 = g_2.$$

Esta caracterización de las aplicaciones inyectivas se expresa únicamente en términos de aplicaciones, es decir, de morfismos de **Conj**. Se extiende pues de modo inmediato a toda categoría, lo que conduce a la

Definición 2.3

Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de la categoría $\mathcal{C}$ es *monomorfo (monic)* si y sólo si para todo objeto U y todo morfismo $g_1, g_2 : U \longrightarrow X$ de $\mathcal{C}$,

$$g_1 f = g_2 f \text{ implica } g_1 = g_2.$$

De aquí que los monomorfismos de la categoría **Conj** sean precisamente las aplicaciones inyectivas.

Volveremos más tarde a otros aspectos de esta definición; por el momento, vamos a someterla al concepto de dualidad. Para dualizar la definición 2.3, comenzaremos por expresar que un morfismo f de $\mathcal{C}^{op}$ es monomorfo. Sean X e Y respectivamente el dominio y el codominio de f en $\mathcal{C}^{op}$. El morfismo f es monomorfo en $\mathcal{C}^{op}$ si y sólo si para todo objeto U de $\mathcal{C}^{op}$ y todo morfismo $g_1, g_2 : U \longrightarrow X$ de $\mathcal{C}^{op}$, $g_1 f = g_2 f$ implica $g_1 = g_2$.

Interpretemos ahora esta proposición considerando a f como un morfismo de $\mathcal{C}$. Su dominio es entonces Y, su codominio X y la proposición se traduce por:

Para todo objeto U de $\mathcal{C}$ y todo morfismo $g_1, g_2 : X \longrightarrow U$ de $\mathcal{C}$,

$$fg_1 = fg_2 \text{ en } \mathcal{C} \text{ implica } g_1 = g_2.$$

Esta propiedad de la que goza f como morfismo de $\mathcal{C}$ no es del todo la de monomorfía de f en la categoría $\mathcal{C}$, se trata de hecho de una nueva noción, que expresaremos diciendo que f es epimorfo *(epic)* en la categoría $\mathcal{C}$. Así pues, la noción de morfismo epimorfo está definida por

f es *epimorfo* en $\mathcal{C}$ si y sólo si f es monomorfo en $\mathcal{C}^{op}$.

Diremos que la monomorfía y la epimorfía son nociones duales.

Busquemos ahora cuáles son los morfismos epimorfos de la categoría **Conj**. Notemos que se trata aquí de una marcha muy diferente de la que hemos seguido a propósito de las aplicaciones inyectivas. Buscábamos entonces una noción categórica susceptible de contener a una noción ya conocida en **Conj**. Tal proceso, la generalización, es muestra del *arte* de la matemática: hace intervenir elección y juicio, no tiene un resultado único porque habríamos podido descubrir varias nociones categóricas muy diferentes que, cada una, generalizara la noción de inyectividad en **Conj**. Aquí, por el contrario, nos enfrentamos con una noción categórica perfectamente definida, la noción de epimorfía, y tenemos que interpretarla simplemente en **Conj**. Este tipo de actividad forma parte de la *ciencia* matemática.

En realidad es fácil establecer el

Teorema 2.4

Los morfismos epimorfos en **Conj** son las suprayecciones.

Demostración

Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ sea una suprayección en **Conj** y sean las aplicaciones $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ tales que $fg_1 = fg_2$. Ello significa que, para todo elemento x de X, $xfg_1 = xfg_2$. Como f es suprayectiva, todo elemento de Y es la imagen xf de al menos un elemento x de X. Podemos concluir que $yg_1 = yg_2$ para todo elemento y de Y, es decir, $g_1 = g_2$. Hemos demostrado así que toda suprayección es epimorfa.

Recíprocamente, supongamos que f no sea suprayectiva y sea y_0 un elemento de Y que no pertenece a la imagen de f. Siendo **2** el par formado por 0 y 1, designemos por $g_1 : Y \longrightarrow \mathbf{2}$ la aplicación constante **0** y por $g_2 : Y \longrightarrow \mathbf{2}$ la aplicación que aplica todo elemento sobre 0 salvo y_0 que lo hace sobre 1. Está claro que $fg_1 = fg_2$, mientras que $g_1 \neq g_2$. Así, f no es epimorfo, lo que termina la demostración.

Este teorema nos sugiere que no es extraño encontrar en las inyecciones y en las suprayecciones un aire de familia, fisonomías "duales".

Evidentemente, no he utilizado aquí el término "dual" en su sentido preciso, sino según su empleo matemático corriente. En efecto, la dualidad que hemos introducido se sitúa a nivel categórico; si particularizamos a una cierta categoría (**Conj** en el caso considerado), no hay dualidad en sentido estricto.

Consideremos ahora un teorema relativo a los morfismos monomorfos, teorema trivial por cierto, pero ya he dicho que en este nivel elemental los teoremas categóricos ¡eran triviales!

Teorema 2.5

Si la composición fg es monomorfa, entonces f es monomorfo.

Demostración

Sea $h_1 f = h_2 f$. Entonces $h_1 fg = h_2 fg$ y por consiguiente, como fg es monoformo, $h_1 = h_2$. Luego también f es monomorfo.

Consideremos ahora el

Teorema 2.6

Si la composición gf es epimorfa, entonces f es epimorfo.

