Capítulo III

El Espacio Afín

Como en los capítulos anteriores todos los cuerpos serán conmutativos. Lo mismo ocurrirá (y ya no insistiremos más en ello) en todos los capítulos siguientes. Si en algún momento aparecen cuerpos no conmutativos se advertirá expresamente.

1 Espacio Afín y Subvariedades Afines

Dado un conjunto X, sea $\operatorname{Biy}(X)$ el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de X en sí mismo. Recordemos que $\operatorname{Biy}(X)$ con la operación composición es un grupo, y que dar una *operación* de un grupo G en el conjunto X es dar un morfismo de grupos $G \to \operatorname{Biy}(X)$, en cuyo caso se dice que G *opera* sobre X.

Definición 1.1 Un *espacio afín* de dimensión n sobre un cuerpo k, es un conjunto donde opera de modo *fiel* y *transitivo* el grupo aditivo de un k-espacio vectorial de dimensión n .

1.2 Expliquemos los términos empleados en la definición 1.1. Un espacio afín de dimensión n es una terna $(\mathbb{A}_n, V, \mathfrak{t})$, donde $\mathbb{A}_n$ es un conjunto, V es un espacio vectorial de dimensión n y $\mathfrak{t}$ es una operación de V (considerado como grupo con su suma) en el conjunto $\mathbb{A}_n$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t} : V & \to & \operatorname{Biy}(\mathbb{A}_n) \\ v & \mapsto & \mathfrak{t}_v \end{array} .$$

Dado $v \in V$, $\mathfrak{t}_v$ se denomina *traslación por el vector* v (ó de *dirección* v), y dado $P \in \mathbb{A}_n$ denotaremos $\mathfrak{t}_v(P) = P + v$. Por definición de "operación de un grupo sobre un conjunto" tenemos $\mathfrak{t}_{v_1+v_2} = \mathfrak{t}_{v_1} \circ \mathfrak{t}_{v_2}$, $\mathfrak{t}_{-v} = (\mathfrak{t}_v)^{-1}$ y $\mathfrak{t}_0 =$ identidad de $\mathbb{A}_n$ $(v, v_1, v_2 \in V)$. Que la operación $\mathfrak{t}$ sea *fiel* significa que es un morfismo de grupos inyectivo, y que la operación $\mathfrak{t}$ sea *transitiva* significa que, dados $P, Q \in \mathbb{A}_n$, existe $v \in V$ tal que $\mathfrak{t}_v(P) = Q$.

Fijado un vector $v \in V$, si existe $P \in \mathbb{A}_n$ tal que $\mathfrak{t}_v(P) = P$, entonces $\mathfrak{t}_v(Q) = Q$ para todo $Q \in \mathbb{A}_n$ (compruébese), y por lo tanto $v = 0$ porque la operación es fiel. Como consecuencia se obtiene la siguiente unicidad: dados $P, Q \in \mathbb{A}_n$ existe un único $v \in V$ tal que $\mathfrak{t}_v(P) = Q$. En definitiva, con la notación que hemos fijado, el que la operación sea fiel y transitiva se traduce en la siguiente propiedad:

$$\text{dados } P, Q \in \mathbb{A}_n \text{ existe un único vector } v \in V \text{ tal que } P + v = Q\,.$$

Ejemplos 1.3 (a) El ejemplo más evidente de espacio afín es el de un espacio vectorial operando sobre sí mismo: cada espacio vectorial V opera sobre sí mismo de modo fiel y transitivo mediante las traslaciones

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t} : V & \to & \mathrm{Biy}(V) \\ v & \mapsto & \mathfrak{t}_v \end{array} , \qquad \mathfrak{t}_v(v') := v' + v \,.$$

(b) Sea E un espacio vectorial y sea V un subespacio vectorial suyo. Tomemos un vector $e \in E$ y consideremos el conjunto $e + V = \{e + v \,:\, v \in V\}$ (véase la figura 1.1);

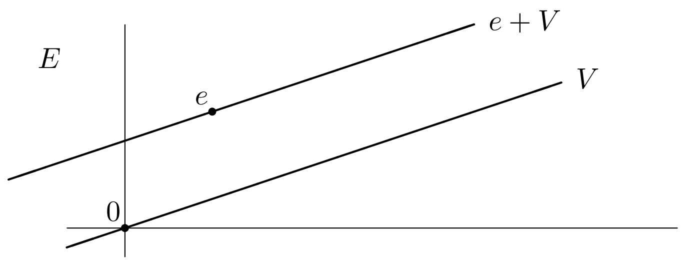

Figura 1.1

$e + V$ es un espacio afín, donde el espacio vectorial que opera es V:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t} : V & \to & \mathrm{Biy}(e+V) \\ v & \mapsto & \mathfrak{t}_v \end{array} , \qquad \mathfrak{t}_v(e + v') := (e + v') + v \,.$$

Definición 1.4 Dado un espacio afín $(\mathbb{A}_n, V, \mathfrak{t})$, sean X un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}_n$ y V' un subespacio vectorial de V. Diremos que X es una *subvariedad afín de dirección* V' si la restricción de la operación $\mathfrak{t}$ a V' define una operación fiel y transitiva de V' sobre X.

Es decir, para que X sea una subvariedad afín de dirección V', en primer lugar debe satisfacerse $\mathfrak{t}_{v'}(X) = X$ para todo $v' \in V'$, de modo que esté bien definida la operación

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t} : V' & \to & \mathrm{Biy}(X) \\ v' & \mapsto & \mathfrak{t}_{v'} \end{array} ;$$

en segundo lugar dicha operación debe ser transitiva. O sea, deben satisfacerse:

(a) $v \in V'\,,\ P \in X \ \Rightarrow\ P + v \in X\,;$

(b) $P, Q \in X \ \Rightarrow$ existe $v \in V'$ tal que $Q = P + v\,.$

El cumplimiento de las dos condiciones anteriores es suficiente para asegurar que la restricción de la operación $\mathfrak{t}$ a V' define una operación de V' sobre X es que es transitiva, y dicha operación es fiel porque la operación de V sobre $\mathbb{A}_n$ es fiel (compruébese; para ello téngase en cuenta que el conjunto X es no vacío). Es claro que si X es una subvariedad afín de dirección V' del espacio afín $(\mathbb{A}_n, V, \mathfrak{t})$, entonces $(X, V', \mathfrak{t})$ es a su vez un espacio afín.

Convenimos en que el *vacío* es también una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$.

1.5 Sea X una subvariedad afín no vacía de un espacio afín $(\mathbb{A}_n, V, \mathfrak{t})$ y sea V' su dirección. Si dado $P \in \mathbb{A}_n$ denotamos $P + V' = \{P + v' : v' \in V'\}$, es sencillo comprobar que para cualquier $P_0 \in X$ se satisface $X = P_0 + V'$. Además, todo subconjunto de $\mathbb{A}_n$ de esa forma es subvariedad afín no vacía de $(\mathbb{A}_n, V, \mathfrak{t})$: dado $Q \in \mathbb{A}_n$ y dado un subespacio vectorial V'' de V, el conjunto $Q + V''$ es una subvariedad afín de dirección V'' a la que pertenece $Q = Q + 0$.

Según lo anterior es fácil probar que el conjunto de todas las subvariedades afines de $\mathbb{A}_n$, dotado del orden que define la inclusión, es un retículo con primer y último elemento (véase I.1.4): el primer elemento es $\emptyset$, el último elemento es $\mathbb{A}_n$, y dadas subvariedades afines no vacías X_1 y X_2 de $\mathbb{A}_n$ de direcciones respectivas V_1 y V_2 tenemos: por una parte, dados $P_1 \in X_1$ y $P_2 \in X_2$, el supremo de X_1 y X_2 es la subvariedad afín $P_1 + (\langle v_0 \rangle + V_1 + V_2)$, donde $v_0 \in V$ es el único vector que satisface $P_2 = P_1 + v_0$; por otra parte, ó $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, ó existe $P_0 \in \mathbb{A}_n$ tal que $X_1 = P_0 + V_1$ y $X_2 = P_0 + V_2$, en cuyo caso $X_1 \cap X_2 = P_0 + (V_1 \cap V_2)$.

Definiciones 1.6 Diremos que dos subvariedades afines de un mismo espacio afín son *paralelas* si sus direcciones son incidentes.

Se define la *dimensión* de una subvariedad afín como la dimensión de su dirección. Convenimos en que la dimensión de la subvariedad $\emptyset$ es igual a -1.

En un espacio afín de dimensión n, llamaremos *puntos* a las subvariedades afines de dimensión 0, *rectas* a las de dimensión 1, planos a las de dimensión 2, e hiperplanos a las de dimensión $n-1$. Obsérvese que los puntos de un espacio afín $(\mathbb{A}_n, V, \mathfrak{t})$ son justamente los elementos del conjunto $\mathbb{A}_n$, pues para todo $P \in \mathbb{A}_n$ se satisface $P = P + 0$.

Ejercicio 1.7 Pruébense las siguientes relaciones de incidencia en el espacio afín:

(a) Dada una recta y dado un punto exterior a ella, existe una única recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta dada.

(b) La condición necesaria y suficiente para que una recta y un hiperplano sean paralelos, es que no se corten ó sean incidentes.

(c) Si dos subvariedades afines paralelas tienen algún punto en común, entonces son incidentes. En particular, si las subvariedades tienen igual dimensión y son paralelas, entonces son coincidentes si y sólo si tienen algún punto en común.

Nota **1.8** En adelante, para referirnos a un espacio afín de dimensión n escribiremos abreviadamente "Sea $\mathbb{A}_n$ un espacio afín ... ", entendiendo implícitamente que hay un espacio vectorial V de dimensión n que opera de modo fiel y transitivo sobre $\mathbb{A}_n$; nos referiremos a V como "el espacio vectorial asociado" al espacio afín $\mathbb{A}_n$.

2 Afinidades: Dilataciones y Traslaciones

Consideremos dos espacios afines $\mathbb{A}_n$ y $\mathbb{A}'_m$, y sean V y V' sus respectivos espacios vectoriales asociados.

Definición 2.1 Una aplicación $h : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ se dice que es una *aplicación afín*, si existe una aplicación lineal $\vec{h} : V \to V'$ cumpliendo:

$$h(P + v) = h(P) + \vec{h}(v)\,, \qquad \forall\, P \in \mathbb{A}_n,\ \forall\, v \in V\,.$$

La aplicación lineal $\vec{h}$ es única (compruébese), y se denomina *aplicación lineal asociada* a la aplicación afín h.

Ejemplos 2.2 (a) Dado $v \in V$ la traslación $\mathfrak{t}_v$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada $\vec{\mathfrak{t}}_v$ es el endomorfismo identidad de V: dados $P \in \mathbb{A}_n$ y $v' \in V$ tenemos

$$\mathfrak{t}_v(P + v') = (P + v') + v = P + (v' + v) = (P + v) + v' = \mathfrak{t}_v(P) + v' .$$

La traslación $\mathfrak{t}_v$ es la aplicación identidad de $\mathbb{A}_n$ si y sólo si $v = 0$.

(b) Fijemos ahora un punto $C \in \mathbb{A}_n$ y un escalar no nulo λ. La aplicación

$$\begin{aligned} h_{C,\lambda} : \mathbb{A}_n &\longrightarrow \mathbb{A}_n \\ P = C + v &\longmapsto h_{C,\lambda}(P) = C + \lambda v \end{aligned}$$

se denomina *homotecia de centro C y razón λ*, y es fácil probar que es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la homotecia de razón λ de V; $h_{C,\lambda}$ es la aplicación identidad de $\mathbb{A}_n$ si y sólo si $\lambda = 1$.

(c) Si X es una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$ cuya dirección es el subespacio vectorial F de V, entonces la inclusión natural $X \hookrightarrow \mathbb{A}_n$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la inclusión $F \hookrightarrow V$.

(d) Si E y E' son espacios vectoriales y $T : E \to E'$ es una aplicación lineal, entonces, considerando E y E' con sus estructuras naturales de espacio afín (las que se obtienen cuando operan sobre sí mismo, véase 1.3(a)), T es una aplicación afín tal que $\vec{T} = T$.

