Capítulo VIII

Clasificación Afín de las Cuádricas

Como no puede ser de otro modo, en este capítulo seguiremos suponiendo que k es un cuerpo conmutativo de característica distinta de 2, que todos los espacios vectoriales que aparezcan lo son sobre k y de dimensión finita, y que E es un k-espacio vectorial de dimensión n.

1 Preliminares

Empezaremos dando unas propiedades sencillas de las métricas simétricas que nos serán muy útiles en el resto del capítulo.

Lema 1.1 *Sea T_2 una métrica no singular sobre E, y sea E' un hiperplano vectorial de E. Se cumple* $\dim(\operatorname{rad} E') \leq 1$.

Demostración. Basta tener en cuenta las igualdades $\dim(E')^\perp = \dim E - \dim E' = 1$ y $\operatorname{rad} E' = E' \cap (E')^\perp$. ∎

Lema 1.2 *Sean E' y E_0 subespacios vectoriales de E. Si E' es un hiperplano de E entonces: $E_0 \subseteq E'$ ó $\dim(E_0 \cap E') = \dim E_0 - 1$.*

Demostración. Si $E_0 \not\subseteq E'$ entonces $E_0 + E' = E$ (porque E' es un hiperplano de E), y para terminar basta aplicar la fórmula de la dimensión para los subespacios vectoriales. ∎

1.3 Sea T_2 una métrica no singular sobre E. Si $\{e_i\}$ es una base de E y A es la matriz de T_2 en esa base, entonces podemos considerar el escalar $|A| \in k^*$. Dicho escalar no es un invariante de la métrica T_2, ya que depende de la base elegida. Veamos cómo varía al cambiar la base: si $\{e'_i\}$ es otra base de E, y si B es la matriz de cambio de la base $\{e'_i\}$ a la base $\{e_i\}$, entonces la matriz de T_2 en la base $\{e'_i\}$ es $A' = B^t AB$; por lo tanto $|A'| = |B|^2 \cdot |A|$.

Si consideramos el grupo multiplicativo k^*, y si k^{*2} denota el conjunto de los elementos de k^* que son iguales al cuadrado de algún elemento de k^*, entonces k^{*2} es un subgrupo de k^* y podemos considerar el grupo cociente k^*/k^{*2}. En el párrafo anterior hemos probado que la clase del escalar no nulo $|A|$ en el grupo cociente k^*/k^{*2} no depende de la base elegida en E, y por lo tanto dicha clase sí es un invariante de la métrica no singular T_2.

Definición 1.4 Sea T_2 una métrica no singular sobre E. Llamaremos *discriminante* de T_2 a la clase de $|A|$ en el grupo k^*/k^{*2}, siendo $|A|$ el determinante de la matriz de T_2 en una base cualquiera de E (véase 1.3). El discriminante de T_2 lo denotaremos $\operatorname{dis} T_2$, ó $\operatorname{dis} E$ si la referencia a la métrica considerada sobre E es clara.

Lema 1.5 *Sea T_2 una métrica no singular sobre E ($\dim E = n$). Si $\lambda \in k^*$ entonces la métrica λT_2 es no singular y se cumple $\operatorname{dis}(\lambda T_2) = \lambda^n \cdot \operatorname{dis} T_2$ (donde "$\lambda^n \cdot \operatorname{dis} T_2$" debe entenderse como "la clase de λ^n en k^*/k^{*2} multiplicada por $\operatorname{dis} T_2$"). Además, si $E = E_1 \perp E_2$ con E_1 y E_2 no singulares entonces $\operatorname{dis} E = \operatorname{dis} E_1 \cdot \operatorname{dis} E_2$.*

Demostración. Es un sencillo ejercicio. ∎

Lema 1.6 *Sean E_1 y E_2 espacios vectoriales de dimensión uno dotados de sendas métricas simétricas no singulares. Tenemos: E_1 y E_2 son isométricos $\Leftrightarrow$ $\operatorname{dis} E_1 = \operatorname{dis} E_2$.*

Demostración. Es un sencillo ejercicio. ∎

2 Posiciones Relativas de un Hiperplano Respecto de una Cuádrica

Para todo lo que resta de capítulo fijaremos en $\mathbb{P}(E)$ una cuádrica $\langle T_2 \rangle$, cuyo lugar denotaremos por $\mathcal{C}$, y un hiperplano $H = \pi(E')$. Por simplificar la notación identificaremos la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ con su lugar y hablaremos de "la cuádrica $\mathcal{C}$"; del mismo modo, hablaremos de "la cuádrica $\mathcal{C} \cap H$" refiriéndonos a la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ restringida al hiperplano H (aunque puede ocurrir que dicha cuádrica restringida no exista porque $H \subseteq \mathcal{C}$).

2.1 En esta sección supondremos que no se satisface el caso trivial $H = \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}$ no es "el hiperplano H doble" (o sea, descartamos el caso $\operatorname{rad} E = E'$, el cual se corresponde con las igualdades $\operatorname{rg} E = 1$ y $\operatorname{rg} E' = 0$).

Recordemos que el hiperplano H se dice que es tangente a la cuádrica $\mathcal{C}$, si $H \subseteq \mathcal{C}$ (en cuyo caso no existe la cuádrica $\mathcal{C}$ restringida a H), ó si el vértice de la cuádrica restringida $\mathcal{C} \cap H$ contiene estrictamente al corte de H con el vértice de $\mathcal{C}$. Recordemos también que el vértice de $\mathcal{C}$ es la subvariedad lineal definida por el subespacio $\operatorname{rad} E$, y que el vértice de $\mathcal{C} \cap H$ es la subvariedad lineal definida por el subespacio $\operatorname{rad} E'$. (Véase VI.2.12.)

Lema 2.2 *Las posibles posiciones relativas del hiperplano H respecto de la cuádrica $\mathcal{C}$ son:*
Caso (a)*: H no contiene al vértice de $\mathcal{C}$ (lo que equivale a la condición $\operatorname{rad} E \not\subseteq \operatorname{rad} E'$).*
Caso (b)*: H contiene al vértice de $\mathcal{C}$ y no es tangente a $\mathcal{C}$ (lo que equivale a la condición $\operatorname{rad} E = \operatorname{rad} E'$).*
Caso (c)*: H contiene al vértice de $\mathcal{C}$ y es tangente a $\mathcal{C}$ (lo que equivale a la condición $\operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} E'$).*

Demostración. De la definición de "radical" se sigue trivialmente: $\operatorname{rad} E \subseteq E' \Leftrightarrow \operatorname{rad} E \subseteq \operatorname{rad} E'$. Por lo tanto: H contiene al vértice de $\mathcal{C} \Leftrightarrow \operatorname{rad} E \subseteq E' \Leftrightarrow \operatorname{rad} E \subseteq \operatorname{rad} E'$.