¡Este teorema no hay que demostrarlo! En efecto, se trata simplemente del enunciado dual del teorema 2.5. *No* cabe

decir: "Vea usted, para probar el teorema 2.6 basta simplemente seguir la marcha del teorema 2.5". Los dos teoremas tienen un contenido y un alcance estrictamente idénticos. El primer teorema enuncia en efecto una proposición sobre los monomorfismos de toda categoría, pero una proposición que afecta a todos los monomorfismos de toda categoría es al mismo tiempo una proposición sobre todos los epimorfismos de toda categoría.

Estos dos teoremas se aplican a gran número de categorías interesantes y sobre todo a **Conj**. En la categoría **Conj**, el teorema 2.5 establece que f es inyectiva cuando fg es inyectiva mientras que el teorema 2.6 nos enseña que, si la composición gf es suprayectiva, también lo es f. No podemos, a este nivel, deducir *estas* proposiciones una de la otra porque conciernen exclusivamente a la categoría (concreta) **Conj**. Ciertamente toda proposición relativa a una categoría concreta puede ser traducida en una proposición sobre la categoría dual $\mathcal{C}^{op}$, sin embargo, si deseamos obtener una nueva proposición sobre la categoría $\mathcal{C}$ de partida, no sirve para nada recurrir de nuevo al principio de dualidad. Este último nos permite deducir únicamente, de proposiciones dadas sobre la categoría $\mathcal{C}$ que nos interesa, las proposiciones duales en $\mathcal{C}^{op}$ o, como lo muestra el ejemplo precedente, deducir, de proposiciones verdaderas en toda categoría, pares de proposiciones en una categoría fijada.

La noción de categoría dual nos hace capaces también de formular con precisión el concepto de *funtor contravariante*.

Un funtor contravariante F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ no es otra cosa que un funtor F: $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Se trata de una definición de hecho completa, pero para subrayar lo que significa realmente, es preciso agregar que el trazo significativo que distingue un funtor contravariante de un funtor usual o *coyariante*, reside en las fórmulas siguientes:

$$(gh)\,F = (hF)\,(gF)$$

Si $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$, entonces $XF \xleftarrow{gF} YF \xleftarrow{hF} ZF$. Las flechas se han invertido y el orden de composición de los morfismos se ha invertido.

Es fácil encontrar ejemplos de funtores contravariantes y un cierto número de ellos se han presentado en el capítulo precedente. Un ejemplo suplementario indicará mejor el contenido del concepto. Sea A la categoría de los anillos conmutativos. Asociamos a todo anillo conmutativo A su *espectro*, EspA, es decir, el conjunto de sus ideales primos.

Un *ideal primo* del anillo conmutativo A es un ideal *propio* P de A (es decir $P \neq A$) tal que, para todo elemento a, b, si $ab \in P$, entonces $a \in P$ o $b \in P$.

Esta noción se liga a la usual de número primo gracias al teorema siguiente: El entero p es primo si y solo si para todos los enteros a, b, si $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ ó $p \mid b$. Esta última propiedad se traduce en términos de ideal del anillo conmutativo Z por: Para todo entero, a, b, si $ab \in pZ$, entonces $a \in pZ$ o $b \in pZ$.

El espectro del anillo Z está constituido pues, por todos los ideales pZ, donde p es 0 o un número primo.

Un cuerpo no admite más que ideales triviales, por consiguiente su espectro es el unitario $\{\{0\}\}$. En geometría algebraica, el espectro de un anillo conmutativo está dotado de una topología pero no nos ocuparemos aquí de ello.

Todo homomorfismo $f: A \longrightarrow B$ de anillos conmutativos induce una aplicación $f^\star$: $\mathrm{Esp}B \longrightarrow \mathrm{Esp}A$. Todo ideal primo P de B se aplica simplemente sobre $f^{-1}(P)$ por $f^\star$. Es fácil ver, en efecto, que $f^\star(P)$ es un ideal primo de A y que, además, la correspondencia $f \longrightarrow f^\star$ define un funtor contravariante de A sobre la categoría **Conj** de conjuntos.

El funtor "conjunto de las partes" $\mathcal{P}$:**Conj** $\longrightarrow$ **Conj** es otro ejemplo de funtor contravariante. Designaremos aquí por $X\mathcal{P}$ el conjunto de las partes de X. Si se da una aplicación $f: X \longrightarrow Y$, entonces $f\mathcal{P} : Y\mathcal{P} \longrightarrow X\mathcal{P}$ asocia a toda parte P de Y la parte $f^{-1}(P)$ de X. Se verifica fácilmente que $\mathcal{P}$ es un funtor contravariante. Existe también un funtor covariante "conjunto de las partes", pero el funtor $\mathcal{P}$ es más amable: respeta las uniones, las intersecciones y los complementarios de las partes. Así, considerando el conjunto de las partes X $\mathfrak{T}$ como una álgebra de Boole respecto a la intersección, la unión y la complementación, $\mathfrak{T}$ aparece como un funtor de **Conj**^{op} sobre la categoría de las álgebras de Boole.

Las proposiciones y las definiciones válidas en toda categoría admiten inmediatamente, según sabemos, un dual correspondiente. Para las definiciones, este proceso se muestra frecuentemente muy importante, por no decir vital. En cuanto a los teoremas, ¡es otro asunto! En efecto, no se puede esperar que un teorema verdadero en toda categoría tenga una gran profundidad. Siempre que se maneja mucha "Generalidad", se corre el riesgo de encontrar al mismo tiempo ¡"Superficialidad"!

