Capítulo II

Coordenadas Homogéneas

En lo que sigue E será un espacio vectorial de dimensión $n+1$, de modo que el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ tendrá dimensión n.

1 Sistemas de Referencia Proyectivos

Definición 1.1 Diremos que una sucesión de $n+2$ puntos de $\mathbb{P}(E)$ es un *sistema de referencia proyectivo* cuando ningún hiperplano de $\mathbb{P}(E)$ contenga a $n+1$ puntos de la sucesión. Si $(P_0, P_1, \ldots, P_n, U)$ es un sistema de referencia proyectivo de $\mathbb{P}(E)$, entonces diremos que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ es el *símplice de referencia* y que U es el *punto unidad*.

Ejercicio 1.2 Dados $n+1$ puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, el que dichos puntos no estén contenidos en ningún hiperplano es equivalente a que si elegimos vectores que los representen obtenemos una base de E.

Lema 1.3 *Dada una proyectividad* $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(\bar{E})$, *si* $(P_0, \ldots, P_n, U)$ *es un sistema de referencia proyectivo de* $\mathbb{P}(E)$, *entonces* $(\varphi(P_0), \ldots, \varphi(P_n), \varphi(U))$ *es un sistema de referencia proyectivo de* $\mathbb{P}(\bar{E})$.

Demostración. Basta tener en cuenta que la imagen de una subvariedad lineal por una proyectividad es una subvariedad lineal de igual dimensión. ∎

Ejemplos 1.4 Un sistema de referencia proyectivo en $\mathbb{P}_1$ está formado por tres puntos ordenados y distintos. Los sistemas de referencia de $\mathbb{P}_2$ están formados por cuatro puntos ordenados tales que ninguna recta pasa por tres de ellos, es decir, están formados por los vértices (ordenados) de un triángulo y por un punto que no está en ninguno de sus lados. Análogamente, una referencia de $\mathbb{P}_3$ está formada por los vértices (ordenados) de un tetraedro y por un punto que no yace en ninguna de sus caras.

Proposición 1.5 *Sea* $(P_0, P_1, \ldots, P_n, U)$ *un sistema de referencia proyectivo de* $\mathbb{P}(E)$. *Existe una base* $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ *en* E, *única salvo un factor de proporcionalidad, que satisface*

$$P_0 = \pi(e_0)\,, \quad P_1 = \pi(e_1)\,, \quad \ldots\,, \quad P_n = \pi(e_n)\,, \quad U = \pi(e_0 + \cdots + e_n)\,.$$

Demostración. Si elegimos vectores $v_0, \ldots, v_n$ representantes de los puntos $P_0, \ldots, P_n$, respectivamente, entonces $\{v_0, \ldots, v_n\}$ es una base de E (por 1.2) y por lo tanto existen escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tales que $U = \pi(\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n)$. Ninguno de dichos escalares puede ser nulo, ya que si, por ejemplo, $\lambda_0 = 0$ entonces

$$U \in \pi(\langle v_1, \ldots, v_n \rangle) = P_1 + \cdots + P_n\,,$$

y tendríamos que algún hiperplano contiene a los puntos $P_1, \ldots, P_n, U$ ($\dim(P_1 + \cdots + P_n) \leq n-1$). Si para toto i denotamos $e_i = \lambda_i v_i$, entonces $\{e_0, \ldots, e_n\}$ es una base de E que satisface las igualdades del enunciado.

Si $\{e'_0, \ldots, e'_n\}$ es otra base de E que cumple dichas igualdades, entonces existen escalares $\lambda, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$e'_0 = \alpha_0 e_0\,, \quad \ldots\,, \quad e'_n = \alpha_n e_n\,, \quad e'_0 + \cdots + e'_n = \lambda(e_0 + \cdots + e_n)\,;$$

luego para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ deben ser $\alpha_i = \lambda$ y $e'_i = \lambda e_i$. ∎

Definición 1.6 Diremos que una base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ de E es una *base normalizada* asociada a un sistema de referencia proyectivo $(P_0, \ldots, P_n, U)$ de $\mathbb{P}(E)$ si satisface las igualdades de la proposición 1.5.

1.7 Fijado un sistema de referencia $(P_0, \ldots, P_n, U)$ en $\mathbb{P}(E)$ podemos coordenar el espacio proyectivo del siguiente modo: dado un punto $P \in \mathbb{P}(E)$, escojamos un representante suyo $e \in E$ y escribamos su expresión respecto de una base normalizada asociada al sistema de referencia fijado

$$e = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n\,;$$

debido a que dos bases normalizadas asociadas al mismo sistema de referencia difieren en un factor de proporcionalidad, y a que lo mismo ocurre con dos vectores que representen a P, resulta que la sucesión de escalares $(x_0, \ldots, x_n)$ está determinada por P salvo un factor de proporcionalidad, y que a su vez P está determinado por la sucesión $(x_0, \ldots, x_n)$.

Definición 1.8 Con la notación de 1.7, diremos que la $(n+1)$-upla $(x_0, \ldots, x_n)$ son las *coordenadas homogéneas* (ó *proyectivas*) del punto P respecto del sistema de referencia proyectivo $(P_0, \ldots, P_n, U)$.

Es claro que en coordenadas tenemos $P_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $P_n = (0, \ldots, 0, 1)$, $U = (1, 1, \ldots, 1)$.

Proposición 1.9 *Sean E y $\bar{E}$ espacios vectoriales de dimensión $n+1$ y sean $(P_0, \ldots, P_n, U)$ y $(\bar{P}_0, \ldots, \bar{P}_n, \bar{U})$ sistemas de referencia proyectivos de $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(\bar{E})$, respectivamente. Existe una única proyectividad $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(\bar{E})$ que satisface*

$$\varphi(P_0) = \bar{P}_0\,, \quad \ldots\,, \quad \varphi(P_n) = \bar{P}_n\,, \quad \varphi(U) = \bar{U}\,.$$

Demostración. Sea $\{e_0, \ldots, e_n\}$ una base normalizada asociada a la referencia de $\mathbb{P}(E)$, sea $\{\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n\}$ una base normalizada asociada a la referencia de $\mathbb{P}(\bar{E})$, y considérese el único isomorfismo lineal $T : E \to \bar{E}$ que para todo i cumple $T(e_i) = \bar{e}_i$. Es claro que la proyectividad $\widetilde{T}$ transforma una referencia en la otra.

Supongamos ahora que $T' : E \to \bar{E}$ es otro isomorfismo lineal tal que la proyectividad $\widetilde{T}'$ también transforma una referencia en la otra. Las igualdades

$$\widetilde{T}'(P_i) = \bar{P}_i = \widetilde{T}(P_i) \quad (i = 0, \ldots, n)\,, \qquad \widetilde{T}'(U) = \bar{U} = \widetilde{T}(U)$$

implican que existen $\lambda, \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in k^*$ tales que $T'\Big(\sum_{i=0}^n e_i\Big) = \lambda T\Big(\sum_{i=0}^n e_i\Big)$ y $T'(e_i) = \lambda_i T(e_i)$ para todo i; de lo anterior se sigue que $\lambda_i = \lambda$ para todo i y por lo tanto $T' = \lambda T$; luego $\widetilde{T}' = \widetilde{T}$ (véase I.2.5). ∎

Corolario 1.10 *Si dos proyectividades $\varphi, \phi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(\bar{E})$ coinciden sobre algún sistema de referencia proyectivo de $\mathbb{P}(E)$ entonces $\varphi = \phi$.*

Compárense las proposiciones 1.5 y 1.9 con los ejercicios I.1.12 y I.2.6 (b).