Proposición 2.3 *Dados $P \in \mathbb{A}_n$, $P' \in \mathbb{A}'_m$ y una aplicación lineal $T : V \to V'$, existe una única aplicación afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ tal que $\varphi(P) = P'$ y $\vec{\varphi} = T$. Como consecuencia, una aplicación afín está determinada por la imagen de un punto y por su aplicación lineal asociada.*

Demostración. Dado un punto $Q \in \mathbb{A}_n$ existirá un único vector $v \in V$ tal que $Q = P + v$, así que el punto $\varphi(Q) \in \mathbb{A}'_m$ definido por la igualdad $\varphi(Q) = P' + T(v)$ está unívocamente determinado por Q; de este modo hemos definido una aplicación $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$. Veamos que φ es afín y que $\vec{\varphi} = T$; dado un vector $v' \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(Q + v') = \varphi((P + v) + v') = \varphi(P + (v + v')) &= P' + T(v + v') \\ = P' + T(v) + T(v') &= \varphi(Q) + T(v') . \end{aligned}$$

La unicidad de φ es clara. ▮

Lema 2.4 *Una aplicación afín es inyectiva (respectivamente: epiyectiva, biyectiva) si y sólo si su aplicación lineal asociada es inyectiva (respectivamente: epiyectiva, biyectiva).*

Demostración. Fijados puntos $P_0 \in \mathbb{A}_n$ y $P'_0 \in \mathbb{A}'_m$, de la definición de espacio afín se sigue que las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{A}_n \\ v & \mapsto & P_0 + v \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} V' & \to & \mathbb{A}'_m \\ v' & \mapsto & P'_0 + v' \end{array}$$

identifican los espacios afines $\mathbb{A}_n$ y $\mathbb{A}'_m$ con sus respectivos espacios vectoriales asociados V y V', y la proposición 2.3 nos dice que mediante dichas identificaciones las aplicaciones afines de

$\mathbb{A}_n$ en $\mathbb{A}'_m$ que transforman P_0 en P'_0 se corresponden con las aplicaciones lineales de V en V'. Para una aplicación afín $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$, poniendo $P'_0 = f(P_0)$, lo anterior significa que $\vec{f}$ es la única aplicación de V en V' que hace conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\vec{f}} & V' \\ || & & || \\ \mathbb{A}_n & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}'_m . \end{array}$$

Por lo tanto es claro que f es inyectiva (epiyectiva) si y sólo si $\vec{f}$ es inyectiva (epiyectiva). ∎

Lema 2.5 *Si $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ y $g : \mathbb{A}'_m \to \mathbb{A}''_l$ son aplicaciones afines, entonces gf es una aplicación afín tal que $\overrightarrow{gf} = \vec{g}\vec{f}$.*

Demostración. Ejercicio. ∎

Lema 2.6 *Una aplicación afín transforma subvariedades afines en subvariedades afines.*

Demostración. Dada una aplicación afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$, si $X = P + F$ es una subvariedad de $\mathbb{A}_n$ de dirección F, entonces

$$\varphi(X) = \varphi(P + F) = \varphi(P) + \vec{\varphi}(F) ,$$

es decir, $\varphi(X)$ es una subvariedad afín de $\mathbb{A}'_m$ de dirección $\vec{\varphi}(F)$. ∎

Ejemplos 2.7 (a) Una aplicación afín $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ se dice que es una *proyección* si es idempotente, es decir, si satisface $f^2 = f$. Nótese que si f es una proyección de $\mathbb{A}_n$ entonces f tiene puntos fijos: es fácil comprobar que el conjunto de puntos fijos de f es $\operatorname{Im} f$, que es una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$. Además $\vec{f}^2 = \vec{f}$ y por lo tanto el polinomio anulador del endomorfismo $\vec{f}$ divide al polinomio $x^2 - x$, por lo que dicho polinomio anulador es x, $x - 1$ ó $x^2 - x$.

Si el polinomio anulador de $\vec{f}$ es x entonces $\vec{f} = 0$ y por lo tanto f es una aplicación constante, y si el polinomio anulador de $\vec{f}$ es $x - 1$ entonces $\vec{f} = I$ ($=$ endomorfismo identidad de V) y por lo tanto f es la aplicación identidad de $\mathbb{A}_n$.

Supongamos que el polinomio anulador de $\vec{f}$ es $x(x-1)$, en cuyo caso debe ser $V = V_1 \oplus V_2$ con $V_1 = \operatorname{Ker} \vec{f}$ y $V_2 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - I)$ subespacios vectoriales no nulos de V. Obsérvese que $\vec{f} = 0$ sobre V_1 y que $\operatorname{Ker}(\vec{f} - I) = \operatorname{Im} \vec{f} = V_2$, de modo que $\vec{f} = I$ sobre V_2. Con todo lo anterior es fácil ver que f es la *proyección sobre la subvariedad afín* $\operatorname{Im} f$ *en la dirección de* V_1, es decir, dado $P \in \mathbb{A}_n$, si $P + V_1$ es la subvariedad que pasa P y cuya dirección es V_1, entonces

$$f(P) = (P + V_1) \cap \operatorname{Im} f$$

(nótese que dado $P_0 \in \operatorname{Im} f$ tenemos $\operatorname{Im} f = P_0 + V_2$).

(b) Una aplicación afín $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ se dice que es una *simetría* si es una involución, es decir, si f^2 es la aplicación identidad de $\mathbb{A}_n$. Si f es una simetría de $\mathbb{A}_n$, entonces $\vec{f}^2 = I$ y por lo tanto el polinomio anulador de $\vec{f}$ divide al polinomio $x^2 - 1$, por lo que dicho polinomio anulador es $x + 1$, $x - 1$ ó $x^2 - 1$. Supuesto que la característica del cuerpo k es $\neq 2$, estúdiese cómo es una simetría según sea el polinomio anulador de su aplicación lineal asociada.

Definición 2.8 Una aplicación afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ se dice que es una *afinidad* si existe otra aplicación afín $\phi : \mathbb{A}'_m \to \mathbb{A}_n$ tal que $\phi\varphi$ es la identidad de $\mathbb{A}_n$ y $\varphi\phi$ es la identidad de $\mathbb{A}'_m$.

Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ una aplicación afín. Si φ es una afinidad y $\phi : \mathbb{A}'_m \to \mathbb{A}_n$ es una aplicación afín tal que $\phi\varphi$ es la identidad de $\mathbb{A}_n$ y $\varphi\phi$ es la identidad de $\mathbb{A}'_m$, entonces es claro que φ es biyectiva y que $\phi = \varphi^{-1}$. Recíprocamene, si φ es biyectiva (lo que equivale según 2.4 a que $\vec{\varphi} : V \to V'$ es un isomorfismo), entonces φ es una afinidad. En efecto, fijado $P_0 \in \mathbb{A}_n$ es fácil ver que φ^{-1} es la única aplicación afín de $\mathbb{A}'_m$ en $\mathbb{A}_n$ que manda $\varphi(P_0)$ a P_0 y cuya aplicación lineal asociada es $(\vec{\varphi}\,)^{-1}$ (véase la proposición 2.3).

Según lo anterior, las afinidades son las aplicaciones afines biyectivas, es decir, las aplicaciones afines cuya aplicación lineal asociada es un isomorfimso.

Como ejemplos de afinidades tenemos las traslaciones y las homotecias.

Ejercicio 2.9 Dos espacios afines se dice que son *isomorfos* si existe entre ellos alguna afinidad. Pruébese que dos espacios afines son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

Vamos a estudiar ahora un caso particular de afinidades: las dilataciones. Este estudio nos va a permitir caracterizar geométricamente las traslaciones.

Definición 2.10 Diremos que una aplicación afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es una *dilatación* del espacio afín $\mathbb{A}_n$ si existe $\lambda \in k^*$ tal que $\vec{\varphi} : V \to V$ es la homotecia de razón λ, en cuyo caso diremos que λ es la *razón de la dilatación*. Es claro que toda dilatación de $\mathbb{A}_n$ es una afinidad.

Ejercicio 2.11 Vimos en 2.2 que toda traslación de $\mathbb{A}_n$ es una dilatación de razón 1. Compruébese que el recíproco también es cierto, de modo que tenemos: "las traslaciones de $\mathbb{A}_n$ son justamente las dilataciones de $\mathbb{A}_n$ de razón 1".

Teorema 2.12 (Caracterización geométrica de las dilataciones) *Una aplicacióm afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es una dilatación si y sólo si transforma cada recta afín en otra paralela.*

Demostración. Supongamos que φ es una dilatación de razón λ. Dados $P \in \mathbb{A}_n$ y $v \in V$, $v \neq 0$, tenemos

$$\varphi(P + \langle v\rangle) = \varphi(P) + \langle\vec{\varphi}(v)\rangle = \varphi(P) + \langle\lambda v\rangle = \varphi(P) + \langle v\rangle\,,$$

es decir, $\varphi(P + \langle v\rangle)$ es una recta paralela a $P + \langle v\rangle$.

Supongamos ahora que φ transforma cada recta afín en otra paralela, en cuyo caso $\vec{\varphi}$ debe trasformar vectores no nulos en vectores no nulos y por lo tanto es un isomorfismo lineal. Para ver que $\vec{\varphi}$ es una homotecia tenemos que probar que todo vector de V es propio para $\vec{\varphi}$. Fijemos un vector no nulo $v \in V$ y consideremos una recta que tenga por dirección a v: $P + \langle v\rangle$. Por hipótesis la recta $\varphi(P) + \langle\vec{\varphi}(v)\rangle$ es paralela a la recta $P + \langle v\rangle$, es decir $\langle v\rangle = \langle\vec{\varphi}(v)\rangle$; por lo tanto existe $\lambda \in k^*$ tal que $\vec{\varphi}(v) = \lambda v$. ▮

Lema 2.13 *Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ una dilatación distinta de la identidad y sea λ su razón.*

(i) *φ es una traslación si y sólo si carece de puntos fijos;*

(ii) *si φ no es una traslación, entonces tiene un único punto fijo $C \in \mathbb{A}_n$ y tenemos que φ es la homotecia de centro C y razón λ.*

Demostración. Fijemos un punto $P_0 \in \mathbb{A}_n$ no invariante por φ (existe), y sea $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$, tal que $\varphi(P_0) = P_0 + v_0$. Veamos cuándo φ tiene puntos fijos, es decir, veamos cuándo existe $u \in V$ que es solución de la ecuación $\varphi(P_0 + u) = P_0 + u$:

$$P_0 + u = \varphi(P_0 + u) = \varphi(P_0) + \lambda u = P_0 + v_0 + \lambda u \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_0 = (1 - \lambda)u\,.$$

Es claro que la anterior ecuación no tiene solución si y sólo si $\lambda = 1$, es decir, si y sólo si φ es una traslación (véase el ejercicio 2.11).

Cuando $\lambda \neq 1$ la ecuación tiene como única solución el vector $(1-\lambda)^{-1}v_0$, por lo que en este caso el único punto fijo de φ es $C = P_0 + (1-\lambda)^{-1}v_0$. Veamos que φ es la homotecia de centro C y razón λ (véase el ejemplo 2.2(b)), para lo cual calculemos la imagen de un punto arbitrario $P \in \mathbb{A}_n$ (figura 2.1): si $v \in V$ es tal que $P = C + v$, entonces $\varphi(P) = \varphi(C + v) = \varphi(C) + \vec{\varphi}(v) = C + \lambda v = h_{C,\lambda}(P)$. ∎

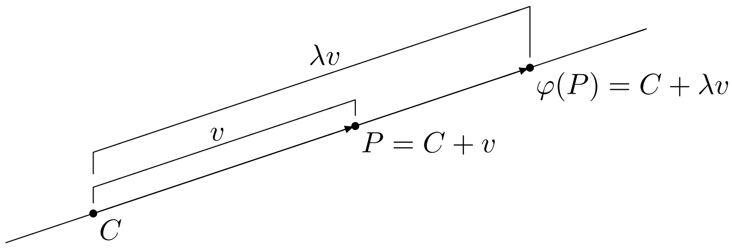

Figura 2.1

Del teorema 2.12 y del lema 2.13 obtenemos la siguiente caracterización:

Teorema 2.14 (Caracterización geométrica de las traslaciones) *Una aplicación afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ (distinta de la identidad) es una traslación, si y sólo si, transforma cada recta afín en otra paralela y no tiene puntos invariantes.*

2.15 De 2.5 y 2.8 se sigue que las afinidades de $\mathbb{A}_n$ en sí mismo, con la operación "composición de aplicaciones", forman un grupo. De 2.5 obtenemos también que la composición de dos dilataciones de $\mathbb{A}_n$ es otra dilatación (pues dadas dos homotecias de V su composición es otra homotecia cuya razón es igual al producto de las razones de las homotecias dadas), de modo que las dilataciones forman también un grupo (que es un subgrupo de las afinidades). Si a cada dilatación de $\mathbb{A}_n$ le asociamos su razón obtenemos una aplicación $\{\text{dilataciones de } \mathbb{A}_n\} \to k^*$ que es un morfismo de grupos . Este morfismo es epiyectivo y su núcleo son las dilataciones cuya razón es 1, es decir, las traslaciones. Tenemos así la siguiente sucesión exacta de grupos:

$$0 \to \{\text{traslaciones de } \mathbb{A}_n\} \to \{\text{dilataciones de } \mathbb{A}_n\} \to k^* \to 0\,;$$

como consecuencia, las traslaciones son un subgrupo normal de las dilataciones.