Así, un teorema del cual se puede exhibir inmediatamente una forma dual tiende a ser tan trivial como aquél del cual se acaba de obtener. Felizmente en la práctica, la situación está lejos de ser tan mala porque habitualmente no intentamos demostrar los teoremas al nivel general de todas las categorías. Intentamos más bien establecer los teoremas para categorías sometidas a una serie de axiomas particulares $A_1, A_2, ..., A_k$. Si un teorema T está demostrado para tales categorías, el teorema dual T^{op} es verdadero en toda categoría que satisface a los axiomas $A_1^{op}... A_2^{op} ..., A_k^{op}$. En particular, existen importantes clases de categorías que son *autoduales,* en el sentido de que están descritas por axiomas $A_1, A_2,..., A_k$ tales que $A_i^{op} = A_i$, para todo i. Un ejemplo especialmente importante de una clase de categorías autoduales es la clase de las *categorías abelianas.* Comprende la categoría de los grupos abelianos, la categoría de los módulos sobre un anillo cualquiera y muchas otras categorías interesantes del álgebra y de la geometría algebraica. Así, un teorema establecido para toda categoría abeliana puede engendrar consecuencias esenciales en la categoría de los grupos abelianos por ejemplo. En efecto, si tomamos una proposición en categoría de grupos abelianos, y la generalizamos en una proposición T que tiene sentido en toda categoría abeliana, una demostración de T nos permitirá deducir entonces la veracidad de T^{op} en toda categoría abeliana. Por consiguiente, T^{op} se particulariza en un resultado válido en teoría de grupos abelianos. Notemos, sin embargo, que no basta encontrar una formulación T de nuestra proposición inicial sobre los grupos abelianos que tenga sentido en toda categoría abeliana. Conviene además, y ello es esencial, *demostrar* T para *toda* categoría abeliana antes de utilizar la metodología de la dualidad para concluir que T^{op} es verdadera en la categoría concreta de los grupos abelianos. Existen interesantes ejemplos de proposiciones relativas a la categoría de los grupos abelianos que, aunque dualizables, tienen una dual falsa. Ello se explica por el hecho de que la proposición inicial, verdadera en categoría de grupos abelianos, admitiendo un enunciado significativo para toda categoría abeliana, no posee enunciado que sea *verdadero* en toda categoría abeliana.

3. Construcciones universales

El ejemplo de la definición de los morfismos monomorfos, presentada en el parágrafo precedente, ilustra un rasgo característico del punto de vista adoptado en álgebra categórica. Hemos mostrado que en categoría de conjuntos, la noción de aplicación monomorfa no es otra que la noción de aplicación inyectiva. Sin embargo, existe una diferencia esencial en la naturaleza de las definiciones de "monomorfía" y de "inyectividad", incluso si se limita el concepto de monomorfismo a la categoría **Conj.** En efecto, para comprobar la inyectividad de una aplicación $f:X \longrightarrow Y$, se considera simplemente el conjunto X, más precisamente, hay que examinar simplemente si los elementos distintos tienen la misma imagen por f. Por el contrario, si deseamos comprobar la monomorfía de f, es necesario hacer intervenir, en principio al menos, la categoría entera. Tenemos que examinar todos los objetos Z de **Conj** y todos los pares de morfismos de Z en X. La respuesta a la cuestión de saber si f es monomorfo, depende por tanto de todos los datos de la categoría de conjuntos.

De la misma manera, si extendemos la definición de "monomorfo" a los morfismos f de una categoría arbitraria $\mathcal{C}$, la monomorfía de f dependerá de $\mathcal{C}$ entera. A este respecto, el morfismo f, monomorfo en $\mathcal{C}$, podría muy bien dejar de serlo en el prolongamiento de $\mathcal{C}$ en una categoría más amplia $\mathcal{D}$. Es una característica de las definiciones categóricas situar el acento sobre el papel jugado en la categoría por un objeto o un morfismo más bien que sobre sus propiedades intrínsecas. Hablando en general, se podría decir que las definiciones categóricas reflejan lo que *hacen* los morfismos, los objetos o las construcciones, no lo que *son*.

He aquí un segundo ejemplo de definición categórica. Partiremos también de una noción bien conocida en categoría de conjuntos, construiremos una generalización expresable en toda categoría y estudiaremos sucesivamente esta generalización, su forma dual y sus particularizaciones a ciertas categorías.

Suponemos que queremos generalizar la noción de producto cartesiano de dos conjuntos. Retendremos entonces la caracterización (universal) siguiente del producto cartesiano $A = A_1 \times A_2$ de los conjuntos A_1 y A_2: el producto A está dotado de aplicaciones proyección $p_i : A \longrightarrow A_i$, $i = 1,2$, y para todo conjunto X y todas las aplicaciones $f_i : X \longrightarrow A_i$, existe una única aplicación $f : X \longrightarrow A$ tal que $fp_i = f_i$, $i = 1,2$. Es fácil demostrar que esta propiedad caracteriza enteramente el producto cartesiano, pero no nos detendremos en ella porque la misma se deduce de un teorema de unicidad totalmente general.

Vamos a servirnos de esta caracterización para definir un producto en una categoría cualquiera.

