Capítulo VII

Clasificación de Métricas y Cuádricas

Dada una métrica T_2 sobre un k-espacio vectorial E, para simplificar la notación, y siempre que no haya motivo de confusión, cualesquiera que sean $e, v \in E$ escribiremos $e \cdot v$ en lugar de $T_2(e, v)$.

1 Planteamiento del Problema

Antes de abordar la clasificación de las métricas y de las cuádricas vamos a describir brevemente cómo se plantea un problema de clasificación.

Supongamos que tenemos un conjunto X en el que se ha dado una relación de equivalencia "$\sim$". Entonces aparece de modo natural el siguiente *problema de clasificación*: encontrar un criterio que permita determinar cuándo dos elementos de X son equivalentes por la relación dada. Esto se suele hacer utilizando el concepto de función invariante.

Una *función invariante* para la relación de equivalencia "$\sim$" es una función definida sobre X (y que valora normalmente en un cuerpo) que es constante a lo largo de las clases de equivalencia. El problema planteado suele enunciarse del siguiente modo: encontrar funciones invariantes $f_1, \dots, f_l$, explícitamente calculables, con la siguiente propiedad: dados $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \sim x_2 \quad \iff \quad f_i(x_1) = f_i(x_2)\,,\ i = 1, \dots, l\,.$$

Otro problema ligado al anterior es el de "determinar el conjunto cociente $X/\!\sim$" (es decir, calcular cuántas clases de equivalencia hay). Si la primera cuestión planteada se ha resuelto mediante una familia de funciones invariantes $\{f_i\}$, el problema es decidir para qué sucesiones $\{a_i\}$ existe un elemento $x \in X$ que satisface $f_i(x) = a_i$.

Por último está el problema de "dar ecuaciones reducidas", es decir, dar una familia explícita de elementos de X, tal que cada elemento de X sea equivalente a un único elemento de la familia dada.

Ejemplo 1.1 Supongamos que X es la colección de todos los espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo k, y consideremos en X la siguiente relación de equivalencia: dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre k son equivalentes si y sólo si son isomorfos.

Es bien conocido que dos de tales espacios son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión, por lo que en este caso nos basta para clasificar con la siguiente función invariante:

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{Q} \\ E & \mapsto & \dim E\,. \end{array}$$

Además la dimensión nos proporciona la identificación $X/\!\sim\, = \mathbb{N}$, y las ecuaciones reduciadas vienen dadas por la familia $\{k^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

En este capítulo vamos a clasificar los k-espacios vectoriales de dimensión finita dotados de métricas (hemisimétricas ó simétricas) respecto de la siguiente relación de equivalencia:

Definición 1.2 Dados dos espacios vectoriales dotados de métricas, (E, T_2) y $(\bar{E}, \bar{T}_2)$, diremos que son *equivalentes* si son isométricos, es decir, si existe un isomorfismo lineal $\tau : E \to \bar{E}$ tal que $e \cdot e' = \tau(e) \cdot \tau(e')$ para cualesquiera $e, e' \in E$.

Definiciones 1.3 Es evidente que si (E, T_2) y $(\bar{E}, \bar{T}_2)$ son equivalentes se cumplen las igualdades $\dim E = \dim \bar{E}$ y $\dim(\operatorname{rad} E) = \dim(\operatorname{rad} \bar{E})$, por lo que ya tenemos dos funciones invariantes para resolver el problema de clasificación de métricas. Diremos que $\dim E$ es la *dimensión* de (E, T_2) (ó *dimension* de T_2, si no hay motivo de confusión), y el entero no negativo $\dim E - \dim(\operatorname{rad} E)$ se denomina *rango* de (E, T_2) (ó *rango* de T_2, ó *rango* de E) y lo denotaremos $\operatorname{rg} T_2$ (ó $\operatorname{rg} E$); el rango es la dimensión de la parte no singular.

1.4 Sea T_2 una métrica sobre un espacio vectorial E y sea $\phi : E \to E^*$ su polaridad asociada. Del jercicio V.2.2 se sigue que el rango de la métrica T_2 es igual al rango de la aplicación lineal ϕ, y también que si A es la matriz de T_2 en una base de E entonces el rango de T_2 es igual al rango de la matriz A.

Un resultado muy sencillo de probar y que nos resultará muy útil a la hora de clasificar las métricas es el siguiente:

Lema 1.5 *Sean T_2 y $\bar{T}_2$ métricas sobre los espacios vectoriales E y $\bar{E}$, respectivamente. La condición necesaria y suficiente para que (E, T_2) y $(\bar{E}, \bar{T}_2)$ sean isométricos es que existan bases $\{e_i\}$ y $\{\bar{e}_j\}$ en E y $\bar{E}$, respectivamente, tales que la matriz de T_2 en la base $\{e_i\}$ es igual a la matriz de $\bar{T}_2$ en la base $\{\bar{e}_j\}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que existe un isomorfismo $\tau : E \to \bar{E}$ que satisface $e \cdot e' = \tau(e) \cdot \tau(e')$ cualesquiera que sean $e, e' \in E$. Si $\{e_i\}$ es una base cualquiera de E entonces $\{\tau(e_i)\}$ es una base de $\bar{E}$, y es inmediato comprobar que la matriz de T_2 en la base $\{e_i\}$ es igual a la matriz de $\bar{T}_2$ en al base $\{\tau(e_i)\}$.

Supongamos ahora que existen bases $\{e_i\}$ de E y $\{\bar{e}_j\}$ de $\bar{E}$ tales que la matriz de T_2 en la base $\{e_i\}$ es igual a la matriz de $\bar{T}_2$ en la base $\{\bar{e}_j\}$. Entonces $\dim E = \dim \bar{E}$ y por lo tanto podemos considerar el único isomorfismo $\tau : E \to \bar{E}$ que manda la base de E a la base de $\bar{E}$; se deja como ejercicio comprobar que τ es una isometría. ∎

2 Clasificación de Métricas Hemisimétricas

Proposición 2.1 *Todo espacio vectorial dotado de una métrica hemisimétrica descompone de modo único salvo isometrías en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo y un espacio hiperbólico*

Demostración. Sea T_2 una métrica hemisimétrica sobre un espacio vectorial E. En virtud de la descomposición que proporciona el teorema V.1.16, bastará probar que si E es no singular entonces es un espacio hiperbólico.