2 Razón Doble

Definición 2.1 Se llama *razón doble* de cuatro puntos distintos y ordenados P_1, P_2, P_3, P_4 de una recta proyectiva, al escalar

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{x_1}{x_2}\,,$$

siendo (x_1, x_2) las coordenadas homogéneas del punto P_4 respecto del sistema de referencia (P_1, P_2, P_3) de la recta.

2.2 Si convenimos en que $\alpha/0 = \infty$ $(\alpha \in k^*)$, entonces para definir la razón doble de cuatro puntos ordenados P_1, P_2, P_3, P_4 de una recta proyectiva $\mathbb{P}_1$ sólo es necesario que sean distintos los tres primeros, en cuyo caso tenemos (compruébese):

$$\begin{aligned}
(P_1, P_2; P_3, P_4) = \infty &\iff P_4 = P_1\,,\\
(P_1, P_2; P_3, P_4) = 0 &\iff P_4 = P_2\,,\\
(P_1, P_2; P_3, P_4) = 1 &\iff P_4 = P_3\,.
\end{aligned}$$

Además, si Q_4 es otro punto de $\mathbb{P}_1$ distinto de P_1, P_2 y P_3, entonces P_4 y Q_4 tienen coordenadas homogéneas proporcionales en el sistema de referencia (P_1, P_2, P_3) si y sólo si $P_4 = Q_4$, es decir,

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_3, Q_4) \iff P_4 = Q_4\,.$$

Como consecuencia de lo dicho se sigue que fijada en $\mathbb{P}_1$ una referencia proyectiva (P_0, P_1, U) tenemos la biyección

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}_1 & \to & k_\infty = k \cup \{\infty\} \\
P & \mapsto & (P_0, P_1; U, P)
\end{array}\,,$$

la cual permite coordenar con sólo un parámetro la recta $\mathbb{P}_1$. Dado $P \in \mathbb{P}_1$, el escalar $(P_0, P_1; U, P)$ se denomina *parámetro proyectivo* de P respecto de la referencia (P_0, P_1, U).

Nota **2.3** En adelante, siempre que hablemos de la razón doble de cuatro puntos ordenados de una recta proyectiva estaremos suponiendo que los tres primeros son distintos.

Ejercicio 2.4 Pruébese que las proyectividades conservan las razones dobles de las cuaternas de puntos alineados. Veremos seguidamente que esta propiedad caracteriza las biyecciones entre rectas proyectivas que son proyectividades.

Proposición 2.5 *Una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}'_1$ entre dos rectas proyectivas es una proyectividad si y sólo si conserva las razones dobles.*

Demostración. Supongamos que φ conserva las razones dobles y fijemos una referencia proyectiva (P_0, P_1, U) en $\mathbb{P}_1$. Como los puntos $\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(U)$ son distintos podemos considerar la única proyectividad $\phi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}'_1$ que manda la referencia (P_0, P_1, U) de $\mathbb{P}_1$ a la referencia $(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(U))$ de $\mathbb{P}'_1$, y como las proyectividades conservan las razones dobles obtenemos que para cada punto $P \in \mathbb{P}_1$ tenemos

$$\begin{aligned}(\phi(P_0), \phi(P_1); \phi(U), \phi(P)) &= (P_0, P_1; U, P) \\ &= (\varphi(P_0), \varphi(P_1); \varphi(U), \varphi(P)) = (\phi(P_0), \phi(P_1); \phi(U), \varphi(P)),\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo $\phi(P) = \varphi(P)$; luego $\phi = \varphi$ y concluimos que φ es una proyectividad. ∎

Ejercicio 2.6 Dados cuatro puntos distintos P_1, P_2, P_3, P_4 de una recta proyectiva $\mathbb{P}_1$ y otros cuatro puntos distintos P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 en otra recta proyectiva $\mathbb{P}'_1$, pruébese que $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P'_1, P'_2; P'_3, P'_4)$ si y sólo si existe una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}'_1$ (única, según 1.9) que satisface $\varphi(P_i) = P'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Proposición 2.7 *Sean P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro puntos distintos de una recta proyectiva. Si sus coordenadas homogéneas respecto de una referencia dada son $P_i = (x_0^i, x_1^i)$, entonces se satisface*

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^3 \\ x_1^1 & x_1^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0^4 \\ x_1^2 & x_1^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0^3 \\ x_1^2 & x_1^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^4 \\ x_1^1 & x_1^4 \end{vmatrix}} .$$

Demostración. Si $\{v_0, v_1\}$ es una base normalizada asociada a la referencia dada, entonces existen escalares λ y μ tales que para los vectores $e_1 = \lambda(x_0^1 v_0 + x_1^1 v_1)$ y $e_2 = \mu(x_0^2 v_0 + x_1^2 v_1)$ tenemos $e_1 + e_2 = x_0^3 v_0 + x_1^3 v_1$; en efecto, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales planteado llegamos a

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_0^3 & x_0^2 \\ x_1^3 & x_1^2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad \mu = \frac{\begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^3 \\ x_1^1 & x_1^3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad \text{siendo } \Delta = \begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 \\ x_1^1 & x_1^2 \end{vmatrix} .$$

Por construcción $\{e_1, e_2\}$ es una base normalizada asociada a la referencia (P_1, P_2, P_3). Por otra parte, de la ecuación $x_0^4 v_0 + x_1^4 v_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$ obtenemos

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_0^4 & \mu x_0^2 \\ x_1^4 & \mu x_1^2 \end{vmatrix}}{\lambda\mu\Delta}, \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \lambda x_0^1 & x_0^4 \\ \lambda x_1^1 & x_1^4 \end{vmatrix}}{\lambda\mu\Delta},$$

y por lo tanto

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu\begin{vmatrix} x_0^4 & x_0^2\\ x_1^4 & x_1^2\end{vmatrix}}{\lambda\begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^4\\ x_1^1 & x_1^4\end{vmatrix}}\,. \quad \blacksquare$$

Corolario 2.8 *Con las notaciones de* 2.7, *si* $x_1^i \neq 0$ *y* $\theta_i = x_0^i/x_1^i$ $(i=1,2,3,4)$, *entonces*

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_4)}{(\theta_2-\theta_3)(\theta_1-\theta_4)}\,.$$

Corolario 2.9 *La razón doble es invariante por las permutaciones pertenecientes al* grupo de Klein, $V=\{\mathrm{Id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$*; es decir, si* P_1,P_2,P_3,P_4 *son cuatro puntos distintos de una recta proyectiva, entonces:*

$$\begin{aligned}(P_1,P_2;P_3,P_4)&=(P_2,P_1;P_4,P_3)\\&=(P_3,P_4;P_1,P_2)\\&=(P_4,P_3;P_2,P_1)\,.\end{aligned}$$

2.10 Sean P_1,P_2,P_3,P_4 cuatro puntos distintos de una recta proyectiva $\mathbb{P}_1$. El grupo simétrico S_4 tiene $4!=24$ permutaciones, por lo que hay 24 ordenaciones posibles de los cuatro puntos de las que obtendríamos 24 razones dobles. Identificando el grupo simétrico S_3 con el subgrupo de las permutaciones de S_4 que dejan fijo el elemento 4, es claro que toda permutación de S_4 se obtiene componiendo una permutación de S_3 con una permutación del grupo de Klein. Por lo tanto, de 2.9 se sigue que de las 24 razones dobles posibles hay a lo más 6 diferentes (las correspondientes a permutaciones de S_3).

