Capítulo IV

El Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva

Hemos visto en el Capítulo I que las subvariedades lineales de un espacio proyectivo tienen estructura de retículo, y que las proyectividades son isomorfismos de retículos. Dos preguntas aparecen entonces de modo natural: qué propiedades debe tener un retículo para que sea el retículo de subvariedades lineales de un espacio proyectivo?, todo isomorfismo de retículos, entre retículos de subvariedades lineales de espacios proyectivos, es la proyectivización de un isomorfismo lineal?

En este capítulo veremos que la respuesta a la segunda pregunta es negativa; más concretamente, probaremos en el "teorema fundamental de la Geometría Proyectiva" que todo isomorfismo de retículos, entre retículos de subvariedades lineales de espacios proyectivos (de dimensión ≥ 2), es la proyectivización de un "isomorfismo semi-lineal". La respuesta a la otra pregunta la daremos en los apéndices del final, si bien dedicaremos la primera sección de este capítulo a poner de relieve cómo la estructura de retículo es la estructura geométrica en la que aparecen de modo natural las nociones de "dimensión", "incidencia", "punto", "plano", etc.

1 Retículos

En esta sección, los cuerpos que aparezcan no necesariamente son conmutativos. Cuando E es un espacio vectorial sobre un cuerpo no conmutativo, se construye el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ de igual modo a como se hizo en el Capítulo I para el caso conmutativo, y todo lo dicho en ese capítulo es también válido para este espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$.

1.1 Recordemos que un *retículo* es un conjunto ordenado parcialmente en el que todo subconjunto finito no vacío tiene supremo e ínfimo.

Sea $\mathcal{R}$ un retículo cuya relación de orden denotamos "$\leq$". Dado un subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $\mathcal{R}$, su supremo y su ínfimo los denotaremos $\sup\{a_1, \ldots, a_n\}$ e $\inf\{a_1, \ldots, a_n\}$, respectivamente. En $\mathcal{R}$ tenemos definidas dos operaciones internas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \xrightarrow{+} & \mathcal{R} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b := \sup\{a, b\}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times \mathcal{R} & \xrightarrow{\cap} & \mathcal{R} \\ (a, b) & \longmapsto & a \cap b := \inf\{a, b\}. \end{array}$$

De las propiedades del orden parcial se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

- conmutativa: $a+b=b+a\,,\quad a\cap b=b\cap a\,;$
- asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)\,,\quad (a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)\,;$
- idempotencia: $a+a\;=\;a\;=\;a\cap a\,;$
- absorción: $a+(b\cap a)=a\,,\quad a\cap(b+a)=a\,.$

Es inmediato comprobar que además se satisface:

$$a\cap b=a \quad\Longleftrightarrow\quad a\leq b \quad\Longleftrightarrow\quad a+b=b\,.$$

Según las últimas equivalencias, el orden de $\mathcal{R}$ lo podemos recuperar a partir de las operaciones "$+$" e "$\cap$". De hecho, la definición 1.1 es canónicamente equivalente a la siguiente: "Llamaremos *retículo* a todo conjunto $\mathcal{R}$ dotado de dos operaciones internas "$+$" e "$\cap$" que son conmutativas, asociativas e idempotentes, y que satisfacen las leyes de absorción".

Efectivamente, de las leyes de absorción se sigue la equivalencia $a+b=b\;\Leftrightarrow\;a\cap b=a$, de modo que en $\mathcal{R}$ tenemos definido el orden parcial

$$a\leq b \quad :\Longleftrightarrow\quad a+b=b \quad\Longleftrightarrow\quad a\cap b=a\,;$$

es fácil probar que para dicho orden tenemos $\sup\{a,b\}=a+b$, $\inf\{a,b\}=a\cap b$.

Definiciones 1.2 Sea $\mathcal{R}$ un retículo. Llamaremos *cadena finita* de $\mathcal{R}$ a toda colección finita y no vacía de elementos de $\mathcal{R}$ en orden estrictamente creciente; si el número de elementos de la cadena es m, diremos de ella que tiene longitud $m-1$:

$$\begin{array}{cl} a_0 & \text{tiene longitud } 0, \\ a_0<a_1 & \text{tiene longitud } 1, \\ \vdots & \qquad\vdots \\ a_0<a_1<\cdots<a_m & \text{tiene longitud } m. \end{array}$$

Diremos que $\mathcal{R}$ es un retículo de *dimensión finita* si existe un natural N tal que la longitud de toda cadena finita de $\mathcal{R}$ es menor que N.

Supongamos que $\mathcal{R}$ tiene dimensión finita. Entonces es claro que en $\mathcal{R}$ existe un único elemento $a\in\mathcal{R}$ con la siguiente propiedad: $a\leq b$ para todo $b\in\mathcal{R}$. Efectivamente, si $a_0<a_1<\cdots<a_m$ es una cadena finita de $\mathcal{R}$ de longitud máxima, entonces a_0 debe ser dicho elemento. Lo anterior se expresa diciendo que en $\mathcal{R}$ existe *primer elemento*, el cual llamaremos *vacío* y lo denotaremos con el símbolo $\emptyset$. Denominaremos *cadena propia* de $\mathcal{R}$ a toda cadena finita de $\mathcal{R}$ de la forma

$$\emptyset\neq a_0<a_1<\cdots<a_n\,.$$

Se llama *dimensión del retículo* $\mathcal{R}$, y lo denotaremos $\dim\mathcal{R}$, al máximo de las longitudes de sus cadenas propias. Dado $a\in\mathcal{R}$, $a\neq\emptyset$, se llama *dimensión del elemento* a, y lo denotaremos $\dim a$, al máximo de las longitudes de las cadenas propias de $\mathcal{R}$ que terminan en a; diremos que la dimensión de $\emptyset$ es -1. Es fácil comprobar que existe un único elemento $b\in\mathcal{R}$ con la siguiente propiedad: $a\leq b$ para todo $a\in\mathcal{R}$. Dicho elemento es el *último elemento* de $\mathcal{R}$ y es el único que satisface $\dim \mathcal{R} = \dim b$. Una propiedad de comprobación inmediata es la siguiente: si a y b son elementos de $\mathcal{R}$ tales que $a \leq b$, entonces $a = b$ si y sólo si $\dim a = \dim b$.

Los elementos de $\mathcal{R}$ de dimensión 0 los llamaremos *puntos*, los de dimensión 1 *rectas*, los de dimensión 2 *planos*, y si $\dim \mathcal{R} = n$ y $a \in \mathcal{R}$ es tal que $\dim a = n - 1$, entonces diremos que a es un *hiperplano*.

Ejemplos 1.3 (a) Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $X = \{P_1, \ldots, P_{n+1}\}$ un conjunto con $n+1$ elementos y consideremos el retículo $\mathcal{R}$ que consiste en el conjunto de las partes de X dotado del orden que define la inclusión. Dados A, $B \in \mathcal{R}$, en este caso $A \cap B$ coincide con la intersección conjuntista y $A + B$ es la unión conjuntista de A y B. Este retículo $\mathcal{R}$ tiene dimensión finita igual a n, y si A es un subconjunto no vacío de X que tiene r elementos, entonces A es un elemento de $\mathcal{R}$ de dimensión $r - 1$. Por ejemplo, si $n = 2$, entonces $\mathcal{R}$ consiste en el vacío, tres puntos, tres rectas y un plano, de modo que $\mathcal{R}$ se corresponde con el retículo de los vértices, las aristas y la cara de un triángulo con el orden que define la inclusión (véase la figura 1.1).