Supongamos que E es no singular. Sea $e_1 \in E$ un vector no nulo y sea $e \in E$ otro vector no nulo tal que $e_1 \cdot e = \lambda \neq 0$ (el vector e existe porque el espacio es no singular); si tomamos $e_1' = \lambda^{-1}e$, entonces (e_1, e_1') es un par hiperbólico (porque la métrica es hemisimétrica). Como E es no singular y $\langle e_1, e_1' \rangle$ es un subespacio no singular de E tenemos: $E = \langle e_1, e_1' \rangle \perp \langle e_1, e_1' \rangle^\perp$ y $\langle e_1, e_1' \rangle^\perp$ es no singular. Hemos descompuesto E como suma ortogonal de un plano hiperbólico y de un espacio no singular cuya dimensión es dos unidades menos que $\dim E$. Si $\langle e_1, e_1' \rangle^\perp = 0$ entonces $E = \langle e_1, e_1' \rangle$ y hemos terminado. Si $\langle e_1, e_1' \rangle^\perp \neq 0$, repitiendo el proceso anterior podemos descomponer $\langle e_1, e_1' \rangle^\perp$ en suma ortogonal de un plano hiperbólico y espacio no singular, de modo que E quedará descompuesto en suma ortogonal de dos planos hiperbólicos y de un espacio no singular de dimensión cuatro unidades menos que $\dim E$. Como $\dim E < +\infty$, en un número finito de pasos conseguimos descomponer E en suma ortogonal de planos hiperbólicos. Luego E es hiperbólico. ∎

Corolario 2.2 *El rango de una métrica hemisimétrica es par.*

Demostración. Basta tener en cuenta que todo espacio hiperbólico tiene dimensión par. ∎

2.3 Teorema de clasificación: *La dimensión y el rango clasifican las métricas hemisimétricas. En consecuencia, dos métricas hemisimétricas sobre un mismo espacio vectorial son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.*

Además, dados $n, r \in \mathbb{N}$ tales que r es par y $r \leq n$, existe un espacio vectorial de dimensión n dotado de una métrica hemisimétrica de rango r.

Demostración. Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica hemisimétrica y denotemos $n = \dim E$ y $r = \operatorname{rg} T_2$. Según 2.1 la parte no singular de E es un espacio hipérbolico de dimensión r. Si escribimos $r' = r/2$ y $m = n - r = \dim(\operatorname{rad} E)$, entonces existen pares hiperbólicos $(e_1, e_1'), \dots, (e_{r'}, e_{r'}')$ y vectores $v_1, \dots, v_m \in \operatorname{rad} E$ tales que $\{e_1, e_1', \dots, e_{r'}, e_{r'}', v_1, \dots, v_m\}$ es una base de E. La matriz de T_2 en dicha base es (véanse V.1.10 (ii) y la demostración del lema V.3.2)

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots^{r')} & & & 0 & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots^{m)} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Basta entonces aplicar el lema 1.5 para concluir la primera parte del enunciado.

Sean ahora $n, r \in \mathbb{N}$ tales que r es par y $r \leq n$. Si sobre el espacio vectorial k^n consideramos la una única métrica T_2 cuya matriz en la base usual de k^n es la matriz (2.1), entonces es claro que T_2 es una métrica hemisimétrica de dimensión n y de rango r. ∎

Definición 2.4 Con la notación de la demostración de 2.3, diremos que la matriz (2.1) es la *matriz reducida* de la métrica hemisimétrica T_2.

3 Clasificación de Métricas Simétricas

Empezaremos la clasificación de las métricas simétricas con una consecuencia del Teorema de Witt probado en V.3.6.

Teorema 3.1 *Todo espacio vectorial dotado de una métrica simétrica descompone de modo único salvo isometrías en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo, un espacio hiperbólico y un espacio elíptico. Además, el índice de la métrica es igual a la mitad de la dimensión de la parte hiperbólica.*

Demostración. Sea T_2 una métrica simétrica sobre un espacio vectorial E. En virtud del teorema V.1.16, la demostración se reduce a descomponer E cuando T_2 es no singular.

Supongamos entonces que $\operatorname{rad} E = 0$ y sea E_0 un subespacio totalmente isótropo maximal de E. En virtud del lema V.3.5 tenemos que existe un subespacio hiperbólico H en E que contiene a E_0 y cumple $\dim H = 2 \cdot \dim E_0$; en particular, si denotamos $E' = H^\perp$ entonces $E = H \perp E'$. Si existe $e \in E'$ que es isótropo y no nulo, entonces $E_0 \perp \langle e \rangle$ es un subespacio totalmente isótropo (porque $E_0 \subseteq H$ y $e \in H^\perp$) que contiene estrictamente a E_0, lo cual está en contradicción con la maximalidad de E_0. Así pues, E' es elíptico.

Probemos ahora que la descomposición es única. Sean $E = H_1 \perp E'_1 = H_2 \perp E'_2$ dos descomposiciones de E tales que H_1, H_2 son hiperbólicos y E'_1, E'_2 son elípticos, y supongamos que $2r = \dim H_1 \leq \dim H_2 = 2s$. Pongamos H_1 y H_2 como suma ortogonal de planos hiperbólicos: $H_1 = P_1 \perp \cdots \perp P_r$ y $H_2 = Q_1 \perp \cdots \perp Q_s$. Como H_1 y $\bar{H}_2 = Q_1 \perp \cdots \perp Q_r$ tienen la misma dimensión, del lema V.3.4 se sigue que hay una isometría $\sigma : H_1 \to \bar{H}_2$. Por el Teorema de Witt existe una isometría $\bar{\sigma} : E \to E$ que extiende a σ, y como $\bar{\sigma}$ manda H_1 a $\bar{H}_2$, mandará $H_1^\perp = E'_1$ al subespacio $\bar{H}_2^\perp = Q_{r+1} \perp \cdots \perp Q_s \perp E'_2$. Si fuera $r < s$, entonces obtendríamos que E'_1 es un espacio sin vectores isótropos no nulos que es isométrico a un espacio que sí tiene vectores isótropos no nulos; pero eso no puede ocurrir, así que debe ser $r = s$. Por lo tanto $\bar{\sigma}$ transforma H_1 en H_2 y E'_1 en E'_2, luego la descomposición es única salvo isometrías. ∎

El teorema 3.1 y el hecho de que, según el lema V.3.4, los espacios hiperbólicos queden clasificados por la dimensión, permiten reducir la clasificación de las métricas simétricas al caso de los espacios elípticos, y la estructura de los espacios elípticos depende fuertemente del cuerpo base. Aquí estudiaremos las métricas simétricas en dos casos: cuando el cuerpo base k es algebraicamente cerrado y cuando $k = \mathbb{R}$. En los apéndices del final se estudiará el caso en el que k es un cuerpo finito.

