Capítulo X

Clasificación Euclídea de las Cuádricas

Fijemos en todo este capítulo un espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}, V, \langle\Omega_2\rangle)$ de dimensión n y una métrica euclídea Ω_2 representante del absoluto. Las bases asociadas a las referencias euclídeas que consideremos serán ortonormales respecto de Ω_2.

Denotaremos por E la extensión vectorial de $\mathbb{A}$, de modo que cualquiera que sea el punto $P \in \mathbb{A}$ tenemos

$$E = \langle P \rangle \oplus V \,, \qquad\qquad \mathbb{A} = P + V$$

(véase la sección III.5); además $\mathbb{A} = (\mathbb{P}(E), \pi(V))$ (véase la sección III.6).

Si $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es una referencia euclídea del espacio afín entonces $\{P_0, v_1, \dots, v_n\}$ es una base de E y por lo tanto en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ tenemos la referencia proyectiva

$$P_0 = \pi(P_0)\,, \quad P_1 = \pi(v_1)\,, \quad \dots, \quad P_n = \pi(v_n)\,, \quad U = \pi(P_0 + v_1 + \cdots + v_n)\,,$$

en la que la ecuación del hiperplano del infinito $\pi(V)$ de $\mathbb{A}$ es $x_0 = 0$. Si $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas homogéneas de un punto $P \in \mathbb{A}$ respecto de la referencia proyectiva, entonces $x_0 \neq 0$ y las coordenadas euclídeas de P respecto de la referencia euclídea son $(y_1, \dots, y_n)$, donde

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0}\,, \quad \dots, \quad y_n = \frac{x_n}{x_0}\,.$$

Para terminar este preámbulo recordemos que una cuádrica en $\mathbb{A}$ es, por definición, una cuádrica en $\mathbb{P}(E)$.

1 Clasificación

Definición 1.1 Diremos que dos cuádrica de $\mathbb{A}$ son *euclídeamente equivalentes* si existe un movimiento de $\mathbb{A}$ que transforma una de ellas en la otra (véase VIII.3.2).

1.2 Sean $\langle T_2 \rangle$ y $\langle \bar{T}_2 \rangle$ cuádricas sobre $\mathbb{A}$ y sea $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad. Considerando σ como una autoproyectividad de $\mathbb{P}(E)$ que deja invariante la parte afín de $\mathbb{A}$, un representante lineal de σ es su extensión lineal $\widehat{\sigma}$ (véanse el teorema III.5.5 y el teorema III.6.2 con su demostración), de modo que σ transforma la cuádrica $\langle T_2\rangle$ en la cuádrica $\langle \bar{T}_2\rangle$ si y sólo si existe un escalar no nulo α tal que

$$\bar{T}_2(\widehat{\sigma}(e_1), \widehat{\sigma}(e_2)) = \alpha\, T_2(e_1, e_2)$$

cualesquiera que sean $e_1, e_2 \in E$.

Nota **1.3** Dadas en $\mathbb{A}$ una cuádrica $\langle T_2\rangle$ y una referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$, como T_2 es una métrica sobre E y $\{P_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de E tenemos la matriz de T_2 en la base $\{P_0, v_1, \ldots, v_n\}$; a dicha matriz nos referiremos como la matriz de T_2 en la referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$.

Lema 1.4 *Dos cuádricas $\langle T_2\rangle$ y $\langle \bar{T}_2\rangle$ sobre $\mathbb{A}$ son equivalentes, si y sólo si, existen dos referencias euclídeas en $\mathbb{A}$ tales que la matriz de T_2 en una de ellas es proporcional a la matriz de $\bar{T}_2$ en la otra.*