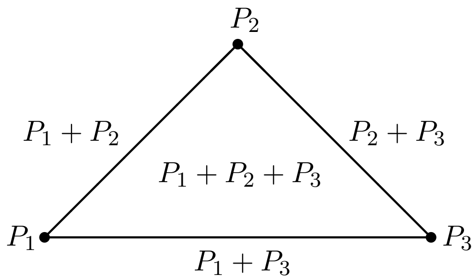

Figura 1.1

(b) Denotemos por $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ el retículo de las subvariedades lineales de un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ de dimensión n (véase la sección I.1). Es fácil ver que dicho retículo tiene dimensión finita igual a n, y que si X es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$, entonces la dimensión de X como subvariedad lineal coincide con su dimensión como elemento del retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$.

1.4 En lo que sigue, en un retículo de dimensión finita $\mathcal{R}$ usaremos la notación y la terminología que son usuales en los espacios proyectivos. Los elementos de $\mathcal{R}$ los denominaremos *variedades lineales* (ó simplemente *variedades*). Dadas variedades X e Y de $\mathcal{R}$, diremos que X es una *subvariedad* de Y cuando $X \leq Y$, en cuyo caso escribiremos "$X \subseteq Y$" y diremos que "X está contenida en Y" (ó también que "Y pasa por X"). Dos variedades se dice que son *incidentes* si una de ellas está contenida en la otra. Si X es una subvariedad de Y y $\dim Y = \dim X + 1$, entonces diremos que "X es un hiperplano de Y", y si P es un punto de $\mathcal{R}$ tal que $P \leq X$, entonces diremos que "P pertenece a X" y escribiremos "$P \in X$".

1.5 Si se quiere caracterizar el retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$, entonces se tendrán que analizar las propiedades suyas que puedan describirse solamente en terminos propios de los retículos. Por ejemplo, $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ es de dimensión finita y en él se satisface la "formula de la dimensión" probada en I.1.9: dados elementos X_1 y X_2 del retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ tenemos

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)\,. \tag{1.1}$$

Nótese que si $\mathcal{R}$ es un retículo de dimensión finita en el que es cierta la fórmula (1.1), entonces en $\mathcal{R}$ se cumplen los conocidos resultados de incidencia de los espacios proyectivos: "por dos puntos distintos de $\mathcal{R}$ pasa una única recta", "por tres puntos de $\mathcal{R}$ no alineados pasa un único plano", "dos rectas distintas de un plano se cortan en un único punto", "un hiperplano que no contiene a una recta corta a la recta en un único punto" , etc.

Otra importante propiedad del retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ es que en él se cumple el Teorema de Desargues (probado al final del Capítulo I cuando $n = 2$):

Teorema 1.6 (Desargues) *Dados en $\mathbb{P}_n$ dos triángulos sin vértices ni lados comunes, $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$, si las tres rectas $A_i + B_i$ $(i = 1, 2, 3)$ se cortan en un punto, entonces los tres puntos $(A_i + A_j) \cap (B_i + B_j)$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ están alineados.*

Obsérvese que si $\mathcal{R}$ es un retículo de dimensión finita ≥ 2 en el que se satisface la fórmula de la dimensión (1.1), entonces podríamos haber enunciado el teorema 1.6 en $\mathcal{R}$, pues en dicho enunciado sólo aparecen elementos de un retículo y ciertas relaciones entre ellos expresadas en términos del orden de dicho retículo. Por lo tanto tiene perfecto sentido el preguntarse si en $\mathcal{R}$ se satisface ó no el teorema de Desargues.

Las dos propiedades mencionadas no son suficientes para caracterizar los retículos de subvariedades lineales de los espacios proyectivos: el retículo $\mathcal{R}$ del ejemplo 1.3 (a) tiene dimensión finita igual a n y satisface la fórmula (1.1) (compruébese); además, el teorema de Desargues es trivialmente cierto en $\mathcal{R}$ porque cada recta suya tiene exactamente 2 puntos; este último hecho prueba que $\mathcal{R}$ no puede ser un retículo de subvariedades lineales de un espacio proyectivo, pues las rectas de $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ tienen al menos 3 puntos. La siguiente definición pone de manifiesto que la obstrucción a que $\mathcal{R}$ sea de la forma $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ es que en $\mathcal{R}$ "no hay suficientes puntos".

Definición 1.7 Sea $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$. Diremos que $r + 2$ puntos $P_1, \ldots, P_{r+2}$ de un retículo $\mathcal{R}$ de dimensión finita están en *posición general*, si cualquier colección $P_{i_1}, \ldots, P_{i_{r+1}}$ de $r + 1$ de dichos puntos satisface $\dim(P_{i_1} + \cdots + P_{i_{r+1}}) = r$.

El retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$ tiene dimensión n y en él existen $n+2$ puntos en posición general (los de un sistema de referencia proyectivo). El retículo $\mathcal{R}$ del ejemplo 1.3 (a) tiene dimensión n y en él no existen $n + 2$ puntos en posición general ($\mathcal{R}$ tiene exactamente $n + 1$ puntos.)

En el Apéndice A probaremos el siguiente teorema de caracterización (en 2.1 daremos la definición de isomorfismo de retículos):

Teorema 1.8 *Si $\mathcal{R}$ es un retículo de dimensión finita $n \geq 2$ en el que:*

(i) *se cumple la fórmula de la dimensión,*

(ii) *existen $n + 2$ puntos en posición general,*

(iii) *se satisface el teorema de Desargues,*

entonces existe un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ de dimensión n (sobre un cuerpo no necesariamente conmutativo) tal que $\mathcal{R}$ es isomorfo a $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$. (La conmutatividad del cuerpo será equivalente a que en $\mathcal{R}$ se cumpla el teorema de Pappus.)

Terminaremos la sección viendo que si $n \geq 3$, entonces la condición (iii) del anterior teorema es consecuencia de las condiciones (i) y (ii). Probemos primero, en el siguiente lema, la existencia de suficientes puntos para las construcciones que necesitaremos realizar.

Lema 1.9 *Sea $\mathcal{R}$ un retículo de dimensión finita $n \geq 2$, en el que se satisface la fórmula de la dimensión* (1.1) *y que tiene $n+2$ puntos en posición general. Toda variedad lineal de $\mathcal{R}$ de dimensión $r \geq 1$ posee $r+2$ puntos que están en posición general. Como consecuencia, cada variedad lineal de $\mathcal{R}$ está determinada por los puntos que contiene.*

Demostración. Sea $X_r \in \mathcal{R}$ tal que $\dim X_r = r$. Procedamos por inducción descendente sobre r. El caso $r = n$ es parte de las hipótesis del lema. Sea $r < n$ y supongamos que el lema es cierto para variedades de dimensión $r+1$. Consideremos un punto P de $\mathcal{R}$ que no pertenece a X_r (P existe) y sea $X_{r+1} = X_r + P$; como X_{r+1} tiene dimensión $r+1$, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existen $(r+1)+2$ puntos P_0, $P_1, \dots, P_{r+2}$ en X_{r+1} que están en posición general; en particular, no todos esos $r+3$ puntos están contenidos en X_r. Supongamos, por ejemplo, que es $P_0 \notin X_r$. Si para cada $i \in \{1, \dots, r+2\}$ definimos $Q_i = (P_0 + P_i) \cap X_r$, entonces $Q_1, \dots, Q_{r+2}$ son $r+2$ puntos de X_r que están en posición general (compruébese).