Probemos: H es tangente a $\mathcal{C} \Leftrightarrow \operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} E'$. La implicación "$\Leftarrow$" es fácil y se deja como ejercicio. Veamos la implicación "$\Rightarrow$". Si $H \subseteq \mathcal{C}$ entonces E' es totalmente isótropo, y como E' es un hiperplano debe se maximal, de modo que $\operatorname{rad} E \subseteq E' = \operatorname{rad} E'$; además, según 2.1 la inclusión debe ser estricta: $\operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} E'$. Si $H \not\subseteq \mathcal{C}$, por definición de tangencia tenemos $(\operatorname{rad} E) \cap E' \subset \operatorname{rad} E'$. Si $\operatorname{rad} E \not\subseteq E'$, entonces existe $e \in \operatorname{rad} E$ tal que $E = \langle e \rangle \perp E'$ y por lo tanto $\operatorname{rad} E = \langle e \rangle \perp \operatorname{rad} E'$; de la anterior igualdad se sigue $(\operatorname{rad} E) \cap E' = \operatorname{rad} E'$, lo cual está en contra de la condición de tangencia. Por lo tanto debe ser $\operatorname{rad} E \subset E'$ y obtenemos $\operatorname{rad} E = (\operatorname{rad} E) \cap E' \subset \operatorname{rad} E'$.

De todo lo dicho se sigue que el que H contenga al vértice de $\mathcal{C}$ y no sea tangente a $\mathcal{C}$ es equivalente a la condición $\operatorname{rad} E = \operatorname{rad} E'$. ∎

Lema 2.3 *Con la notación e hipótesis introducidas hasta ahora tenemos:*

- *En el caso* (a)*: existe un subespacio no singular* $\bar{E}$ *en* E *tal que* $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ *y*
$$E' = \Big[(\operatorname{rad} E) \cap E'\Big] \perp \bar{E}\,.$$
- *En el caso* (b)*: existe un subespacio no singular* $\bar{E}$ *en* E *tal que* $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ *y*
$$E' = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}'\,, \qquad \bar{E}' \text{ hiperplano no singular de } \bar{E}\,.$$
- *En el caso* (c)*: existe un subespacio no singular* $\bar{E}$ *en* E *tal que* $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ *y*
$$E' = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}'\,, \qquad \bar{E}' \text{ hiperplano singular de } \bar{E}\,.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\operatorname{rad} E \not\subseteq \operatorname{rad} E'$ (ó equivalentemente, que $\operatorname{rad} E \not\subseteq E'$). Existe $e \in \operatorname{rad} E$ tal que $E = \langle e \rangle \perp E'$, y existe un subespacio no singular $\bar{E}$ tal que $E' = \operatorname{rad} E' \perp \bar{E}$. Por lo tanto $E = \langle e \rangle \perp \operatorname{rad} E' \perp \bar{E}$ y obtenemos las igualdades $\operatorname{rad} E = \langle e \rangle \perp \operatorname{rad} E'$, $\operatorname{rad} E' = (\operatorname{rad} E) \cap E'$.

Supongamos ahora que H contiene al vértice de $\mathcal{C}$: $\operatorname{rad} E \subseteq \operatorname{rad} E'$. Si $\bar{E}$ es un subespacio no singular de E tal que $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$, entonces $\bar{E} \not\subseteq E'$ (pues si $\bar{E} \subseteq E'$ tendríamos $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E} \subseteq \operatorname{rad} E' + E' = E'$). Por lo tanto $\bar{E}' = E' \cap \bar{E}$ es un hiperplano de $\bar{E}$ en virtud del lema 1.2, y aplicando la fórmula de la dimensión obtenemos $E' = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}'$. Si $\operatorname{rad} E = \operatorname{rad} E'$ (caso (b)) entonces $\operatorname{rad} \bar{E}' = 0$ ($\bar{E}'$ es un hiperplano no singular de $\bar{E}$), y si $\operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} E'$ (caso (c)) entonces $\operatorname{rad} \bar{E}' \neq 0$ ($\bar{E}'$ es un hiperplano singular de $\bar{E}$). ∎

2.4 En lo que sigue, r e i denotarán el rango y el índice de la cuádrica $\mathcal{C}$, y r' e i' denotarán el rango y el índice de la cuádrica restringida $\mathcal{C} \cap H$.

Teorema 2.5 *Con la notación e hipótesis introducidas hasta ahora en esta sección tenemos:*

- *En el caso* (a)*:* $(r', i') = (r, i)$.
- *En el caso* (b)*:* $(r', i') = (r-1, i)$ *ó* $(r', i') = (r-1, i-1)$.
- *En el caso* (c)*:* $(r', i') = (r-2, i-1)$.

Demostración. Se sigue del lema 2.3. En el caso (a), E y E' tienen la misma parte no singular, por lo tanto E y E' tienen el mismo rango y el mismo índice.

En el caso (b), sean $\bar{E}'$ y $\bar{E}$ la parte no singular de E' y E, respectivamente, donde $\bar{E}'$ es un hiperplano de $\bar{E}$. Tenemos $r' = \dim \bar{E}' = \dim \bar{E} - 1 = r - 1$. Ahora, por una parte, todo subespacio totalmente isótropo de $\bar{E}'$ es un subespacio totalmente isótropo de $\bar{E}$ y por lo tanto $i' \leq i$; por otra parte, si F es un subespacio totalmente isótropo maximal de $\bar{E}$, entonces $\bar{E}' \cap F$ es un subespacio totalmente isótropo de $\bar{E}'$ y por lo tanto (véase el lema 1.2)

$$i - 1 = \dim F - 1 \leq \dim(\bar{E}' \cap F) \leq i' .$$

En el caso (c), si $\bar{E}$ es la parte no singular de E, existe un hiperplano singular $\bar{E}'$ de $\bar{E}$ tal que $E' = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}'$ y por tanto $\operatorname{rad} E' = \operatorname{rad} E \perp \operatorname{rad} \bar{E}'$. Como, según el lema 1.1, es $\dim(\operatorname{rad} \bar{E}') = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} r' &= \dim E' - \dim(\operatorname{rad} E') = \dim E' - \dim(\operatorname{rad} E) - \dim(\operatorname{rad} \bar{E}') \\ &= (n-1) - (n-r) - 1 = r - 2 . \end{aligned}$$

Ahora, como la parte no singular de E' es igual a la parte no singular de $\bar{E}'$ tenemos que el índice de E' es igual al índice de $\bar{E}'$, así que calculemos éste último. La dimensión de los subespacios totalmente isótropos maximales de $\bar{E}$ es i, y la dimensión de los subespacios totalmente isótropos maximales de $\bar{E}'$ es $1 + i'$ porque $\dim(\operatorname{rad} \bar{E}') = 1$ (véase el problema V.4.1 (c)). Por lo tanto, si vemos que existe un subespacio totalmente isotropo maximal de $\bar{E}'$ que también es maximal en $\bar{E}$ tendremos $i = 1 + i'$, que es lo que nos falta probar.