Como además S_3 está generado por las trasposiciones (12) y (23), para las que se cumplen

$$(P_2,P_1;P_3,P_4)=1/(P_1,P_2;P_3,P_4)\,,\qquad (P_1,P_3;P_2,P_4)=1-(P_1,P_2;P_3,P_4)\,,$$

obtenemos los siguientes seis valores (no necesariamente distintos):

$$\begin{aligned}&(P_1,P_2;P_3,P_4)=\lambda\,, && (P_1,P_3;P_2,P_4)=1-\lambda\,, && (P_2,P_1;P_3,P_4)=\frac{1}{\lambda}\,,\\ &(P_2,P_3;P_1,P_4)=1-\frac{1}{\lambda}\,, && (P_3,P_1;P_2,P_4)=\frac{1}{1-\lambda}\,, && (P_3,P_2;P_1,P_4)=\frac{\lambda}{\lambda-1}\,.\end{aligned}$$

(Obsérvese que $1-\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 0$ porque los cuatro puntos los estamos suponiendo distintos.)

2.11 Una consecuencia de 2.10 es que cada función simétrica de esas 6 razones dobles es un invariante proyectivo de los cuatro puntos P_1,P_2,P_3,P_4. Por ejemplo, la suma de los dobles productos de las 6 razones dobles es la funcion racional

$$s_2(\lambda)=6-\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}\,,$$

y este invariante s_2 clasifica los conjuntos (no ordenados) de 4 puntos distintos de la recta proyectiva bajo la acción del grupo lineal proyectivo (al igual que, según 2.6, la razón doble clasifica las cuaternas ordenadas); es decir, si Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 son cuatro puntos distintos de otra recta proyectiva $\mathbb{P}_1'$ y $(Q_1, Q_2; Q_3, Q_4) = \mu$, entonces existen una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1'$ tal que $\varphi(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ si y sólo si

$$\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} = \frac{(\mu^2 - \mu + 1)^3}{\mu^2(\mu - 1)^2}\,.$$

Efectivamente: basta tener en cuenta que el polinomio $p_\lambda(x) = (\lambda^2 - \lambda + 1)^3 x^2(x-1)^2 - \lambda^2(\lambda - 1)^2(x^2 - x + 1)^3 \in k[x]$ tiene sus seis raíces en k, que son λ, $1-\lambda$, $1/\lambda$, $1 - 1/\lambda$, $1/(1-\lambda)$ y $\lambda/(\lambda - 1)$, por lo que si $p_\lambda(\mu) = 0$, entonces debe ser μ igual a una de dichas raíces; si fuera por ejemplo, $\mu = 1 - 1/\lambda$, entonces $(P_2, P_3; P_1, P_4) = (Q_1, Q_2; Q_3, Q_4)$.

Definición 2.12 Diremos que cuatro puntos ordenados P_1, P_2, P_3, P_4 de una recta proyectiva forman una *cuaterna armónica* cuando $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$, en cuyo caso también diremos que la pareja (P_1, P_2) *separa armónicamente* a la pareja (P_3, P_4), o bien que P_4 es el *conjugado armónico* de P_3 respecto de la pareja (P_1, P_2).

Según 2.9, (P_1, P_2) separa armónicamente a (P_3, P_4) si y sólo si (P_3, P_4) separa armónicamente a (P_1, P_2); por este motivo, cuando $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$ se dice que las parejas (P_1, P_2) y (P_3, P_4) se separan armónicamente.

Ejercicio 2.13 Pruébese que cuatro puntos distintos P_1, P_2, P_3, P_4 de una recta proyectiva forman una cuaterna armónica si y sólo si $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_2, P_1; P_3, P_4)$. Por tanto, si P_2 es el conjugado armónico de P_1 respecto de la pareja (P_3, P_4), entonces P_1 es el conjugado armónico de P_2 respecto de la pareja (P_3, P_4), por lo que en ese caso se dice que P_1 y P_2 son conjugados armónicos respecto de (P_3, P_4).

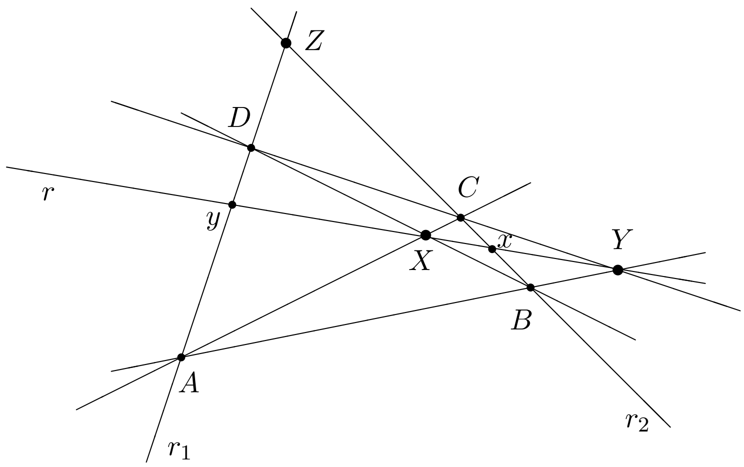

Figura 2.2

2.14 (Cuadrivértice completo) Un *cuadrivértice completo* es la figura plana determinada por cuatro puntos *vértices*, de los cuales nunca tres están alineados, y por las seis rectas *lados* que los unen dos a dos. Pares de lados que se cortan en puntos que no son del cuadrivértice se llaman *opuestos*, y los puntos de corte de lados opuestos se denominan puntos *diagonales*. Los seis lados se distribuyen en tres pares de lados opuestos, por lo que hay tres puntos diagonales.

Tenemos la siguiente importante propiedad: *dos puntos diagonales de un cruadrivértice completo separan armónicamente a las intersecciones de la recta que los contiene con los lados del cuadrivértice que pasan por el tercer punto diagonal.*

En efecto, si consideramos el cuadrivértice completo A, B, C, D de la figura 2.2, entonces proyectanto la recta r sobre la recta r_2 desde A y proyectando r_2 sobre r desde D obtenemos $(x, y; X, Y) = (x, Z; C, B)$ y $(x, Z; C, B) = (x, y; Y, X)$, respectivamente; por lo tanto $(x, y; X, Y) = (x, y; Y, X)$ y según el ejercicio 2.13 tenemos $(x, y; X, Y) = -1$.