Demostración. Supongamos que existen referencias euclídeas $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ y $(\bar{P}_0; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ en $\mathbb{A}$ tales que, si $A = (a_{ij})$ es la matriz de T_2 en $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ y $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ es la matriz de $\bar{T}_2$ en $(\bar{P}_0; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$, entonces $\bar{A} = \alpha A$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Denotemos por comodidad $P_0 = v_0$ y $\bar{P}_0 = \bar{v}_0$, de modo que $T_2(v_i, v_j) = a_{ij}$ y $\bar{T}_2(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = \bar{a}_{ij}$ cualesquiera que sean $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sea $\vec{\tau} : V \to V$ la única aplicación lineal que manda la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a la base $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$, y sea $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la única aplicación afín que manda P_0 a $\bar{P}_0$ y cuya aplicación lineal asociada es $\vec{\tau}$; τ es un movimiento porque $\vec{\tau}$ es una isometría (manda una base ortonormal a una base ortonormal). Como la extensión lineal de τ es el único isomorfismo $\widehat{\tau} : E \to E$ que manda la base $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ a la base $\{\bar{v}_0, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$, dados $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tenemos

$$\bar{T}_2(\widehat{\tau}(v_i), \widehat{\tau}(v_j)) = \bar{T}_2(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = \bar{a}_{ij} = \alpha a_{ij} = \alpha\, T_2(v_i, v_j)\,,$$

y por lo tanto $\bar{T}_2(\widehat{\sigma}(e_1), \widehat{\sigma}(e_2)) = \alpha\, T_2(e_1, e_2)$ cualesquiera que sean $e_1, e_2 \in E$.

Para demostrar la otra implicación basta invertir el razonamiento anterior. ∎

1.5 Fijemos para lo que resta de capítulo una cuádrica $\langle T_2\rangle$ en $\mathbb{A}$ (cuádrica en $\mathbb{P}(E)$) y un representante suyo T_2 (métrica simétrica sobre E), de modo que sobre V tenemos dos métricas simétricas: $T_{2|_V}$ y Ω_2. Según el lema VII.4.1, existe un único endomorfismo $T : V \to V$ para el que se cumple $T_2(v, v') = \Omega_2(T(v), v')$ $(v, v' \in V)$. Además tenemos (véanse VII.4.4 y VII.4.5): existe una base en V que es ortonormal para Ω_2, ortogonal para $T_{2|_V}$, y en la que T diagonaliza; más concretamente, existe una base en V respecto de la cual

$$\text{matriz de } \Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{matriz de } T_{2|_V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{matriz de } T\,.$$

Por lo tanto tenemos un invariante de la métrica T_2: la colección $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de las raíces del polinomio característico de T (cada una repetida tantas veces como indique su multiplicidad).

En lugar del representante T_2 podríamos haber tomado el representante λT_2 ($\lambda \in \mathbb{R}^*$); es claro que el endomorfismo asociado a $(\lambda T_2)_{|V}$ es λT, y que las raíces del polinomio característico de λT son $\{\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_n\}$. Es decir, la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ tiene asociada unívocamente (salvo un $\lambda \neq 0$) una colección $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de números reales; dicha colección son las raíces del polinomio característico del endomorfismo asociado a un representante cualquiera de la cuádrica.

Veremos en la siguiente sección que estos nuevos "invariantes" de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$, junto con su rango, permiten obtener salvo un factor de proporcionalidad la matriz de T_2 en una referencia euclídea de $\mathbb{A}$. Como consecuencia, aplicando el lema 1.4 obtenemos que los invariantes mencionados clasifican euclídeamenta las cuádricas.