Por último, fijado un punto $C \in \mathbb{A}_n$, las homotecias de centro C forman un subgrupo no normal de las dilataciones (compruébese).

3 Coordenadas Cartesianas

Como en la anterior sección, $\mathbb{A}_n$ y $\mathbb{A}'_m$ serán espacios afines cuyos espacios vectoriales asociados denotaremos respectivamente V y V'.

Definición 3.1 Un *sistema de referencia afín* (ó *cartesiano*) de $\mathbb{A}_n$ consiste en una sucesión $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ donde $P_0 \in \mathbb{A}_n$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

3.2 Fijada una referencia afín $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{A}_n$ veamos cómo queda coordenado el espacio afín. Dado $P \in \mathbb{A}_n$ existe un único $v \in V$ tal que $P = P_0 + v$, es decir, existen escalares únicos $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$P = P_0 + v = P_0 + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \, .$$

Definición 3.3 Con la notación de 3.2, diremos que la sucesión $(x_1, \ldots, x_n)$ son las *coordenadas afines* (ó *cartesianas*) del punto P en el sistema de referencia afín $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$. En dicho sistema tenemos $P_0 = (0, \ldots, 0)$, y es por eso que P_0 se denomina *origen de la referencia*. Las rectas afines $P_0 + \langle v_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, se llaman *ejes de la referencia*.

3.4 (Ecuaciones de una subvariedad afín) Fijemos una referencia afín $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{A}_n$ y sea X una subvariedad afín no vacía de $\mathbb{A}_n$ cuya dirección es F. Si tenemos un punto cualquiera $P = (b_1, \ldots, b_n)$ en X y unas ecuaciones implícitas de F en la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$,

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n & = & 0 \end{array} \right\} , \tag{3.1}$$

entonces unas *ecuaciones afines* de X en la referencia $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ son

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n & = & c_r \end{array} \right\} \tag{3.2}$$

donde $c_i = a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n$, $i = 1, \ldots, r$.

Un punto $Q = (x_1, \ldots, x_n) = P_0 + (x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = P + ((x_1 - b_1)v_1 + \cdots + (x_n - b_n)v_n)$ de $\mathbb{A}_n$ está en X si y sólo si $(x_1 - b_1)v_1 + \cdots + (x_n - b_n)v_n \in F$, es decir, si y sólo si $(x_1, \ldots, x_n)$ cumplen (3.2).

El razonamiento del anterior párrafo es reversible en el siguiente sentido: si (3.2) son unas ecuaciones afines de la subvariedad X en la referencia $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$, entonces (3.1) son unas ecuaciones implícitas de la dirección de X en la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Ejercicio 3.5 Supongamos que $\mathbb{A}_2$ es un plano afín en el que se ha fijado una referencia cartesiana $(P_0; v_1, v_2)$.

(a) Dados puntos distintos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{A}_2$, la ecuación de la única recta que pasa por A y B es

$$(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y = (a_2 b_1) - (a_1 b_2) \, .$$

(b) Dadas las ecuaciones de tres rectas distintas en $\mathbb{A}_2$,

$$r_1 \equiv ax + a'y = a'' \,, \qquad r_2 \equiv bx + b'y = b'' \,, \qquad r_3 \equiv cx + c'y = c'' \,,$$

de la discusión del sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ax + a'y = a'' \\ bx + b'y = b'' \\ cx + c'y = c'' \end{array}\right\}$ se sigue:

$$r_1,\; r_2 \text{ y } r_3 \text{ concurren en un punto ó son paralelas} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0 \,.$$

(c) En un espacio afín de dimensión 3 en el que se ha fijado una referencia cartesiana, dados tres puntos no alineados de los que se conocen sus coordenadas, cuál es la ecuación del plano detrminado por dichos puntos?

3.6 Consideremos ahora sistemas de referencias cartesianos $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ y $(P_0'; v_1', \dots, v_m')$ en $\mathbb{A}_n$ y $\mathbb{A}_m'$, respectivamente, y sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_m'$ una aplicación afín. Por una parte tenemos la matriz (a_{ij}) de la aplicación lineal $\vec{\varphi}$ en las bases $\{v_j\}$ y $\{v_i'\}$; por otra parte tenemos las coordenadas cartesianas $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ del punto $\varphi(P_0)$ en la referencia $(P_0'; v_1', \dots, v_m')$.

Definición 3.7 Con la notación de 3.6, llamaremos *matriz de la aplicación afín* φ *respecto de las referencias* $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ *y* $(P_0'; v_1', \dots, v_m')$, a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Dadas las coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ de un punto $Q \in \mathbb{A}_n$, si $(y_1, \dots, y_m)$ son las coordenadas de $\varphi(Q) \in \mathbb{A}_m'$ tenemos la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ,$$

la cual suele expresarse también de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

La anterior igualdad no es más que la expresión matricial de $\varphi(Q) = \varphi(P_0) + \vec{\varphi}(v)$, siendo $Q = P_0 + v$ con $v \in V$.

Ejemplos 3.8 (a) Sea $\tau : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ la traslación por un vector $u \in V$. Como la aplicación lineal asociada a τ es la identidad y $\tau(P_0) = P_0 + u$, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ son las coordenadas de u en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$, entonces la matriz de τ en la referencia afín $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n & \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sea ahora $\sigma : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ la homotecia de centro un punto $C \in \mathbb{A}_n$ y razón $\lambda \in k^*$, $\lambda \neq 1$. Por una parte, la aplicación lineal asociada a σ es la homotecia de V cuya razón es λ; por otra parte, si $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ son las coordenadas afines de C en la referencia $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ entonces $\sigma(P_0) = \sigma(C - (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)) = C - \lambda(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = P_0 + (1 - \lambda)(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)$. Por lo tanto la matriz de σ en la referencia afín $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ (1-\lambda)\beta_1 & \lambda & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ (1-\lambda)\beta_n & \text{\Large 0} & & \lambda \end{pmatrix}.$$

4 Razón Simple

Como hasta ahora, $\mathbb{A}_n$ y $\mathbb{A}'_m$ serán espacios afines y V y V' serán sus respectivos espacios vectoriales asociados.

Definición 4.1 Llamaremos *segmento* en $\mathbb{A}_n$ a un par de puntos distintos y ordenados A y B, y lo denotaremos AB. Dos segmentos AB y CD de $\mathbb{A}_n$ diremos que son *paralelos* si la única recta que pasa A y B es paralela a la única recta que pasa por C y D, en cuyo caso, si $v_1, v_2 \in V$ son los únicos vectores tales que $B = A + v_1$ y $D = C + v_2$, entonces existe un único escalar $\lambda \in k^*$ tal que $v_1 = \lambda v_2$; dicho escalar lo denotaremos $\frac{AB}{CD}$ y diremos que es la *proporción* del segmento AB al segmento CD.

Compruébese como ejercicio que se cumplen las igualdades

$$\frac{CD}{AB} = \frac{1}{\lambda}\,, \qquad \frac{BA}{CD} = \frac{AB}{DC} = -\lambda\,, \qquad \frac{BA}{DC} = \lambda\,.$$

Definición 4.2 Sea r una recta del espacio afín $\mathbb{A}_n$. Se llama *razón simple* de tres puntos distintos y ordenados A, B, C de r al escalar

$$(A, B, C) = \frac{CA}{CB} = \frac{AC}{BC}\,.$$

Cuando $(A, B, C) = \lambda$ se dice que C divide al segmento AB en la proporción $\lambda : 1$.

En la definición de la razón simple (A, B, C) podemos suponer que sólo son distintos los puntos B y C, en cuyo caso $(A, B, C) = 0$ si y sólo si $A = C$, y $(A, B, C) = 1$ si y sólo si $A = B$. De este modo, si v es el único vector de V tal que $B = C + v$, entonces $(C; v)$ es una referencia afín de la recta que determinan los puntos B y C, y para cada punto A de esa recta tenemos que (A, B, C) es la coordenada afín de dicho punto en dicha referencia, es decir, si $A = C + \lambda v$ entonces $(A, B, C) = \lambda$.

Ejercicio 4.3 Supongamos que en $\mathbb{A}_n$ hay fijada una referencia afín $(P_0; v_1, \dots, v_n)$. Dados en $\mathbb{A}_n$ puntos alineados $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ y $C = (c_1, \dots, c_n)$, $B \neq C$, si $i \in \{1, \dots, n\}$ es un índice tal que $b_i - c_i \neq 0$ tenemos

$$(A, B, C) = \frac{a_i - c_i}{b_i - c_i} .$$

Ejercicio 4.4 Supongamos que la característica del cuerpo k es distinta de 2. Dados tres puntos distintos y alineados A, B, M de $\mathbb{A}_n$, diremos que M es el *punto medio* de A y B cuando $(A, B, M) = -1$, ó lo que es equivalente, cuando $(A, M, B) = 2$.

Dado un punto $P \in \mathbb{A}_n$ y vectores $e, v \in V$ tales que $A = P + e$ y $B = P + v$, el punto medio de A y B es $P + \frac{1}{2}(e + v)$. En coordenadas, si en $\mathbb{A}_n$ hay fijada una referencia afín respecto de la cual $A = (a_1, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, \dots, b_n)$, entonces el punto medio de A y B es $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$.

Veamos en el siguiente lema que la razón simple es un invariante afín de gran importancia.

Lema 4.5 *Las aplicaciones afines conservan las razones simples: si $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ es una aplicación afín y A, B, C son tres puntos distintos y alineados tales que los tres puntos $\varphi(A), \varphi(B)$, $\varphi(C)$ también son distintos, entonces*

$$(A, B, C) = (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)) .$$

Si el cuerpo k es de característica distinta de 2 y $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ es una aplicación que transforma ternas de puntos alineados en ternas de puntos alineados y conserva razones simples, entonces φ es una aplicación afín inyectiva.

Demostración. La primera parte del enunciado es sencilla y se deja como ejercicio.

Supongamos que la característica de k es distinta de 2 y sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ una aplicación que transforma ternas de puntos alineados en ternas de puntos alineados y conserva razones simples. La inyectividad de φ es trivial. Fijemos un punto $P_0 \in \mathbb{A}_n$ y definamos la aplicación $T : V \to V'$ del siguiente modo: dado $v \in V$, $T(v)$ es el único vector de V' tal que $\varphi(P_0 + v) = \varphi(P_0) + T(v)$. Si vemos que T es lineal, entonces la aplicación φ es afín y T es su aplicación lineal asociada.

Sean $v \in V$, $v \neq 0$, y $\lambda \in k^*$. Si denotamos $P_1 = P_0 + v$ y $P_2 = P_0 + \lambda v$, como los puntos

$$\varphi(P_0) , \qquad \varphi(P_1) = \varphi(P_0) + T(v) , \qquad \varphi(P_2) = \varphi(P_0) + T(\lambda v)$$

están alineados tenemos que existe $\mu \in k^*$ tal que $T(\lambda v) = \mu T(v)$; como además

$$\lambda = (P_2, P_1, P_0) = (\varphi(P_2), \varphi(P_1)\varphi(P_0)) = \mu ,$$

concluimos que $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.

Sean ahora e, v vectores distintos de V. Como $P_0 + \frac{1}{2}(e + v)$ es el punto medio de $P_0 + e$ y $P_0 + v$, y φ conserva razones simples, debe ser $\varphi(P_0) + T\left(\frac{1}{2}(e + v)\right)$ el punto medio de $\varphi(P_0) + T(e)$ y $\varphi(P_0) + T(v)$, es decir

$$T\left(\tfrac{1}{2}(e + v)\right) = \tfrac{1}{2}(T(e) + T(v)) ,$$

que junto con lo probado en el anterior párrafo prueba la igualdad $T(e + v) = T(e) + T(v)$. ∎

Corolario 4.6 (Teorema de Thales) *En el espacio afín $\mathbb{A}_n$, sean H_1, H_2, H_3 tres hiperplanos paralelos y distintos y sea r una recta no paralela a ellos, en cuyo caso tenemos los puntos $P_i = H_i \cap r$, $i = 1, 2, 3$ (véase 1.7). La razón simple (P_1, P_2, P_3) no depende de la recta r.*

Demostración. Considérese la proyección $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ sobre la recta r en la dirección de los hiperplanos del enunciado (véase el ejemplo 2.7 (a)), y aplíquese a f el lema 4.5. ∎

Ejercicio 4.7 Supuesto que la característica del cuerpo base no es igual a 2, si H_1 y H_2 son dos hiperplanos paralelos y distintos de un espacio afín, entonces el teorema de Thales nos permite definir el "hiperplano medio" de H_1 y H_2 (análogo al punto medio de dos puntos afines distintos); de qué manera?