La consecuencia del enunciado es clara: si X e Y son variedades de $\mathcal{R}$ con los mismos puntos, entonces $X = Y$. ∎

1.10 (Demostración geométrica del Teorema de Desargues) Si recurrimos al espacio vectorial E tal que $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E)$, entonces es fácil probar el teorema de Desargues si nos basamos en las propiedades lineales de E. Veamos a continuación una demostración geométrica de dicho teorema que sólo será válida cuando $n \geq 3$.

En las hipótesis de 1.6, supongamos en primer lugar que los dos triángulos no son coplanarios. Por definición de triángulo, las subvariedades lineales $\pi = A_1 + A_2 + A_3$ y $\pi' = B_1 + B_2 + B_3$ son planos, y si denotamos por P el punto común de las tres rectas del enunciado, entonces $P \notin \pi$ y $P \notin \pi'$ (pues de lo contrario sería $\pi = \pi'$). Por una parte, aplicando la fórmula (1.1) obtenemos

$$\dim(P + \pi) = \dim P + \dim \pi - \dim(P \cap \pi) = 2 + 0 - (-1) = 3\,;$$

por otra parte $\pi' \subseteq P + \pi$ (ya que $B_i \in P + A_i \subseteq P + \pi$, $i \in \{1,2,3\}$) y $\pi \subseteq P + \pi'$. Por lo tanto

$$P + \pi = P + \pi' = \pi + \pi'$$

y obtenemos $\dim(\pi + \pi') = 3$. Como los planos π y π' son distintos, de (1.1) se sigue que $r = \pi \cap \pi'$ es una recta. Es fácil comprobar que los tres puntos $(A_i + A_j) \cap (B_i + B_j)$ ($i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j$) yacen sobre r. Probémoslo para uno de ellos: los cuatro puntos A_1, A_2, B_1, B_2 son coplanarios porque $P = (A_1 + B_1) \cap (A_2 + B_2)$, y por lo tanto las rectas $A_1 + A_2$ y $B_1 + B_2$ son coplanarias y distintas; se sigue entonces que $Q = (A_1 + A_2) \cap (B_1 + B_2)$ es un punto tal que $Q \in \pi \cap \pi' = r$.

Supongamos ahora que los dos triángulos son coplanarios, esto es, $\pi = A_1 + A_2 + A_3 = B_1 + B_2 + B_3$. Todos los puntos que vayamos eligiendo en este caso existen en virtud del lema 1.9. Tomemos un punto P' que no sea incidente con π y denotemos $s = P + P'$ (de nuevo, y ya no insistiremos más, aplicando la fórmula (1.1) obtenemos que s es una recta);

consideremos ahora el plano $s+A_1=P'+P+A_1$ y dentro de él una recta r' que pase por P y sea distinta de s y de A_1+P (dicha recta r' existe porque el plano $P'+P+A_1$ tiene un punto que está fuera de las rectas $P'+P$ y $P+A_1$). Como las rectas A_1+P' y r' son coplanarias y distintas, se sigue que $A'=(A_1+P')\cap r'$ es un punto; del mismo modo obtenemos que $B'=(B_1+P')\cap r'$ es un punto.

Ahora tenemos dos nuevos triángulos, $A'A_2A_3$ y $B'B_2B_3$, que no son coplanarios (pues el plano determinado por el triángulo $A'A_2A_3$ corta a π en la recta A_2+A_3, y el plano determinado por el triángulo $B'B_2B_3$ corta a π en la recta B_2+B_3), y tales que las rectas que unen vértices correspondientes concurren en el punto P. Entonces, según hemos probado antes, los puntos $(A'+A_2)\cap(B'+B_2)$, $(A'+A_3)\cap(B'+B_3)$ y $(A_2+A_3)\cap(B_2+B_3)$ pertenecen a la recta $r''=(A'+A_2+A_3)\cap(B'+B_2+B_3)$; en particular, r'' no está contenida en π. Por último, la proyección de la recta r'' desde el punto P' sobre el plano π es una recta sobre la que yacen los puntos $(A_i+A_j)\cap(B_i+B_j)$ $(i,\, j\in\{1,2,3\}, i\neq j)$ (compruébese).

1.11 Analizando la anterior demostración del teorema de Desargues se ve que en ella sólo se utilizan las tres siguientes propiedades del retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$: la dimensión es $n\geq 3$, vale la fórmula de la dimensión (1.1), y hay $n+2$ puntos en posición general (y por tanto es válido el lema 1.9). Como consecuencia obtenemos el resultado mencionado antes del lema 1.9:[1] si $\mathcal{R}$ es un retículo de dimensión finita $n\geq 3$, en el que se satisface la fórmula de la dimensión y que tiene $n+2$ puntos en posición general, entonces en $\mathcal{R}$ es cierto el teorema de Desargues.

1.12 Existen retículos de dimensión 2 que satisfacen la fórmula (1.1) y tienen 4 puntos en posición general, pero que no satisfacen el teorema de Desargues; dichos retículos se denominan *geometrías no arguesianas* ó *planos no arguesianos*.

Veamos la construcción del *plano de Moulton*, el cual es un ejemplo sencillo de plano no arguesiano dado por Moulton en 1902. Empecemos definiendo sus subvariedades afines, para lo cual supondremos que en $\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$ hemos fijado como eje vertical la recta $x=0$ y como eje horizontal la recta $y=0$. Los puntos, rectas verticales, rectas horizontales y rectas de pendiente negativa del plano afín $\mathbb{R}^2$ pertenecen al plano de Moulton; sin embargo las rectas con pendiente positiva no se admiten en dicho plano, y en su lugar se definen como rectas las gráficas de las aplicaciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ siguientes: dado $\alpha\in\mathbb{R}$ y dado $m\in\mathbb{R}_+$,

$$f(x)=\begin{cases} m(x-\alpha) & \text{si } x\leq\alpha\,,\\ \frac{m}{2}(x-\alpha) & \text{si } x>\alpha\,.\end{cases}$$

El plano de Moulton se completa del modo usual aadiendole su recta del infinito (cuyos puntos son las direcciones, una por cada recta del plano de Moulton que pasa por el punto $(0,0)$).

Es fácil ver que en el plano de Moulton existen 4 puntos en posición general y se satisface la fórmula de la dimensión, y que no se cumple el Teorema de Desargues (figura 1.2).

[1] Curiosamente, la observación de que el teorema de Desargues puede deducirse de los axiomas de incidencia si el espacio tiene dimensión ≥ 3, se debe al matemático extremeo Ventura Reyes Prosper (*Mathematische Annalen*, 1888).

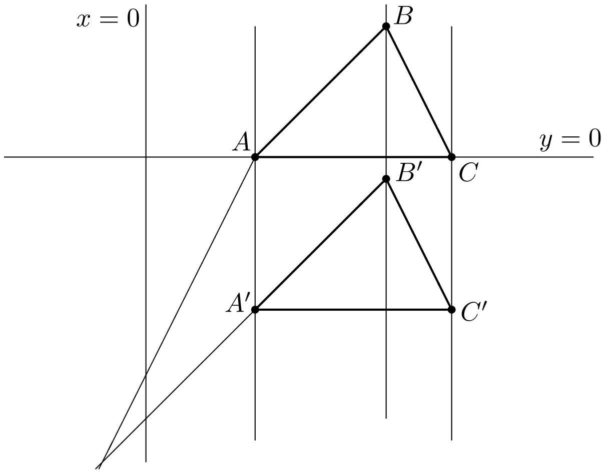

Figura 1.2

2 Colineaciones

Si entendemos la Geometría Proyectiva elemental como el estudio de los retículos de subvariedades lineales de los espacios proyectivos, entonces es obvia la importancia del estudio de los morfismos entre dichos retículos. Veremos en esta sección que los isomorfismos de retículos entre retículos de subvariedades lineales de espacios proyectivos son las “colineaciones”, las cuales tienen una descripción geométrica muy sencilla. También probaremos el “teorema fundamental de la Geometría Proyectiva” descrito al comienzo del capítulo.