2.15 Supongamos que $\dim E \geq 3$ y fijemos un sistema de referencia proyectivo $(P_0, \ldots, P_n, U)$ en $\mathbb{P}(E)$. Dado $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, el hiperplano $P_0 + \cdots + \widehat{P_i} + \cdots + P_n$ se dice que es la *cara* del símplice de referencia $(P_0, \ldots, P_n)$ que es opuesta al *vértice* P_i, donde ponemos el símbolo '$\widehat{\ }$' sobre el punto que no aparece; es claro que los puntos de dicha cara son aquellos de $\mathbb{P}(E)$ cuya coordenada i-ésima en la referencia fijada es 0, es decir, que la "ecuación" de dicho hiperplano en la referencia fijada es $x_i = 0$ (véase la próxima sección).

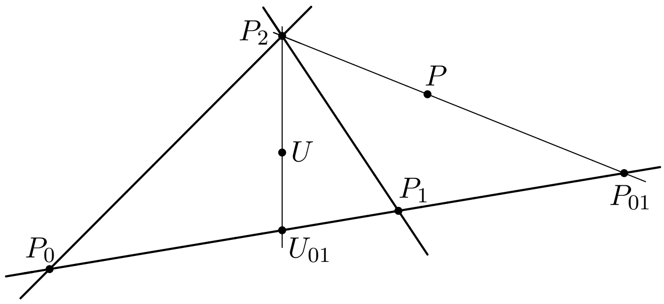

Figura 2.1

Fijemos ahora un par de índices distintos $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. Para cada punto $P \in \mathbb{P}(E)$ denotemos (véase en la figura 2.1 el caso $n = 2$, $i = 0$ y $j = 1$):

$$P_{ij} = (P_i + P_j) \cap (P_0 + \cdots + \widehat{P_i} + \cdots + \widehat{P_j} + \cdots + P_n + P)\,,$$
$$U_{ij} = (P_i + P_j) \cap (P_0 + \cdots + \widehat{P_i} + \cdots + \widehat{P_j} + \cdots + P_n + U)\,.$$

La recta $P_i + P_j$ es la *arista* del simplice de referencia determinada por los vértices P_i y P_j.

Proposición 2.16 (Interpretación geométrica de las coordenadas homogéneas) *Con la notación de* 2.15, *si* $P = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ *en la referencia de partida, entonces* $P_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ *en la referencia proyectiva* (P_i, P_j, U_{ij}) *de la arista* $P_i + P_j$. *Como consecuencia, las coordenas homogéneas de* P *se pueden obtener proyectándolo sobre las aristas y calculando razones dobles:*

$$P = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, 1, 0, \ldots, 0)\,,$$

donde r *es el índice* j *más grande tal que* P *no está en la cara opuesta al vértice* P_j *(esto es,* $\alpha_j \neq 0$*), y para cada* $i = 0, 1, \ldots, r-1$ *tenemos*

$$\lambda_i = (P_i, P_r; U_{ir}, P_{ir})\,.$$

Demostración. Sea $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base normalizada asociada a la referencia $(P_0, \dots, P_n, U)$. Si denotamos $e = \alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_n e_n$ y $V = \langle e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n \rangle$, entonces $P = \pi(e)$ y $\pi(V) = P_0 + \cdots + \widehat{P_i} + \cdots + \widehat{P_j} + \cdots + P_n$. Sea $T : E \to \langle e_i, e_j \rangle$ la proyección de $E = V \oplus \langle e_i, e_j \rangle$ sobre $\langle e_i, e_j \rangle$; proyectivizando T obtenemos la aplicación (véase I.2.7):

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}(E) - \pi(V) & \to & \mathbb{P}(\langle e_i, e_j \rangle) = P_i + P_j \\ Q & \mapsto & (\pi(V) + Q) \cap (P_i + P_j)\,. \end{array}$$

En particular tenemos $U_{ij} = \varphi(U)$ y $P_{ij} = \varphi(P)$, es decir,

$$U_{ij} \;=\; \varphi(U) \;=\; \pi\Big(T\Big(\sum_{k=0}^{n+1} e_k\Big)\Big) = \pi(e_i + e_j)\,, \tag{2.1}$$

$$P_{ij} \;=\; \varphi(P) \;=\; \pi\Big(T\Big(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k e_k\Big)\Big) = \pi(\alpha_i e_i + \alpha_j e_j)\,. \tag{2.2}$$

Según (2.1) tenemos que $\{e_i, e_j\}$ es una base normalizada asociada a la referencia (P_i, P_j, U_{ij}) de la recta $P_i + P_j$, y de (2.2) se sigue que $P_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ en dicha referencia. ∎

3 Ecuaciones Homogéneas

Fijemos en esta sección un sistema de referencia proyectivo $(P_0, \dots, P_n, U)$ en $\mathbb{P}(E)$.

3.1 Si X es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E)$, entonces existe un único subespacio vectorial V de E tal que $X = \pi(V)$. Si $\{e_0, \dots, e_n\}$ es una base normalizada asociada al sistema de referencia fijado, y si $\dim X = m$, entonces $\dim V = m + 1$ y por lo tanto unas ecuaciones implícitas de V en la base $\{e_0, \dots, e_n\}$ serán de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{10}x_0 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n-m,0}x_0 + \cdots + a_{n-m,n}x_n & = & 0 \end{array}\right\}. \tag{3.1}$$

Si un punto $P \in \mathbb{P}(E)$ tiene coordenadas homogéneas iguales a $(x_0, \dots, x_n)$, entonces es claro que $P \in X$ si y sólo si las coordenadas $(x_0, \dots, x_n)$ satisfacen las ecuaciones (3.1).

Definición 3.2 Con la notación de 3.1, diremos que (3.1) son unas *ecuaciones homogéneas de la subvariedad lineal* X en el sistema de referencia proyectivo $(P_0, \dots, P_n, U)$.

Por ejemplo, fijado un índice i la proyectivización del subespacio vectorial $\langle e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$ es la cara del símplice de referencia opuesta al vértice P_i, por lo que la ecuación de este hiperplano de $\mathbb{P}(E)$ es $x_i = 0$.

Ejercicio 3.3 Pruébese la propiedad de un cuadrivértice completo A, B, C, D descrita en 2.14, haciéndose los cálculos respecto de la referencia proyectiva (A, B, C, D) del plano donde se encuentra el cuadrivértice.