Vamos a terminar esta sección recordando dos resultados clásicos en los que intervienen la razón simple:

Lema 4.8 *En un plano afín $\mathbb{A}_2$, sea ABC un triángulo y sean tres puntos A', B' y C' sobre sus lados $B + C$, $A + C$ y $A + B$, respectivamente, de modo que los puntos A, B, C, A', B', C' son todos distintos. Tenemos*

Teorema de Ceva: las rectas $A + A'$, $B + B'$ y $C + C'$ son concurrentes ó paralelas si y sólo si

$$(A, B, C') \cdot (C, A, B') \cdot (B, C, A') = -1 \,.$$

Teorema de Menelao: los puntos A', B' y C' están alineados si y sólo si

$$(A, B, C') \cdot (C, A, B') \cdot (B, C, A') = 1 \,.$$

Demostración. Fijemos en $\mathbb{A}_2$ el sistema de referencia afín respecto del cual es $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ y $C = (0, 1)$. Por una parte tenemos

$$A + B \equiv y = 0 \,, \qquad A + C \equiv x = 0 \,, \qquad B + C \equiv x + y = 1 \,,$$

por lo que debe ser: $A' = (a, 1 - a)$ con $a \neq 0, 1$, $B' = (0, b)$ con $b \neq 0, 1$ y $C' = (c, 0)$ con $c \neq 0, 1$; entonces de lo dicho en 4.3 se siguen las igualdades

$$(A, B, C') = \frac{c}{c - 1} \,, \qquad (C, A, B') = \frac{b - 1}{b} \,, \qquad (B, C, A') = \frac{a - 1}{a} \,.$$

Por otra parte tenemos

$$A + A' \equiv (a - 1)x + ay = 0 \,, \qquad B + B' \equiv bx + y = b \,, \qquad C + C' \equiv x + cy = c \,,$$

por lo que, según lo dicho en 3.5, las rectas $A + A'$, $B + B'$ y $C + C'$ son consurrentes ó paralelas si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a - 1 & a & 0 \\ b & 1 & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Basta hacer algunos sencillos cálculos para completar la demostración del teorema de Ceva, y procediendo de modo similar se prueba el teorema de Menelao. ∎

5 Extensión Vectorial de un Espacio Afín

Vamos a ver cómo todo espacio afín puede entenderse como un hiperplano afín dentro de un espacio vectorial, y cómo cualquier aplicación afín es la restricción a dicho hiperplano de una aplicación lineal. Continuaremos con la notación fijada en las secciones precedentes.

Definición 5.1 Una *extensión vectorial* del espacio afín $\mathbb{A}_n$ consiste en un espacio vectorial E_{n+1} de dimensión $n+1$ dotado de una aplicación afín inyectiva $j : \mathbb{A}_n \hookrightarrow E_{n+1}$ que satisface $0 \notin j(\mathbb{A}_n) = \operatorname{Im} j$.

Teorema 5.2 *La extensión vectorial del espacio afín $\mathbb{A}_n$ existe, y es única en el siguiente sentido: dadas dos extensiones vectoriales E_{n+1} y E'_{n+1} de $\mathbb{A}_n$, existe un único isomorfismo lineal $T : E_{n+1} \to E'_{n+1}$ que hace conmutativo el siguiente triángulo de aplicaciones afines:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_n \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & E_{n+1} \arrow[d, "T"] \\ & E'_{n+1} \end{tikzcd}$$

Demostración. Para ver la existencia tomemos un espacio vectorial E_{n+1} de dimensión $n+1$. Consideremos dentro de E_{n+1} un hiperplano afín que no pase por el origen, llamémosle $\mathbb{A}'_n$, y sea $i : \mathbb{A}'_n \hookrightarrow E_{n+1}$ la inclusión natural. Ahora, como $\mathbb{A}_n$ y $\mathbb{A}'_n$ tienen la misma dimensión existe una afinidad $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$ (véase el ejercicio 2.9); el espacio vectorial E_{n+1} dotado de la aplicación afín inyectiva $\mathbb{A}_n \xrightarrow{i\varphi} E_{n+1}$ es una extensión vectorial de $\mathbb{A}_n$.

Veamos ahora la unicidad. Consideremos dos extensiones vectoriales E_{n+1} y E'_{n+1} de $\mathbb{A}_n$ y fijemos un punto cualquiera $P \in \mathbb{A}_n$. Por una parte, la aplicación lineal $\vec{j}$ es inyectiva (porque la aplicación afín j es inyectiva) y por lo tanto $\operatorname{Im}\vec{j}$ es un subespacio vectorial de E_{n+1} de dimensión n $(= \dim V)$; por otra parte, el punto $j(P)$ de E_{n+1} no puede estar en $\operatorname{Im}\vec{j}$, ya que si existiera $v \in V$ tal que $\vec{j}(v) = j(P)$ entonces

$$j(P + (-v)) = j(P) + \vec{j}(-v) = j(P) - \vec{j}(v) = 0\,,$$

en contra de la hipótesis $0 \notin \operatorname{Im} j$. Como consecuencia obtenemos que $E_{n+1} = \langle j(P)\rangle \oplus \operatorname{Im}\vec{j}$, y por lo tanto para definir una aplicación lineal sobre E_{n+1} basta definirla sobre $\operatorname{Im}\vec{j}$ y decir cuál es la imagen de $j(P)$.

Supongamos que existe la aplicación lineal T del enunciado y veamos que sólo hay un modo posible de definirla (con lo que quedará probada la únicidad). Por una parte, de la igualdad $Tj = j'$ se sigue $\vec{T}\vec{j} = \vec{j}'$, es decir, debe ser conmutativo el triángulo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vec{j}"] \arrow[dr, "\vec{j}'"'] & E_{n+1} \arrow[d, "\vec{T} = T"] \\ & E'_{n+1} \end{tikzcd} \quad ;$$

por lo tanto, dado $e \in \operatorname{Im}\vec{j}$, si v es el único vector de V tal que $\vec{j}(v) = e$, entonces

$$T(e) = T(\vec{j}(v)) = \vec{j}'(v)\,;$$

por otra parte, si la aplicación lineal T hace conmutativo el triángulo del enunciado debe cumplirse $T(j(P)) = j'(P)$.

Entonces ya hemos determinado cómo debe ser T: dado $e \in E_{n+1}$, existe un único vector $v \in V$ y existe un único escalar $\lambda \in k$ tales que $e = \lambda j(P) + \vec{j}(v)$, y definimos

$$T(e) = \lambda j'(P) + \vec{j}'(v)\,;$$

la aplicación $T : E_{n+1} \to E'_{n+1}$ definida de este modo es lineal e inyectiva (compruébese; para probar la inyectividad téngase en cuenta que, razonando como antes, de las hipótesis se sigue $E'_{n+1} = \langle j'(P)\rangle \oplus \operatorname{Im} \vec{j}'$); por lo tanto T es un isomofismo (porque $\dim E_{n+1} = \dim E'_{n+1}$). Por último, dado $Q \in \mathbb{A}_n$, si $v \in V$ es tal que $Q = P + v$ tenemos

$$T(j(Q)) = T(j(P+v)) = T(j(P) + \vec{j}(v)) = j'(P) + \vec{j}'(v) = j'(P+v) = j'(Q)\,,$$

lo que prueba que es conmutativo el triángulo del enunciado. ∎

5.3 En la demostración anterior, la construcción dada de la extensión vectorial de $\mathbb{A}_n$ no es "canónica", es decir, no ha sido hecha a partir de la propia estructura de $\mathbb{A}_n$. Veamos seguidamente una construcción canónica.

Llamaremos *función afín* sobre $\mathbb{A}_n$ a toda aplicación afín que esté definida sobre $\mathbb{A}_n$ y valore en el cuerpo base k (considerando k con su estructura natural de espacio afín sobre k). Denotemos $F = \{\text{funciones afines sobre } \mathbb{A}_n\}$. El conjunto F dotado de las operaciones naturales

$$(f+g)(P) := f(P) + g(P)\,, \qquad (\lambda f)(P) := \lambda f(P)$$

($f, g \in F$, $\lambda \in k$, $P \in \mathbb{A}_n$) es un k-espacio vectorial (compruébese).

Probemos que la dimensión de F es $n+1$. Dada una función $f \in F$, la aplicación lineal asociada a f es una forma lineal sobre V, de modo que tenemos la aplicación natural

$$\begin{array}{rcl} F & \to & V^* \\ f & \mapsto & \vec{f}\,, \end{array}$$

que es lineal y epiyectiva (compruébese). Calculemos su núcleo: dada $f \in F$, es inmediato comprobar que $\vec{f} = 0$ si y sólo si la función f es constante, es decir, si y sólo si existe $\lambda \in k$ tal que $f(P) = \lambda$ para todo $P \in \mathbb{A}_n$; además, si $f_1 \in F$ es la aplicación constantemente igual a 1, entonces las funciones de F que son constantes son las del subespacio de dimensión 1 generado por f_1, de modo que el núcleo de la aplicación $F \to V^*$ se identifica con k. Tenemos entonces la sucesión exacta

$$0 \to k \to F \to V^* \to 0\,,$$

de la que obtenemos $\dim F = \dim V^* + \dim k = n+1$.

Consideremos ahora la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} j : \mathbb{A}_n & \to & F^* \\ P & \mapsto & \omega_P\,, \end{array} \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{rcl} \omega_P : F & \to & k \\ f & \mapsto & \omega_P(f) := f(P)\,; \end{array}$$

j así definida es una aplicación afín, y para probarlo construyamos su aplicación lineal asociada:

$$\begin{array}{rcl} \vec{j} : V & \to & F^* \\ v & \mapsto & \omega_v\,, \end{array} \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{rcl} \omega_v : F & \to & k \\ f & \mapsto & \omega_v(f) := \vec{f}(v)\,; \end{array}$$

es fácil comprobar que $\vec{j}$ es una aplicación lineal. Sean $P \in \mathbb{A}_n$ y $v \in V$ y probemos que se cumple la igualdad $j(P+v) = j(P) + \vec{j}(v)$, es decir, que se satisface $\omega_{P+v} = \omega_P + \omega_v$: dada $f \in F$ tenemos $\omega_{P+v}(f) = f(P+v) = f(P) + \vec{f}(v) = \omega_P(f) + \omega_v(f)$.

Probemos que la aplicación afín $j : \mathbb{A}_n \to F^*$ es una extensión vectorial de $\mathbb{A}_n$.

- Sean $P, Q \in \mathbb{A}_n$ y sea $v \in V$ tal que $Q = P + v$; si $j(P) = j(Q)$ (es decir, si $\omega_P = \omega_Q$), entonces $f(P) = f(Q)$ para toda función $f \in F$, y como $f(Q) = f(P) + \vec{f}(v)$, obtenemos $\vec{f}(v) = 0$ para toda forma lineal $\vec{f} \in F^*$, de modo que debe ser $v = 0$. Hemos probado que j es inyectiva.
- Supongamos ahora que existe $P \in \mathbb{A}_n$ tal que $j(P) = 0$ (es decir, tal que $\omega_P = 0$); entonces $f(P) = 0$ para toda función $f \in F$, lo cual es absurdo, ya que dado $Q \in \mathbb{A}_n$ y dado $\lambda \in k$, existe una función $f \in F$ tal que $f(Q) = \lambda$. Por lo tanto $0 \notin \operatorname{Im} j$

5.4 Veamos ahora cómo se entiende el espacio afín dentro de su extensión vectorial (véase la figura 4.1). Fijado un punto $P \in \mathbb{A}_n$, como $\mathbb{A}_n$ es una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$ de dirección V, podemos poner $\mathbb{A}_n = P + V$ y aplicando j obtenemos

$$j(\mathbb{A}_n) = j(P+V) = j(P) + \vec{j}(V) = \left\{ \begin{array}{l} \text{subvariedad afín de } E_{n+1} \text{ que pasa} \\ \text{por } j(P) \text{ y cuya dirección es } \vec{j}(V)\,. \end{array} \right.$$

Por tanto, el espacio afín $\mathbb{A}_n$ se entiende como un hiperplano de E_{n+1} que no pasa por 0, y el espacio vectorial asociado al espacio afín se identifica con la dirección de dicho hiperplano. En

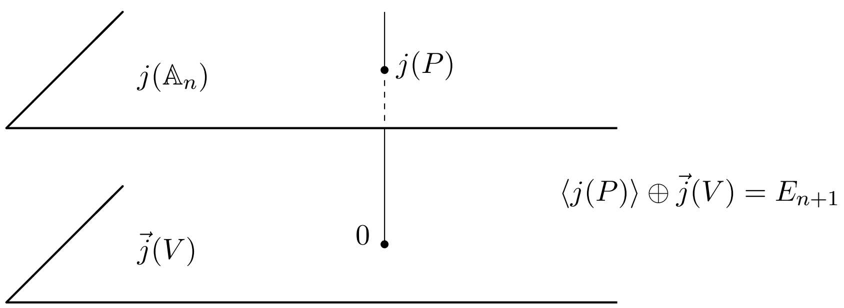

Figura 4.1

adelante, para simplificar la notación, vamos a identificar el espacio afín con su imagen dentro de su extensión vectorial, e igual vamos a hacer con V, de modo que j y $\vec{j}$ se convierten en la inclusión. Es decir, dado el espacio afín $\mathbb{A}_n$, su espacio vectorial asociado V, y su extensión vectorial E_{n+1}, tenemos

$$\mathbb{A}_n \hookrightarrow E_{n+1}\,, \qquad V \hookrightarrow E_{n+1}\,,$$

de modo que si P es un punto cualquiera de $\mathbb{A}_n$, entonces

$$\mathbb{A}_n = P + V\,, \qquad E_{n+1} = \langle P \rangle \oplus V\,.$$

Teorema 5.5 *Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ una aplicación afín. Existe una única aplicación lineal $\widehat{\varphi} : E_{n+1} \to E'_{m+1}$ entre las extensiones vectoriales que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_n & \hookrightarrow & E_{n+1} \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\widehat{\varphi}} \\ \mathbb{A}'_m & \hookrightarrow & E'_{m+1}. \end{array}$$

La aplicación lineal $\widehat{\varphi}$ se denomina extensión lineal *de la aplicación afín φ.*

Demostración. Fijemos un punto $P \in \mathbb{A}_n$, con lo que tenemos $\mathbb{A}_n = P + V$ y $E_{n+1} = \langle P \rangle \oplus V$. Veamos en primer lugar que si $\widehat{\varphi}$ existe, entonces el vector $\widehat{\varphi}(P)$ y la restricción de $\widehat{\varphi}$ a V están unívocamente determinados (lo cual probaría la unicidad).