2 Ecuaciones Reducidas

Además de la notación introducida en 1.5, denotemos por r el rango de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ y por r' el rango de la cuádrica restringida $\langle T_{2|V} \rangle$. En la colección $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ hay exactamente r' números reales no nulos, que por comodidad en la notación supondremos que son los primeros: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}, 0, \dots, 0\}$, $\lambda_i \neq 0$. Estamos estudiando la clasificación de las cuádricas respecto de los movimientos, y como los movimientos son afinidades concluimos que si dos cuádricas son euclídeamente equivalentes entonces son afínmente equivalentes. Como consecuencia, si dos cuádricas son euclídeamente equivalentes sus posiciones relativas respecto del hiperplano del infinito son la misma. Recordemos que fuera de la situación trivial $(r, r') = (1, 0)$ distinguíamos tres casos (véase la sección VIII.2):

- el hiperplano del infinito no contiene al vértice de la cuádrica ($r' = r$);
- el hiperplano del infinito contiene al vértice de la cuádrica pero no es tangente a ella ($r' = r-1$);
- el hiperplano del infinito contiene al vértice de la cuádrica y es tangente a ella ($r' = r - 2$).

Construyamos en cada una de las situacines posibles la referencia euclídea respecto de la que obtener la ecuación reducida de $\langle T_2 \rangle$.

2.1 Caso I: $r' = r$. Como origen escogemos un punto afín P_0 fuera del vértice de la cuádrica (existe por hipótesis), y como base ortonormal de V escogemos aquella en la cual diagonaliza T, llamémosla $\{v_1, \dots, v_n\}$. La referencia euclídea $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es tal que la matriz de T_2 en ella es

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \cdot & & \ddots & & & & \\ \cdot & & & \lambda_r & & & \\ \cdot & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right),$$

por lo que la ecuación de la cuádrica en coordenadas homogéneas es

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0\,,$$

y la ecuación reducida de la cuádrica en coordenadas euclídeas es

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0\,.$$

Ejemplo 2.2 En un plano afín euclídeo con una referencia euclídea fijada $(P_0; v_1, v_2)$, estudiemos la cónica de ecuación $4x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x + 2y = 0$. Homogeneizando con una tercera coordenada z, la ecuación de la cónica en coordenadas homogéneas es $4x^2 - 2xy - 2y^2 - 2xz + 2yz = 0$, de modo que un representante métrico T_2 suyo tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es $r = 2$. La matriz del endomorfismo asociado T es [1]

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es $r' = 2$. Por tanto estamos en el caso I. Diagonalizando la matriz anterior obtenemos que los valores propios del endomorfismo T son $\lambda_1 = 1 + \sqrt{10}$ y $\lambda_2 = 1 - \sqrt{10}$, y que una base de V formada por vectores propios es $\{v_1 + (3 - \sqrt{10})v_2, v_1 + (3 + \sqrt{10})v_2\}$, que es ortogonal. Dividiendo cada uno de los vectores anteriores por su módulo obtenemos la base ortonormal

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (3 - \sqrt{10})^2}} \left(v_1 + \left(3 - \sqrt{10}\right) v_2 \right),\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (3 + \sqrt{10})^2}} \left(v_1 + \left(3 + \sqrt{10}\right) v_2 \right) \right\}.$$

Calculando la subvariedad lineal vértice de la cónica se llega a que dicho vértice es el punto $Q_0 = (1, 1, 3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$, de modo que en coordenadas euclídeas tenemos $Q_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En la referencia euclídea $(Q_0; u_1, u_2)$ construida se obtiene la ecuación reducida de la cónica, que es

$$(1 + \sqrt{10})\bar{x}^2 + (1 - \sqrt{10})\bar{y}^2 = 0\,.$$

Se trata de un par de rectas reales no paralelas, y utilizando la notación de la tabla de la página 177 podemos escribir su ecuación como

$$\bar{x}^2 - \lambda \bar{y}^2 = 0\,, \qquad\qquad 0 < \lambda = \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10} + 1} \leq 1\,.$$

Observación **2.3** Para un par de rectas reales no paralelas de un plano afín euclídeo, la teoría desarrollada en el caso I nos dice cómo calcular sus bisectrices: dichas bisectrices son los ejes de la referencia euclídea donde se obtiene la ecuación reducida del par de rectas.