Sea $e_1 \in \bar{E}$ tal que $\operatorname{rad} \bar{E}' = \langle e_1 \rangle$, de modo que $\langle e_1 \rangle^\perp = \bar{E}'$ (ortogonal tomado dentro de $\bar{E}$); como $\langle e_1 \rangle$ es un subespacio totalmente isótropo de $\bar{E}$, $\langle e_1 \rangle$ está contenido en un subespacio totalmente isótropo maximal F de $\bar{E}$; en particular, $F \subseteq \langle e_1 \rangle^\perp$, por lo que F es un subespacio totalmente isótropo de $\bar{E}'$ que debe ser maximal (si F no fuera maximal en $\bar{E}'$, entonces tampoco sería maximal en $\bar{E}$). ∎

Observación **2.6** Conocidos los rangos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \cap H$, el teorema 2.5 nos permite deducir la posición relativa del hiperplano H respecto de la cuádrica $\mathcal{C}$. Esta observación es válida incluso en el caso trivial que no hemos considerado en los anteriores resultados (véase 2.1): $\mathcal{C}$ es el hiperplano H doble $\Leftrightarrow$ $r = 1$ y $r' = 0$.

3 Teoremas de Clasificación

Consideremos en lo que sigue el espacio afín $\mathbb{A} = (\mathbb{P}(E), H)$ que el hiperplano $H = \pi(E')$ define en $\mathbb{P}(E)$, y fijemos otra cuádrica $\langle T_2' \rangle$ de $\mathbb{P}(E)$ cuyo lugar denotaremos $\mathcal{C}'$.

3.1 Recordemos que las cuádricas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son (proyectivamente) equivalentes si existe una proyectividad $\tau : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ que transforma la cuádrica $\mathcal{C}$ en la cuádrica $\mathcal{C}'$, lo que expresaremos abreviadamente escribiendo $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Recordemos también que una proyectividad $\tau : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ transforma la cuádrica $\mathcal{C}$ en la cuádrica $\mathcal{C}'$ si existen un escalar $\lambda \in k^*$ y un representante lineal $T : E \to E$ de τ tales que $T : (E, \lambda T_2) \to (E, T_2')$ es una isometría.

Por último, recordemos que una autoafinidad de $\mathbb{A}$ es una autoproyectividad de $\mathbb{P}(E)$ que deja invariante al hiperplano H (véase III.6.3).

Definiciones 3.2 Llamaremos cuádrica sobre el espacio afín $\mathbb{A}$ a toda cuádrica sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$.

Diremos que las cuádricas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{A}$ son *afínmente equivalentes* si existe una afinidad $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Es decir, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de son afínmente equivalentes si existen un escalar $\lambda \in k^*$ y un isomorfismo lineal $T : E \to E$ tales que $T : (E, \lambda T_2) \to (E, T_2')$ es una isometría que manda el hiperplano vectorial E' a él mismo.

Teorema 3.3 *Si H_1 y H_2 son hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ tales que las cuádricas $\mathcal{C} \cap H_1$ y $\mathcal{C} \cap H_2$ son proyectivamente equivalentes, entonces existe una proyectividad $\tau : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ tal que $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ y $\tau(H_1) = H_2$.*

Demostración. Nótese que $\mathcal{C} \cap H_1$ y $\mathcal{C} \cap H_2$ tienen el mismo rango (porque son equivalentes), y por consiguiente las posiciones relativas de H_1 y H_2 respecto de $\mathcal{C}$ son la misma (véase la observación 2.6). Analicemos los tres casos posibles, para lo cual consideremos los hiperplanos vectoriales E_1 y E_2 de E tales que $H_1 = \pi(E_1)$ y $H_2 = \pi(E_2)$. (El teorema es trivialmente cierto cuando $\mathcal{C}$ es el hiperplano H_1 doble, pues en ese caso debe ser $H_1 = H_2$.)

(a) H_1 y H_2 no contienen al vértice de $\mathcal{C}$. En este caso, según el lema 2.3 tenemos

$$E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_1 = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_2\,, \qquad E_1 = \operatorname{rad} E_1 \perp \bar{E}_1\,, \qquad E_2 = \operatorname{rad} E_2 \perp \bar{E}_2\,,$$

donde $\bar{E}_i =$ parte no singular de E_i y $\operatorname{rad} E_i = \operatorname{rad} E \cap E_i$, $i = 1, 2$. Si F_i es un subespacio suplementario de $\operatorname{rad} E_i$ en $\operatorname{rad} E$, entonces

$$E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_i = F_i \perp \operatorname{rad} E_i \perp \bar{E}_i = F_i \perp E_i\,.$$

La hipótesis "$\mathcal{C} \cap H_1$ y $\mathcal{C} \cap H_2$ son equivalentes" significa que existe $\lambda \in k^*$ y una isometría $f : (E_1, \lambda T_2) \to (E_2, T_2)$. Si $g : F_1 \to F_2$ es un isomorfismo cualquiera (existe porque $\dim F_1 = \dim F_2$), entonces $g : (F_1, \lambda T_2) \to (F_2, T_2)$ es una isometría (porque F_1 y F_2 son totalmente isótropos), y por lo tanto $T = g \oplus f : (F_1 \perp E_1, \lambda T_2) \to (F_2 \perp E_2, T_2)$ es una isometría que satisface $T(E_1) = E_2$, por lo que $\tau = \widetilde{T}$ es la proyectividad buscada.

(b) H_1 y H_2 contienen al vértice de $\mathcal{C}$ y no son tangentes a $\mathcal{C}$. En este caso tenemos las descomposiciones

$$E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}\,, \qquad E_1 = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_1\,, \qquad E_2 = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_2\,,$$

donde $\bar{E}_1 = E_1 \cap \bar{E}$ y $\bar{E}_2 = E_2 \cap \bar{E}$ son hiperplanos no singulares de $\bar{E}$ (véase el lema 2.3 y su demostración). Sean $e_1, e_2 \in \bar{E}$ vectores no nulos tales que $\langle e_1 \rangle = \bar{E}_1^{\perp}$ y $\langle e_2 \rangle = \bar{E}_2^{\perp}$ (ortogonales tomados dentro de $\bar{E}$), y sean $a_1 = T_2(e_1, e_1)$, $a_2 = T_2(e_2, e_2)$. Por una parte, tomando discriminantes en las igualdades $\bar{E} = \bar{E}_1 \perp \langle e_1 \rangle = \bar{E}_2 \perp \langle e_2 \rangle$ resulta (véase el lema 1.5)

$$(\operatorname{dis} \bar{E}_1) \cdot a_1 = (\operatorname{dis} \bar{E}_2) \cdot a_2\,.$$

Por otra parte, la equivalencia de $\mathcal{C} \cap H_1$ y $\mathcal{C} \cap H_2$ implica que existe $\lambda \in k^*$ tal que los espacios $(\bar{E}_1, \lambda T_2)$ y $(\bar{E}_2, T_2)$ son isométricos, y por lo tanto (véase el lema 1.5)

$$\operatorname{dis} \bar{E}_2 = \lambda^m \cdot \operatorname{dis} \bar{E}_1 \qquad (m = \dim \bar{E}_1)\,.$$

De todo lo anterior resulta $a_1 = \lambda^m \cdot a_2$ (en k^*/k^{*2}).