Por una parte, de la conmutatividad del diagrama del enunciado se sigue que debe ser $\widehat{\varphi}(P) = \varphi(P)$; por otra parte, si consideremos el diagrama conmutativo de las aplicaciones lineales asociadas,

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & E_{n+1} \\ {\scriptstyle\vec{\varphi}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\vec{\widehat{\varphi}} = \widehat{\varphi}} \\ V' & \hookrightarrow & E'_{m+1} \end{array} \quad ,$$

obtenemos que $\widehat{\varphi}(v) = \vec{\varphi}(v)$ para todo $v \in V$. Ya hemos determinado totalmente cómo debe ser $\widehat{\varphi}$: dado $e \in E_{n+1}$, existe un único vector $v \in V$ y existe un único escalar $\lambda \in k$ tales que $e = \lambda P + v$, y definimos

$$\widehat{\varphi}(e) = \lambda\varphi(P) + \vec{\varphi}(v)\,;$$

la aplicación $\widehat{\varphi} : E_{n+1} \to E'_{m+1}$ definida de este modo es lineal y hace que el diagrama del enunciado sea conmutativo (compruébese). ∎

Corolario 5.6 *Dadas aplicaciones afines $\mathbb{A}_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}'_m \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}''_h$ tenemos $\widehat{\phi\varphi} = \widehat{\phi}\widehat{\varphi}$.*

5.7 (Propiedad universal de la extensión vectorial) Dado un espacio vectorial E', toda aplicación afín de $\mathbb{A}_n$ en E' factoriza de modo único a través de la extensión vectorial de $\mathbb{A}_n$; es decir, tenemos una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\text{afín}}(\mathbb{A}_n, E') \;=\!=\!=\; \mathrm{Hom}_{\text{lineal}}(E_{n+1}, E')\,.$$

Como ejercicio, pruébese esta propiedad y obténgase como corolario de ella el teorema 5.5.

5.8 Veamos cómo cada referencia cartesiana del espacio afín define una base de su extensión vectorial, y cuáles son las ecuaciones del espacio afín y de su dirección en dicha base.

Sea E_{n+1} la extensión vectorial de un espacio afín $\mathbb{A}_n$ en el que hay fijada una referencia $(P_0; v_1, \dots, v_n)$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V y $E_{n+1} = \langle P_0 \rangle \oplus V$, tenemos que $\{P_0, v_1, \dots, v_n\}$ es una base de E_{n+1}. Si $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de un punto Q de E_{n+1}, es claro que $Q \in \mathbb{A}_n$ si y sólo si $Q = P_0 + x_1v_1 + \dots + x_nv_n$; es decir, $\mathbb{A}_n$ es el hiperplano de E_{n+1} cuya ecuación implícita en la base $\{P_0, v_1, \dots, v_n\}$ es "$x_0 = 1$". Del mismo modo, la ecuación implícita de V en la misma base es "$x_0 = 0$". Si $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$ denota la base dual de la base $\{P_0, v_1, \dots, v_n\}$, entonces lo dicho en el anterior párrafo significa que la ecuación de $\mathbb{A}_n$ es "$\omega_0 = 1$", y que la ecuación de V es "$\omega_0 = 0$" (ó sea, $V = \mathrm{Ker}\,\omega_0$).

Ejercicio 5.9 Sea $\widehat{\varphi} : E_{n+1} \to E'_{m+1}$ la extensión lineal de una aplicación afín $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$. Si $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es una referencia afín de $\mathbb{A}_n$ y $(P'_0; v'_1, \dots, v'_m)$ es una referencia afín de $\mathbb{A}'_m$, entonces la matriz de φ en dichas referencias es igual a la matriz de la aplicación lineal $\widehat{\varphi}$ en las bases $\{P_0, v_1, \dots, v_n\}$ de E_{n+1} y $\{P'_0, v'_1, \dots, v'_m\}$ de E'_{m+1}.

Dedúzcase de lo anterior cómo cambian las coordenadas afines de un punto al cambiar la referencia afín, y cómo cambia la matriz de una aplicación afín al cambiar las referencias afines.

Definición 5.10 Un *sistema de referencia baricéntrico* del espacio afín $\mathbb{A}_n$ es una sucesión $(P_1, \dots, P_{n+1})$ de puntos de $\mathbb{A}_n$ tal que $\{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ es una base de E_{n+1}.

Sea $(P_1, \dots, P_{n+1})$ una referencia baricéntrica en $\mathbb{A}_n$. Dado un punto $P \in \mathbb{A}_n$ existen escalares únicos $x_1, \dots, x_{n+1}$ tales que $P = x_1P_1 + \cdots + x_{n+1}P_{n+1}$, y diremos que $(x_1, \dots, x_{n+1})$ son las *coordenadas baricéntricas* del punto P en el sistema de referencia baricéntrico $(P_1, \dots, P_{n+1})$.

Ejemplos 5.11 Un sistema de referencia baricéntrico de $\mathbb{A}_1$ está formado por dos puntos ordenados y distintos. Las referencias baricéntricas de $\mathbb{A}_2$ están formadas por tres puntos ordenados y no alineados, es decir, por los vértices (ordenados) de un triángulo. Análogamente, una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_3$ está formada por los vértices (ordenados) de un tetraedro.

Ejercicio 5.12 Supongamos que ω_0 es la forma lineal de E^*_{n+1} que sobre $\mathbb{A}_n$ vale 1 (véase 5.8). Si $(P_1, \dots, P_{n+1})$ es una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_n$, entonces la ecuación del hiperplano afín $\mathbb{A}_n$ de E_{n+1} en la base $\{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ es $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1$. Para probarlo basta tener en cuenta que dado $e = x_1P_1 + \cdots + x_{n+1}P_{n+1} \in E_{n+1}$ tenemos

$$\omega_0(e) = x_1\omega_0(P_1) + \cdots + x_{n+1}\omega_0(P_{n+1}) = x_1 + \cdots + x_{n+1} \, .$$

El recíproco también es cierto: si $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ es una base de E_{n+1} tal que la ecuación de $\mathbb{A}_n$ en ella es $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1$, entonces dicha base está contenida en $\mathbb{A}_n$ y por lo tanto $(e_1, \dots, e_{n+1})$ es una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_n$ (compruébese).

Ejercicio 5.13 Si $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ es una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_n$ y para cada $i = 1, \dots, n$ es $v_i \in V$ tal que $P_i = P_0 + v_i$, pruébese que entonces $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es una referencia afín de $\mathbb{A}_n$. Recíprocamente, si $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es una referencia afín de $\mathbb{A}_n$ y $P_i = P_0 + v_i$, $i = 1, \dots, n$, entonces $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ es una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_n$.

Fijemos referencias afín y baricéntrica, $(P_0, v_1, \dots, v_n)$ y $(P_0, P_1, \dots, P_n)$, tales que $P_i = P_0 + v_i$, $i = 1, \dots, n$. Si las coordenadas afines de $P \in \mathbb{A}_n$ son $(a_1, \dots, a_n)$ y las coordenadas baricéntricas de P son $(b_0, b_1, \dots, b_n)$, cuál es la relación entre unas coordenadas y las otras?

Definición 5.14 Dados m puntos $Q_1, \dots, Q_m$ en el espacio afín $\mathbb{A}_n$ y dados m escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, razonando como en 5.12 es fácil ver que $\lambda_1Q_1 + \cdots + \lambda_mQ_m$ es un punto de $\mathbb{A}_n$.

Cuando m no es múltiplo de la característica del cuerpo k se define el *baricentro* de los puntos $Q_1, \dots, Q_m$ como el punto $\frac{1}{m}Q_1 + \cdots + \frac{1}{m}Q_m \in \mathbb{A}_n$.

Ejercicio 5.15 Cuando la característica del cuerpo k es distinta de 2, el punto medio de dos puntos A y B de $\mathbb{A}_n$ es justamente el baricentro de A y B.

6 Inmersión Proyectiva de un Espacio Afín

Veamos ahora cómo un espacio afín puede entenderse como una parte de un espacio proyectivo. En lo que sigue utilizaremos la notación dada en 5.8.

Proyectivizando la extensión vectorial E_{n+1} de $\mathbb{A}_n$ obtenemos una aplicación del espacio afín $\mathbb{A}_n$ al espacio proyectivo $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E_{n+1})$: la composición

$$\mathbb{A}_n \hookrightarrow E_{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n\,.$$

Esta composición es inyectiva: sean $P, Q \in \mathbb{A}_n$ tales que $\pi(P) = \pi(Q)$; entonces existe $\lambda \in k$ tal que $P = \lambda Q$ y por lo tanto $\omega_0(P) = \omega_0(\lambda Q)$, y como ω_0 vale 1 sobre los puntos de $\mathbb{A}_n$ debe ser $\lambda = 1$, es decir, $P = Q$.

Podemos pensar entonces el espacio afín $\mathbb{A}_n$ como una parte del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$. Veamos cuál es exactamente esa parte.

Proposición 6.1 *El complementario de $\mathbb{A}_n$ dentro de $\mathbb{P}_n$ es el hiperplano $\pi(V)$. Dicho hiperplano $\pi(V)$ se denomina* hiperplano del infinito *del espacio afín $\mathbb{A}_n$.*

Demostración. Consideremos un punto $\pi(e)$ del espacio proyectivo ($e \in E_{n+1}$, $e \neq 0$) y veamos qué debe ocurrir para que dicho punto sea imagen de un punto del espacio afín. Esto ocurrirá si y sólo si existen $\lambda \in k^*$ y $Q \in \mathbb{A}_n$ tales que $e = \lambda Q$, es decir, si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que $\lambda^{-1}e \in \mathbb{A}_n$, o sea, si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que $\omega_0(e) = \lambda$. Hemos obtenido:

$$\pi(e) \in \pi(\mathbb{A}_n) \iff \omega_0(e) \neq 0\,,$$

lo que es equivalente a:

$$\pi(e) \notin \pi(\mathbb{A}_n) \iff \omega_0(e) = 0 \iff e \in V\,.$$

Por lo tanto el complementario de $\mathbb{A}_n \simeq \pi(\mathbb{A}_n)$ en $\mathbb{P}_n$ es $\pi(V)$. ∎

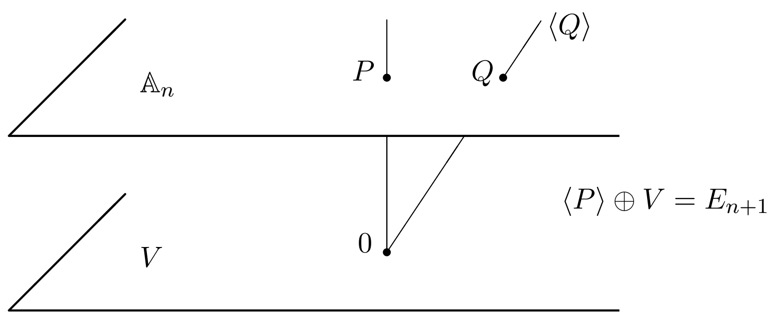

Figura 5.1

Veamos gráficamente lo dicho hasta ahora en esta sección (véase la figura 5.1). La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}_n & \hookrightarrow & \mathbb{P}_n \\ Q & \mapsto & \pi(Q) = \langle Q \rangle \end{array}$$

asocia a cada punto del espacio afín $\mathbb{A}_n$ la única recta vectorial de E_{n+1} que pasa por él; además una recta vectorial de E_{n+1} corta a $\mathbb{A}_n$ (en un único punto) si y sólo si no está contenida en V. Por lo tanto tenemos que el espacio afín $\mathbb{A}_n$ se mete dentro del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ rellenandolo todo menos el hiperplano $\pi(V)$.