2.4 Caso II: $r' = r - 1$. Debe ser $r \geq 2$ porque $(r, r') \neq (1, 0)$. Recordemos que en este caso tenemos $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E}$ y $V = \operatorname{rad} E \perp \bar{V}$, donde $\bar{V}$ y $\bar{E}$ son no singulares y $\bar{V}$ es un hiperplano de $\bar{E}$ (todo ello respecto de la métrica T_2; véase el lema VIII.2.3).

[1] OJO, en la teoría quitábamos la primera fila y la primera columna porque se homogeneizaba con la primera coordenada (la x_0), pero aquí debemos quitar la última fila y la última columna. Por el mismo motivo, cuando aquí veamos la referencia euclídea $(P_0; v_1, v_2)$ como una base de la extensión vectorial E del espacio afín deberemos ordenarla poniendo P_0 al final: $\{v_1, v_2, P_0\}$ (véanse los ejemplos 2.5 y 2.7 siguientes); es decir, en coordenadas homogéneas, un punto es del infinito si y sólo si tiene nula su última coordenada (no la primera como ocurría en el desarrollo de la teoría).

Como origen escogemos un punto afín P_0 que sea centro de la cuádrica (véanse las definiciones VIII.5.1). Veamos que en este caso la subvariedad lineal de centros $\pi(V^\perp)$ es afín, es decir, que dicha subvariedad no está contenida en el hiperplano del infinito (esto es, que el subespacio $V^\perp$ no está contenido en V): como $\bar{V}$ es un hiperplano no singular de $\bar{E}$ y $\bar{E}$ es no singular, existe $e_0 \in \bar{E}$ tal que $\bar{E} = \bar{V} \perp \langle e_0 \rangle$ y por lo tanto $E = \operatorname{rad} E \perp \bar{E} = \operatorname{rad} E \perp \bar{V} \perp \langle e_0 \rangle = V \perp \langle e_0 \rangle$, de modo que $e_0 \in V^\perp$ y $e_0 \notin V$.

La subvariedad afín de centros $\pi(V^\perp) \cap \mathbb{A} = V^\perp \cap \mathbb{A}$ tiene por dirección el subespacio $V^\perp \cap V = \operatorname{rad} V$, de modo que si fijamos un centro afín P_0, entonces dicha variedad de centros es $P_0 + \operatorname{rad} V$ (véase el lema III.6.6 y su demostración). Como $P_0 \in V^\perp$, si fuera $T_2(P_0, P_0) = 0$ tendríamos que P_0 es ortogonal a $E = V \perp \langle P_0 \rangle$, es decir, $P_0 \in \operatorname{rad} E = \operatorname{rad} V \subseteq V$, lo cual no puede ocurrir porque V no contiene puntos afines. Así pues $T_2(P_0, P_0) \neq 0$, y modificando T_2 convenientemente podemos suponer que $T_2(P_0, P_0) = -1$. Si $\bar{P}_0$ es otro centro afín, entonces existe $v \in \operatorname{rad} V$ tal que $\bar{P}_0 = P_0 + v$ y tenemos

$$T_2(\bar{P}_0, \bar{P}_0) = T_2(P_0 + v, P_0 + v) = T_2(P_0, P_0) = -1\,.$$

Por lo tanto, en este caso hemos determinado unívocamente el representante métrico de la cuádrica $\langle T_2 \rangle$: dicho representante es aquel que vale -1 sobre los centros; en particular, en este caso la colección $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}\}$ está unívocamente determinada.