3.4 Supongamos ahora que $\mathbb{P}(\bar{E})$ es otro espacio proyectivo en el que se ha fijado una referencia $(\bar{P}_0,\dots,\bar{P}_n,\bar{U})$, y que $\varphi:\mathbb{P}(E)\to\mathbb{P}(\bar{E})$ es una proyectividad. Sea $T:E\to\bar{E}$ un representante lineal de φ y sea $A=(a_{ij})\in M_{n+1}(k)$ la matriz de T respecto de ciertas bases normalizadas asociadas a las referencias $(P_0,\dots,P_n,U)$ y $(\bar{P}_0,\dots,\bar{P}_n,\bar{U})$. Dado un punto $P\in\mathbb{P}(E)$ cuyas coordenas homogéneas en la referencia de $\mathbb{P}(E)$ son $(x_0,\dots,x_n)$, las coordenadas homogéneas de $\varphi(P)=\widetilde{T}(P)$ en la referencia de $\mathbb{P}(\bar{E})$ son la $(n+1)$-upla $(y_0,\dots,y_n)$ dada por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 &=& a_{00}x_0+a_{01}x_1+\cdots+a_{0n}x_n \\ y_1 &=& a_{10}x_0+a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots && \\ y_n &=& a_{n0}x_0+a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{array}\right\}. \tag{3.2}$$

Definición 3.5 Con la notación de 3.4, diremos que (3.2) son las *ecuaciones homogéneas de la proyectividad* φ en los sistemas de referencia proyectivos $(P_0,\dots,P_n,U)$ y $(\bar{P}_0,\dots,\bar{P}_n,\bar{U})$. Nótese que la matriz A que determina las ecuaciones (3.2) está determinada salvo un factor de proporcionalidad.

Para simplificar, cuando sean $E=\bar{E}$ y $(P_0,\dots,P_n,U)=(\bar{P}_0,\dots,\bar{P}_n,\bar{U})$ diremos que (3.2) son las ecuaciones homogéneas de la proyectividad φ en la referencia $(P_0,\,\dots,P_n,U)$.

Observación **3.6** Dados $P=(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{P}(E)$ y $\bar{P}=(\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n)\in\mathbb{P}(\bar{E})$, en la afirmación "$\widetilde{T}(P)=\bar{P}$ si y sólo si las coordenadas obtenidas de las ecuaciones (3.2) a partir de $(x_0,\dots,x_n)$ son IGUALES a $(\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n)$", debe tenerse en cuenta que por tratarse de coordenadas homogéneas la palabra IGUALES significa PROPORCIONALES.

Ejemplos 3.7 Dado un sistema de referencia $(P_0^*,\dots,P_n^*,U^*)$ en $\mathbb{P}(E^*)$, diremos que las referencias $(P_0,\dots,P_n,U)$ y $(P_0^*,\dots,P_n^*,U^*)$ son *duales* una de la otra si existen bases normalizadas asociadas a ellas que son duales una de la otra.

Supongamos que $(P_0,\dots,P_n,U)$ y $(P_0^*,\dots,P_n^*,U^*)$ son referencias de $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E^*)$, respectivamente, que son duales una de la otra. Dado un punto P de $\mathbb{P}(E)$, su subvariedad incidente P° es un hiperplano del espacio proyectivo dual $\mathbb{P}(E^*)$, y podemos preguntarnos: si $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ son las coordenadas homogéneas de P (en la referencia de $\mathbb{P}(E)$), cómo serán las ecuaciones homogéneas del hiperplano P° (en la referencia de $\mathbb{P}(E^*)$)?

Sea $\{e_0,\dots,e_n\}$ una base normalizada asociada a la referencia de $\mathbb{P}(E)$ y sea $\{\omega_0,\dots,\omega_n\}$ su base dual, de modo que esta última es una base normalizada asociada a la referencia de $\mathbb{P}(E^*)$; si $\omega=y_0\omega_0+\cdots+y_n\omega_n$ y $e=\alpha_0e_0+\cdots+\alpha_ne_n$, entonces $\omega\in\langle e\rangle^\circ$ si y sólo si $\omega(e)=\alpha_0y_0+\cdots+\alpha_ny_n=0$, es decir, la ecuación implícita del hiperplano vectorial $\langle e\rangle^\circ$ de E^* en la base $\{\omega_0,\dots,\omega_n\}$ es

$$\alpha_0y_0+\cdots+\alpha_ny_n=0\,,$$

que es también la ecuación homogénea del hiperplano $P^\circ=\pi(\langle e\rangle^\circ)$ en la referencia de $\mathbb{P}(E^*)$.

Recíprocamente, si X es un hiperplano de $\mathbb{P}(E)$ cuya ecuación homogénea es $a_0x_0+\cdots+a_nx_n=0$, entonces las coordenadas homogéneas del punto X° de $\mathbb{P}(E^*)$ son $(a_0,\dots,a_n)$.

Todo lo dicho puede generalizarse fácilmente a otras dimensiones. Por ejemplo, si r es una recta de $\mathbb{P}(E)$ que pasa por dos puntos distintos $P=(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ y $Q=(\beta_0,\dots,\beta_n)$ (es decir,

$r = P + Q$), entonces $r^\circ = P^\circ \cap Q^\circ$ y por lo tanto las ecuaciones homogéneas de la subvariedad lineal r° de $\mathbb{P}(E^*)$ son

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_0 y_0 + \cdots + \alpha_n y_n &=& 0 \\ \beta_0 y_0 + \cdots + \beta_n y_n &=& 0 \end{array}\right\} .$$

4 Homografías

Siempre que trabajemos con homografías supondremos que la característica del cuerpo base es distinta de 2.

Definición 4.1 Fijemos una referencia (P_0, P_1, U) en una recta proyectiva $\mathbb{P}_1$. Sea $\tau : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ una homografía y sean

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 &=& a x_0 + b x_1 \\ y_1 &=& c x_0 + d x_1 \end{array}\right\}$$

las ecuaciones homogéneas de τ respecto de (P_0, P_1, U). Si dado $P \in \mathbb{P}_1$ denotamos $\theta = (P_0, P_1; U, P)$ y $\theta' = (P_0, P_1; U, \tau(P))$ $(\theta, \theta' \in k_\infty$, véase 2.2), entonces de las ecuaciones de τ obtenemos

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d} . \tag{4.1}$$

Nótese que la anterior ecuación está totalmente determinada por τ y por (P_0, P_1, U), pues la homografía y la referencia determinan la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ salvo un factor de proporcionalidad.

Diremos que (4.1) es la *ecuación de la homografía* τ en el sistema de referencia proyectivo (P_0, P_1, U) (cuando $\theta = \infty$ se obtiene $\theta' = a/c$, ya que $\theta = \infty$ si y sólo si $x_1 = 0$).

Ejercicio 4.2 Con la notación de la anterior definición: (a) pruébese que la ecuación de τ es $\theta' = \theta$ si y sólo si τ es la identidad; (b) qué condiciones deben satisfacer los escalares a, b, c, d para que una expresión como la (4.1) sea la ecuación de una homografía?

Definiciones 4.3 Sea τ una homografía distinta de la identidad de una recta proyectiva, en cuyo caso sabemos que τ tiene a lo sumo dos puntos fijos. Diremos que τ es *elíptica* si no tiene puntos fijos, que es *parabólica* si tiene un único punto fijo, y que es *hiperbólica* si tiene dos puntos fijos distintos.