Distiguimos ahora dos casos. Si λ^m es un cuadrado, entonces $a_1 = a_2$ (en k^*/k^{*2}) y por lo tanto existe una isometría $\langle e_1\rangle \xrightarrow{\sim} \langle e_2\rangle$ (véase el lema 1.6). Por el teorema de Witt, esta isometría extiende a una isometría $g : \bar{E} \to \bar{E}$ que transforma $\langle e_1\rangle^\perp = \bar{E}_1$ en $\langle e_2\rangle^\perp = \bar{E}_2$. La proyectividad buscada es la proyectivización de la isometría

$$T = Id \oplus g : E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E} \to \operatorname{rad} E \perp \bar{E} = E\,.$$

Si λ^m no es un cuadrado, entonces m es impar y por lo tanto $a_1 = \lambda^{-1}\cdot a_2$ (en k^*/k^{*2}). Esto implica que $(\langle e_1\rangle, \lambda T_2)$ y $(\langle e_2\rangle, T_2)$ son isométricos, y como $(\bar{E}_1, \lambda T_2)$ y $(\bar{E}_2, T_2)$ también son isométricos tenemos en conjunto una isometría

$$(E, \lambda T_2) = (\operatorname{rad} E \perp \bar{E}_1 \perp \langle e_1\rangle, \lambda T_2) \longrightarrow (\operatorname{rad} E \perp \bar{E}_2 \perp \langle e_2\rangle, T_2) = (E, T_2)$$

que induce la proyectividad buscada.

(c) H_1 y H_2 contienen al vértice de $\mathcal{C}$ y son tangentes a $\mathcal{C}$. En este caso tenemos las descomposiciones

$$E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}\,, \qquad E_1 = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_1\,, \qquad E_2 = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}_2\,,$$

donde $\bar{E}_1 = E_1 \cap \bar{E}$ y $\bar{E}_2 = E_2 \cap \bar{E}$ son hiperplanos singulares de $\bar{E}$ cuyos radicales tienen dimensión 1 (véanse los lemas 2.3 y 1.1). Sean $e_1, e_2 \in \bar{E}$ vectores no nulos tales que $\langle e_1\rangle = \operatorname{rad} \bar{E}_1$ y $\langle e_2\rangle = \operatorname{rad} \bar{E}_2$. Como $\langle e_1\rangle$ y $\langle e_2\rangle$ son totalmente isótropos existe una isometría $\langle e_1\rangle \xrightarrow{\sim} \langle e_2\rangle$, la cual extiende por el teorema de Witt a una isometría $h : \bar{E} \to \bar{E}$ que transforma $\langle e_1\rangle^\perp = \bar{E}_1$ en $\langle e_2\rangle^\perp = \bar{E}_2$ (ortogonales tomados dentro de $\bar{E}$); entonces la isometría

$$T = Id \oplus h : E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E} \to \operatorname{rad} E \perp \bar{E} = E$$

induce la proyectividad buscada. ∎

Teorema 3.4 *Las cuádricas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{A}$ son afínmente equivalentes, si y sólo si, son proyectivamente equivalentes y sus restricciones al hiperplano del infinito, $\mathcal{C} \cap H$ y $\mathcal{C}' \cap H$, también son proyectivamente equivalentes.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son afínmente equivalentes, entonces existe una proyectividad $\tau : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ tal que $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $\tau(H) = H$; en particular $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son proyectivamente equivalentes. Además, la restricción de τ a H define una autoproyectividad de H que transforma $\mathcal{C}\cap H$ en $\mathcal{C}'\cap H$, por lo que las cuádricas $\mathcal{C}\cap H$ y $\mathcal{C}'\cap H$ también son proyectivamente equivalentes.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son proyectivamente equivalentes, y que $\mathcal{C} \cap H$ y $\mathcal{C}' \cap H$ son proyectivamente equivalentes. Sea $\tau' : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ una proyectividad que trasforma $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, y denotemos $H' = \tau'(H)$. Es claro que las cuádricas $\mathcal{C} \cap H$ y $\mathcal{C}' \cap H'$ son equivalentes, y como por hipótesis las cuádricas $\mathcal{C} \cap H$ y $\mathcal{C}' \cap H$ son equivalentes, obtenemos que $\mathcal{C}' \cap H$ y $\mathcal{C}' \cap H'$ son cuádricas equivalentes. Por el teorema 3.3 aplicado a la cuádrica $\mathcal{C}'$ y a los hiperplanos H y H', existe una proyectividad $\tau'' : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ tal que $\tau''(\mathcal{C}') = \mathcal{C}'$ y $\tau''(H') = H$. Entonces $\tau = \tau''\circ\tau'$ es una autoafinidad de $\mathbb{A}$ (porque $\tau(H) = H$) que transforma $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, con lo que concluimos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son afínmente equivalentes. ∎

Combinando el resultado anterior con los teoremas VII.5.3 y VII.5.5 obtenemos los teoremas de clasificación afín de las cuádricas en los dos casos que venimos considerando habitualmente: el algebraicamente cerrado y el real:

3.5 Teorema de clasificación: *Si el cuerpo k es algebraicamente cerrado, entonces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son afínmente equivalentes, si y sólo si, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tienen igual rango y $\mathcal{C}\cap H$ y $\mathcal{C}'\cap H$ también tienen igual rango.*

3.6 Teorema de clasificación: *Si $k=\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son afínmente equivalentes, si y sólo si, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ tienen igual rango e índice y $\mathcal{C}\cap H$ y $\mathcal{C}'\cap H$ también tienen igual rango e índice.*

4 Ecuaciones Reducidas

Veamos a continuación la expresión en coordenadas de las cuádricas afines respecto de un sistema de referencia apropiado.

4.1 Como hasta ahora, $\mathcal{C}=\langle T_2\rangle$ es una cuádrica en $\mathbb{P}(E)$ de rango r e índice i, $H=\pi(E')$ es un hiperplano de $\mathbb{P}(E)$, y r' e i' denotan el rango y el índice de la cuádrica restringida $\mathcal{C}\cap H$.