Definición 2.1 Dados retículos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, diremos que una aplicación $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ es un *morfismo de retículos* si para cualesquiera $a, b \in \mathcal{R}$ se cumplen

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)\,, \qquad \varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)\,.$$

Es claro que la composición de morfismos de retículos es un morfismo de retículos.

Un morfismo de retículos $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ es un *isomorfismo* si posee morfismo inverso, es decir, si existe otro morfismo de retículos $\phi : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ tal que $\varphi\phi$ es el morfismo identidad de $\mathcal{R}'$ y $\phi\varphi$ es el morfismo identidad de $\mathcal{R}$.

Ejercicio 2.2 (a) Si $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ es un morfismo de retículos, entonces φ es un isomorfismo si y sólo si es una biyección, en cuyo caso $\varphi^{-1} : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ es el único morfismo de retículos tal que $\varphi\varphi^{-1}$ es la identidad de $\mathcal{R}'$ y $\varphi^{-1}\varphi$ es la identidad de $\mathcal{R}$.

(b) Todo morfismo de retículos es un morfismo de conjuntos ordenados, pero el recíproco es falso: un morfismo de conjuntos ordenados entre retículos puede no ser morfismo de retículos. Cuando un morfismo de conjuntos ordenados entre retículos es biyectivo, entonces es un isomorfismo de conjuntos ordenados y por lo tanto es también un isomorfismo de retículos.

Ejemplos 2.3 (a) Proyectivizando una aplicación lineal e inyectiva $g : E \to F$ entre k-espacios vectoriales de dimensión finita obtenemos una aplicación entre los respectivos espacios proyectivos,

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{g}:\mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}(F) \\ \langle e\rangle & \longmapsto & \widetilde{g}(\langle e\rangle)=\langle g(e)\rangle\,, \end{array}$$

la cual a su vez define una aplicación entre los respectivos retículos de subvariedades lineales,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & \mathcal{R}(\mathbb{P}(F)) \\ X=\pi(V) & \longmapsto & \widetilde{g}(X)=\pi(g(V))\,, \end{array}$$

que es un morfismo de retículos. Cuando g es un isomorfismo, la aplicación $\widetilde{g}$ es una proyectividad y el morfismo de retículos $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))\to\mathcal{R}(\mathbb{P}(F))$ que define es un isomorfismo. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, no todo isomorfismo de retículos de $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ en $\mathcal{R}(\mathbb{P}(F))$ está definido por la proyectivización de un isomorfismo lineal de E en F.

(b) Sean E y F espacios vectoriales de dimensión finita sobre sendos cuerpos k y k'. Una aplicación $g: E\to F$ se dice que es un *isomorfismo semi-lineal*, si es biyectiva y existe un isomorfismo de cuerpos $\rho: k\to k'$ tal que para cualesquiera $e,v\in E$ y $\lambda\in k$ se cumplen

$$g(e+v)=g(e)+g(v)\,,\qquad g(\lambda e)=\rho(\lambda)g(e)\,,$$

en cuyo caso el isomorfismo ρ es único y se denomina *isomorfismo asociado* a g.

Si $g: E\to F$ es un isomorfismo semi-lineal, entonces podemos proyectivizarlo y obtenemos una biyección

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{g}:\mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}(F) \\ \langle e\rangle & \longmapsto & \widetilde{g}(\langle e\rangle)=\langle g(e)\rangle\,; \end{array}$$

es fácil probar que g manda cada subespacio vectorial de E a un subespacio vectorial de F de igual dimensión, de modo que la biyección $\widetilde{g}$ induce un isomorfismo de retículos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & \mathcal{R}(\mathbb{P}(F)) \\ X & \longmapsto & \widetilde{g}(X) \end{array}\quad .$$

Definición 2.4 Llamaremos *proyectividades (en el sentido) de Staudt* a las proyectivizaciones de los isomorfismos semi-lineales.

Definición 2.5 Llamaremos *colineación* a toda aplicación biyectiva entre espacios proyectivos de la misma dimensión que transforme ternas de puntos alineados en ternas de puntos alineados. Es claro que la composición de colineaciones es también una colineación.

2.6 Fijemos para todo lo que resta de sección espacios vectoriales E y E' sobre sendos cuerpos k y k', tales que $\dim_k E=\dim_{k'} E'=n+1$ para cierto entero positivo n.

Si $\varphi:\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))\to\mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$ es un isomorfismo de retículos, entonces φ conserva las dimensiones y por lo tanto su restricción a los puntos de dichos retículos es una biyección $\varphi:\mathbb{P}(E)\to\mathbb{P}(E')$ que claramente es una colineación. Además, el isomorfismo de retículos de partida está totalmente determinado por la colineación que induce, ya que cada subvariedad lineal de un espacio proyectivo esta determinada por los puntos que contiene.

Veremos en el próximo teorema el recíproco de lo dicho en el anterior párrafo: toda colineación de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$ puede extenderse a un isomorfismo de retículos de $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ en $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$; dicha extensión será única.

Lema 2.7 *Sea $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ una colineación. Dados $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(E)$, si denotamos $X = P_1 + \cdots + P_m$ y $X' = \varphi(P_1) + \cdots + \varphi(P_m)$, entonces tenemos $\varphi(X) \subseteq X'$.*

Demostración. Por inducción en el número de puntos m. Si $m = 1$ es trivial y si $m = 2$ es la definición de colineación. Supongamos $m \geq 3$ y que el lema es cierto para $m-1$ puntos. Denotemos $Y = P_1 + \cdots + P_{m-1}$. Si $P_m \in Y$, entonces el lema se sigue trivialmente de la hipótesis de inducción, por lo que podemos suponer $P_m \notin Y$, en cuyo caso Y es un hiperplano de X y $X = Y + P_m$.

Sea $Q \in X$. Si $Q \in Y$ ó $Q = P_m$, entonces de la hipótesis de inducción obtenemos fácilmente que $\varphi(Q) \in X'$. Supongamos que $Q \notin Y$ y $Q \neq P_m$. Como Y es un hiperplano de X y $Q + P_m$ es una recta de X no contenida en Y, tenemos que $P = Y \cap (Q + P_m)$ en un punto tal que $\varphi(Q) \in \varphi(P) + \varphi(P_m) \subseteq \varphi(P_1) + \cdots + \varphi(P_{m-1}) + \varphi(P_m) = X'$. ∎

Lema 2.8 *Sea $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ una colineación. Si X es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E)$ de dimensión r, entonces $\varphi(X)$ es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E')$ de dimensión r. Como consecuencia, dados $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}(E)$ tenemos $\varphi(P_1 + \cdots + P_m) = \varphi(P_1) + \cdots + \varphi(P_m)$.*

Demostración. Sean $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{P}(E)$ tales que $X = P_0 + \cdots + P_r$ y denotemos $X' = \varphi(P_0) + \cdots + \varphi(P_r)$. Tenemos $\varphi(X) \subseteq X'$ en virtud del lema 2.7; además $\dim X' \leq r$.