Si la ecuación de τ en una referencia proyectiva es $\theta' = (a\theta + b)/(c\theta + d)$, entonces los puntos dobles de τ son aquellos para los que se satisface $\theta' = \theta$, es decir, los que vienen dados por las raíces del polinomio de segundo grado $cx^2 + (d - a)x - b \in k[x]$ (nótese que este polinomio no es nulo porque τ no es la identidad); por tanto τ es elíptica, parabólica o hiperbólica según dicho polinomio tenga ninguna, una ó dos raíces en k, respectivamente. Este hecho es conveniente interpretarlo del siguiente modo: τ tiene siempre dos puntos fijos, ya que, o el polinomio tiene dos raíces distintas en k y por lo tanto τ tiene dos puntos fijos distintos en $\mathbb{P}_1$ (caso hiperbólico), o el polinomio tiene una raíz de multiplicidad 2 en k y por lo tanto τ tiene un punto fijo doble en $\mathbb{P}_1$ (caso parabólico), o el polinomio tiene dos raíces distintas en $\bar{k}$ (= cierre algebraico de k) y no en k, y por lo tanto τ tiene dos puntos fijos distintos en $\bar{\mathbb{P}}_1$ (= recta proyectiva sobre $\bar{k}$) y no en $\mathbb{P}_1$ (caso elíptico).

Lema 4.4 (Ecuaciones reducidas de las homografías) *Para una homografía τ de una recta proyectiva tenemos:*

(i) *Si τ es hiperbólica, entonces en alguna referencia su ecuación es $\theta' = a\theta$ ($a \neq 0, 1$).*

(ii) *Si τ es parabólica, entonces en alguna referencia su ecuación es $\theta' = \theta + b$ ($b \neq 0$).*

(iii) *Si τ es hiperbólica e involutiva, entonces en alguna referencia su ecuación es $\theta' = -\theta$, y en alguna otra referencia su ecuación es $\theta' = 1/\theta$.*

(iv) *Si τ es elíptica e involutiva, entonces en alguna referencia su ecuación es $\theta' = b/\theta$ (b sin raíces cuadradas en el cuerpo).*

Demostración. Supongamos en primer lugar que τ es hiperbólica y sea (P_0, P_1, U) una referencia proyectiva tal que P_0 y P_1 son los puntos fijos de τ. Si $\{e_0, e_1\}$ es una base normalizada asociada a dicha referencia y $T : E \to E$ es un representante lineal de τ, entonces existen $\lambda, \mu \in k^*$ tales que $T(e_0) = \lambda e_0$ y $T(e_1) = \mu e_1$; como además $\tau(U) \neq U$ debe ser $\lambda \neq \mu$, por lo que la ecuación de τ en la referencia fijada es $\theta' = a\theta$ con $a = \lambda/\mu \neq 0, 1$. Si τ es además una involución entonces $\lambda + \mu = \operatorname{tra} T = 0$ (véase el problema I.4.4), es decir, $a = -1$ y tenemos la primera parte de (iii).

Sea ahora τ parabólica y consideremos una referencia proyectiva (P_0, P_1, U) con P_0 el único punto fijo de τ. Si $\{e_0, e_1\}$ es una base normalizada asociada a dicha referencia y $T : E \to E$ es un representante lineal de τ, entonces existen $a, b, c \in k^*$ tales que $T(e_0) = ae_0$ y $T(e_1) = be_0 + ce_1$. Cambiando si es necesario T por otro isomorfismo proporcional podemos suponer que $c = 1$ y por tanto que la matriz de T en la base considerada es $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como T no puede tener dos valores propios distintos debe ser $a = 1$, por lo que la ecuación de τ en la referencia fijada es $\theta' = \theta + b$ con $b \neq 0$.

Para la segunda parte de (iii), si τ es una involución hiperbólica y (P_0, P_1, U) es una referencia tal que P_0 y P_1 están en involución y U es fijo, entonces es fácil ver que la ecuación de τ en esa referencia es $\theta' = 1/\theta$.

La demostración de la parte (iv) se deja como ejercicio. ∎

Ejercicio 4.5 Para una homografía τ tenemos: (a) si τ no es involución entonces τ y τ^2 son del mismo tipo; (b) si τ es parabólica entonces no es involución; (c) si τ es parabólica entonces τ^2 también es parábolica.

Lema 4.6 *Dadas dos involuciones distintas (y distintas de la identidad) sobre una recta proyectiva real, una de las cuales es elíptica, existe una única pareja de puntos que están en involución para ambas.*

Demostración. Sean $\sigma \neq \tau$ dos involuciones distintas de la identidad de una recta proyectiva real $\mathbb{P}_1$, con σ elíptica. Tenemos que probar que existen exactamente dos puntos P en $\mathbb{P}_1$ tal que $\sigma(P) = \tau(P)$, es decir, que la homografía composición $\sigma\tau$ es hiperbólica. Según el lema 4.4 tenemos que existe una referencia proyectiva en $\mathbb{P}_1$ respecto de la cual las ecuaciones de σ y τ vienen dadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha > 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

respectivamente, de modo que la ecuación de $\sigma\tau$ en la misma referencia es la definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $\sigma\tau$ tiene dos puntos fijos distintos porque el polinomio $x^2 + (b+\alpha c)x - \alpha a$ tiene dos raíces distintas reales, como se comprueba fácilmente. ∎

5 Problemas

5.1 La figura dual de un cuadrivértice completo se denomina *cuadrilátero completo*. Dígase de qué subvariedades lineales está compuesta dicha figura. Enúnciese la propiedad dual de la dada en 2.14 (utilizándose el problema I.4.10 para su justificación).

5.2 Construcción del conjugado armónico: Dados tres puntos distintos y alineados A, B, C de un plano proyectivo, el conjugado armónico de C respecto del par (A, B) puede construirse del siguiente modo: Si elegimos un punto G exterior a la recta $A+B$ y un punto F de la recta $C+G$ que no sea C ni G, entonces el punto de corte de la recta $A+B$ con la recta que pasa por los puntos $(A+F)\cap(B+G)$ y $(A+G)\cap(B+F)$ no depende de los puntos F y G elegidos y es el conjugado armónico de C respecto del par (A, B).

5.3 Dados tres puntos distintos P_1, P_2, P_3 de una recta proyectiva $\mathbb{P}_1$, el cálculo del conjugado armónico de P_3 respecto de (P_1, P_2) se reduce a encontrar el punto $P \in \mathbb{P}_1$ solución de la ecuación $(P_1, P_2; P_3, P) = -1$; dicha solución será siempre distinta de los puntos P_1 y P_2 (ya que $-1 \neq \infty$ y $-1 \neq 0$), pero puede ocurrir que la solución sea $P = P_3$. Cuál es la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra?

5.4 Teorema de Fano: Dado un cuadrivértice completo en un plano proyectivo, sus puntos diagonales están alineados si y sólo si la característica del cuerpo base es igual a 2.