Veremos que un espacio elíptico sobre un cuerpo algebraicamente cerrado no puede tener dimensión mayor que 1, mientras que sobre $\mathbb{R}$ existen espacios elípticos de dimensión arbitraria. Así, las funciones invariantes "dimensión" y "rango" serán suficientes para clasiificar las métricas simétricas en el caso algebraicamente cerrado, y no lo serán en el caso real.

Clasificación sobre un cuerpo algebraicamente cerrado

Definición 3.2 Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica simétrica y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E. Diremos que $\{e_i\}$ es una *base ortogonal* si $e_i \cdot e_j = 0$ cuando $i \neq j$, y diremos que es una *base ortonormal*, si es ortogonal y además $e_i \cdot e_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 3.3 *Sea E un espacio vectorial dotado de una métrica simétrica y no singular T_2. Si el cuerpo base k es algebraicamente cerrado, entonces en E existen bases ortonormales.*

Demostración. Sea $e \in E$ un vector no isótropo (que existe porque E es no singular), y denotemos $\lambda = e \cdot e \neq 0$. Como k es algebraicamente cerrado, existe $\alpha \in k$ tal que $\alpha^2 = \lambda$; por lo tanto, si tomamos $e_1 = \alpha^{-1} e$ entonces $e_1 \cdot e_1 = 1$ y $\langle e_1 \rangle$ es un subespacio no singular de E.

Ahora tenemos $E = \langle e_1 \rangle \perp \langle e_1 \rangle^\perp$, donde $\langle e_1 \rangle^\perp$ es un espacio no singular cuya dimensión es $\dim E - 1$. Haciendo lo mismo con $\langle e_1 \rangle^\perp$, llegamos a que existe un vector $e_2 \in E$ y existe un subespacio F de $\langle e_1 \rangle^\perp$, tales que: $e_2 \cdot e_2 = 1$, $\langle e_1 \rangle^\perp = \langle e_2 \rangle \perp F$ y $\dim F = \dim E - 2$.

Procediendo de esta manera, en un número finito de pasos llegamos a que existen vectores $e_1, \dots, e_n \in E$ tales que $E = \langle e_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_n \rangle$ y $e_i \cdot e_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, es decir, $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de E. ∎

3.4 Teorema de clasificación: *Si el cuerpo k es algebraicamente cerrado, entonces la dimensión y el rango clasifican las métricas simétricas. En consecuencia, dos métricas simétricas sobre un mismo k-espacio vectorial son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.*

Además, dados $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $r \leq n$, existe un k-espacio vectorial de dimensión n dotado de una métrica simétrica de rango r.

Demostración. Sea (E, T_2) un espacio vectorial dotado de una métrica simétrica y denotemos $n = \dim E$ y $r = \operatorname{rg} T_2$. La parte no singular de E es un subespacio E' de dimensión r, y en virtud del lema 3.3 tenemos que existe una base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de E' que es ortonormal. Si denotamos $m = n - r$, entonces existen vectores $v_1, \dots, v_m \in \operatorname{rad} E$ tales que $\{e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_m\}$ es una base de E, y la matriz de la métrica T_2 es dicha base es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{r)}{\ddots} & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Basta aplicar el lema 1.5 para concluir la primera parte del enunciado.

Sean ahora $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $r \leq n$. Si sobre el espacio vectorial k^n consideramos la una única métrica T_2 cuya matriz en la base usual de k^n es la matriz (3.1), entonces es claro que T_2 es una métrica simétrica de dimensión n y de rango r. ∎

Definición 3.5 En las hipótesis del teorema 3.4 y con la notación de su demostración, diremos que la matriz (3.1) es la *matriz reducida* de la métrica simétrica T_2.

Veamos cómo es la descomposición descrita en el teorema 3.1 cuando el cuerpo es algebraicamente cerrado.

Lema 3.6 *Si el cuerpo k es algebraicamente cerrado y (E, T_2) es un espacio elíptico (no trivial), entonces* $\dim E = 1$.

Demostración. Por definición de espacio elíptico la métrica T_2 es simétrica y no singular, así que en virtud del lema 3.3 tenemos que existe una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E que es ortonormal. Si $n \geq 2$, entonces el vector $e_1 + \mathrm{i}e_2$ es no nulo e isótropo (donde $\mathrm{i} \in k$ con $\mathrm{i}^2 = -1$), lo cual es imposible. Por lo tanto debe ser $n = 1$. ∎

Corolario 3.7 *Sea (E, T_2) un k-espacio vectorial dotado de una métrica simétrica de rango r, con k algebraicamente cerrado. Si r es par entonces $E = \operatorname{rad} E \perp H$ con H subespacio hiperbólico de dimensión r, y si r es impar entonces $E = \operatorname{rad} E \perp H \perp \langle e \rangle$ con H subespacio hiperbólico de dimensión $r - 1$ y $e \in E$ tal que $e \cdot e = 1$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 3.1 y del lema 3.6. ∎

3.8 En las hipótesis del corolario 3.7 denotemos $m = \dim E - r$. Si r es impar entonces existe una base de E tal que la matriz de T_2 en ella es

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & \\ & \ddots^{r')} & & & & \text{\Large 0} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots^{m)} & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad r' = (r-1)/2\,,$$

y si r es par existe una base de E respecto de la cual la matriz de T_2 es

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots^{r')} & & & \text{\Large 0} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots^{m)} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad r' = r/2\,.$$

Clasificación sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales

El siguiente lema nos permitirá definir un nuevo invariante en las métricas simétricas reales.

Lema 3.9 *Si (E, T_2) es un espacio elíptico real, entonces se cumple una de las dos posibilidades siguientes:*

(i) $e \cdot e > 0$ *para todo* $e \in E - \{0\}$;

(ii) $e \cdot e < 0$ *para todo* $e \in E - \{0\}$.

Si ocurre (i) *se dice que la métrica* T_2 *es* definida positiva, *y si ocurre* (ii) *diremos que la métrica* T_2 *es* definida negativa.