Si consideramos puntos $Q_{r+1}, \dots, Q_n \in \mathbb{P}(E)$ tales que $\mathbb{P}(E) = X + Q_{r+1} + \cdots + Q_n$, aplicando 2.7 tenemos

$$\mathbb{P}(E') = \varphi(\mathbb{P}(E)) = \varphi(P_0 + \cdots + P_r + Q_{r+1} + \cdots + Q_n) \subseteq X' + \varphi(Q_{r+1}) + \cdots + \varphi(Q_n)$$

y por lo tanto $n = \dim \mathbb{P}(E') \leq \dim X' + (n-r)$, esto es, $\dim X' \geq r$. De lo anterior se sigue que X' es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(E')$ de dimensión r.

Si la inclusión $\varphi(X) \subseteq X'$ es estricta, entonces existe $P'_{r+1} \in X'$ tal que $P'_{r+1} \notin \varphi(X)$. Sea $P_{r+1} \in \mathbb{P}(E)$ tal que $\varphi(P_{r+1}) = P'_{r+1}$, en cuyo caso debe ser $P_{r+1} \notin X$; aplicando lo probado en el anterior párrafo tenemos $\dim\left(\varphi(P_0) + \cdots + \varphi(P_r) + \varphi(P_{r+1})\right) = \dim(P_0 + \cdots + P_r + P_{r+1}) = r+1$, lo cual es absurdo porque $\varphi(P_0) + \cdots + \varphi(P_r) + \varphi(P_{r+1}) = X' + P'_{r+1} = X'$ tiene dimensión r. Por lo tanto debe ser $\varphi(X) = X'$, lo que concluye la demostración.

La consecuencia del enunciado es inmediata. ∎

Corolario 2.9 *Si $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ es una colineación, entonces la aplicación inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E)$ también es una colineación.*

Demostración. Sean Q_1, Q_2, Q_3 puntos alineados en $\mathbb{P}(E')$ y denotemos $P_i = \varphi^{-1}(Q_i)$, $i = 1, 2, 3$. Si los puntos P_1, P_2, P_3 no están alineados, entonces aplicando el lema 2.8 tenemos

$$\dim(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \dim\left(\varphi(P_1) + \varphi(P_2) + \varphi(P_3)\right) = \dim(P_1 + P_2 + P_3) = 2\,;$$

por lo tanto los puntos P_1, P_2, P_3 están alineados. ∎

Corolario 2.10 *Las colineaciones de un espacio proyectivo en sí mismo, con la operación "composición de aplicaciones", forman un grupo.*

Teorema 2.11 *Toda colineación $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ se extiende de modo único a un isomorfismo de retículos $\varphi : \mathcal{R}(\mathbb{P}(E)) \to \mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$. En consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre los isomorfismos de retículos de $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ en $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$ y las colineaciones de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ una colineación. La aplicación $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E) \to \mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$, $X \mapsto \varphi(X)$, está bien definida en virtud del lema 2.8, y bastará probar que esta aplicación es un morfismo de retículos, pues entonces la colineación $\varphi^{-1} : \mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E)$ define otro morfismo de retículos $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E') \to \mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$, $X' \mapsto \varphi^{-1}(X')$, que será el inverso.

Sean $X_1, X_2 \in \mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$. Del lema 2.8 se sigue claramente la igualdad $\varphi(X_1 + X_2) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2)$. Por otra parte, como la inclusión $\varphi(X_1 \cap X_2) \subseteq \varphi(X_1) \cap \varphi(X_2)$ es obvia, y aplicando de nuevo 2.8 tenemos

$$\begin{aligned}
\dim \varphi(X_1 \cap X_2) &= \dim(X_1 \cap X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 + X_2) \\
&= \dim \varphi(X_1) + \dim \varphi(X_2) - \dim \varphi(X_1 + X_2) \\
&= \dim \varphi(X_1) + \dim \varphi(X_2) - \dim \left(\varphi(X_1) + \varphi(X_2)\right) \\
&= \dim \left(\varphi(X_1) \cap \varphi(X_2)\right),
\end{aligned}$$

concluimos que también se satisface la igualdad $\varphi(X_1 \cap X_2) = \varphi(X_1) \cap \varphi(X_2)$. ∎

Corolario 2.12 *Sean $\varphi, \phi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ colineaciones y sea H un hiperplano de $\mathbb{P}(E)$. Si φ y ϕ coinciden en los puntos que no pertenecen a H, entonces $\varphi = \phi$.*

Demostración. La colineación $\sigma = \phi^{-1}\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ es la identidad sobre los puntos de $\mathbb{P}(E)$ que no están en H. Veamos que σ es igual a la identidad sobre los puntos de H.

Si $\mathbb{P}(E)$ es una recta proyectiva, entonces H es un punto y la demostración es trivial. Supongamos que $n = \dim \mathbb{P}(E) \geq 2$. Dado $P \in H$, sean r y r' rectas distintas en $\mathbb{P}(E)$ tales que $r \cap H = P = r' \cap H$; dichas rectas son invariantes por σ porque cada una de ellas tiene al menos dos puntos distintos que quedan invariantes por σ, por lo que tenemos $\sigma(P) = \sigma(r \cap r') = \sigma(r) \cap \sigma(r') = r \cap r' = P$. ∎

Teorema 2.13 (Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva)
Toda colineación entre espacios proyectivos de dimensión mayor o igual que 2 es una proyectividad de Staudt.

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ una colineación con $n \geq 2$. Fijemos una referencia proyectiva $R = (P_0, \dots, P_n, U)$ en $\mathbb{P}(E)$, y sea $R' = (P'_0, \dots, P'_n, U')$ su imagen por φ; del teorema 2.11 se sigue que R' es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E')$. Consideremos las estructuras de espacios afines que los hiperplanos $H = P_1 + \cdots + P_n$ y $H' = P'_1 + \cdots + P'_n$ definen en $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$, respectivamente, de modo que entonces R es una referencia afín de $\mathbb{A}_n = (\mathbb{P}(E), H)$ y R' es una referencia afín de $\mathbb{A}'_n = (\mathbb{P}(E'), H')$ (véase III.6.8 y siguientes). Es claro que φ define una biyección $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$ entre las respectivas zonas afines que conserva el paralelismo.

Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Por una parte, la aplicación $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_n$ transforma el eje $P_0 + P_i$ en el eje $P'_0 + P'_i$; por otra parte, entre el cuerpo k y los puntos afines de la recta $P_0 + P_i$ tenemos la biyección $\lambda \in k \mapsto (0, \dots, 0, \lambda, 0 \dots, 0) \in P_0 + P_i$, y lo mismo ocurre entre k' y los puntos afines de la recta $P_0' + P_i'$. Por lo tanto, existe una biyección $\sigma_i : k \to k'$ tal que la expresión en coordenadas afines de la restricción de φ a los puntos afines del eje $P_0 + P_i$ es

$$\begin{array}{ccc} (P_0 + P_i) \cap \mathbb{A}_n & \xrightarrow{\varphi} & (P_0' + P_i') \cap \mathbb{A}_n' \\ (0, \ldots, \lambda, \ldots, 0) & \longmapsto & (0, \ldots, \sigma_i(\lambda), \ldots, 0)\,. \end{array}$$