5.5 En un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ de dimensión $n \geq 2$, sea X una subvariedad lineal de dimensión $n-2$ y considérese la radiación $\mathbb{P}_n/X$ de base X, que en este caso es una recta proyectiva que se denomina *haz de hiperplanos* que pasan por X (véase I.1.14). En particular tiene sentido hablar de la razón doble de cuatro hiperplanos distintos que pasen por X.

Sean H_1, H_2, H_3, H_4 cuatro hiperplanos distintos de $\mathbb{P}_n$ que son incidentes con X (esto es, cuatro puntos distintos de $\mathbb{P}_n/X$). Si r es una recta de $\mathbb{P}_n$ que no corta a X, entonces r corta a cada hiperplano H_i en un único punto P_i, de modo que P_1, P_2, P_3, P_4 son cuatro puntos distintos de r y tenemos $(H_1, H_2; H_3, H_4) = (P_1, P_2; P_3, P_4)$.

5.6 En un plano proyectivo, sean a, b, c tres rectas distintas que son incidentes con un punto P. Constrúyase gráficamente el conjugado armónico de c respecto del par (a, b) de las dos formas siguientes:

(a) teniendo en cuenta los problemas 5.2 y 5.5;

(b) haciendo la construcción dual de la descrita en 5.2.

5.7 En el problema I.4.8 se pedía demostrar el teorema del eje transversal haciendo uso del teorema de Pappus. Hágase una demostración del teorema del eje transversal que no utilice el teorema de Pappus, y dedúzcase el teorema de Pappus del teorema del eje transversal.

5.8 Con la notación de la proposición 2.16, si Q_{ij} es el conjugado armónico de U_{ij} respecto del par (P_i, P_j), entonces el conjunto de puntos $\{Q_{ij} : 0 \leq i, j \leq n\}$ está dentro de un hiperplano.

5.9 Sea $(P_0, \ldots, P_n, U)$ un sistema de referencia de $\mathbb{P}(E)$ y sea $(P_0^*, \ldots, P_n^*, U^*)$ un sistema de referencia de $\mathbb{P}(E^*)$. Con la misma notación de 2.16, la condición necesaria y suficiente para que las referencias $(P_0, \ldots, P_n, U)$ y $(P_0^*, \ldots, P_n^*, U^*)$ sean duales es que para todo par de índices distintos $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ se satisfagan:

(a) el hiperplano $(P_i^*)^\circ$ es la cara opuesta al vértice P_i del símplice $(P_0, \ldots, P_n)$;

(b) el hiperplano $(U^*)^\circ$ y la recta $P_i + P_j$ se cortan en el conjugado armónico de U_{ij} respecto del par (P_i, P_j).

5.10 Si P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 son cinco puntos distintos de una recta proyectiva, entonces $(P_1, P_2; P_3, P_4) \cdot (P_1, P_2; P_4, P_5) = (P_1, P_2; P_3, P_5)$.

5.11 Sea $\{e_0, e_1\}$ una base de un espacio vectorial E y sean $P_0 = \pi(e_0)$, $P_1 = \pi(e_1)$ y $U = \pi(e_0 - e_1)$. Calcúlense las ecuaciones en el sistema de referencia (P_0, P_1, U) de la homografía τ de $\mathbb{P}(E)$ que satisface $\tau(P_0) = \pi(e_0 + e_1)$, $\tau(P_1) = \pi(e_0 - 2e_1)$ y $\tau(U) = \pi(2e_0 + e_1)$.

5.12 Sea $\tau : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ una homografía hiperbólica cuyos puntos dobles son A y B. La razón doble $(A, B; P, \tau(P))$ no depende del punto $P \in \mathbb{P}_1 - \{A, B\}$. Dicha razón doble (unívocamente determinada salvo el paso al inverso) se denomina *módulo* de la homografía. Conclúyase que τ es involutiva si y sólo si su módulo es -1.

5.13 Dada una homografía hiperbólica τ, si su ecuación es $\theta' = (a\theta + b)/(c\theta + d)$ y su módulo es λ, entonces λ y $1/\lambda$ son las raíces del polinomio $(ad - bc)(x + 1)^2 - (a + b)^2 x$ (es decir, si T es un representante lineal de τ, entonces λ y $1/\lambda$ son las raíces del polinomio $(\det T)(x + 1)^2 - (\operatorname{traza} T)^2 x$).

5.14 Dado un par de puntos distintos de una recta proyectiva, existe una única involución de dicha recta que los tiene como puntos dobles. Dicha involución manda cada punto (distinto de los del par dado) a su conjugado armónico respecto de dicho par.

5.15 Si se cortan los tres pares de lados opuestos de un cuadrivértice completo con una recta arbitraria (distinta a los lados del cuadrivértice), entonces se obtienen tres pares de puntos que están en involución.

5.16 Sea T un representante lineal de una homografía τ y denotemos

$$I(\tau) = \frac{(\operatorname{traza} T)^2}{\det T}\,.$$

(a) $I(\tau)$ no depende del representante T elegido (y se denomina *invariante* de τ).

(b) $I(\tau) = 0$ si y sólo si τ es involutiva.

(c) Si τ es hiperbólica y de módulo m, entonces se satisface $I(\tau) = 2 + m + 1/m$.

5.17 Si τ es una homografía ($\neq$ identidad) de una recta proyectiva compleja, entonces:
(a) τ no puede ser elíptica;
(b) τ es parabólica si y sólo si $I(\tau) = 4$;
(c) si τ es una involución, entonces es hiperbólica (o sea, sobre una recta proyectiva compleja no hay más involuciones que las descritas en el problema 5.14).

5.18 Sean r y r' dos rectas distintas de un plano proyectivo real. Dadas involuciones σ y σ' sobre r y r', respectivamente, determínense las condiciones necesarias y suficientes para que exista alguna perspectividad $\tau : r \to r'$ tal que $\tau\sigma = \sigma'\tau$. En tal caso, calcúlese el número de tales perspectividades.

5.19 Dada una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ cualquiera y dados dos puntos $P \in \mathbb{P}_n$, $P' \in \mathbb{P}'_n$, se dice que (P, P') es una pareja de puntos homólogos para φ si $\varphi(P) = P'$.

Si el cuerpo base es algebraicamente cerrado, dos homografías distintas de una recta proyectiva tienen "en general" dos pares de puntos homólogos comunes.

5.20 Dadas dos homografías no elípticas sobre una recta proyectiva, la condición necesaria y suficiente para que conmuten es que tengan los mismos puntos dobles, o que sean dos involuciones cuyos pares de puntos dobles se separan armónicamente.

5.21 Determínese la homografía que transforma $(1,1)$ en $(1,-1)$, $(2,1)$ en $(1,1)$, y $(1,2)$ en $(0,2)$. Hállense también los puntos dobles de la homografía involutiva que transforma $(1,1)$ en $(1,4)$, y $(1,-1)$ en $(1,6)$.

5.22 Discútase, según el valor del parámetro a, el número de puntos dobles de las siguiente homografías reales: $\theta\theta' + (a-4)\theta + (a+4)\theta' + 9 = 0$.