Definición 3.1

El *producto* de dos objetos A_1, A_2 en una categoría C es, si existe, la terna $(A ; p_1 , p_2)$ formada por un objeto A y por los morfismos $p_i : A \longrightarrow A_i$, $i = 1,2$, tales que, para todo objeto X y todos los morfismos $f_i : X \longrightarrow A_i$, existe un único morfismo $f : X \longrightarrow A$ tal que $fp_i = f_i$, $i = 1,2$.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \\
X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & A \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \\
 & A_2
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar una unicidad *práctica* del producto y no una unicidad absoluta ya que, si $(A ; p_1, p_2)$ es un producto y $u : A' \longrightarrow A$ un morfismo inversible, $(A' ; up_1 , up_2)$ es igualmente un producto. Recíprocamente, cualquier otro producto es necesariamente de esta forma. Sea en efecto $(A' ; p_1 , p_2)$ un producto de A_1 y A_2. Por (3.1), con $(X ; f_1 , f_2) = (A' ; p'_1 , p'_2)$, obtenemos un único u: $A' \longrightarrow A$ tal que $up_1 = p'_1$ y $up'_2 = p'_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 & \\
A' \arrow[ur, "p'_1"] \arrow[dr, "p'_2"'] \arrow[rr, dashed, shift left, "u"] & & A \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \arrow[ll, dashed, shift left, "v"] \\
 & A_2 &
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, podemos intercambiar los papeles de A y A' y obtener entonces un único $v : A \longrightarrow A'$ tal que $vp'_1 = p_1$, $vp'_2 = p_2$.

Por consiguiente:

$$(3.2) \qquad vup_1 = p_1, \qquad vup_2 = p_2$$

La *unicidad* de la propiedad universal (3.1) nos permite entonces deducir que vu = 1. De la misma manera, se demuestra que uv = 1. De aquí que u es inversible.

Se obtiene inmediatamente que el producto cartesiano en la categoría de conjuntos está determinada, salvo una equivalencia canónica, por la propiedad universal (3.1). Se trata pues de una propiedad "característica".

La noción de *coproducto* se define entonces haciendo llamada al principio de dualidad. Examinaremos luego ejemplos de productos y coproductos.

Antes, permitidme insistir una vez más en el hecho de que la definición precedente del producto pone el acento sobre lo que *hace* y no sobre lo que *es*. Procede de un tipo de definición que se podría llamar *funcional*, u *operacional* por oposición a las definiciones existenciales a las cuales estáis sin duda más habituados. Se trata ciertamente del tipo de definición que describe mejor la utilidad de un concepto así como los motivos de su introducción. Desde el punto de vista categórico, la definición usual del producto cartesiano de conjuntos constituye una prueba de existencia del producto categórico en la categoría **Conj.** Veremos más tarde que teoremas francamente difíciles se hacen elementales desde que una construcción bien conocida en una categoría particular queda identificada como producto o coproducto. Naturalmente, esta nota se aplica también a otros ejemplos de definición por propiedad universal.

Desearía señalar también que existe una generalización evidente del concepto de producto a más de dos objetos. En particular, es fácil ver que, si todo par de objetos de una categoría admite un producto, todo conjunto *finito* de objetos tiene igualmente un producto en la categoría. Sin embargo, aunque la definición de producto se extiende de manera evidente al producto de una infinidad de objetos, podría ocurrir que la categoría $\mathcal{C}$ admita productos finitos sin tener productos infinitos. Es lo que ocurre, por ejemplo, en la categoría $\mathbf{Ab_f}$ que consideraremos más adelante.

De manera precisa, el producto de los objetos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ está definido por recurrencia:

$$(3.3) \quad A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

¡Es elemental! ¡Os dejo el placer de demostrarlo!

Una consecuencia importante de (3,3) es la *asociatividad del producto*, en el sentido siguiente: existe un morfismo inversible canónico ω de $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ sobre $(A_1 \times A_2) \times A_3$. Por consiguiente, se pueden identificar estos dos modelos del producto de A_1, A_2 y A_3.

Acabo de deslizar el término *canónico*. Se trata de un término clásico, muy importante en matemáticas. Aquí, significa que no sólo el dominio y el codominio de ω son objetos equivalentes de la categoría dada, sino también, y sobre todo, que existe una unidad única tipo ω que los enlaza. (Recordaréis que una *unidad* o *morfismo inversible*, u: $X \longrightarrow Y$ es un morfismo que admite un morfismo correspondiente v: $Y \longrightarrow X$ tal que uv=1 y vu=1). Es lo que ocurre para dos candidatos del producto de A_1 y A_2. Como hemos visto más arriba, si $(A; p_1, p_2)$ y $(A'; p'_1, p'_2)$ son, los dos, productos de A_1 y A_2, existe entonces un único morfismo inversible $u: A' \longrightarrow A$ tal que $up_1 = p'_1$ y $up_2 = p'_2$. No sólo A y A' son equivalentes, sino además, y ello es capital, lo son gracias al único morfismo *canónico* u.