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V en la que diagonaliza el endomorfismo asociado a la métrica fijada como representante, entonces $(P_0; v_1, \dots, v_n)$ es una referencia euclídea tal que la matriz de T_2 en ella es

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \cdot & & \ddots & & & & \\ \cdot & & & \lambda_{r-1} & & & \\ \cdot & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right),$$

por lo que la ecuación de la cuádrica en coordenadas homogéneas es

$$-x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_{r-1} x_{r-1}^2 = 0\,,$$

y la ecuación reducida de la cuádrica en coordenadas euclídeas es

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{r-1} y_{r-1}^2 = 1\,.$$

• Cuando $\langle T_2 \rangle$ es una cuádrica central (caso II no singular, véanse las definiciones VIII.5.1), los valores positivos $a_i = \sqrt{1/|\lambda_i|}$, $i = 1, \dots, n$, se denominan *semiejes de la cuádrica*, y es usual escribir la ecuación reducida en la forma

$$\pm \frac{y_1^2}{a_1^2} \pm \cdots \pm \frac{y_n^2}{a_n^2} = 1\,,$$

donde el signo del sumando i-ésimo es el signo de λ_i. La cuádrica tiene un único centro P_0 (= origen de la referencia euclídea donde se obtiene la ecuación reducida), y cada recta $P_0 + \langle v_i \rangle$

se denomina *eje de la cuádrica* correspodiente al semieje a_i. Los puntos de corte de los ejes con la cuádrica se llaman *vértices de la cuádrica* (no confundirlos con la noción de "vértice" de una cuádrica singular). Nótese que los ejes de la cuádrica coinciden con los ejes de la referencia euclídea donde se obtiene la ecuación reducida.

Ejemplo 2.5 Estudiemos la cuádrica euclídea $\langle T_2 \rangle$ cuya ecuación en una referencia euclídea fijada $(P_0; v_1, v_2, v_3)$ es $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$. Homogeneizando con una cuarta coordenada t obtenemos que la ecuación de $\langle T_2 \rangle$ en coordenadas homogéneas es $x^2 - 2xy + y^2 - 4xt + 4yt + t^2 = 0$, de modo que podemos suponer que la matriz de la métrica T_2 es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es $r = 2$. Entonces el endomorfismo asociado T tiene por matriz a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es $r' = 1$. Estamos en el caso II. Diagonalizando la matriz B obtenemos que los valores propios de T son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, y que una base de V formada por vectores propios es $\{v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_3\}$, de la que obtenemos la base ortonormal

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)\,,\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)\,,\ u_3 = v_3 \right\}.$$

Para obtener la variedad de centros debemos calcular, dentro de la extensión vectorial E, el ortogoal respecto de T_2 del subespacio $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. En la base $\{v_1, v_2, v_3, P_0\}$ de E tenemos $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, por lo que la ecuación de los vectores que son ortogonales a v_1 es

$$(x, y, z, t)\, A\, (1, 0, 0, 0)^t = 0\,.$$

Haciendo lo mismo para los vectores v_2 y v_3 llegamos a que las ecuaciones de $V^\perp$ se reducen a $x - y - 2t = 0$, que es también la ecuación homogénea de la variedad de centros $\pi(V^\perp)$. Por lo tanto la variedad afín de centros es el plano afín cuya ecuación euclídea es $x - y = 2$. Si tomamos, por ejemplo, el centro afín $Q_0 = (2, 0, 0)$ (en coordenadas euclídeas), entonces la ecuación reducida de la cuádrica que estamos estudiando se obtiene en la referencia euclídea $(Q_0; u_1, u_2, u_3)$. Como vector de E que se representa a sí mismo, en la base $\{v_1, v_2, v_3, P_0\}$ tenemos $Q_0 = (2, 0, 0, 1)$ y por lo tanto

$$T_2(Q_0, Q_0) = (2, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\,.$$

Según la teoría, el representante métrico de la cuádrica que debemos considerar es

$$\frac{-1}{T_2(Q_0, Q_0)} \cdot T_2 = \frac{1}{3} \cdot T_2\,,$$

de modo que los valores propios que aparecerán en la ecuación reducida son los de la matriz $\frac{1}{3}B$, esto es, $\mu_1 = \frac{1}{3}\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\mu_2 = \frac{1}{3}\lambda_2 = 0$ y $\mu_3 = \frac{1}{3}\lambda_3 = 0$. Por lo tanto la ecuación reducida de la cuádrica es (compárese con la correspondiente ecuación de la tabla de la página 178)

$$\frac{2}{3}\bar{x}^2 = 1\,.$$

Se trata de un par de planos reales paralelos.