Consideremos ahora otro espacio afín $\mathbb{A}'_n$ de dimensión n con su extensión vectorial E'_{n+1} y su dirección V', y veamos cómo cada afinidad de $\mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$ puede extenderse de modo único a una proyectividad de $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n = \mathbb{P}(E'_{n+1})$ que transforma el hiperplano del infinito $\pi(V)$ de $\mathbb{A}_n$ en el hiperplano del infinito $\pi(V')$ de $\mathbb{A}'_n$. Como consecuencia tendremos una correspondencia biunívoca entre las autoafinidades de $\mathbb{A}_n$ y las autoproyectividades de $\mathbb{P}_n$ que dejan invariante el infinito; dentro de dichas autoproyectividades, las dilataciones de $\mathbb{A}_n$ se corresponderán con las que dejan fijos todos los puntos del infinito.

Teorema 6.2 *Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$ una afinidad. Existe una única proyectividad $\tau : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_n & \hookrightarrow & \mathbb{P}_n \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau} \\ \mathbb{A}'_n & \hookrightarrow & \mathbb{P}'_n . \end{array}$$

Dicha proyectividad, que se denomina extensión proyectiva *de φ, transforma el hiperplano del infinito de $\mathbb{A}_n$ en el hiperplano del infinito de $\mathbb{A}'_n$.*

Demostración. La existencia de τ se prueba fácilmente; sólo tenemos que proyectivizar la extensión lineal de φ:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}_n & \hookrightarrow & E_{n+1} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{P}_n \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & (1) & \big\downarrow{\scriptstyle\widehat{\varphi}} & (2) & \big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\widehat{\varphi}}} \\ \mathbb{A}'_n & \hookrightarrow & E'_{n+1} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathbb{P}'_n . \end{array} \tag{6.1}$$

Sabemos que los cuadrados (1) y (2) del diagrama (6.1) son conmutativos, luego la unión de los dos también lo es, es decir, $\widetilde{\widehat{\varphi}}$ es una proyectividad que extiende a φ; además tenemos $\widetilde{\widehat{\varphi}}(\pi(V)) = \pi(V)$ porque $\widehat{\varphi}(V) = V$.

Probemos la unicidad, para lo cual consideraremos la forma lineal ω'_0 sobre E'_{n+1} tal que la ecuación de $\mathbb{A}'_n$ es "$\omega'_0 = 1$" (véase 5.8). Supongamos que $\tau : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ es una proyectividad tal que $\varphi = \tau_{|\mathbb{A}_n}$ (= restricción de τ a $\mathbb{A}_n$), y sea $T : E_{n+1} \to E'_{n+1}$ un representante lineal de τ. Sabemos que todos los representante lineales de τ son proporcionales, pero veamos que en nuestras hipótesis hay uno que podemos elegir de modo natural. Como τ transforma $\mathbb{A}_n$ en $\mathbb{A}'_n$ debe transformar el complementario en el complementario, $\tau(\pi(V)) = \pi(V')$, lo que es equivalente a la igualdad $T(V) = V'$; entonces

$$T^*(\omega'_0)(V) = (\omega'_0 \circ T)(V) = \omega'_0(T(V)) = \omega'_0(V') = 0 .$$

Como $T^*(\omega'_0)$ es una forma lineal no nula, de lo anterior se sigue

$$\operatorname{Ker} \omega_0 = V = \operatorname{Ker} T^*(\omega'_0) ,$$

por lo que existe $\lambda \in k^*$ tal que $T^*(\omega_0') = \lambda\omega_0$; tomando $T' = \lambda^{-1}T$ obtenemos que T' es un representante lineal de τ tal que $T'^*(\omega_0') = \omega_0$.

En definitiva, de las igualdades $\tau(\pi(V)) = \pi(V')$, $V = \operatorname{Ker}\omega_0$ y $V' = \operatorname{Ker}\omega_0'$ se sigue que podemos elegir T como el único representante lineal de τ que satisface $T^*(\omega_0') = \omega_0$.

Como T es un isomorfismo y $\mathbb{A}_n$ es una subvariedad afín de E_{n+1} de dimensión n, tenemos que $T(\mathbb{A}_n)$ es una subvariedad afín de E'_{n+1} de dimensión n. Si probamos la inclusión $T(\mathbb{A}_n) \subseteq \mathbb{A}'_n$ tendremos $T(\mathbb{A}_n) = \mathbb{A}'_n$, y por lo tanto la restricción de T a $\mathbb{A}_n$, $T_{|\mathbb{A}_n} : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$, será una afinidad: dado $P \in \mathbb{A}_n$ se cumple

$$\omega_0'(T(P)) = T^*(\omega_0')(P) = \omega_0(P) = 1$$

y por lo tanto $T(P) \in \mathbb{A}'_n$.

Ahora, como los cuadrados (1) y (2) del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "T_{|\mathbb{A}_n}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & E_{n+1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "T"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathbb{P}_n \arrow[d, "\widetilde{T} = \tau"] \\
\mathbb{A}'_n \arrow[r, hook] & E'_{n+1} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}'_n
\end{tikzcd}$$

son conmutativos tenemos $\tau_{|\mathbb{A}_n} = T_{|\mathbb{A}_n}$; además $\tau_{|\mathbb{A}_n} = \varphi$ por hipótesis, por lo que obtenemos $T_{|\mathbb{A}_n} = \varphi$. De la anterior igualdad y de la unicidad de la extensión lineal (véase 5.5) se sigue que $T = \widehat{\varphi}$ y por lo tanto $\tau = \widetilde{T} = \widetilde{\widehat{\varphi}}$, lo que concluye la demostración. ∎

Corolario 6.3 *Las afinidades de $\mathbb{A}_n$ en $\mathbb{A}'_n$ se corresponden biunívocamente con las proyectividades de $\mathbb{P}_n$ en $\mathbb{P}'_n$ que transforman el hiperplano del infinito de $\mathbb{A}_n$ en el hiperplano del infinito de $\mathbb{A}'_n$.*

En particular, las autoafinidades de $\mathbb{A}_n$ "son" las autoproyectividades de $\mathbb{P}_n$ que dejan invariante el hiperplano de infinito $\pi(V)$.

Demostración. Según hemos visto en la demostración de 6.2 tenemos las siguientes correspondencias. Por una parte, dada una afinidad $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$ tenemos la proyectividad $\widetilde{\widehat{\varphi}} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ que claramente manda el hiperplano $\pi(V)$ al hiperplano $\pi(V')$. Por otra parte, si $\tau : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ es una proyectividad tal que $\tau(\pi(V)) = \pi(V')$, entonces existe un único representante lineal T de τ que satisface $T(\mathbb{A}_n) = \mathbb{A}'_n$, de modo que la restricción de dicho representante lineal a $\mathbb{A}_n$ define una afinidad de $\mathbb{A}_n$ en $\mathbb{A}'_n$; denotémosla $\bar{\tau}$ para simplificar.

También hemos visto en la demostración de 6.2 que dichas corespondencias son inversa una de la otra: Por una parte, dada la proyectividad $\widetilde{\widehat{\varphi}}$, el único representante lineal suyo que manda $\mathbb{A}_n$ a $\mathbb{A}'_n$ es (obviamente) $\widehat{\varphi}$, de modo que la afinidad que define la restricción a $\mathbb{A}_n$ de dicho único representante lineal es φ. Por otra parte, dada la afinidad $\bar{\tau}$, su extensión lineal es precisamente el único representante lineal de τ que manda $\mathbb{A}_n$ a $\mathbb{A}'_n$, de modo que la proyectividad que obtenemos al proyectivizar dicha extensión lineal es τ. ∎

Proposición 6.4 *Las dilataciones de $\mathbb{A}_n$ "son" las autoproyectividades de $\mathbb{P}_n$ que dejan invariante cada punto del hiperplano del infinito $\pi(V)$.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ una afinidad y sea $\tau = \widetilde{\widehat{\varphi}}$ la autoproyectividad de $\mathbb{P}_n$ que extiende a φ. Nos preguntamos cuándo $\tau_{|_{\pi(V)}} : \pi(V) \to \pi(V)$ es la identidad.

Observemos que si $T : E_{n+1} \to E_{n+1}$ es un representante lineal de τ, entonces $T(V) = V$ y por lo tanto $T_{|_V} : V \to V$ es un representante lineal de $\tau_{|_{\pi(V)}}$; en particular $\widehat{\varphi}_{|_V}$ es un representante lineal de $\tau_{|_{\pi(V)}}$ (porque $\widehat{\varphi}$ es un representante lineal de τ). Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\widehat{\varphi}_{|_V} = \vec{\varphi}$ (véase en la demostración de 5.5 cómo se construía $\widehat{\varphi}$), obtenemos

$$\tau_{|_{\pi(V)}} = \text{identidad de } \pi(V) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\varphi} = \text{homotecia} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \text{dilatación}\,. \quad \blacksquare$$

Veamos a continuación la relación que hay entre las subvariedades afines de $\mathbb{A}_n$ y las subvariedades lineales de $\mathbb{P}_n$. En lo que sigue denotaremos $H = \pi(V)$.

Lema 6.5 *Sea $Y_m = P + V'_m$ una subvariedad afín (no vacía) de $\mathbb{A}_n$ de dimensión m (considerando $\mathbb{A}_n$ dentro de E_{n+1}). Entonces $X_m = \pi(\langle P\rangle \oplus V'_m)$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ de dimensión m que no está contenida en H. Además (considerando $\mathbb{A}_n$ dentro de $\mathbb{P}_n$), X_m se obtiene aadiendo a Y_m sus puntos del infinito (esto es, sus direcciones): $X_m = Y_m \sqcup \pi(V'_m)$ (unión disjunta).*

Demostración. Sea $Y_m = P + V'_m$ una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$. Como $P \in \mathbb{A}_n$ y V'_m es un subespacio vectorial de V, debe ser $P \notin V'_m$; es decir, $\dim(\langle P\rangle \oplus V'_m) = \dim V'_m + 1 = m + 1$. Es claro entonces que $X_m = \pi(\langle P\rangle \oplus V'_m)$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ de dimensión m.

Veamos la inclusión $Y_m \cup \pi(V'_m) \subseteq \pi(\langle P\rangle \oplus V'_m)$. Por una parte, cada punto de Y_m (considerado como vector de E_{n+1}) es representante de sí mismo (considerado como punto de $\mathbb{P}_n$), y por lo tanto $Y_m = P + V'_m \subseteq \pi(\langle P\rangle \oplus V'_m)$; por otra parte es claro que $\pi(V'_m) \subseteq \pi(\langle P\rangle \oplus V'_m)$.

Veamos ahora la inclusión $\pi(\langle P\rangle \oplus V'_m) \subseteq Y_m \cup \pi(V'_m)$. Dado $e \in \langle P\rangle \oplus V'_m$, existe $\lambda \in k$ y existe $v' \in V'_m$ tales que $e = \lambda P + v'$; si $\lambda = 0$, entonces $e \in V'_m$ y por lo tanto $\pi(e) \in \pi(V'_m)$, y si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda^{-1}e = P + \lambda^{-1}v' \in Y_m$ y tenemos $\pi(e) \in Y_m$.

La unión $Y_m \cup \pi(V'_m)$ es disjunta porque $\mathbb{A}_n \cap H = \emptyset$. $\blacksquare$

Lema 6.6 *Si $X_m = \pi(E'_{m+1})$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ de dimensión m que no está contenida en H, entonces $Y_m = E'_{m+1} \cap \mathbb{A}_n$ es una subvariedad afín no vacía de $\mathbb{A}_n$ de dimensión m. Además (considerando $\mathbb{A}_n$ dentro de $\mathbb{P}_n$) Y_m se obtiene quitando a X_m sus puntos del infinito: $Y_m = X_m \cap \mathbb{A}_n$.*

Demostración. Que $X_m = \pi(E'_{m+1})$ sea una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ de dimensión m que no está contenida en H, significa que E'_{m+1} es un subespacio vectorial de E_{n+1} de dimensión $m+1$ que no está contenido en V; en particular, existe un vector $e \in E'_{m+1}$ tal que $\omega_0(e) = \lambda \neq 0$ y por lo tanto $P = \lambda^{-1}e \in E'_{m+1} \cap \mathbb{A}_n$. Es fácil ver que la dimensión de la subvariedad afín $Y_m = E'_{m+1} \cap \mathbb{A}_n = P + (E'_{m+1} \cap V)$ de $\mathbb{A}_n$ es igual a m.