Por otro lado, estos morfismos inversibles canónicos gozan de una propiedad de transitividad: Si $(A''; p_1'', p_2'')$ es un tercer candidato para el producto de A_1 y A_2; y, si $v: A'' \longrightarrow A'$ es el morfismo inversible canónico de A'' sobre A', entonces vu: $A'' \longrightarrow A$ es el morfismo inversible canónico de A'' sobre A. La situación es comparable a la de un conjunto de diccionarios que permiten el paso de una lengua a otra. Pero la situación categórica es notablemente superior. En efecto, sabemos todos muy bien que si traducimos una palabra castellana al inglés por medio de un diccionario castellano-inglés, después al francés gracias a un diccionario inglés-francés, podríamos obtener una palabra muy diferente de la que hubiéramos encontrado utilizando directamente un diccionario castellano-francés. Los morfismos inversibles canónicos, por el contrario, consiguen una traducción perfecta, sensata y reversible. En cada "lengua" hay un sólo término canónico por concepto. Esta interpretación de la unicidad es la más flexible que podemos pretender en matemática, es la que nos confiere el derecho de hablar *del* producto de dos objetos de la categoría y de establecer que el producto es *asociativo.*

Aunque dispongamos ya del concepto de coproducto, simplemente como dual del producto, tracemos el diagrama de un coproducto, semejante al diagrama (3.1), para permitir comprobar vuestra comprensión del principio de dualidad:

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "q_1"] \\
X & A \arrow[l, dashed, "f"'] \\
 & A_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[u, "q_2"']
\end{tikzcd}$$

Como en (3.1) hemos adoptado, trazando el diagrama, una convención clásica muy útil respecto a los diagramas categóricos: las flechas continuas representan los datos mientras que la flecha de puntos designa un morfismo cuya existencia viene afirmada por la definición. (En otras situaciones categóricas, una flecha de puntos podrá designar un morfismo cuya existencia se establece por una demostración). En general, si una flecha punteada tiene un nombre, como ocurre en este caso, ello significa que el morfismo en cuestión está determinado de manera única. Si no lo estuviera, la flecha no llevaría nombre alguno o estaría etiquetada simplemente por medio del signo $\exists f$, por ejemplo.

He aquí, por fin, la lista prometida de ejemplos de productos y de coproductos en categorías familiares. Se podría, evidentemente, prolongar esta tabla indefinidamente pero basta dar un número suficiente de ejemplos para iniciaros en el punto de vista categórico.

Categoría	producto	coproducto
Conj (Conjuntos y aplicaciones)	Producto cartesiano	Unión disjunta
Gr (Grupos y homomorfismos)	Producto directo	Producto libre
Top (Espacios topológicos y aplicaciones continuas)	Producto topológico	Unión disjunta
Ab (Grupos abelianos y homomorfismos)	Suma directa	Suma directa
$\mathbf{Ab_f}$ (Grupos abelianos finitos y homomorfismos)	Suma directa	Suma directa
$\mathbf{Ab_c}$ (Grupos cíclicos y homomorfismos)	No siempre existe	No siempre existe

En suma, se trata de doce ejemplos de productos. Por consiguiente, por cada teorema verdadero para los productos de toda categoría, disponemos de doce particularizaciones que se reparten en seis pares de enunciados mutuamente duales, uno por cada una de las categorías consideradas.

Se llama *unión disjunta* de los conjuntos E_1 y E_2 la unión de dos "copias" disjuntas de E_1 y E_2, es decir, de conjuntos disjuntos equipotentes respectivamente a E_1 y E_2. Así, por ejemplo, $(E_1 \times \{1\}) \cup (E_2 \times \{2\})$ es una unión disjunta de E_1 y E_2.

En este caso, las aplicaciones q_1 y q_2 están definidas por:

$$q_i \left| \begin{array}{lcl} E_i & \longrightarrow & (E_1 \times \{1\}) \cup (E_2 \times \{2\}) \\ x & \longmapsto & (x, i) \\ & & i = 1, 2 \end{array} \right.$$

Como coproducto, la unión disjunta no está definida más que salvo una biyección, es decir, salvo un morfismo inversible canónico de la categoría **Conj**. En efecto, se tiene la elección de las copias de E_1 y de E_2.

El *producto directo* de los grupos $(G_1, \bullet)$ y $(G_2, \bullet)$ es simplemente el producto cartesiano $G_1 \times G_2$ sobre el cual está definida la ley de grupo $\bullet$ por

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Las aplicaciones p_1 y p_2 son los homomorfismos de grupo definidos por:

$$p_i \left| \begin{array}{lcl} G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \\ & & (i = 1, 2) \end{array} \right.$$

El *producto libre* de los grupos $(A, \bullet)$ y $(B, \bullet)$ de elementos neutros respectivos e_A y e_B es un grupo definido sobre el conjunto $A \star B$ de las *palabras reducidas* de A y B, es decir, el conjunto de las sucesiones finitas de elementos de $(A - \{e_A\}) \cup (B - \{e_B\})$ tales que dos elementos consecutivos no pertenezcan al mismo grupo.

He aquí algunos elementos de $A \star B$:

La sucesión vacía ϕ

a , b , a b , b a , a b a' b' , b a b' a' b" ,...,etc.,donde los a pertenecen a $A - \{e_A\}$ y los b a $B - \{e_B\}$.

La ley de grupo $\star$ definida sobre el conjunto $A \star B$ de las palabras reducidas es simplemente la *yuxtaposición con simplificaciones* eventuales.