Recordemos que dar una referencia afín en el espacio afín $\mathbb{A}=(\mathbb{P}(E),H)$ significa dar una referencia proyectiva $(P_0,P_1,\dots,P_n,U)$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ tal que $P_1+\cdots+P_n=H$. Es decir, una referencia afín de $\mathbb{A}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$ respecto de la cual la ecuación del hiperplano del infinito H es $x_0=0$. Recordemos también que, fijada una referencia afín, si $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ son las coordenadas homogéneas de un punto $P\in\mathbb{A}$, entonces las coordenadas afines de P son $(y_1,\dots,y_n)$, donde

$$y_1=\frac{x_1}{x_0}\,,\quad \dots\,,\quad y_n=\frac{x_n}{x_0}\,.$$

4.2 Cuerpo algebraicamente cerrado: Caso (a): El hiperplano H no contiene al vértice de $\mathcal{C}$, es decir, $r'=r$. En este caso $E=\operatorname{rad}E\perp\bar{E}$ y $E'=[(\operatorname{rad}E)\cap E']\perp\bar{E}$, por lo que existe un vector no nulo $e_0\in\operatorname{rad}E$ tal que $E=\langle e_0\rangle\perp E'$. Si $\{e_{r+1},\dots,e_n\}$ es una base de $(\operatorname{rad}E)\cap E'$ y $\{e_1,\dots,e_r\}$ una base ortonormal de $\bar{E}$, entonces $\{e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n\}$ es una base de E', por lo que $\{e_0,e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n\}$ es una base de E en la cual la ecuación de E' es $x_0=0$. Proyectivizando dicha base de E obtenemos una referencia afín de $\mathbb{A}$ en la cual la ecuación de (el lugar de) la cuádrica $\mathcal{C}$ en coordenadas homogéneas es

$$x_1^2+\cdots+x_r^2=0\,,\qquad 1\le r\le n\,,$$

y la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas afines es

$$y_1^2+\cdots+y_r^2=0\,,\qquad 1\le r\le n\,.$$

Caso (b): El hiperplano H contiene al vértice de $\mathcal{C}$ y no es tangente a $\mathcal{C}$, es decir, $r'=r-1$; como además la posibilidad $(r,r')=(1,0)$ la consideramos aparte debe ser $r\ge 2$. En este caso $E=\operatorname{rad}E\perp\bar{E}$ y $E'=\operatorname{rad}E\perp\bar{E}'$, siendo $\bar{E}'$ un hiperplano no singular de $\bar{E}$. Sea $\{e_0,e_1,\dots,e_{r-1}\}$ una base ortonormal de $\bar{E}$ tal que $\bar{E}=\langle e_0\rangle\perp\bar{E}'$. Si $\{e_r,\dots,e_n\}$ es una base de $\operatorname{rad} E$, entonces $\{e_0, e_1, \dots, e_{r-1}, e_r, \dots, e_n\}$ es una base de E que define una referencia afín de $\mathbb{A}$, en la cual la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas homogéneas es

$$x_0^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0\,, \qquad\qquad 2 \le r \le n+1\,,$$

y la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas afines es

$$1 + y_1^2 + \cdots + y_{r-1}^2 = 0\,, \qquad\qquad 2 \le r \le n+1\,.$$

Caso (c): El hiperplano H contiene al vértice de $\mathcal{C}$ y es tangente a $\mathcal{C}$, es decir, $r' = r - 2$ ($\Rightarrow r \ge 2$). En este caso $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ y $E' = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}'$, siendo $\bar{E}'$ un hiperplano singular de $\bar{E}$. Del lema 1.1 se sigue que existe un vector isótropo $e_1 \in \bar{E}'$ y un subespacio no singular F tal que $\bar{E}' = \langle e_1 \rangle \perp F$. En particular, existe un vector $v \in \bar{E}$ tal que $F^\perp = \langle v, e_1 \rangle$ (ortogonal tomado dentro de $\bar{E}$), de modo que $F^\perp$ es un espacio vectorial de dimensión 2 que es no singular ($\bar{E}$ y F son no singulares) y que es no elíptico (el vector e_1 es isótropo), es decir, $F^\perp$ es un plano hiperbólico. Por lo tanto existe un par hiperbólico (u, e_1) tal que $F^\perp = \langle u, e_1 \rangle$ (véase el lema V.3.2). Si definimos $e_0 = \frac{1}{2}u$, entonces $\{e_0, e_1\}$ es una base de $F^\perp$ formada por vectores isótropos tales que $T_2(e_0, e_1) = \frac{1}{2}$.

Si $\{e_2, \dots, e_{r-1}\}$ es una base ortonormal de F y $\{e_r, \dots, e_n\}$ es una base de $\operatorname{rad} E$, entonces $\{e_0, e_1, \dots, e_{r-1}, e_r, \dots, e_n\}$ es una base de E en la cual la matriz de T_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \overset{r-2)}{\ddots} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas homogéneas respecto de la referencia afín que dicha base de E define es

$$x_0 x_1 + x_2^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0\,, \qquad\qquad 2 \le r \le n+1\,,$$

y la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas afines es

$$y_1 + y_2^2 + \cdots + y_{r-1}^2 = 0\,, \qquad\qquad 2 \le r \le n+1\,.$$

Caso $(r, r') = (1, 0)$: $\mathcal{C}$ es el hiperplano H doble. En este caso es claro que en cualquier referencia afín de $\mathbb{A}$ la ecuación en coordenadas homogéneas de $\mathcal{C}$ es $x_0^2 = 0$, de modo que su ecuación en coordenadas afines es $1 = 0$, que es la ecuación del vacío. Es decir, $\mathcal{C}$ no tiene puntos afines en su lugar.

A continuación aparecen, para dimensiones bajas, las tablas de clasificación de las cuádricas afines sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos:

Cónicas en $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$			
r \ r'	1	2	3
0	$1=0$ vacío	$y_1=0$ una recta	
1	$y_1^2=0$ recta doble	$1+y_1^2=0$ dos rectas paralelas	$y_1+y_2^2=0$ parábola
2		$y_1^2+y_2^2=0$ dos rectas no paralelas	$1+y_1^2+y_2^2=0$ hipérbola

Cuádricas en $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$				
r \ r'	1	2	3	4
0	$1=0$ vacío	$y_1=0$ un plano		
1	$y_1^2=0$ plano doble	$1+y_1^2=0$ dos planos paralelos	$y_1+y_2^2=0$ cilindro parabólico	
2		$y_1^2+y_2^2=0$ dos planos no paralelos	$1+y_1^2+y_2^2=0$ cilindro hiperbólico	$y_1+y_2^2+y_3^2=0$ paraboloide
3			$y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$ cono de vértice un punto	$1+y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$ hiperboloide