Demostración. Supongamos que el enunciado del lema no es cierto y llegaremos a una contradicción. Sean $e_1, e_2 \in E$ tales que $e_1 \cdot e_1 = \alpha > 0$ y $e_2 \cdot e_2 = -\beta < 0$, y veamos que la ecuación $(e_1 + xe_2) \cdot (e_1 + xe_2) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ tiene solución, lo cual no puede ocurrir porque en E no hay vectores isótropos no nulos:

$$(e_1 + xe_2) \cdot (e_1 + xe_2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\beta x^2 + 2(e_1 \cdot e_2)x + \alpha = 0\,,$$

y es fácil comprobar que la anterior ecuación de segundo grado tiene soluciones en $\mathbb{R}$. ∎

Definición 3.10 Llamaremos *signo elíptico* de un espacio vectorial real dotado de una métrica simétrica (E, T_2), al signo de la parte elíptica de E; es decir,

- signo elíptico $= +$ si la métrica es definida positiva en la parte elíptica,
- signo elíptico $= -$ si la métrica es definida negativa en la parte elíptica,
- signo elíptico $= 0$ si la parte elíptica es nula.

Llamaremos *signatura* de (E, T_2) a la dimensión de la parte elíptica afectada de su signo.

Observación **3.11** Conocidos la dimensión y el rango de una métrica simétrica real, dar su índice y su signo elíptico es equivalente a dar su signatura (compruébese).

3.12 Teorema de clasificación: *Sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, la dimensión, el rango y la signatura clasifican las métricas simétricas. En consecuencia, dos métricas simétricas sobre un mismo $\mathbb{R}$-espacio vectorial son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango y la misma signatura.*

Además, dados $n, r \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tales que $r \leq n$ y $r - |\varepsilon|$ es un entero no negativo par (es decir, $|\varepsilon| = 0, 2, \ldots, r$ si r es par, y $|\varepsilon| = 1, 3, \ldots, r-1$ si r es impar), existe un espacio vectorial real de dimensión n dotado de una métrica simétrica de rango r y signatura ε.

Demostración. Sea (E, T_2) un espacio vectorial real dotado de una métrica simétrica, y sean n su dimensión, r su rango y ε su signatura. Si $E = \operatorname{rad} E \perp H \perp E'$ con H hiperbólico y E' elíptico (véase el teorema 3.1), entonces $\dim(\operatorname{rad} E) = n - r$, $\dim E' = |\varepsilon|$ y $\dim H = r - |\varepsilon|$.

Por lo tanto, denotando $m = n - r$, $r' = \frac{1}{2}(r - |\varepsilon|)$ y $r'' = |\varepsilon|$, es fácil ver que existe una base de E en la cual la matriz de T_2 es

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & & & \\ & \overset{r')}{\ddots} & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \overset{r'')}{\ddots} & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si el signo elíptico es } +,$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & & & \\ & \overset{r')}{\ddots} & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \overset{r'')}{\ddots} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si el signo elíptico es } -.$$

Basta aplicar de nuevo el lema 1.5 para concluir la primera parte. Además, dados $n, r \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ como en el enunciado, es fácil ver que existe una metrica T_2 sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $(\mathbb{R}^n, T_2)$ tiene rango r y signatura ε (véanse las demostraciones de los teoremas 2.1 y 3.4). ∎

Corolario 3.13 *Sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, la dimensión, el rango, el índice y el signo elíptico clasifican las métricas simétricas. (Véase la observación* 3.11.*)*

3.14 Sea T_2 una métrica simétrica sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión $n > 0$. Veamos cómo obtener una base de E en la que la matriz de T_2 tiene una expresión más sencilla que la dada en la demostración del teorema 3.12.

Supongamos en primer lugar que T_2 es no singular y sea $e \in E$ un vector no isótropo (existe el vector e). Existe $\lambda > 0$ tal que $e \cdot e = \lambda$ ó $e \cdot e = -\lambda$, de modo que si $e_1 = \sqrt{\lambda}\, e$, entonces $e_1 \cdot e_1 = \pm 1$. Además tenemos la descomposición $E = \langle e_1 \rangle \perp \langle e_1 \rangle^{\perp}$ de E como suma ortogonal de espacios no singulares.

Procediendo como en el párrafo anterior obtenemos que existe una base ortogonal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E que cumple $e_i \cdot e_i = \pm 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Supongamos ahora que T_2 no es necesariamente no singular, y sea $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ con $\bar{E}$ no singular de dimensión r $(= \operatorname{rg} T_2)$. Si $m = n - r$, de lo dicho anteriormente se deduce fácilmente que existe en E una base tal que la matriz de T_2 en ella es

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \overset{r)}{\ddots} & & & 0 & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

Denotemos $s =$ "número de -1 que aparecen en la matriz (3.2)", $t =$ "número de $+1$ que aparecen en la matriz (3.2)". Veamos que s y t son dos invariantes de la métrica T_2.

Teorema 3.15 (Ley de inercia de Sylvester) *Con la notación de* 3.14 *se cumplen:*

- $t + s = r =$ *rango de* (E, T_2)*;*
- $t - s = \varepsilon =$ *signatura de* (E, T_2)*;*
- $\min\{t, s\} = i =$ *índice de* (E, T_2)*.*

Como consecuencia tenemos $t = \dfrac{r+\varepsilon}{2}$ *y* $s = \dfrac{r-\varepsilon}{2}$.

Demostración. En primer lugar, reordenemos la base ortogonal de E que nos da para T_2 la matriz (3.2), de tal manera que los signos de los unos de la diagonal aparezcan alternados, es decir, la base será de la forma $e_1, e'_1, \dots, e_h, e'_h$ tal que $e_i \cdot e_i = +1$ y $e'_i \cdot e'_i = -1$. Una vez que hayamos formado todas las parejas $(+1, -1)$ que podamos, nos sobrarán algunos $+1$ ó -1, es decir, nos quedaran vectores $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l$ en la base tales que $\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j = +1$ para todo j, ó $\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j = -1$ para todo j. Por último, tendremos en la base vectores $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ que generan el radical. En definitiva, tenemos reordenada la base ortogonal de E de la siguiente manera: $\{e_1, e'_1, \dots, e_h, e'_h, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m\}$.

Probemos que $H = \langle e_1, e'_1\rangle \perp \cdots \perp \langle e_h, e'_h\rangle$ es un espacio hiperbólico, es decir, que cada plano $\langle e_i, e'_i\rangle$ es hiperbólico. El subespacio $\langle e_i, e'_i\rangle = \langle e_i\rangle \perp \langle e'_i\rangle$ es no singular porque es suma ortogonal de espacios no singulares; además es no elíptico porque posee vectores isótropos no nulos, por ejemplo $(e_i - e'_i)\cdot(e_i - e'_i) = 1 - 1 = 0$.