Ahora, como $P \in E'_{m+1}$ y $E'_{m+1} \cap V$ es un subespacio vectorial de E'_{m+1} de dimensión m al que no pertenece P, es claro que $E'_{m+1} = \langle P\rangle \oplus (E'_{m+1} \cap V)$, de modo que la subvariedad lineal que se obtiene, según el lema 6.5, de la subvariedad afín $Y_m = P + (E'_{m+1} \cap V)$ es X_m. Por una parte, según 6.5 tenemos $X_m = Y_m \sqcup \pi(E'_{m+1} \cap V)$; por otra parte, de la igualdad $\mathbb{P}_n = \mathbb{A}_n \sqcup H$ y las inclusiones $Y_m \subseteq \mathbb{A}_n$, $\pi(E'_{m+1} \cap V) \subseteq H$ concluimos que $Y_m = X_m \cap \mathbb{A}_n$. $\blacksquare$

Teorema 6.7 *Existe una correspondencia biunívoca entre las subvariedades afines no vacías de $\mathbb{A}_n$ y las subvariedades lineales de $\mathbb{P}_n$ que no están contenidas en H. Dicha correspondencia conserva las dimensiones.*

Demostración. Siguiendo con las notaciones de los lemas 6.5 y 6.6, debemos probar que las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} Y_m & \longmapsto & Y_m \sqcup \pi(V'_m) \quad (V'_m = \text{dirección de } Y_m) \\ \\ \left[\begin{array}{c}\text{subvariedades afines}\\ \text{no vacías de } \mathbb{A}_n\end{array}\right] & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longleftarrow\end{array} & \left[\begin{array}{c}\text{subvariedades lineales de } \mathbb{P}_n\\ \text{que no están contenidas en } H\end{array}\right] \\ \\ X_m \cap \mathbb{A}_n & \longleftarrow\!\shortmid & X_m \end{array}$$

son una la inversa de la otra. Por una parte, si $X_m = \pi(E'_{m+1})$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ que no está contenida en H, en la demotración de 6.6 hemos visto que $Y_m = X_m \cap \mathbb{A}_n$ es una subvariedad afín de $\mathbb{A}_n$ de dirección $E'_{m+1} \cap V$ tal que $Y_m \sqcup \pi(E'_{m+1} \cap V) = X_m$. Por otra parte, si Y_m es una subvariedad afín no vacía de $\mathbb{A}_n$ de dirección V'_m, entonces es claro que $(Y_m \sqcup \pi(V'_m)) \cap \mathbb{A}_n = Y_m$, ya que $\pi(V'_m) \subseteq H$, $Y_m \subseteq \mathbb{A}_n$ y $\mathbb{P}_n = \mathbb{A}_n \sqcup H$. ∎

En lo que resta de sección veremos cómo los últimos resultados que hemos probado nos permiten redefinir toda la estructura de espacio afín:

6.8 Un espacio afín de dimensión n es un par $\mathbb{A}_n = (\mathbb{P}_n, H)$ formado por un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ de dimensión n y por un hiperplano suyo H, el cual se denomina *hiperplano del infinito* del espacio afín $\mathbb{A}_n$. Los puntos de $\mathbb{P}_n$ que no están en H se llaman puntos *afines* (ó *propios*) del espacio afín, y los de H se denominan puntos *del infinito* (ó *impropios*) del espacio afín.

6.9 Llamaremos *subvariedad afín* (no vacía) de $\mathbb{A}_n$ a cada subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ que no está contenida en el hiperplano del infinito H. La *dirección* de una subvariedad afín se define como su intersección con el hiperplano del infinito, y diremos que dos subvariedades afines son *paralelas* si sus direcciones son incidentes.

Cada subvariedad afín está determinada por un punto afín suyo y por su dirección: si X es una subvariedad afín de dimensióm m de $\mathbb{A}_n$, entonces su dirección $X_\infty = X \cap H$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ de dimensión $m-1$, de modo que si P es un punto afín de X entonces debe satisfacerse $X = P + X_\infty$ (aplíquese la fórmula de la dimensión para subvariedades lineales de un espacio proyectivo).

Las relaciones de incidencia en el espacio afín (como las enunciadas en el ejercicio 1.7) pueden obtenerse fácilmente de las relaciones de incidencia en el espacio proyectivo.

6.10 Dado otro espacio afín $\mathbb{A}'_n = (\mathbb{P}'_n, H')$, llamaremos *afinidad* del espacio afín $\mathbb{A}_n$ en el espacio afín $\mathbb{A}'_n$ a las proyectividades de $\mathbb{P}_n$ en $\mathbb{P}'_n$ que transforman el hiperplano H en el hiperplano H'. En particular, una *autoafinidad* de $\mathbb{A}_n$ es una autoproyectividad de $\mathbb{P}_n$ que deja invariante a H. Las *dilataciones* de $\mathbb{A}_n$ se definen como las autoproyectividades de $\mathbb{P}_n$ que dejan fijos todos los puntos del hiperplano del infinito H. Las dilataciones que no dejan fijo ningún punto afín se denominan *traslaciones*.

6.11 Dados tres puntos distintos y alineados A, B, C de $\mathbb{A}_n$, llamaremos *razón simple* de dichos puntos al escalar

$$(A, B, C) = (A, B; C, P_\infty)\,,$$

donde P_∞ es el punto del infinito de la recta que contiene a los puntos dados.

Si consideramos el espacio afín con la primera definición, $(\mathbb{A}_n, V)$, en cuyo caso $\mathbb{A}_n = (\mathbb{P}(E_{n+1}), \pi(V))$ donde E_{n+1} es la extensión vectorial de $\mathbb{A}_n$, entonces existirán un vector no nulo $v \in V$ y un escalar λ $(\neq 0, 1)$ tales que $B = C + v$ y $A = c + \lambda v$, en cuyo caso para la primera definición de razón simple tenemos $(A, B, C) = \lambda$. Por otra parte, C (como vector de E_{n+1}) se representa a sí mismo (como punto del espacio proyectivo), el vector $C + v = B$ representa al punto B, el vector $C + \lambda v = A$ representa al punto A, y el vector v representa al punto del infinito P_∞; haciendo un cálculo rutinario se llega a que para la segunda definición de razón simple también tenemos $(A, B, C) = \lambda$.

Ejercicios 6.12 (a) Dados puntos distintos A y B de $\mathbb{A}_n$, el punto medio de A y B es el conjugado armónico respecto del par (A, B) del punto del infinito de la recta $A + B$.

(b) Dados puntos distintos y alineados A, B, C, D en $\mathbb{A}_n$ tenemos

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}\,.$$

(c) Una aplicación biyectiva entre dos rectas afines es una afinidad si y sólo si conserva las razones simples.

Ejercicio 6.13 Las dilataciones de $\mathbb{A}_n$ ($\neq$ identidad) son justamente las homologías de $\mathbb{P}_n$ que tienen como eje a H. Sea φ una homología de $\mathbb{P}_n$ cuyo eje es H.

Si φ es especial entonces es una traslación de $\mathbb{A}_n$, en cuyo caso diremos que el vértice de la homología φ es la *dirección* de la traslación φ.

Si φ es no especial entonces es una homotecia de $\mathbb{A}_n$, en cuyo caso el vértice de la homología φ es el centro de la homotecia φ. Además, si m es el *módulo* de la homología no especial φ de $\mathbb{P}_n$ y λ es la *razón* de la homotecia φ de $\mathbb{A}_n$, entonces $\lambda = 1/m$ (véase el problema II.5.31).

6.14 Una *referencia afín* (ó *cartesiana*) de $\mathbb{A}_n$ se define como una referencia proyectiva $(P_0, P_1, \ldots, P_n, U)$ de $\mathbb{P}_n$ tal que $P_1 + \cdots + P_n = H$, es decir, tal que la ecuación del hiperplano del infinito en ella es $x_0 = 0$; el punto P_0 es el *origen* de la referencia, U es el *punto unidad*, y las rectas $P_0 + P_i$, $i = 1, \ldots, n$, son los *ejes* de la referencia.

Sea $(P_0, P_1, \ldots, P_n, U)$ una referencia afín de $\mathbb{A}_n$. Dado un punto $P \in \mathbb{A}_n$ de coordenadas homogéneas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ debe ser $x_0 \neq 0$, de modo que multiplicando por x_0^{-1} obtenemos que existen escalares $y_1, \ldots, y_n$ tales que $P = (1, y_1, \ldots, y_n)$; la sucesión de escalares $(y_1, \ldots, y_n)$ está totalmente determinada por P y la llamaremos *coordenadas afines* (ó *cartesianas*) del punto afín P en la referencia afín $(P_0, P_1, \ldots, P_n, U)$.

Pongamos, igual que en 6.11, $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E_{n+1})$ y $H = \pi(V)$. Sea $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ una base normalizada asociada a la referencia afín $(P_0, P_1, \ldots, P_n, U)$ considerada como referencia proyectiva; en particular tenemos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de V. Como $\pi(e_0) = P_0$ y P_0 pensado como vector de E_{n+1} se representa a sí mismo, es claro que podemos suponer que la base normalizada es $\{P_0, e_1, \ldots, e_n\}$. Fijado $P \in \mathbb{A}_n$, si $(y_1, \ldots, y_n)$ son las coordenadas afines de P según la definición dada en el párrafo anterior, entonces las coordenadas homogéneas de P son

$(1, y_1, \dots, y_n)$; en consecuencia, el vector $P_0 + y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ representa al punto P, y como dicho vector está en $\mathbb{A}_n$ debe ser $P = P_0 + y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$, por lo que las coordenadas afines de P con la primera definición dada son también $(y_1, \dots, y_n)$.

Veamos, en dimensión 2 para poder hacerlo gráficamente, la relación que hay entre las dos definiciones dadas de referencia afín. Supongamos en primer lugar que tenemos una referencia cartesiana $(P_0; v_1, v_2)$; si P_1 es el punto del infinito de la recta que pasa por P_0 con la dirección del vector v_1 (es decir, $P_1 = [P_0+(P_0+v_1)]\cap H$), P_2 es el punto del infinito de la recta que pasa por P_0 con la dirección del vector v_2, y $U = P_0+(v_1+v_2)$, entonces (P_0, P_1, P_2, U) es un sistema de referencia proyectivo que satisface $P_1 + P_2 = H$ (la subvariedad lineal H tiene dimensión 1 y los puntos P_1 y P_2 de H son distintos porque v_1 y v_2 son linealmente independientes; véase la figura 5.2).

Supongamos ahora que partimos de una referencia proyectiva (P_0, P_1, P_2, U) tal que $P_1 + P_2 = H$, es decir, P_1 y P_2 son dos direcciones distintas del plano afín, y P_0 y U son dos puntos afines distintos tales que U no está sobre las rectas que pasan por P_0 con las direcciones que definen P_1 y P_2. En estas condiciones, la recta que pasa por U con la dirección de P_1 corta a la recta que pasa por P_0 con la dirección de P_2 en un único punto afín Q_2, $(P_0+P_2)\cap(U+P_1) = Q_2$; del mismo modo obtenemos que $(P_0 + P_1) \cap (U + P_2) = Q_1$ es un punto afín. Si v_1 y v_2 son los únicos vectores que satisfacen $Q_1 = P_0 + v_1$ y $Q_2 = P_0 + v_2$, entonces $(P_0; v_1, v_2)$ es un sistema de referencia cartesiano (véase la figura 5.3).

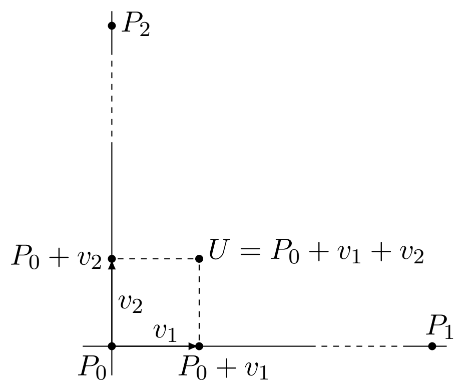

Figura 5.2

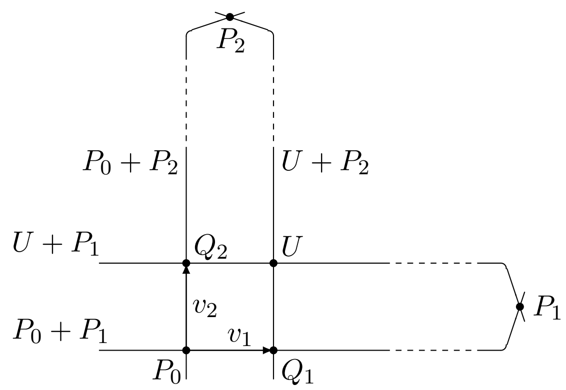

Figura 5.3

Ejercicio 6.15 Supongamos que es $n = 1$ y que en $\mathbb{A}_1$ tenemos una referencia afín $(P_0; v_1)$. Sea P_1 el punto del infinito de $\mathbb{A}_1$, de modo que $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{P}_1, P_1)$, y denotemos $U = P_0+v_1$. Según los anteriores puntos, dado $P \in \mathbb{A}_1$, la coordenada afín de P en la referencia afín $(P_0; v_1)$ es λ si y sólo si las coordenadas homogéneas de P en la referencia proyectiva (P_0, P_1, U) son $(1, \lambda)$, es decir,

$$(P, U, P_0) = \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad (P_1, P_0; U, P) = \lambda$$

(véase 4.2; también podemos llegar a la anterior equivalencia aplicando 6.11).