Cuádricas en $\mathbb{A}_1(\mathbb{C})$		
r' \ r	1	2
0	$1 = 0$ vacío	$y_1 = 0$ un punto
1	$y_1^2 = 0$ punto doble	$1 + y_1^2 = 0$ dos puntos distintos

4.3 Cuerpo real: Procediendo como en 4.2 para el caso algebraicamente cerrado, se llega a que existe una base B de E tal que, respecto del sistema de referencia proyectivo que define B, la ecuación en coordenadas homogéneas del lugar de la cuádrica $\mathcal{C}$ es:
si $(r', i') = (r, i)$,

$$x_1^2 + \cdots + x_{r-i}^2 - x_{r-i+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 \le r \le n \\ i \le \frac{r}{2} \end{pmatrix};$$

si $(r', i') = (r-1, i)$,

$$x_0^2 + \cdots + x_{r-i-1}^2 - x_{r-i}^2 - \cdots - x_{r-1}^2 = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} 2 \le r \le n+1 \\ i < \frac{r}{2} \end{pmatrix};$$

si $(r', i') = (r-1, i-1)$,

$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{r-i}^2 - x_{r-i+1}^2 - \cdots - x_{r-1}^2 = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} 2 \le r \le n+1 \\ i \le \frac{r}{2} \end{pmatrix};$$

si $(r', i') = (r-2, i-1)$,

$$x_0 x_1 - x_2^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{r-1}^2 = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} 2 \le r \le n+1 \\ i \le \frac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

La referencia proyectiva respecto de la cual se obtienen las anteriores ecuaciones se construye de modo que la ecuación homogénea del hiperplano H es $x_0 = 0$ (es decir, en la base B la ecuación del subespacio E' es $x_0 = 0$), por lo tanto es una referencia afín de $\mathbb{A}$ en la cual la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas afines es:
si $(r', i') = (r, i)$,

$$y_1^2 + \cdots + y_{r-i}^2 - y_{r-i+1}^2 - \cdots - y_r^2 = 0\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 \le r \le n \\ i \le \frac{r}{2} \end{pmatrix};$$

si $(r',i')=(r-1,i)$,

$$y_1^2+\cdots+y_{r-i-1}^2-y_{r-i}^2-\cdots-y_{r-1}^2=-1\,,\qquad \begin{pmatrix} 2\le r\le n+1 \\ i<\frac{r}{2} \end{pmatrix};$$

si $(r',i')=(r-1,i-1)$,

$$y_1^2+\cdots+y_{r-i}^2-y_{r-i+1}^2-\cdots-y_{r-1}^2=1\,,\qquad \begin{pmatrix} 2\le r\le n+1 \\ i\le\frac{r}{2} \end{pmatrix};$$

si $(r',i')=(r-2,i-1)$,

$$y_1=y_2^2+\cdots+y_i^2-y_{i+1}^2-\cdots-y_{r-1}^2\,,\qquad \begin{pmatrix} 2\le r\le n+1 \\ i\le\frac{r}{2} \end{pmatrix}.$$

Cuádricas en $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ (..\..)

(r,i) \ (r',i')	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)
(0,0)	$1=0$ vacío		$y_1=0$ un plano	
(1,0)	$y_1^2=0$ plano doble	$y_1^2=-1$ planos imaginarios paralelos	$y_1^2=1$ par de planos paralelos	
(2,0)		$y_1^2+y_2^2=0$ planos imaginarios no paralelos		$y_1^2+y_2^2=-1$ cilindro imaginario
(2,1)			$y_1^2-y_2^2=0$ par de planos no paralelos	
(3,0)				$y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$ cono imaginario
(3,1)				

Cuádricas en $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ **(continuación)**

(r',i') \ (r,i)	(3,1)	(4,0)	(4,1)	(4,2)
(0,0)				
(1,0)	$y_1 = y_2^2$ cilindro parabólico			
(2,0)	$y_1^2 + y_2^2 = 1$ cilindro elíptico		$y_1 = y_2^2 + y_3^2$ paraboloide no reglado	
(2,1)	$y_1^2 - y_2^2 = 1$ cilindro hiperbólico			$y_1 = y_2^2 - y_3^2$ paraboloide reglado
(3,0)		$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -1$ elipsoide imaginario	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ elipsoide real	
(3,1)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ cono		$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ hiperboloide no reglado	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ hiperboloide reglado

Cónicas en $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$					
(r', i') \ (r, i)	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
(0,0)	$1 = 0$ vacío		$y_1 = 0$ una recta		
(1,0)	$y_1^2 = 0$ recta doble	$y_1^2 = -1$ rectas imaginarias paralelas	$y_1^2 = 1$ par de rectas paralelas		$y_1 = y_2^2$ parábola
(2,0)		$y_1^2 + y_2^2 = 0$ rectas imaginarias no paralelas		$y_1^2 + y_2^2 = -1$ elipse imaginaria	$y_1^2 + y_2^2 = 1$ elipse real
(2,1)			$y_1^2 - y_2^2 = 0$ par de rectas no paralelas		$y_1^2 - y_2^2 = 1$ hipérbola

Cuádricas en $\mathbb{A}_1(\mathbb{R})$			
(r', i') \ (r, i)	(1,0)	(2,0)	(2,1)
(0,0)	$1 = 0$ vacío		$y_1 = 0$ un punto
(1,0)	$y_1^2 = 0$ punto doble	$y_1^2 = -1$ dos puntos imaginarios	$y_1^2 = 1$ dos puntos distintos

5 Elementos Afines de las Cuádricas

Continuamos con la notación introducida en las secciones anteriores.

Definiciones 5.1 Llamaremos *centro* de la cuádrica $\mathcal{C}$ a todo punto afín que sea conjugado (respecto de $\mathcal{C}$) de todo punto del infinito. Es decir, los centros son los puntos afines de la subariedad lineal $H^\perp$, la cual se denomina *subvariedad de centros* de la cuádrica $\mathcal{C}$.

El significado geométrico de la proposición VI.2.3 es el siguiente: si P_0 es un centro de $\mathcal{C}$ y r es una recta afín que pasa por P_0 y corta a la cuádrica en dos puntos afines Q_1 y Q_2, entonces P_0 es el punto medio de Q_1 y Q_2.

Si la cuádrica $\mathcal{C}$ es no singular entonces $H^\perp$ es un punto, y cuando dicho punto es afín es el único centro de la cuádrica. Una cuádrica no singular con un único centro de denomina *cuádrica central*, y una cuádrica no singular sin centro se llama *paraboloide*. Es decir, las cuádricas centrales son las cuádricas no singulares que no son tangentes al hiperplano del infinito, y los paraboloides son las cuádricas no singulares que son tangentes al hiperplano del infinito.