Por ejemplo:

$$b\,a\,b\,a \star b\,a\,b = b\,a\,b\,a\,b\,a\,b$$
$$a\,b\,a\,b\,a \star a'\,b\,a\,b = a\,b\,a\,b\,a''\,b\,a\,b \quad \text{si} \quad a \bullet a' = a'' \neq e_A$$
$$b\,a\,b\,a \star a^{-1}\,b'\,a\,b\,a = b\,a\,b''\,a\,b\,a \quad \text{si} \quad b \bullet b' = b'' \neq e_B$$
$$b\,a\,b\,a\,b \star b^{-1}\,a^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1} = b$$
$$a\,b^{-1}\,a\,b\,a^{-1}\,b^{-1} \star b\,a\,b^{-1}\,a^{-1}\,b\,a^{-1} = \phi$$
$$a\,b\,a \star \phi = a\,b\,a = \phi \star a\,b\,a$$

Se verifica trivialmente que $\star$ es una ley de grupo sobre $A \star B$.

Su elemento neutro es la sucesión vacía ϕ y el simétrico para $\star$ de una palabra reducida es la palabra reducida de los simétricos (para $\bullet$) tomados en el orden inverso.

Las aplicaciones q_1 y q_2 no son otras que los monomorfismos

$$q_1 \left| \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & A \star B \\ a & \longmapsto & a \\ e_A & \longmapsto & \phi \end{array} \right.$$

$$q_2 \left| \begin{array}{lcl} B & \longrightarrow & A \star B \\ b & \longmapsto & b \\ e_B & \longmapsto & \phi \end{array} \right.$$

El producto topológico de los espacios (E_1, τ_1) y (E_2, τ_2) es el espacio topológico definido sobre el producto cartesiano $E_1 \times E_2$ por medio de la topología engendrada por:

$$\{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1 \ \text{ y } \ O_2 \in \tau_2\}$$

Se verifica fácilmente que las funciones

$$p_i \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \longrightarrow E_i \\ (x_1, x_2) \longmapsto x_i \end{array} \right. \quad i = 1, 2$$

son continuas.

El diagrama (3.1) aplicado a esta situación expresa el célebre "teorema de la horquilla" (ver PAPY, *Le premier enseignement de l'analyse,* Presses universitaires de Bruxelles).

La unión disjunta topológica de los espacios (E_1, τ_1) y (E_2, τ_2) es el espacio topológico definido sobre la unión disjunta de E_1 y E_2 por medio de la topología engendrada por:

$$\{0_1 \times \{1\} \mid 0_1 \in \tau_1\} \cup \{0_2 \times \{2\} \mid 0_2 \in \tau_2\}$$

Las aplicaciones

$$q_i \left| \begin{array}{l} E_i \longrightarrow (E_1 \times \{1\}) \cup (E_2 \times \{2\}) \\ x \longmapsto (x, i) \end{array} \right. \quad i = 1, 2$$

son continuas.

En fin, la *suma directa* de *dos* grupos conmutativos no es más que el producto directo de ambos grupos. Las *dos* nociones no coinciden si se pasa a manejar una *familia infinita* de grupos.

Esta lista de ejemplos exige algunos comentarios. Comprobaréis que, como se había previsto, la naturaleza del producto o del coproducto no depende simplemente de los objetos en juego, sino también de la categoría a la cual pertenezcan. Así, por ejemplo, el coproducto de dos grupos abelianos es su suma directa mientras que el coproducto de dos grupos, conmutativos o no, es su producto libre. Por tanto, si nos preguntamos cuál es el coproducto de **2** y **4**, la respuesta será

diferente según que **2** y **4** estén considerados como grupos abelianos o únicamente como grupos.

La respuesta será también muy diferente si están considerados como grupos cíclicos. En este caso, en efecto, no tienen coproducto, ni tampoco producto. En la categoría $\mathbf{Ab}_c$, dos grupos cíclicos tienen un producto, o un coproducto, si y sólo si sus órdenes son primos entre sí. Os invito a demostrar este último resultado.

Notaréis también que, en las categorías **Ab** y $\mathbf{Ab}_f$, los productos y los coproductos son los mismos. Ya hemos indicado que la categoría **Ab** es un ejemplo de categoría abeliana y que los axiomas de una categoría abeliana son autoduales. No es sorprendente que producto y coproducto coincidan en **Ab.** Sin embargo, convendría ser algo meticuloso aquí. En efecto, hablando con propiedad, el producto de A_1 y A_2 en una categoría $\mathcal{C}$ no es únicamente un objeto A, sino una terna formada por un objeto A y los morfismos $p_1 : A \longrightarrow A_1$, $p_2 : A \longrightarrow A_2$ e igualmente el coproducto de A_1 y A_2 es una terna compuesta por un sólo objeto B y dos morfismos $q_1 : A_1 \longrightarrow B$ y $q_2 : A_2 \longrightarrow B$. Por consiguiente, incluso si $A = B$, no estamos autorizados, en sentido estricto, a afirmar que el producto y el coproducto sean idénticos. No insistiremos más en esta distinción, pero era importante destacar la situación precisa al menos una vez.