Ahora, el hiperplano determinado por todos los ejes de la referencia salvo el i-ésimo, esto es, la subvariedad afín determinada por los puntos $P_0, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1} \ldots, P_n$, tiene por acuación afín $y_i = 0$ y se transforma por φ en el hiperplano determinado por los puntos $P_0', \ldots, P_{i-1}', P_{i+1}' \ldots, P_n'$, cuya acuación afín es $y_i' = 0$. Dado $\lambda \in k$, como el hiperplano $y_i = \lambda$ es paralelo al hiperplano $y_i = 0$, tenemos que el hiperplano $\varphi(\{y_i = \lambda\})$ debe ser paralelo al hiperplano $y_i' = 0$, esto es, existe $\lambda' \in k'$ tal que $\varphi(\{y_i = \lambda\}) = \{y_i' = \lambda'\}$. Como el punto $(0, \ldots, \lambda, \ldots, 0)$ está en $y_i = \lambda$ y $\varphi(0, \ldots, \lambda, \ldots, 0) = (0, \ldots, \sigma_i(\lambda), \ldots, 0)$, concluimos que la imagen por φ del hiperplano $y_i = \lambda$ es $y_i' = \sigma_i(\lambda)$. Dado un punto $P \in \mathbb{A}_n$ de coordenadas afines $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, P es la intersección de los hiperplanos $\{y_i = \lambda_i \,:\, i = 1, \ldots, n\}$ y por lo tanto $\varphi(P) \in \mathbb{A}_n'$ es la intersección de los hiperplanos $\{y_i' = \sigma_i(\lambda_i) \,:\, i = 1, \ldots, n\}$, de modo que las coordenadas de $\varphi(P)$ son $(\sigma_1(\lambda_1), \ldots, \sigma_n(\lambda_n))$. Concluyendo, las ecuaciones de la aplicación $\varphi : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n'$ en las referencias fijadas son

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & \sigma_1(y_1) \\ & \vdots & \\ y_n' & = & \sigma_n(y_n) \end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

Como consecuencia, para todo índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $\sigma_i(0) = 0$ y $\sigma_i(1) = 1$ (porque $\varphi(P_0) = P_0'$ y $\varphi(U) = U'$).

Fijemos ahora índices distintos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y veamos que $\sigma_i = \sigma_j$. Sea U_{ij} el punto del plano $\pi_{ij} = P_0 + P_i + P_j$ cuyas coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima y la j-ésima que son iguales a 1, y sea U_{ij}' el punto del plano $\pi_{ij}' = P_0' + P_i' + P_j'$ cuyas coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima y la j-ésima que son iguales a 1. La ecuación de la diagonal del plano π_{ij} (la recta $P_0 + U_{ij}$) es $y_i = y_j$ (y el resto de coordenadas nulas), y la ecuación de la diagonal del plano π_{ij}' es $y_i' = y_j'$. Como φ transforma una diagonal en la otra (porque $\varphi(U_{ij}) = U_{ij}'$), concluimos que debe ser $\sigma_i = \sigma_j$.

Escribamos $\sigma_i = \sigma$. El punto central de la demostración consiste en probar que $\sigma : k \to k'$ es un morfismo de cuerpos (y por lo tanto un isomorfismo porque es una biyección). Quedémonos en el plano π_{12} (podemos hacerlo porque $n \geq 2$; la argumentación que sigue no vale en las rectas proyectivas). Fijemos $\alpha \in k$. Si r es la recta (del plano π_{12}) que pasa por los puntos P_0 y $(1, \alpha)$, cuya ecuación es $y_2 = \alpha y_1$, entonces $\varphi(r)$ es la recta (del plano π_{12}') que pasa por los puntos P_0' y $(1, \sigma(\alpha))$, cuya ecuación es $y_2' = \sigma(\alpha) y_1'$; dado $\beta \in k$, como $(\beta, \alpha\beta) \in r$, debe ser $\varphi(\beta, \alpha\beta) = (\sigma(\beta), \sigma(\alpha\beta)) \in \varphi(r)$ y por lo tanto $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$. Argumentando del mismo modo con la recta s que pasa por los puntos P_0 y $(0, \alpha)$, cuya ecuación es $y_2 = \alpha + y_1$, llagamos a que para cada $\beta \in k$ debe ser $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$.

Finalmente, sean $\{e_0, \ldots, e_n\}$ y $\{e_0', \ldots, e_n'\}$ bases normalizadas asociadas a las referencias R y R', respectivamente, y consideremos el isomorfismo semi-lineal $T : E \to E'$ definido por la fórmula

$$T(\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n) = \sigma(\lambda_0) e_0' + \cdots + \sigma(\lambda_n) e_n'\,.$$

Las ecuaciones de T en las anteriores bases son

$$\left.\begin{array}{rcl} x_0' & = & \sigma(x_0) \\ x_1' & = & \sigma(x_1) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & \sigma(x_n) \end{array}\right\},$$

de modo que esas son también las ecuaciones de la proyectividad de Staudt $\widetilde{T}$ en las referencias fijadas. Es claro entonces que las colineaciones φ y $\widetilde{T}$ coinciden sobre $\mathbb{A}_n$ (pues las ecuaciones (2.1) se obtienen de las anteriores haciendo $x_0 = 1, x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$), de modo que basta aplicar 2.12 para concluir que $\varphi = \widetilde{T}$. ∎

2.14 Supongamos ahora que $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$ son rectas proyectivas. En este caso el teorema 2.11 no dice nada nuevo: como las únicas subvariedades lineales propias de los retículos $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ y $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$ son los puntos, es claro que dar un isomorfismo de retículos de $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ en $\mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$ es lo mismo que dar una biyección de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$, y es igualmente claro que las colineaciones de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$ son las biyecciones de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$.

De lo dicho en el anterior párrafo se sigue que en este caso no es válido el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. Por ejemplo, entre una recta proyectiva real y una recta proyectiva compleja existen colineaciones porque ambas rectas tienen igual “número” de puntos (es decir, igual cardinal), y sin embargo entre dichas rectas no existen proyectividades de Staudt porque entre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ no existen isomorfismos.

Tenemos el siguiente resultado clásico:

Teorema 2.15 (Staudt) *Entre rectas proyectivas sobre cuerpos de característica distinta de 2, las proyectividades de Staudt son las biyecciones que transforman cuaternas armónicas en cuaternas armónicas.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E')$ son rectas proyectivas y que los cuerpos k y k' tienen característica distinta de 2. Es fácil probar que toda proyectividad de Staudt $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ transforma cuaternas armónicas en cuaternas armónicas (véase el problema 4.1).

Sea ahora $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ una biyección que transforma cuaternas armónicas en cuaternas armónicas. Fijemos una referencia proyectiva (P_0, P_1, U) en $\mathbb{P}(E)$ y denotemos $P_0' = \varphi(P_0)$, $P_1' = \varphi(P_1)$ y $U' = \varphi(U)$, de modo que (P_0', P_1', U') es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E')$. Si consideramos las rectas afines $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{P}(E), P_1)$ y $\mathbb{A}_1' = (\mathbb{P}(E'), P_1')$, entonces (P_0, P_1, U) es una referencia afín de $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{P}(E), P_1)$ y (P_0', P_1', U') es una referencia afín de $\mathbb{A}_1' = (\mathbb{P}(E'), P_1')$. Es claro que φ define una biyección $\varphi : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1'$ entre las respectivas zonas afines, y que existe una biyección $\sigma : k \to k'$ tal que la ecuación de $\varphi : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_1'$ en las referencias fijadas es $y' = \sigma(y)$. Igual que en la demostración del teorema 2.13, terminaremos si probamos que $\sigma : k \to k'$ es un morfismo de cuerpos.

Es claro que $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$ porque $\varphi(P_0) = P_0'$ y $\varphi(U) = U'$. En lo que sigue identificaremos cada punto afín con su coordenada. Dados escalares $\lambda \neq \mu$ en k, como φ conserva los puntos medios y el punto medio de los puntos λ y μ es el punto $(\lambda+\mu)/2$, tenemos $\sigma([\lambda+\mu]/2) = [\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)]/2$ (igualdad que es trivial si $\lambda = \mu$); en particular, si $\mu = 0$ entonces

$\sigma(\lambda/2) = \sigma(\lambda)/2$. De lo dicho se sigue

$$\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu) \qquad \text{cualesquiera que sean } \lambda, \mu \in k\,.$$

Una consecuencia de que σ sea morfismo de grupos aditivos es que $\sigma(-1) = -1$.