Definiciones 5.2 Supongamos que la subvariedad de centros de la cuádrica $\mathcal{C}$ es no vacía y sea r una recta de $\mathbb{A}$ que pasa por uno de los centros de $\mathcal{C}$. Diremos que r es un *diámetro* de $\mathcal{C}$ si no es tangente a la cuádrica, y diremos que r es una *asíntota* de $\mathcal{C}$ si es tangente a la cuádrica. Dos diámetros de $\mathcal{C}$ se dice que son conjugados si sus direcciones son puntos de H conjugados respecto de $\mathcal{C}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}$ es un paraboloide y sea $P = H^\perp$ (es decir, $\mathcal{C}$ es no singular y el hiperplano del infinito H es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto del infinito P); entonces se definen los diámetros de $\mathcal{C}$ como las rectas afines que pasan por P (es decir, las rectas afines cuya dirección es P).

Ejemplos 5.3 Veamos los elementos afines de las cónicas reales. Como es usual, denotaremos las coordenadas afín del plano por (x, y) (en lugar de (y_1, y_2)).

(a) Cónicas sin centros.

- *Parábola:* $y = x^2$. En este caso la cónica es tangente en un punto a la recta del infinito, y los diámetros son las rectas afines cuya dirección es dicho punto (todo los diámetros son paralelos). El origen de la referencia afín es un punto de la cónica, el eje $y = 0$ es la tangente a la cónica en el origen, y el eje $x = 0$ es el diámetro que pasa por el origen.
- *Una recta:* $x = 0$. El origen de la referencia es un punto de la cónica, y el eje $y = 0$ es una recta que pasa por el origen y no está contenida en la cónica.

(b) Cónicas con un único centro.

- *Elipse real:* $x^2 + y^2 = 1$. Los diámetros son las rectas que pasan por el centro (no hay asíntotas). El origen de la referencia es el centro de la cónica y los ejes son dos diámetros conjugados.
- *Elipse imaginaria:* $x^2 + y^2 = -1$. Los diámetros son las rectas que pasan por el centro (no hay asíntotas). El origen de la referencia es el centro de la cónica y los ejes son dos diámetros conjugados.

- *Hipérbola:* $x^2 - y^2 = 1$. De las rectas que pasan por el centro, dos son asíntotas y el resto son diámetros. El origen de la referencia es el centro de la cónica y los ejes son dos diámetros conjugados.
- *Par de rectas no paralelas:* $x^2 - y^2 = 0$. El centro es la intersección de las dos rectas, las asíntotas son las dos rectas, y los diámetros son las rectas que pasan por el centro distintas de las del lugar de la cónica. El origen de la referencia es el centro de la cónica y los ejes son dos diámetros conjugados.
- *Par de rectas imaginarias no paralelas:* $x^2 + y^2 = 0$. El centro es la intersección de las dos rectas, y todas las rectas que pasan por el centro son diámetros (no hay asíntotas). El origen de la referencia es el centro de la cónica y los ejes son dos diámetros conjugados.

(c) Cónicas con una recta de centros.

- *Par de rectas paralelas:* $x^2 = 1$. La recta de centros es $x = 0$. Toda recta afín no paralela a $x = 0$ es diámetro. El origen de la referencia es un punto afín de $x = 0$, y el eje $y = 0$ es una recta afín que pasa por el origen y es distinta de la recta de centros.
- *Par de rectas imaginarias paralelas:* $x^2 = -1$. La recta de centros es $x = 0$. Los diámetros son todas las rectas afines no paralelas a $x = 0$. El origen de la referencia es un punto afín de $x = 0$, y el eje $y = 0$ es una recta (distinta de $x = 0$) que pasa por el origen.
- *Recta doble:* $x^2 = 0$. La recta de centros es $x = 0$. Toda recta afín no paralela a $x = 0$ es diámetro. El origen de la referencia es un punto afín de $x = 0$, y el eje $y = 0$ es una recta afín (distinta de $x = 0$) que pasa por el origen.

(d) Para la cónica que en coordenadas homogéneas tiene por ecuación $x_0^2 = 0$ (en cuyo lugar no hay puntos afines), todo punto afín es centro, toda recta afín es diámetro, y en cualquier referencia afín su ecuación en coordenadas homogéneas es $x_0^2 = 0$.

Ejercicio 5.4 A continuación damos la lista de todas las cuádricas del espacio proyectivo real de dimensión 3, agrupadas según la dimensión de su variedad de centros. Dígase en cada caso si hay ó no hay asíntotas, y cómo es un sistema de referencia afín respecto del cual se obtiene la ecuación reducida.

(a) Cuádricas sin centro:
• *Paraboloide reglado:* $z = x^2 - y^2$. • *Paraboloide no reglado:* $z = x^2 + y^2$.
• *Cilindro parabólico:* $y = x^2$. • *Un plano:* $x = 0$.

(b) Cuádricas con un único centro:
• *Elipse real:* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. • *Elipse imaginaria:* $x^2 + y^2 + z^2 = -1$.
• *Hiperboloide reglado:* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. • *Hiperboloide no reglado:* $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.
• *Cono real:* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. • *Cono imaginario:* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

(c) Cuádricas con una recta de centros:
• *Cilindro hiperbólico:* $x^2 - y^2 = 1$. • *Cilindro elíptico:* $x^2 + y^2 = 1$.
• *Cilindro imaginario:* $x^2 + y^2 = -1$. • *Par de planos no paralelos:* $x^2 - y^2 = 0$.
• *Par de planos imaginarios no paralelos:* $x^2 + y^2 = 0$.

(d) Cuádricas con un plano de centros:
• *Par de planos paralelos:* $x^2 = 1$. • *Par de planos imaginarios paralelos:* $x^2 = -1$.
• *Plano doble:* $x^2 = 0$.

6 Problemas

En todos los problemas enunciados a continuación, el cuerpo base será $\mathbb{R}$.

6.1 Hágase la clasificación afín de las cónicas (a), (b) y de las cuádricas (c), (d):
(a) $3x^2 - 5xy + y^2 - x + 2y - 1 = 0\,;$
(b) $x^2 + 25y^2 - 10xy + 6x - 30y = 0\,;$
(c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 1 = 0\,;$
(d) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 + xy - xz + 5x - 3y - 1 = 0\,.$

6.2 Hágase la clasificación afín (según el valor del parámetro m) de la cuádrica

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 2m^2 - 3m + 1\,.$$

6.3 Hállese la ecuación de la cuádrica cuyo corte con el plano $x = 0$ es la cónica $yz - 2y + z = 0$, que contiene la recta $y = 0 = z$ y la recta del infinito del plano $y = 0$, y que pasa por el punto $(1, -1, 0)$.

6.4 Dada la parábola cuya ecuación en un sistema de referencia afín $(O; v_1, v_2)$ es $x^2 + y^2 + 2xy - 2y - 1 = 0$, hállese otro sistema de referencia afín en el cual la ecuación de dicha parábola sea $\bar{y} = \bar{x}^2$.