Probemos ahora que $E' = \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l\rangle$ es un espacio elíptico, es decir, probemos que E' no posee vectores isótropos no nulos. Sea $e = \lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_l\bar{e}_l$ tal que $e \cdot e = 0$; como $e \cdot e = \sum_{j=1}^{l} \lambda_i^2(\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j)$, debe ser $\sum_{j=1}^{l} \lambda_i^2 = 0$ ó $-\sum_{j=1}^{l} \lambda_i^2 = 0$ (ya que los productos $\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j$ son todos $+1$ ó -1); en cualquier caso se sigue que $\lambda_j = 0$ para todo j, es decir, $e = 0$.

Estudiemos ya las relaciones que queríamos. Es claro que $\operatorname{rg} T_2 = \dim H + \dim E' = t + s$, y también es claro que $\dim E' = |t - s|$; además, la métrica sobre E' será definida positiva cuando $t - s > 0$ (es decir, cuando haya más $+1$ que -1), será definida negativa cuando $t - s < 0$, y no habrá parte elíptica cuando $t = s$; por lo tanto debe ser

$$\varepsilon = (\text{signo de } E') \cdot (\dim E') = (\text{signo de } t - s) \cdot |t - s| = t - s\,.$$

Por último tenemos

$$\dim H = \operatorname{rg} T - \dim E' = (t + s) - |t - s| = 2\min\{t, s\}\,,$$

es decir, el índice de T_2 es $\min\{t, s\}$ (la mitad de la dimensión de la parte hiperbólica). ∎

Definición 3.16 Sea T_2 una métrica simétrica sobre un espacio vectorial real E de dimensión $n > 0$, y sean r su rango y ε su signatura. Procediendo como en 3.14, del teorema 3.15 se sigue que existe una base en E tal que la matriz de T_2 en ella es

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \overset{t)}{\ddots} & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \overset{s)}{\ddots} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

con $t = (r+\varepsilon)/2$, $s = (r-\varepsilon)/2$ y $m = n - r$. Diremos que (3.3) es la *matriz reducida* de T_2.

4 Cálculo del Rango y la Signatura de una Métrica Simétrica Real

Fijemos en esta sección una métrica simétrica T_2 sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión n. Fijemos también una base en E y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de T_2 en dicha base.

Vamos a ver cómo con la ayuda de la matriz A podemos calcular el rango y la signatura de T_2, y para ello consideremos sobre E la única métrica $\bar{T}_2$ cuya matriz es la base fijada en E es la matriz unidad de orden n; $\bar{T}_2$ será una métrica simétrica definida positiva para la que la base fijada es ortonormal. Dados $e, e' \in E$ denotaremos $\bar{T}_2(e, e') = e * e'$.

Recordemos que si $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ y $f : E \to E$ es un endomorfismo, entonces tenemos el endomorfismo

$$P(f) = a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 I ,$$

donde I es el endomorfismo identidad de E. Además, dados $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ los endomorfismos $P(f)$ y $Q(f)$ conmutan: $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Lema 4.1 *Existe un único endomorfismo $T : E \to E$ que satisface: $e \cdot e' = T(e) * e'$ cualesquiera que sean $e, e' \in E$. A T se le denomina* endomorfismo asociado *a la pareja de métricas $(\bar{T}_2, T_2)$.*

Demostración. Si $\phi : E \to E^*$ es la polaridad asociada a la métrica T_2 y $\bar{\phi} : E \to E^*$ es la polaridad asociada a la métrica $\bar{T}_2$, entonces el endomorfismo T del enunciado está determinado por la condición: $\bar{\phi}(T(e)) = \phi(e)$ para todo $e \in E$. Basta entonces tener en cuenta que $\bar{\phi}$ es un isomorfismo (porque $\bar{T}_2$ es no singular) para obtener $T = \bar{\phi}^{-1}\phi$. La unicidad es obvia. ∎

Observación **4.2** La matriz de ϕ (en la base fijada en E y en su base dual) es A y la matriz de $\bar{\phi}$ (en las mismas bases) es la matriz unidad de orden n (véase V.2.2). Por lo tanto la matriz del endomorfismo T en la base fijada es A.

Ejercicio 4.3 El endomorfismo T asociado a la pareja de métricas $(\bar{T}_2, T_2)$ tiene la siguiente propiedad: $\Big[P(T)\Big(Q(T)(e)\Big)\Big] * e' = P(T)(e) * Q(T)(e')$ cualesquiera que sean $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $e, e' \in E$. [Indicación: Pruébese primero la igualdad $T^{i+j}(e) * e' = T^i(e) * T^j(e')$.]

Teorema 4.4 *El endomorfismo T es diagonalizable. Además, existe una base de E en la que diagonaliza T, que es ortogonal para T_2 y es ortonormal para $\bar{T}_2$.*

Demostración. Recordemos que el endomorfismo T es diagonalizable si y sólo si su polinomio anulador tiene todas sus raíces reales y simples. Sea $P(x)$ el polinomio anulador de T, y sea

$$P(x) = (P_1(x))^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (P_h(x))^{\alpha_h}$$

la descomposición de $P(x)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles (con coeficiente principal igual a 1).

Veamos en primer lugar que $\alpha_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, h\}$. Probémoslo, por ejemplo, para α_1, para lo cual supongamos que $\alpha_1 \geq 2$ y llegaremos a una contradicción.

Si la implicación "$(P_1(T))^2(e) = 0 \Rightarrow P_1(T)(e) = 0 \quad (e \in E)$" fuera cierta tendríamos que el polinomio $(P_1(x))^{\alpha_1 - 1} \cdot \dots \cdot (P_h(x))^{\alpha_h}$ es anulado por el endomorfismo T (compruébese como ejercicio), lo cual no es posible porque dicho polinomio tiene grado estrictamente menor que el polinomio anulador $P(x)$. Probemos entonces la implicación mencionada: dado $e \in E$, si $(P_1(T))^2(e) = 0$ entonces (véase 4.3)

$$0 = (P_1(T))^2(e) * e = P_1(T)(e) * P_1(T)(e) \quad \Rightarrow \quad P_1(T)(e) = 0\,,$$

ya que $\bar{T}_2$ es definida positiva.