Ahora, para cada $\lambda \in k$, $\lambda \notin \{0, 1, -1\}$, tenemos en $\mathbb{A}_1$ la cuaterna armónica $-1, 1, \lambda, \lambda^{-1}$ (compruébese), y por lo tanto la cuaterna de puntos $-1, 1, \sigma(\lambda), \sigma(\lambda^{-1})$ de $\mathbb{A}'_1$ es también armónica; como consecuencia obtenemos $\sigma(\lambda^{-1}) = \sigma(\lambda)^{-1}$ (igualdad que es trivialmente cierta para $\lambda = 1, -1$). Ahora bien, dado $\lambda \in k$, $\lambda \notin \{0, 1\}$, el cuadrado λ^2 puede expresarse mediante sumas y pasos al inverso en virtud de la identidad

$$\lambda^2 = \lambda - [\lambda^{-1} + (1 - \lambda)^{-1}]^{-1}\,,$$

y por lo tanto $\sigma(\lambda^2) = \sigma(\lambda)^2$; sustituyendo λ por $\lambda + \mu$ en la última igualdad concluimos que $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$ cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in k$. ∎

3 Perspectividades

Fijemos en esta sección un espacio proyectivo $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(E)$ de dimensión n sobre un cuerpo k, y dos subvariedades lineales X, X' en $\mathbb{P}_n$ de dimensión m, $0 \leq m < n$.

Definición 3.1 Diremos que una aplicación $\tau : X \to X'$ es una *proyectividad (en el sentido) de Poncelet* si puede ponerse como composición de un número finito de perspectividades, es decir, si existen subvariedades lineales $X = X_0, X_1, \ldots, X_r = X'$ y perspectividades

$$X = X_0 \xrightarrow{\tau_1} X_1 \xrightarrow{\tau_2} \ldots \xrightarrow{\tau_r} X_r = X'$$

tales que $\tau = \tau_r \circ \ldots \circ \tau_1$.

Es claro que toda proyectividad de Poncelet de X en X' es una proyectividad. Veremos que el recíproco también es cierto, esto es, que las proyectividades de Poncelet de X en X' son justamente las proyectividades de X en X'. Empecemos generalizando el problema I.4.1.

Lema 3.2 *Dada una proyectividad $\tau : X \to X'$ son equivalentes:*

(a) *τ es una perspectividad;*

(b) *$\tau(X \cap X') = X \cap X'$ y la restricción de τ a $X \cap X'$ es la identidad.*

Demostración. Tomemos representantes lineales de los datos que tenemos: F y F' subespacios vectoriales de E tales que $X = \pi(F)$ y $X' = \pi(F')$, y $T : F \to F'$ isomorfismo lineal tal que $\widetilde{T} = \tau$. La demostración de la implicación (a) $\Rightarrow$ (b) es muy fácil y se deja como ejercicio para el lector; probemos (b) $\Rightarrow$ (a).

Por satisfacerse $\tau(X \cap X') = X \cap X'$ tenemos $T(F \cap F') = F \cap F'$, y por lo tanto la restricción de T a $F \cap F'$ define un automorfismo de $F \cap F'$; además, como la restricción de τ a $X \cap X'$ es la identidad, dicho automorfismo debe ser una homotecia. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la razón de dicha homotecia es igual a 1, ya que si la razón fuera $\lambda \neq 1$, entonces tomaríamos como representante lineal de τ el isomorfismo $\lambda^{-1}T$ (recordemos que T

está determinado salvo proporcionales). En definitiva, podemos suponer que la restricción de T a $F \cap F'$ es la identidad.

Consideremos ahora el conjunto $V = \{ e - T(e) : e \in F\}$; V es un subespacio vectorial de E y la condición de que T sea la identidad sobre $F \cap F'$ implica que $F \cap V = 0$ y $F' \cap V = 0$; además, por construcción, F' está contenido en $F + V$, F está contenido en $F' + V$ y V está contenido en $F + F'$ (compruébense todas las afirmaciones hechas). Lo anterior podemos resumirlo con las igualdades

$$F \oplus V = F + F' = F' \oplus V \, .$$

Denotemos $Y = \pi(V)$ y sea $\tau' : X \to X'$ la perspectividad de X a X' de vértice Y. Recordemos cómo podemos obtener un representante lineal de τ' (véanse I.2.9 y I.2.10): si denotamos $E' = F + F'$, entonces tenemos la inclusión de F en E' y la proyección de $E' = F' \oplus V$ sobre F', y la composición de estas dos aplicaciones es un isomorfismo lineal $f : F \to F'$ tal que $\widetilde{f} = \tau'$. En este caso tenemos

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E' = F' \oplus V & \longrightarrow & F' \\ e & \longmapsto & e = T(e) + [e - T(e)] & \longmapsto & T(e) \, , \end{array}$$

es decir, $f = T$; por lo tanto $\tau' = \tau$ y concluimos que τ es una perspectividad. ∎

Corolario 3.3 *Existen perspectividades de X en X'.*

Demostración. Continuando con la notación de la demostración del lema anterior, si $T : F \to F'$ es un isomorfismo lineal cualquiera que sobre $F \cap F'$ es la identidad, entonces $\widetilde{T} : X \to X'$ es una perpectividad. ∎

Corolario 3.4 *Si $X \cap X' = \emptyset$, entonces toda proyectividad de X en X' es una perspectividad.*

Teorema 3.5 *Toda proyectividad de X en X' es una proyectividad de Poncelet.*

Demostración. Sea $\varphi : X \to X'$ una proyectividad. Probaremos el enunciado por inducción en la dimensión de $\mathbb{P}_n$. Si $n = 1$, entonces $m = 0$ y la demostración es inmediata. Supongamos que $n > 1$ y que el enunciado es cierto para espacios proyectivos de dimensión menor que n. Distinguiremos dos casos.

Primer caso: $\dim(X \cap X') = m - 1$, ó lo que es lo mismo, $\dim(X + X') = m + 1$. Si denotamos $Y = X \cap X'$ e $Y' = \varphi(Y)$, entonces la restricción de φ a Y define una proyectividad $\varphi' : Y \to Y'$ entre subvariedades lineales del espacio proyectivo X', siendo $\dim X' = m < n$ y $\dim Y = \dim Y' = m - 1 < \dim X'$. Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que existen perspectividades dentro de X'

$$Y = Y_0 \xrightarrow{\tau_1'} Y_1 \xrightarrow{\tau_2'} \dots \xrightarrow{\tau_r'} Y_r = Y'$$

tales que $\varphi' = \tau_r' \circ \dots \circ \tau_1'$; además, como cada Y_i es un hiperplano de X', el vértice de cada perspectividad τ_i' debe ser un punto $P_i \in X'$ (satisfaciéndose, por definición de vértice, $P_i \notin Y_{i-1}$ y $P_i \notin Y_i$).

Fijemos un punto P en X que no esté en X' y definamos $X_i = P + Y_i$, $i = 0, 1, \dots, r$. Como $P \notin Y_i$ (porque $P \notin X'$) debe ser $\dim X_i = \dim Y_i + 1 = m$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ tenemos

$$P_i \cap X_{i-1} = \emptyset = P_i \cap X_i \ , \qquad P_i + X_{i-1} = X + X' = P_i + X_i \, .$$

En efecto, si por ejemplo fuera $P_i \in X_i = P + Y_i$, entonces tendríamos $P + Y_i = P_i + Y_i = X'$ y por lo tanto $P \in X'$, lo cual no puede ser; en particular $\dim(X_i + P_i) = \dim X_i + 1 = m + 1$, y como $X_i + P_i \subseteq X + X'$ obtnemos $X_i + P_i = X + X'$.