He aquí un nuevo ejemplo donde la determinación del producto y del coproducto no es inmediata ni se produce sin alguna sorpresa. Sea un conjunto preordenado $(E, \leqslant)$ (es decir, dotado de una relación $\leqslant$ reflexiva y transitiva) y definimos una categoría $\mathcal{C}_E$ como sigue: los objetos de $\mathcal{C}_E$ son los elementos de E. El conjunto $\mathcal{C}_E\,(x,y)$ se reduce al elemento (x,y) si $x \leqslant y$ y es vacío en caso contrario. La definición de la composición es perfectamente clara, refleja simplemente la transitividad de la relación $\leqslant$. Igualmente, la existencia de las identidades traduce la reflexividad de la relación de preorden. Os dejo el cuidado de verificar que, si x e y son elementos de E (y por tanto objetos de $\mathcal{C}_E$), su producto, si existe, no es otro que ínf $\{x,y\}$, el ínfimo de $\{x, y\}$ en E. En particular, si E designa el conjunto de los enteros no nulos dotados del preorden "... *divide a* ...." el producto es entonces el *máximo* divisor común y el coproducto el *mínimo* múltiplo común. La teoría categórica nos anuncia que el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo no están determinados más que salvo un morfismo inversible canónico, o unidad canónica. (Recordemos que, en un anillo, todo elemento inversible se llama *unidad* en el anillo. El conjunto de las unidades de un anillo es un grupo para la multiplicación del anillo.) Y, en efecto, ¡esto es lo que ocurre! Sabemos que el mcd y el mcm de dos enteros no están determinados más que salvo una unidad de Z. Ahora bien, las únicas unidades del anillo Z son 1 y -1. Por consiguiente, si a y b son dos candidatos a mcd y mcm de x e y, entonces están ligados por una y sólo una de las igualdades siguientes: $a = b$ o $a = -b$. Enfocando el mcd y el mcm como productos, podemos deducir inmediatamente su unicidad (relativa) de la unicidad del producto en toda categoría.

Como ya hemos establecido que el producto es siempre asociativo, obtenemos, entre otras particularizaciones de este hecho general, los teoremas siguientes:

Teorema 3.5

El producto libre de grupos es asociativo:

$$(G_1 \star G_2) \star G_3 = G_1 \star (G_2 \star G_3)$$

Teorema 3.6

En una preordenación donde todo par tiene supremo e ínfimo, las operaciones supremo e ínfimo son asociativas:

$$\begin{array}{l} \sup \\ \inf \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sup\{x,y\},z \\ \inf\{x,y\},z \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \sup \\ \inf \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x, \sup\{x, z\} \\ x, \inf\{y, z\} \end{array} \right\}$$

Teorema 3.7

Si x, y, z son enteros no nulos entonces

$$\begin{array}{l} \text{mcd} \\ \text{mcm} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{mcd}\{x, y\},z \\ \text{mcm}\{x, y\},z \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{mcd} \\ \text{mcm} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x, \text{mcd}\{y, z\} \\ x, \text{mcm}\{y, z\} \end{array} \right\}$$

El teorema 3.5 es un teorema profundo en teoría combinatoria de grupos. Pero la parte profunda de este teorema no está en realidad en la asociatividad del producto libre sino que reside más bien en el hecho de que el producto libre es el coproducto en la categoría de grupos. Una vez establecido este hecho fundamental, la asociatividad del producto libre es una trivialidad. Los demás teoremas citados antes no enuncian resultados profundos. Además, no es usual obtenerlos de hechos generales que afectan a los productos, ni siquiera reconocer que lo son. Se trata simplemente de un ejemplo de puesta en evidencia de aspectos "triviales", es decir, universales, en una teoría matemática particular, en la que trata del mcd y mcm en el anillo de los enteros (y en cualquier otro anillo de integridad). Para contraste, he aquí un teorema que es verdadero en todo anillo íntegro principal (es decir, en el cual todo ideal está engendrado por un elemento) sin serlo en un anillo íntegro cualquiera:

Teorema 3.8

Si a y b son elementos no nulos del anillo íntegro principal D entonces su máximo común divisor es una combinación lineal $d = ka + lb$ con k y 1 en D.

Es un resultado estremadamente importante y ya profundo en el anillo de los enteros. No se deduce de teoremas categóricos generales. Si lo hemos enunciado deliberadamente de esta manera, es para destacar que el punto importante reside en el hecho de que el anillo de los enteros es un anillo íntegro principal. El teorema está pues situado en su cuadro de generalidad apropiada, pero esta generalidad es notablemente inferior a la del teorema 3.7.

No continuaremos aquí esta discusión, pero espero vivamente haberos incitado para que busquéis otros ejemplos de productos y coproductos y para que este capítulo os dé ánimos para leer obras que os darán otros ejemplos de construcciones universales.

4. El papel de los funtores

Hemos introducido los funtores y las transformaciones naturales como conceptos que toda persona bien educada debe conocer. No nos hemos apoyado sobre su papel operacional capital a través de las matemáticas estudiadas en la escuela secundaria y en el comienzo de la universidad. Para cubrir esta laguna, debería disponer de mucho más tiempo del que me está permitido; sin embargo querría al menos ilustrar las posibilidades considerables del concepto de funtor.

Supongamos que tenemos dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{D}$ ligadas por el funtor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$. Se tiene el siguiente

Teorema 4.1.

Si X e Y son objetos equivalentes de $\mathcal{C}$, entonces XF e YF son objetos equivalentes de $\mathfrak{D}$.
Además, si $u: X \longrightarrow Y$ es una unidad (morfismo inversible), entonces $uF: XF \longrightarrow YF$ es una unidad.