Tenemos ya $P(x) = P_1(x) \cdot \dots \cdot P_h(x)$. Veamos ahora que cada polinomio irreducible $P_i(x)$ tiene grado 1. Si $P_1(x)$ no tiene grado 1, entonces las raíces de $P_1(x)$ son un número complejo $a + \mathrm{i}b$ y su conjugado $a - \mathrm{i}b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $b \neq 0$), en cuyo caso $P_1(x) = (x - a)^2 + b^2$; si $e_0 \neq 0$ es un vector tal que $P_1(T)(e_0) = 0$ (e_0 existe), entonces

$$\begin{aligned} 0 = P_1(T)(e_0) * e_0 &= \Big[(T - aI)^2 + b^2 I\Big](e_0) * e_0 = (T - aI)^2(e_0) * e_0 \;+\; b^2 e_0 * e_0 \\ &= (T - aI)(e_0) * (T - aI)(e_0) \;+\; b^2(e_0 * e_0) > 0\,, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto el polinomio $P_1(x)$ debe tener grado 1.

Hemos demostrado que existen números reales distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ (los valores propios de T) tales que $P(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_h)$, de modo que tenemos

$$E = \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(T - \lambda_h I)$$

(cada $\operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)$ es el subespacio propio asociado al valor propio λ_i). Veamos que esta suma directa es una suma ortogonal para $\bar{T}_2$: dados índices i, j distintos y dados vectores $e_i, e_j \in E$ tales que $T(e_i) = \lambda_i e_i$ y $T(e_j) = \lambda_j e_j$, como $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ tenemos

$$T(e_i) * e_j = e_i * T(e_j) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i(e_i * e_j) = \lambda_j(e_i * e_j) \quad \Rightarrow \quad e_i * e_j = 0\,.$$

Por lo tanto $E = \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I) \perp \dots \perp \operatorname{Ker}(T - \lambda_h I)$ (descomposición para la métrica $\bar{T}_2$).

Construyamos ahora la base que nos piden. Para ello consideremos en cada subespacio $\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$ una base ortonormal respecto de $\bar{T}_2$ (dichas bases existen por ser $\bar{T}_2$ definida positiva); la reunión de todas estas bases nos da una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E que es ortonormal respecto de $\bar{T}_2$, y que está formada por vectores propios de T. Es fácil ver que $\{e_1,\dots,e_n\}$ es ortogonal para T_2: si $i\neq j$ tenemos

$$e_i\cdot e_j = T(e_i)*e_j = \lambda(e_i*e_j)=0\,. \quad \blacksquare$$

4.5 Veamos ya cómo podemos calcular el rango y la signatura de T_2 a partir de la matriz A. Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base construida en 4.4. Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ existe $\alpha_i\in\mathbb{R}$ tal que $T(e_i)=\alpha_i e_i$; los escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ son las raíces $\lambda_1,\dots,\lambda_h$ del polinomio anulador de T (cada raíz λ_i repetida $\dim(\mathrm{Ker}(T-\lambda_i I))$ veces), y para ellos se cumple

$$e_i\cdot e_i = T(e_i)*e_i=\alpha_i(e_i*e_i)=\alpha_i\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{matrix}\text{matriz de } \bar\phi \text{ en la base}\\ \{e_i\} \text{ y en su base dual}\end{matrix} = \text{matriz de } \bar{T}_2 \text{ en la base } \{e_i\} = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}\text{matriz de } \phi \text{ en la base}\\ \{e_i\} \text{ y en su base dual}\end{matrix} = \text{matriz de } T_2 \text{ en la base } \{e_i\} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix},$$

y como consecuencia

$$\text{matriz de } T \text{ en la base } \{e_i\} = (\text{matriz } \ \bar\phi^{-1})\cdot(\text{matriz } \ \phi) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

En particular, como ya sabíamos, el polinomio característico del endomorfismo T es $S(x)=(x-\alpha_1)\cdot\dots\cdot(x-\alpha_n)$. Como en la base de E fijada al principio de esta subsección la matriz de T es A, concluimos que $S(x)$ es justamente el polinomio característico de la matriz A. Dicho polinomio $S(x)$ se dice que es "una ecuación secular" de la métrica T_2.

La ecuación secular no es un invariante de la métrica porque depende de la base elegida en E para obtener la matriz de T_2. Pero eso no es importante aquí, ya que lo que nos interesa son los signos de las raíces de la ecuación secular (es decir, los signos de los números reales $\alpha_1,\dots,\alpha_n$).

Modifiquemos la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de la siguiente manera:

$$e'_i=\left(\sqrt{|\alpha_i|}\,\right)^{-1}e_i \quad \text{si } \ \alpha_i\neq 0\,, \qquad\qquad e'_i=e_i \quad \text{si } \ \alpha_i=0\,,$$

de modo que se cumplen

$$e'_i\cdot e'_i=\begin{cases}+1 & \text{si } \ \alpha_i>0\,,\\ -1 & \text{si } \ \alpha_i<0\,,\end{cases} \qquad\qquad e'_i\cdot e'_i=0 \quad \text{si } \ \alpha_i=0\,.$$

Ahora, la matriz de T_2 en la nueva base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ (reordenada adecuadamente) es

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \overset{t)}{\ddots} & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \overset{s)}{\ddots} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

y aplicando el teorema 3.15 concluimos que $r = t + s$ y $\varepsilon = t - s$, donde $t =$ número de raíces positivas de $S(x)$ (contando multiplicidades), y $s =$ número de raíces negativas de $S(x)$ (contando multiplicidades).

Resumiendo, el polinomio característico de la matriz A, $S(x)$, tiene todas sus raíces reales (como toda matriz simétrica con coeficientes reales), y el rango y la signatura de T_2 lo podemos calcular a partir de los signos de dichas raíces.

Para terminar observemos que para aplicar el método que acabamos de describir no es necesario calcular las raíces de $S(x)$, pues lo que nos interesa es el signo de dichas raíces y eso lo podemos obtener con la conocida Regla de Descartes, según la cual, *si $Q(x)$ es un polinomio con coeficientes reales que tiene todas sus raíces reales (como ocurre para $S(x)$), entonces el número de raíces positivas de $Q(x)$ (contadas con su multiplicidad) es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes de $Q(x)$*. El número de raíces nulas de $S(x)$ es trivial de calcular, ya que es la máxima potencia de x que divide a $S(x)$; por tanto, el número de raíces negativas de $S(x)$ es $n -$ (número de raíces positivas) $-$ (número de raíces nulas).