Consideremos para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ la perspectividad $\tau_i : X_{i-1} \to X_i$ de vértice P_i. Claramente, cada τ_i restringida a Y_{i-1} es igual a τ_i', de modo que la restricción de $\tau_r \circ \dots \circ \tau_1$ a $Y_0 = Y$ es igual a $\tau_r' \circ \dots \circ \tau_1' = \varphi'$. En otras palabras, la composición de las dos proyectividades

$$X_r \xrightarrow{(\tau_r \circ \dots \circ \tau_1)^{-1}} X_0 = X \xrightarrow{\varphi} X'$$

es la identidad sobre $X_r \cap X' = Y_r = Y'$. Del lema 3.2 se sigue entonces que $\tau = \varphi \circ (\tau_r \circ \dots \circ \tau_1)^{-1}$ es una perspectividad y por lo tanto obtenemos $\varphi = \tau \circ \tau_r \circ \dots \circ \tau_1$.

Segundo caso (caso general): Sea $\bar{X}$ una subvariedad lineal de $\mathbb{P}_n$ de dimensión m que satisfaga $\dim(X' \cap \bar{X}) = m - 1$, y sea $\tau : X \to \bar{X}$ una perspectividad (τ existe en virtud del corolario 3.3, y su vértice no necesariamente es un punto). Como la composición

$$\bar{X} \xrightarrow{\tau^{-1}} X \xrightarrow{\varphi} X'$$

es una proyectividad entre las subvariedades lineales $\bar{X}$ y X', aplicando el primer caso tenemos que $\varphi \circ \tau^{-1}$ puede ponerse como producto de un número finito de perspectividades, de lo que concluimos que φ es producto de un número finito de perspectividades. ∎

4 Problemas

4.1 Sea $g : E \to E'$ un isomorfismo semi-lineal cuyo isomorfismo de cuerpos asociados es $\sigma : k \to k'$. Si $\widetilde{g} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ es la proyectividad de Staudt que define g y P_1, P_2, P_3, P_4 son cuatro puntos distintos y alineados de $\mathbb{P}(E)$, entonces se cumple

$$\big(\widetilde{g}(P_1), \widetilde{g}(P_2); \widetilde{g}(P_3), \widetilde{g}(P_4)\big) = \sigma\big((P_1, P_2; P_3, P_4)\big).$$

Como consecuencia, si los cuerpos k y k' son de característica distinta de 2, entonces $\widetilde{g}$ transforma cuaternas armónicas en cuaternas armónicas.

4.2 Con la notación de 4.1, si $f : E \to E'$ es otro isomorfismo semi-lineal cuyo isomorfismo de cuerpos asociado es $\rho : k \to k'$, entonces son equivalentes:

(a) $\widetilde{g} = \widetilde{f}$;

(b) $\sigma = \rho$ y los isomorfismos g y f son proporcionales.

4.3 Sean E y E' espacios vectoriales de dimensión n sobre un mismo cuerpo k. Las proyectividades de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$ son justamente las proyectividades de Staudt de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$ cuyo automorfismo de k asociado es la identidad. (De otro modo: "Las proyectividades de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$ son las colineaciones de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E')$ que conservan las razones dobles." Este enunciado vale también para las rectas proyectivas.) [Indicación: Puede obtenerse como consecuencia de 4.1 ó de 4.2.]

4.4 El único automorfismo del cuerpo $\mathbb{R}$ de los número reales es la identidad. Como consecuencia, en los espacios proyectivos reales, "proyectividades" y "proyectividades de Staudt" son conceptos equivalentes.

4.5 Sea E un k-espacio vectorial en el que se ha fijado una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Si $g : E \to E$ es un isomorfismo semi-lineal cuyo automorfismo asociado es $\sigma : k \to k$, entonces $\{g(e_1), \ldots, g(e_n)\}$ es una base de E y por lo tanto podemos considerar el único isomorfismo lineal $g_0 : E \to E$ que manda la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a la base $\{g(e_1), \ldots, g(e_n)\}$. Qué relación existe entre g y g_0?

Fijado el automorfismo σ y la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, obténgase que existe una correspondencia biunívoca entre las autoproyectividades de $\mathbb{P}(E)$ y las proyectividades de Staudt de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E)$ cuyo automorfismo asociado es σ.

4.6 Los únicos automorfismos continuos del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos son la identidad y la conjugación. (Mediante la identificación $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, la topología que se considera en $\mathbb{C}$ es la usual de $\mathbb{R}^2$.)

Estúdiese cómo son las autoproyectividades de Staudt de la recta proyectiva compleja que son involutivas y que tienen como automorfismo asociado la conjugación.

4.7 Sea E un k-espacio vectorial de dimensión $n \geq 3$.

(a) Sea F un subespacio vectorial de E y sean $e_1, e_2 \in E$ tales que $e_1 \notin F$ y $e_2 \notin F$. Existe un automorfismo de E que transforma e_1 en e_2 y tiene un hiperplano de vectores fijos que pasa por F. [Indicación: Primero, encuéntrese una forma lineal $\omega \in E^*$ que satisfaga $\omega(F) = 0$, $\omega(e_1) = 1$ y $\omega(e_2) \neq 0$; después considérese la aplicación $f : E \to E$ definida por la igualdad $f(e) = e + \omega(e)(e_2 - e_1)$.]

(b) Todo automorfismo $T : E \to E$ puede ponerse como producto de un número finito de automorfismos de E que tiene algún hiperplano de vectores fijos. [Indicación: Fijemos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E y denotemos $E_r = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$, $r = 1, \ldots, n$. Usando el apartado (a), pruébese por inducción en r que existen automorfismos $T_1, \ldots, T_n$ de E que tienen algún hiperplano de vectores fijos y tales que, dado $r \in \{1, \ldots, n\}$, el automorfismo $T_r \circ \ldots \circ T_1 \circ T$ deja fijos los vectores de E_r. En particular, $T_n \circ \ldots \circ T_1 \circ T$ será la identidad.]

(c) Toda autoproyectividad de $\mathbb{P}(E)$ puede ponerse como producto de un número finito de homologías.

4.8 **Correlaciones:** Fijemos un espacio vectorial E sobre un cuerpo k tal que $\dim E \geq 3$. Por una parte, se definen las *correlaciones* de $\mathbb{P}(E)$ como las colineaciones de $\mathbb{P}(E)$ en $\mathbb{P}(E^*)$. Por otra parte, se dice que una aplicación $T_2 : E \times E \to k$ es una *forma sesquilineal* sobre E, si existe un automorfismo $\sigma : k \to k$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$T_2(e + e', v) = T_2(e, v) + T_2(e', v)\,, \qquad T_2(\lambda e, v) = \sigma(\lambda) T_2(e, v)\,,$$
$$T_2(e, v + v') = T_2(e, v) + T_2(e, v')\,, \qquad T_2(e, \lambda v) = \lambda T_2(e, v)\,.$$

Una forma sesquilineal T_2 se dice que es *no singular*, si para ella es cierta la implicación:

$$T_2(e, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in E \qquad \Longrightarrow \qquad e = 0\,.$$

Qué relación hay entre las correlaciones de $\mathbb{P}(E)$ y las formas sesquilineales sobre E?