Lo dicho en el anterior párrafo y la proposición II.2.16 proporcionan una interpretación geométrica de las coordenadas cartesianas que coincide con la interpretación clásica mediante proyecciones paralelas sobre los ejes.

6.16 Fijemos una referencia afín $(P_0, P_1, \dots, P_n, U)$ en $\mathbb{A}_n$. La ecuación de H en dicha referencia es $x_0 = 0$ y, como ya hemos visto, la ecuación de $\mathbb{A}_n$ es $x_0 = 1$ (que no es homogénea porque $\mathbb{A}_n$ no es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$). Consideremos una subvariedad afín X en $\mathbb{A}_n$ (es decir, X es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ que no está contenida en H). Si las ecuaciones de X en coordenadas proyectivas son

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{h0}x_0 + a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} ,$$

entonces, cortando con $\mathbb{A}_n \equiv x_0 = 1$ obtenemos que las ecuaciones de la subvariedad afín X en coordenadas afines son

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n & = & -a_{10} \\ & \vdots & \\ a_{h1}y_1 + \cdots + a_{hn}y_n & = & -a_{h0} \end{array}\right\} ,$$

y cortando con $H \equiv x_0 = 0$ obtenemos que la dirección de X, $X \cap H$, es la subvariedad lineal cuyas ecuaciones homogéneas son

$$\left.\begin{array}{rcl} x_0 & = & 0 \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} ;$$

compárese con lo dicho en 3.4.

Compruébese que si $U' = (P_0 + U) \cap H$, entonces $(P_1, \dots, P_n, U')$ es una referencia proyectiva de H en la cual las ecuaciones de la subvariedad lineal $X \cap H$ son

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n & = & 0 \end{array}\right\} .$$

Ejercicio 6.17 Supongamos que $n+1$ no es múltiplo de la característica del cuerpo k. Una *referencia baricéntrica* de $\mathbb{A}_n$ se define como una referencia proyectiva $(P_0, P_1, \dots, P_n, U)$ de $\mathbb{P}_n$ tal que la ecuación del hiperplano del infinito en ella es $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$. Nótese que todos los puntos de una referencia baricéntrica son afines.

Sea $(P_0, P_1, \dots, P_n, U)$ una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_n$. Dado un punto $P \in \mathbb{A}_n$ de coordenadas homogéneas $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ debe ser $x_0 + x_1 + \cdots + x_n \neq 0$, de modo que multiplicando por $(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^{-1}$ obtenemos que existen escalares $y_0, y_1, \dots, y_n$ tales que $y_0 + y_1 + \cdots + y_n = 1$ y $P = (y_0, y_1, \dots, y_n)$; la sucesión de escalares $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ está totalmente determinada por P y la llamaremos *coordenadas baricéntricas* del punto afín P en la referencia baricéntrica $(P_0, P_1, \dots, P_n, U)$.

Pongamos de nuevo $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E_{n+1})$ y $H = \pi(V)$. Considerando cada punto afín como un vector que se representa a sí mismo, tenemos que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ es una base de E_{n+1} que es base normalizada asociada a la referencia $(P_0, P_1, \dots, P_n, U)$ considerada como referencia proyectiva; es fácil ver entonces que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ es una referencia baricéntrica de $\mathbb{A}_n$ según la primera definición dada y U es el baricentro de los puntos $P_0, P_1, \dots, P_n$, y que las coordenadas baricéntricas de un punto afín coindicen para las dos definiciones dadas.

7 Problemas

7.1 Sea $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ una dilatación (distinta de la identidad) con $n \geq 2$. Tenemos:

(a) φ queda determinada si se conocen las imágenes de dos puntos distintos de $\mathbb{A}_n$;

(b) si $P \in \mathbb{A}_n$ es tal que $\varphi(P) \neq P$, entonces la recta $P + \varphi(P)$ es invariante por φ;

(c) conocidos dos puntos distintos de $\mathbb{A}_n$ y sus imágenes por φ, dedúzcase del apartado anterior cómo podemos decidir si φ es una homotecia o una traslación;

(d) si φ es una traslación, entonces queda determinada si se conoce la imagen de un punto de $\mathbb{A}_n$.

7.2 Dar las posibles interpretaciones afines del Teorema de Desargues. Como aplicación, si en un plano afín tenemos dos rectas paralelas y distintas y un punto exterior a ellas, constrúyase, utilizando sólo la regla, la recta que pasa por dicho punto y es paralela a dichas rectas.

7.3 Utilizando las construcciones del cuadrivértice completo y el Teorema de Thales, resolver con la ayuda de una regla los siguientes problemas:

(a) Dado un segmento y su punto medio, trazar por un punto dado la paralela a la recta que contiene al segmento.

(b) Dadas dos rectas paralelas y un segmento sobre una de ellas, construir el segmento doble (triple, ...), o dividir el segmento en 2 (3, ...) segmentos iguales.

7.4 Resuélvase el ejercicio 3.5 considerándose el espacio afín dentro del espacio proyectivo y utilizándose coordenadas y ecuaciones homogéneas.

7.5 Un *cuadrilátero* es la figura afín plana determinada por cuatro puntos distintos y ordenados A, B, C, D con tres cualesquiera de ellos no alineados. Dichos puntos son los vértices del cuadrilátero, y diremos que A y C (B y D) son vértices opuestos, y que $A+B$ y $C+D$ ($A+D$ y $B+C$) son lados opuestos. Las rectas que pasan por un par de vértices opuestos se llaman *diagonales*. Un *paralelogramo* es un cuadrilátero en el que lados opuestos son paralelos.

Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si sus diagonales se bisecan mutuamente (i.e., se cortan en sus puntos medios). Además, en un paralelogramo las diagonales se cortan en el baricentro del paralelogramo.

7.6 En un plano afín, sean A, D, A', D' y B, C, B', C' dos cuaternas de puntos distintos y alineados tales que $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son paralelogramos. Entonces están alineados los puntos $(A+B) \cap (A'+B')$, $(C+D) \cap (C'+D')$, $(A+C) \cap (A'+C')$, $(B+D) \cap (B'+D')$.

7.7 Las *medianas* de un triángulo (rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto) concurren en el baricentro del triángulo, el cual divide a cada mediana en la proporción $-2:1$.

7.8 La recta conjugada armónica de la mediana que pasa por un vértice de un triángulo respecto de los dos lados que pasan por ese vértice, es paralela al tercer lado del triángulo.

7.9 Las rectas paralelas a dos lados de un triángulo que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos iguales.

7.10 En un espacio afín, un *cuadrilátero alabeado* es la figura determinada por cuatro puntos distintos y ordenados que no son coplanarios.

Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero (alabeado ó no) son los vértices de un paralelogramo, y las bimedianas (rectas que unen puntos medios de lados opuestos) se bisecan mutuamente.

7.11 Las medianas de un tetraedro (rectas que unen un vértice con el baricentro de la cara opuesta) concurren en un punto.

7.12 Un *hexágono* es la figura afín plana determinada por seis puntos distintos y ordenados tales que tres consecutivos de ellos no están alineados. Suponemos conocidos los elementos geométricos de un hexágono: vértices, lados, vértices opuestos, diagonales, etc.

Si las tres diagonales de un hexágono concurren en sus puntos medios, entonces los lados opuestos son paralelos. Es cierto el resultado recíproco?

7.13 Un *trapecio* es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos que son paralelos, los cuales se denominan *bases del trapecio*.

Si P es el punto de corte de las diagonales de un trapecio, entonces la recta que pasa por P y es paralela a las bases corta a los dos lados restantes en puntos cuyo punto medio es P.

7.14 El punto de corte de los dos lados no paralelos de un trapecio y el punto de corte de las diagonales, están alineados con los puntos medios de las bases, a los que separa armónicamente.

7.15 Supóngase fijada una referencia proyectiva (P_0, P_1, P_2, U) en un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$. Si consideramos el plano afín que obtenemos al fijar en $\mathbb{P}_2$ la recta de ecuación $x + y - z = 0$, determínese el vértice D del paralelogramo $ABCD$ sabiendo que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (2, 1, 1)$.

Hállense también las ecuaciones de la homotecia de razón 2 y centro (1,1,0), así como de las traslaciones que tienen por dirección el punto del infinito (1,1,2).

7.16 Sean $\mathbb{P}_2$ y (P_0, P_1, P_2, U) como en el problema 7.15 y tomemos como recta del infinito la de ecuación $x + y + z = 0$. Dados $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, hállese el punto medio del segmento AB y calcúlese la ecuación de la recta $A + B$.

7.17 Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ en un plano afín $\mathbb{A}_2$, existe una única afinidad $\varphi : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ que transforma A en A', B en B' y C en C'. Cómo podemos saber, examinando los triángulos, si dicha afinidad es una traslación, una homotecia, ó ninguna de las dos cosas?

7.18 En un plano afín $\mathbb{A}_2$ en el que hay fijada una referencia cartesiana, dados los puntos $X = (0, 0)$, $Y = (1, 0)$, $Z = (0, 1)$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$, A, B, C distintos y no alineados, calcúlense las ecuaciones de la afinidad que transforma el triángulo XYZ en el triángulo ABC.

7.19 Estúdiense las subvariedades afines invariantes por la autoafinidad φ de un plano afín $\mathbb{A}_2$ cuyas ecuaciones en una referencia cartesiana son

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & 1 - 2y_2 \\ y_2' & = & -1 + y_1 + 3y_2 \end{array}\right\} .$$

7.20 Sea $\mathbb{A}_2$ un plano afín. Dadas dos rectas que se cortan y un punto que no pertenece a ninguna de ellas, y dada otra configuración análoga, pruébese que exiten dos autoafinidades de $\mathbb{A}_2$ que trasforman una configuración en la otra. Hallar esas afinidades en el caso

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x - y = 2 \\ s \equiv x - 2y = -1 \\ P = (0,0) \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} r' \equiv x = 1 \\ s' \equiv x - y = 1 \\ P' = (2,2) \end{array}\right\}.$$

7.21 Sea $\mathbb{A}_3$ un espacio afín de dimensión 3. Dadas tres rectas no coplanarias y concurrentes, y un punto que no pertenece a ninguno de los tres planos que determinan dichas rectas (al tomarlas dos a dos), y dada otra configuración análoga, cuántas autoafinidades de $\mathbb{A}_3$ existen que trasforman una configuración en la otra?

7.22 Sea $\mathbb{P}_2$ un plano proyectivo en el que se ha fijado una referencia proyectiva respecto de la cual una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ tiene por ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 2y + 2z \\ y' & = & -x - z \\ z' & = & 2x + 2y + 3z \end{array}\right\},$$

y considérese el plano afín $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{P}_2, r)$ donde r es la recta de ecuación $x + y + z = 0$.

Pruébese que φ es una dilatación de $\mathbb{A}_2$. Si φ es una traslación calcúlese su dirección, y si φ es una homotecia calcúlense su centro y su razón.

7.23 Sea $\mathbb{P}_2$ un plano proyectivo en el que se ha fijado una referencia proyectiva respecto de la cual una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ tiene por ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 2y + 4z \\ y' & = & y \\ z' & = & -x - y - z \end{array}\right\},$$

y considérese el plano afín $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{P}_2, r)$ donde r es la recta de ecuación $x + y + 2z = 0$.

Pruébese que φ es una dilatación de $\mathbb{A}_2$. Si φ es una traslación calcúlese su dirección, y si φ es una homotecia calcúlense su centro y su razón.

7.24 En un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ en el que se ha fijado una referencia, sea r la recta de ecuación $x+y+z = 0$. Dados en el plano afín $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{P}_2, r)$ los puntos $A = (1,0,1)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $D = (2,0,-1)$, $E = (0,-1,-1)$ y $F = (1,0,0)$, calcúlese la ecuación de la única afinidad $\varphi : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ que transforma el triángulo ABC en el triángulo DEF.

7.25 Sean A, B, C, D los vértices de un tetraedro de un espacio afín real de dimensión 3. Si por dichos vértices se trazan cuatro rectas paralelas que cortan a las caras opuestas en los puntos A', B', C', D', calcúlese $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que los puntos de los segmentos AA', BB', CC', DD' con razón λ sean coplanarios.