5 Clasificación Proyectiva de las Cuádricas

Como consecuencia de la clasificación de las métricas simétricas obtendremos la clasificación (proyectiva) de las cuádricas. Como en la sección anterior, en ésta distinguiremos dos casos: cuando el cuerpo k es algebraicamente cerrado y cuando $k = \mathbb{R}$.

Fijemos un k-espacio vectorial E de dimensión n.

Definición 5.1 Diremos que dos cuádricas de $\mathbb{P}(E)$ son *(proyectivamente) equivalentes* si existe una autoproyectividad de $\mathbb{P}(E)$ que transforma una de las cuádricas en la otra (véase la definición VI.1.19).

Según el ejercicio VI.1.20 tenemos: dos cuádricas $\langle T_2 \rangle$, $\langle \bar{T}_2 \rangle$ de $\mathbb{P}(E)$ son equivalentes si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que las métricas λT_2 y $\bar{T}_2$ son equivalentes.

Definición 5.2 Se define el *rango* de una cuádrica $\langle T_2 \rangle$ de $\mathbb{P}(E)$ como el rango de la métrica T_2. Es obvio que esta definición no dependen del representante T_2 de la cuádrica.

Es fácil comprobar que el rango y el índice son funciones invariantes para el problema de clasificación de las cuádricas. Veremos que la primera clasifica las cuádricas cuando el cuerpo es algebraicamente cerrado, y que las dos clasifican sobre $\mathbb{R}$.

5.3 Teorema de clasificación (caso algebraicamente cerrado): *Sean $\langle T_2\rangle$, $\langle \bar{T}_2\rangle$ cuádricas sobre $\mathbb{P}(E)$. Si k es algebraicamente cerrado, entonces $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar{T}_2\rangle$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango (si y sólo si sus vértices tienen igual dimensión).*

Demostración. Las cuádricas $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar{T}_2\rangle$ son equivalentes si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que las métricas λT_2 y $\bar{T}_2$ son equivalentes, si y sólo si existe $\lambda \in k^*$ tal que las métricas λT_2 y $\bar{T}_2$ tienen igual rango (por el teorema 3.4), si y sólo si las cuádricas $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar{T}_2\rangle$ tienen igual rango. ∎

5.4 Ecuaciones reducidas de las cuádricas complejas: Sean $\langle T_2\rangle$ una cuádrica en $\mathbb{P}(E)$, $n = \dim E$ y $r = \operatorname{rg} T_2$ (debe ser $1 \leq r \leq n$). Según 3.4, la matriz de T_2 en cierta base de E es la matriz (3.1) de la página 115, así que en la referencia proyectiva que define esa base la ecuación de $\langle T_2\rangle$ es

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 0$$

(véase VI.1.11). A continuación aparecen, para dimensiones bajas, las tablas de clasificación de las cuádricas proyectivas sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos:

Cuádricas en $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

Rango	1	2
Ecuación reducida	$x_1^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 = 0$
Lugar	punto doble	dos puntos distintos

Cuádricas en $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Rango	1	2	3
Ecuación reducida	$x_1^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
Lugar	recta doble	dos rectas distintas	cónica no singular

Cuádricas en $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

Rango	1	2	3	4
Ecuación reducida	$x_1^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$
Lugar	plano doble	dos planos distintos	cono de vértice un punto	cuádrica no singular

5.5 Teorema de clasificación (caso real): *Sean $\langle T_2\rangle$, $\langle \bar T_2\rangle$ cuádricas sobre $\mathbb{P}(E)$. Si $k=\mathbb{R}$, entonces $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar T_2\rangle$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango y el mismo índice. En otras palabras, dos cuádricas de un espacio proyectivo real son equivalentes, si y sólo si, sus vértices son de la misma dimensión y las subvariedades lineales máximas contenidas en sus lugares también son de la misma dimensión.*

Demostración. Ya hemos dicho después de la definición 5.2 que si las cuádricas $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar T_2\rangle$ son equivalentes entonces tienen el mismo rango y el mismo índice (i.e., "rango" e "índice" son funciones invariantes para el problema de clasificación de las cuádricas).

Supongamos ahora que $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar T_2\rangle$ tienen el mismo rango y el mismo índice, en cuyo caso las métricas T_2 y $\bar T_2$ tienen el mismo rango y el mismo índice. Si "signo elíptico de T_2 = signo elíptico de $\bar T_2$", entonces T_2 y $\bar T_2$ son equivalentes (en virtud del teorema de clasificación 3.12) y por lo tanto las cuádricas $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar T_2\rangle$ son equivalentes. Si "signo elíptico de T_2 = $-$ signo elíptico de $\bar T_2$", entonces $-T_2$ y $\bar T_2$ son equivalentes (de nuevo por 3.12) y por lo tanto las cuádricas $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar T_2\rangle$ son equivalentes. ∎

5.6 Ecuaciones reducidas de las cuádricas reales: Sean $\langle T_2\rangle$ una cuádrica sobre un espacio proyectivo real $\mathbb{P}(E)$, $r=\operatorname{rg}T_2$, $n=\dim E$ e $i=\text{índice}\,T_2$ (en virtud de 3.12 debe ser $2i\le r\le n$). Según 3.14, la matriz de T_2 en cierta base de E es la matriz (3.3) de la página 120, así que (cambiando T_2 por $-T_2$ si fuera necesario para que $\min\{t,s\}=s$), en la referencia proyectiva que determina dicha base la ecuación del lugar de la cuádrica $\langle T_2\rangle$ es

$$x_1^2+\cdots+x_t^2-x_{t+1}^2-\cdots-x_{t+s}^2=0\,,\qquad i=s\le t\,,\quad t+s=r\le n\,.$$

Cuádricas en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$			
Rango / Öndice	1	2	3
0	$x_1^2=0$ recta doble	$x_1^2+x_2^2=0$ dos rectas imaginarias (*)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ cónica no sing. imaginaria (**)
1		$x_1^2-x_2^2=0$ dos rectas distintas	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ cónica no singular real

(*) La cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de ecuación $x_1^2+x_2^2=0$ es el par de rectas imaginarias conjugadas de ecuaciones $x_1+\mathrm{i}x_2=0$ y $x_1-\mathrm{i}x_2=0$; la intersección de dichas rectas es el punto real $(0,0,1)$, que es el único punto (real) del lugar de la cónica.