5.23 Dados cinco puntos distintos A, B, C, P, Q de una recta proyectiva, calcúlese la razón doble $(A, Q; C, P)$ sabiendo que $(A, P; B, C) = (A, B; Q, C) = -1$.

5.24 Calcúlese el conjugado armónico de (0,1) respecto de (1,1) y (1,2), y también la razón doble de los puntos $(a, 1)$, $(1, b)$, (0,1), (1,0).

5.25 Determínense los pares de puntos homólogos comunes a las homografías:

$$\theta' = \frac{4\theta + 6}{3\theta + 2}\,, \qquad \theta' = \frac{4\theta + 2}{\theta + 2}\,.$$

5.26 Hállense las ecuaciones reducidas de las siguientes homografías:

$$3\theta\theta' - \theta + 5\theta' - 2 = 0\,, \quad \theta\theta' - 2\theta + 1 = 0\,, \quad 4\theta\theta' + 13\theta - \theta' + 9 = 0\,, \quad \theta\theta' - \theta - \theta' + 2 = 0\,.$$

5.27 Calcúlense las autoproyectividades de un plano proyectivo que transforman el punto (1,1,0) en el punto (0,1,1) y dejan invariantes todos los puntos de la recta $x + y + z = 0$.

5.28 En un plano proyectivo, calcúlense la razones doble de los cuatro puntos alineados $(1,1,1)$, $(0,1,2)$, $(-1,0,1)$, $(1,2,3)$, y de las cuatro rectas concurrentes $x+y = 0$, $2x+y+z = 0$, $x + z = 0$, $y - z = 0$.

5.29 En un espacio proyectivo de dimensión 3, determínese el conjugado armónico del plano $3x+3y-4z+2t=0$ respecto del par de planos $3x-3y+z-5t=0$, $5x+3y-5z+t=0$.

5.30 Determínense los elementos invariantes por las siguientes autoproyectvidades de un plano proyectivo real en el que se ha fijado una referencia proyectiva:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& 3x-2z \\ y' &=& 3y \\ z' &=& x-y \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{rcl} x' &=& x+z \\ y' &=& 2x+y \\ z' &=& -2z \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{rcl} x' &=& x+2y \\ y' &=& y \\ z' &=& z \end{array}\right\}.$$

5.31 La condición necesaria y suficiente para que una autoproyectividad sea una homología no especial es que en alguna referencia sus ecuaciones sean

$$x_0' = mx_0\,,\quad x_1' = x_1\,,\quad \ldots,\quad x_n' = x_n \qquad\qquad (m \neq 0,1)\,,$$

en cuyo caso el escalar m es un invariante que se denomina *módulo* de la homología. Concretamente, si H y P_0 son, respectivamente, el eje y el vértice de una homología no especial $\varphi : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, entonces para todo $P \in \mathbb{P}_n$ no fijo por φ tenemos

$$(P_0, Q_0; P, \varphi(P)) = m\,,$$

donde $Q_0 = (P_0 + P) \cap H$.

5.32 Una homología no especial es una involución si y sólo si su módulo es -1, en cuyo caso se denomina *homología armónica*.

Toda autoproyectividad involutiva (distintas de la identidad) de un plano proyectivo es una homología armónica.

5.33 Dos familias de puntos $P_1P_2P_3\ldots P_k$ y $Q_1Q_2Q_3\ldots Q_k$ de un espacio proyectivo (con $P_i \neq Q_i$) se dice que "son perspectivas" si todas las rectas $P_i + Q_i$ concurren en un punto.

En un plano proyectivo en el que se ha fijado una referencia, el triángulo de vértices $(1,p,p')$, $(q',1,q)$, $(r,r',1)$ es perspectivo con el símplice de referencia si y sólo si $pqr = p'q'r'$.

5.34 Dados dos triángulos de un plano proyectivo, la condición necesaria y suficiente para que sean perspectivos es que exista una homología no especial del plano que transforme uno en el otro, en cuyo caso, el eje y el vértice de la homología coinciden con el eje y el vértice de perspectividad de los triángulos.

5.35 Diremos que una autoproyectividad de un espacio proyectivo de dimensión tres es *biaxial* si tiene dos rectas de puntos dobles que se cruzan, que reciben el nombre de *ejes* de la proyectividad.

Dada una proyectividad biaxial τ de ejes r_1 y r_2, si P es un punto que está fuera de r_1 y de r_2, entonces la recta $P + \tau(P)$ corta al eje r_i en un punto Q_i $(i = 1,2)$; además, la razón doble $(Q_1, Q_2; P, \tau(P))$ no depende del punto P. Dicha razón doble (unívocamente determinada salvo el paso al inverso) se denomina *módulo* de la proyectividad biaxial.

5.36 Hállense las ecuaciones de la proyectividad biaxial de módulo 2 cuyos ejes son las rectas $r_1 \equiv\; x=0\,,\; y-z=0\,,\;\; r_2 \equiv\; t=0\,,\; y+z=0\,.$

5.37 Determínese para qué valores del parámetro a las siguientes ecuaciones definen una proyectividad:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& ax+y-z+t \\ y' &=& x+ay-z+t \\ z' &=& x-y+az+t \\ t' &=& x-y+z+at \end{array}\right\} .$$

Pruébese que son las ecuaciones de una proyectividad biaxial cuyos ejes no dependen de a. Calcúlense las ecuaciones de dichos ejes, y el módulo de estas proyectividades biaxiales.

5.38 Si dos proyectividades biaxiales tienen un eje común r y sus otros dos ejes s_1 y s_2 son concurrentes, entonces su producto es, en general, otra proyectividad biaxial cuyos ejes son r y una de las rectas del haz definido por s_1 y s_2.

Hállese la condición necesaria y suficiente para que deje de ser cierto el resultado anterior.

Cuando ambas proyectividades biaxiales son involutivas, el producto es una homología especial cuyo plano de puntos dobles es el determinado por r y el punto $s_1 \cap s_2$, y cuyo vértice es el corte de r con el plano $s_1 + s_2$.

5.39 **Teorema de Mebius:** Si los cuatro vértices de un tetraedro yacen en las cuatro caras correspondientes de otro, mientras tres vértices del segundo yacen en las tres caras correspondientes del primero, entonces el vértice restante incide con la cara restante.

5.40 **Teoremas de Cox:** Dados cuatro planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ que pasan por un punto P en posición general, sea P_{ij} un punto de la intersección $\pi_i \cap \pi_j$, y sea π_{ijk} el plano $P_{ij} + P_{ik} + P_{jk}$. Se satisface que los planos $\pi_{234}, \pi_{134}, \pi_{124}, \pi_{123}$ concurren en un punto, que denotaremos P_{1234}.

Dados cinco planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ que pasan por un punto P en posición general, se satisface que los cinco puntos $P_{2345}, P_{1345}, P_{1245}, P_{1235}, P_{1234}$ yacen en un plano, que denotaremos π_{12345}.

Dados seis planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ que pasan por un punto P en posición general, los seis planos $\pi_{23456}, \ldots, \pi_{12345}$ pasan por un punto P_{123456}. Etc.