Este resultado, aunque de hecho general, se presenta a veces como un teorema de la teoría de anillos: Todo homomorfismo de anillos aplica unidades sobre unidades.

Creo haber mostrado suficientemente que esta perspectiva no es la adecuada.

El teorema 4.1 se deja introducir en forma incisiva: Si dos objetos de $\mathcal{C}$ tienen imágenes no equivalentes por F, no son seguramente equivalentes. Por tanto, podemos detectar la no equivalencia de X e Y por aplicación del funtor F estableciendo la no equivalencia de XF e YF. Frecuentemente esta táctica es muy práctica; en efecto, la acción del funtor F tiene por efecto simplificar considerablemente la situación en matemática.

A título de ejemplo, tomemos por F el funtor de **Gr** en **Ab** que *abelianiza* el grupo, es decir, que reemplaza todo grupo por el cociente de este grupo por su subgrupo conmutador. Una definición más categórica de este funtor es la que reemplaza todo grupo por su mayor cociente conmutativo. Ahora bien, la estructura de los grupos *conmutativos* engendrada de manera finita es actualmente conocida mientras que la estructura de los grupos engendrados de manera finita permanece muy compleja. Además, se dispone de un algoritmo que permite decidir acerca del isomorfismo de dos grupos conmutativos engendrados de manera finita. Por tanto, si se desea contrastar el isomorfismo de los grupos X e Y, conviene aplicarles directamente el funtor de abelianización. Si se constata que X e Y no son isomorfos tras la abelianización, es que no lo eran antes.

Naturalmente, este procedimiento puede fracasar. Volvamos al cuadro general: podría ocurrir muy bien que XF e YF sean equivalentes en $\mathfrak{D}$. Pero entonces no podríamos concluir evidentemente que X e Y sean equivalentes en $\mathcal{C}$. Sin embargo, y esto se realiza ya ampliamente en topología algebraica, podemos confiar en reunir una batería suficiente de funtores de forma que la equivalencia de XF e YF para *todo* funtor F de nuestra batería entrañe la equivalencia de X e Y en $\mathcal{C}$. Ciertamente abordamos una matemática difícil, una matemática fundamental y no desearía pasar por un programa capital de la investigación matemática la formación de un tal lote de funtores. Por el contrario, la contrarrecíproca de 4.1, si XF e YF no son equivalentes, no es del todo profunda pero participa fundamentalmente de la metodología matemática. Constituye quizá la generalización última de ese bonito procedimiento, aunque abandonado hoy en la escuela, que se llamaba cuando era joven "la exterminación de los nueves". Cuando se realizaba un cálculo en el anillo de los enteros, se le contrastaba reduciendo todo módulo 9. La elección del módulo procedía de que la reducción módulo 9 de un natural expresado en base 10 en la numeración posicional es una operación verdaderamente elemental: se reemplazaba el natural por la suma de sus cifras y se reiteraba el proceso hasta obtener un natural menor que 9. De hecho, esta caza de los nueve procede del esquema descrito antes ya que la exterminación de los nueve, o reducción módulo 9, está fundada sobre el epimorfismo canónico del anillo de los enteros sobre el anillo de los enteros módulo 9 y este epimorfismo puede ser considerado como un funtor (aditivo) entre categorías abelianas.

La moral de esta historia es capital. El test de exterminación de los nueve o, más generalmente, de la aplicación de un funtor F, no conserva la totalidad de la situación original, introduce simplificaciones. El funtor F mismo no es una equivalencia. Y, a pesar de ello, precisamente por la introducción de simplificaciones, ¡estamos en condiciones de obtener conclusiones muy útiles! He aquí un rasgo esencial no sólo de la metodología matemática sino también de toda metodología científica. Desgraciadamente, en la escuela elemental, el niño es inducido frecuentemente a creer que los test no son más que otra forma de realizar el mismo cálculo. En otros términos, los test, comprendidos en este último aspecto no serían funtores sino equivalencias entre categorías. Por ejemplo, el cálculo $14 + 9 = 23$ podría muy bien ser un test del cálculo $23 - 14 = 9$. El test no es entonces más que una simple prueba de la exactitud del cálculo. Sin embargo, un test no es, en general, una prueba de la exactitud del cálculo. Por otro lado, no es un criterio muy útil y, en la práctica, bastará probablemente con crear un grado de confianza conveniente para la situación matemática sobre la cual se trabaja. Por ejemplo, si un cálculo ha pasado victoriosamente por la criba de la caza de los nueve y de la caza de los once, hay muchas posibilidades de que sea correcto.

5. Conclusión

En el curso de estos dos capítulos he intentado describir el espíritu de la teoría de categorías e indicar su conveniencia en el nivel secundario. Creo firmemente que todo profesor de matemáticas en el nivel secundario debería estar al corriente del lenguaje, del espíritu y de los grandes temas de la teoría de categorías. No soy en manera alguna especialista de la pedagogía de la matemática en el nivel secundario, tampoco pretendería haberos expuesto la forma de llevar a la práctica las ideas que he desarrollado, ni incluso la manera de sugerir su validez.

Os agradezco no considerar mis notas como emplazamientos; lo he dicho, no me reconozco derecho alguno para imponer lo que sea; pero me sentiría muy satisfecho si pudiérais reflexionar en los medios de hacer cristalizar las ideas que os he presentado.