(**) La cónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de ecuación $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ es no singular, pero no tiene puntos (reales) en su lugar.

Cuádricas en $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$		
Rango / Öndice	1	2
0	$x_1^2 = 0$ punto doble	$x_1^2 + x_2^2 = 0$ dos puntos imaginarios
1		$x_1^2 - x_2^2 = 0$ dos puntos distintos

Cuádricas en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$				
Rango / Öndice	1	2	3	4
0	$x_1^2 = 0$ plano doble	$x_1^2 + x_2^2 = 0$ dos planos imaginarios (***)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ cono imaginario (****)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ cuádrica no singular imaginaria
1		$x_1^2 - x_2^2 = 0$ dos planos distintos	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ cono real	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ cuádrica no singular real no reglada
2				$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ cuádrica no singular reglada (+)

(***) La cuádrica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 0$ es el par de planos imaginarios conjugados de ecuaciones $x_1 + \mathrm{i}x_2 = 0$ y $x_1 - \mathrm{i}x_2 = 0$; la intersección de dichos planos es la recta real $x_1 = 0, x_2 = 0$.

(****) La cuádrica de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ es un cono imaginario cuyo vértice es el punto real $(0, 0, 0, 1)$, que es el único punto real de su lugar.

(+) Para una cuádrica no singular ($r = 4$ en este caso), la dimensión de las máximas subvariedades lineales contenidas en su lugar es $i - 1$ (véase el elma VI.3.3). Por tanto, para $i = 0$ el lugar es vacío, para $i = 1$ en el lugar hay puntos pero no rectas, y para $i = 2$ en el lugar hay rectas.

6 Problemas

6.1 Sobre un k-espacio vectorial de dimensión 3, considérense las métricas cuyas matrices en cierta base son

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Clasifíquense dichas métricas supuesto que $k = \mathbb{C}$.
(b) Clasifíquense dichas métricas supuesto que $k = \mathbb{R}$.

6.2 Sobre un k-espacio vectorial de dimensión 4, considérense las métricas cuyas matrices en cierta base son

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Clasifíquense dichas métricas supuesto que $k = \mathbb{C}$.
(b) Clasifíquense dichas métricas supuesto que $k = \mathbb{R}$.

6.3 Clasifíquense las cónicas del plano proyectivo real cuyas ecuaciones en cierto sistema de referencia proyectivo son las siguientes:
(a) $3x^2 - 2xy + z^2 + 6yz = 0\,;$
(b) $y^2 - xy - xz + z^2 = 0\,;$
(c) $xy + xz + yz = 0\,;$
(d) $x^2 + y^2 + xy + xz - yz = 0\,.$

6.4 Dadas las cónicas $\langle T_2\rangle$, $\langle \bar{T}_2\rangle$ del plano proyectivo complejo cuyas ecuaciones en cierta referencia son

$$\langle T_2\rangle \equiv y^2 + zx = 0\,, \qquad \langle \bar{T}_2\rangle \equiv x^2 - y^2 + z^2 = 0\,,$$

sea $\mathcal{H}$ el haz de cónicas que determinan. Clasifíquense todas las cónicas de $\mathcal{H}$.

Estúdiese el mismo problema considerando las cónicas anteriores en el plano proyectivo real.

6.5 Clasifíquense las cuádricas del espacio proyectivo real de dimensión 3 cuyas ecuaciones en cierto sistema de referencia proyectivo son las siguientes:

(a) $x^2 - 2xy + zt + z^2 + 6yz - t^2 = 0$;
(b) $y^2 - 2xy + 2xz + 2yt + 2zt + z^2 = 0$;
(c) $xy + xz + xt + yz + yt + zt = 0$;
(d) $2xy + z^2 + t^2 = 0$.

6.6 Supongamos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado ó que $k = \mathbb{R}$, y sea E un k-espacio vectorial. Observando las tablas de clasificación proyectiva de cuádricas dadas para las dimensiones bajas se aprecia que dos cuádricas no equivalentes tienen lugares de naturaleza distinta. Podemos preguntarnos entonces si, en general, los lugares clasifican las cuádricas. La respuesta es afirmativa: "Dos cuádricas $\langle T_2 \rangle$ y $\langle \bar{T}_2 \rangle$ de $\mathbb{P}(E)$ son equivalentes si y sólo si existe una autoproyectividad de $\mathbb{P}(E)$ que transforma el lugar de $\langle T_2 \rangle$ en el lugar de $\langle \bar{T}_2 \rangle$". [Indicación: ésese la proposición VI.3.5.]

6.7 Posición de un punto respecto de una cuádrica real. Sea $\mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo real de dimensión n, sea $\langle T_2 \rangle$ una cuádrica sobre $\mathbb{P}(E)$ de índice i y rango r, y sea $\mathcal{C}$ su lugar.

(a) Los puntos de $\mathcal{C}$ son de dos tipos: "singulares" los del vértice y "no singulares" los que no están en el vértice. Dos puntos $P, Q \in \mathcal{C}$ son del mismo tipo si y sólo si existe una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ que deja invariante a la cuádrica (esto es, $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$) y tal que $\varphi(P) = Q$.

Para los puntos que están fuera de $\mathcal{C}$ debemos distinguir dos casos: cuando $0 < i < \frac{r}{2}$ el complementario de $\mathcal{C}$ tiene dos regiones, el "interior" y el "exterior" de la cuádrica; cuando $i = 0$ ó $i = \frac{r}{2}$ no hay distinción entre los puntos del complementario de $\mathcal{C}$.

(b) Supongamos $0 < i < \frac{r}{2}$ y que se ha elegido el representante métrico T_2 de la cuádrica de modo que su signatura sea positiva. Diremos que un punto $P = \pi(e)$ es *interior* (resp. *exterior*) si $T_2(e,e) < 0$ (resp. $T_2(e,e) > 0$). Un punto P es exterior si y sólo si existe una subvariedad lineal de dimensión i que pasa por P y no corta a $\mathcal{C}$. Como consecuencia, dos puntos $P, Q \notin \mathcal{C}$ son del mismo tipo si y sólo si existe una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ que deja invariante a la cuádrica tal que $\varphi(P) = Q$.

(c) Supongamos $i = 0$ ó $i = \frac{r}{2}$. Dados $P, Q \notin \mathcal{C}$ existe una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ que deja invariante a la cuádrica tal que $\varphi(P) = Q$.