6.5 Dada la hipérbola cuya ecuación en un sistema de referencia afín $(O; v_1, v_2)$ es $x^2 + y^2 + 4xy - 2y = 0$, hállese otro sistema de referencia afín en el cual la ecuación de dicha hipérbola sea $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$. Encuéntrese también un tercer sistema de referencia en el que la ecuación de la hipérbola sea $\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}} = 1$.

6.6 Dada la elipse cuya ecuación en un sistema de referencia afín $(O; v_1, v_2)$ es $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, hállese otro sistema de referencia afín en el cual la ecuación de dicha elipse sea $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$.

6.7 Clasifíquese la cuádrica de ecuación $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 2x - 4y - 2z = 5$, y obténgase un sistema de referencia afín en la que se obtenga su ecuación reducida. Hágase lo mismo con las cuádricas $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y = -2$ y $4xz + y^2 + 1 = 0$.

6.8 El lugar geométrico de las centros de las cónicas del haz

$$x^2 + 4axy + 4y^2 - 2ax + 4y = 3\,, \qquad (a \in \mathbb{R})$$

forman una hipérbola. Calcúlense las asíntotas de las cónicas del haz.

6.9 Hállese el cilindro circunscrito a la cuádrica $2x^2 + 3y^2 - 2z = 0$ y cuyas generatrices son paralelas a la recta $x = y = 2z - 1$.

6.10 Calcúlese la cuádrica que corta al plano $z = 0$ en la cónica $x^2 + y^2 - xy + 2x = 1$, pasa por los puntos $(0, -1, 2)$ y $(2, 0, 3)$, y es tangente al eje z en el punto $(0, 0, 1)$.

6.11 Determínese los planos tangentes a la cuádrica $2x^2 + 3y^2 = 2z$ que pasan por la recta

$$\left.\begin{array}{r} 2y - 1 = 0 \\ 2x + 6y - z - 4 = 0 \end{array}\right\} .$$

6.12 Hállese una cuádrica que pase por las tres siguientes rectas:

$$\begin{gathered} x + y = y + 1 = (-z - 1)/2\,, \\ x - 1 = (y - 1)/2 = (1 - z)/3\,, \\ (x - 2)/2 = y - 2 = (2 - 1)/3\,. \end{gathered}$$

6.13 Al cortar la cuádrica $6xz - 3x + 2yz + y + 3z^2 - 4z + 3 = 0$ con los dos planos paralelos $x + y + 2z = 0,\ x + y + 2z = 1$ se obtienen dos cónicas homotéticas. Hállense los centros de las homotecias que transforman una de dichas cónicas en la otra.

Qué ocurre si cortamos los mismos planos con la cuádrica $4x^2 + 3y^2 - 12z^2 = 1$?

6.14 Redúzcase el cálculo de las raíces del polinomio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ al cálculo de las raíces de un polinomio de grado 3.

6.15 Dado un punto P de una elipse $\mathcal{C}$, demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos PX, donde X recorre $\mathcal{C}$, es una elipse tangente a $\mathcal{C}$ en P.

Calcúlese dicho lugar cuando $\mathcal{C}$ es $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ y $P = (2, 1)$.

6.16 Las rectas paralelas a las de un hiperboloide reglado trazadas desde un punto cualquiera del espacio forman un cono.

6.17 Sea $\mathcal{C}$ el lugar de una cuádrica no singular reglada de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Tenemos:

(a) Por cada punto P de $\mathcal{C}$ pasan exactamente dos rectas contenidas en $\mathcal{C}$. Dichas rectas son el corte con $\mathcal{C}$ del plano tangente a $\mathcal{C}$ en P.

(b) En el conjunto de las rectas contenidas en $\mathcal{C}$ se define la relación: $r_1, r_2 \subseteq \mathcal{C}$,

$$r_1 \sim r_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} r_1 = r_2\,, \\ \text{ó} \\ r_1 \cap r_2 = \emptyset\,. \end{array}\right.$$

La relación "$\sim$" es de equivalencia y para ella hay exactamente 2 clases de equivalencia.

6.18 Determínense las dos rectas que pasan por el punto $(1, 1, 1)$ y que están contenidas en el hiperboloide reglado $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$. Determínense también las dos rectas que pasan por el punto $(1, 1, 0)$ y que están contenidas en el paraboloide reglado $x^2 - y^2 + z = 0$.

6.19 Si r_1, r_2, r_3 son tres rectas de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ que se cruzan, entonces hay una única cuádrica en $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ que pasa por esas rectas. El lugar de dicha cuádrica, que es no singular y reglada, es la unión de las rectas que se apoyan a la vez en r_1, r_2 y r_3. Así se describe toda cuádrica no singular reglada de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

6.20 En el espacio afín $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$, dadas tres rectas que se cruzan y son paralelas a un plano, la superficie engendrada por una recta que se mueve apoyándose sobre las tres rectas dadas es un paraboloide reglado. Puede generarse de este modo todo paraboloide reglado?

6.21 Demuéstrese que las cuerdas [1] de una elipse cuyo punto medio yace sobre una recta fija (que no es diámetro) envuelven una parábola.

6.22 Las diagonales de un paralelogramo circunscrito a una elipse (o una hipérbola) son diámetros conjugados de la misma.

6.23 Dado un cuadrivértice completo en un plano afín, los puntos medios de sus seis lados yacen sobre una cónica que pasa por los tres puntos diagonales.

6.24 Sea P un punto de una cónica central $\mathcal{C}$, y sea d un diámetro de $\mathcal{C}$ que no pasa por P y que corta a $\mathcal{C}$ en puntos distintos Q_1 y Q_2. Las rectas $P+Q_1$ y $P+Q_2$ son paralelas a diámetros conjugados.

6.25 Sea d un diámetro de una cónica central y sea d' el diámetro conjugado de d. Toda cuerda de la cónica paralela a d' es cortada por d en su punto medio.

6.26 Fijada una recta r y una parábola, existe un diámetro de la parábola tal que los puntos medios de las cuerdas de la parábola que son paralelas a r yacen sobre dicho diámetro.

6.27 Dada una cónica afín no singular cuya ecuación en una referencia afín $(P_0; v_1, v_2)$ es $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(dx + fy) + e = 0$, denotemos $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

(a) Cuando $\Delta = 0$ la cónica es una parábola y su punto del infinito es la dirección que define el vector $bv_1 - av_2$.

(b) Cuando $\Delta \neq 0$ la cónica es central y su centro es el punto cuyas coodenadas afines son la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = -d \\ bx + cy = -f \end{array}\right\}.$$

[1]La noción de cuerda debe entenderse en sentido general, esto es, una cuerda puede cortar a la cónica en dos puntos imaginarios conjugados.