2.6 Caso III: $r' = r - 2$. Según el lema VIII.2.3 tenemos ahora las siguientes condiciones: $\operatorname{rad} E \subset \operatorname{rad} V$ y $\dim(\operatorname{rad} V) = \dim(\operatorname{rad} E) + 1$, es decir, $\operatorname{rad} E$ es un hiperplano de $\operatorname{rad} V$.

• Supongamos en primer lugar que la cuádrica $\langle T_2\rangle$ es no singular y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V en la que diagonaliza el endomorfismo T. Como estamos suponiendo que $\operatorname{rad} E = 0$ debe ser $\dim(\operatorname{rad} V) = 1$, es decir, hay exactamente un λ_i igual a cero. Supongamos por comodidad en la notación que es $\lambda_1 = 0$ (esto es, $\operatorname{rad} V = \langle v_1\rangle$), y empecemos ya a construir la referencia euclídea respecto de la cual la ecuación de la cuádrica sea lo más sencilla posible. Nótese que $V = \langle v_1\rangle \perp \langle v_2, \ldots, v_n\rangle$, siendo $\langle v_2, \ldots, v_n\rangle$ la parte no singular de V.

Denotemos $P_1 = \pi(v_1)$. El punto P_1 pertenece a la cuádrica (porque v_1 es un vector isótropo) y pertenece al hiperplano del infinito (porque $v_1 \in V$). Por ser T_2 no singular tenemos $\dim\langle v_1\rangle^\perp = \dim E - \dim\langle v_1\rangle = \dim V$, y por ser $\operatorname{rad} V = \langle v_1\rangle$ se cumple $V \subseteq \langle v_1\rangle^\perp$; por lo tanto $V = \langle v_1\rangle^\perp$. En otras palabras, la cuádrica es un paraboloide que es tangente al hiperplano del infinito en el punto P_1 (véanse las definiciones VIII.5.1).

Por otra parte, como $\langle v_2, \ldots, v_n\rangle$ es un subespacio no singular de E de dimensión $n-1$ tenemos que $\langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp$ es un subespacio no singular de E de dimensión 2 tal que

$$E = \langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp \perp \langle v_2, \ldots, v_n\rangle\,.$$

Consideremos en $\mathbb{P}(E)$ la recta $X = \pi(\langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp)$; nótese que $P_1 \in X$ porque $v_1 \in \langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp$. La cuádrica restringida a X es no singular (porque el subespacio $\langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp$ es no singular), por lo que, ó X no corta a la cuádrica, ó X corta a la cuádrica en dos puntos distintos. Como $P_1 \in X$ debe existir $P_0 \in X$, $P_0 \neq P_1$, tal que P_0 pertenece a la cuádrica. Además P_0 es un punto afín porque el único punto del infinito de X es P_1. En efecto, como $V \cap \langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp = \langle v_1\rangle^\perp \cap \langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp = (\langle v_1\rangle + \langle v_2, \ldots, v_n\rangle)^\perp = V^\perp = \langle v_1\rangle$ tenemos

$$X \cap \pi(V) = \pi(\langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp \cap V) = \pi(\langle v_1\rangle) = P_1\,.$$

Consideremos la referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ y calculemos la matriz de T_2 en ella. Tenemos $T_2(P_0, P_0) = 0$ (porque P_0 es un punto de la cuádrica) y $T_2(P_0, v_i) = 0$ para $i = 2, \ldots, n$ (porque $P_0 \in \langle v_2, \ldots, v_n\rangle^\perp$). Si fuera $T_2(P_0, v_1) = 0$ entonces $P_0 \in \langle P_0, v_1, \ldots, v_n\rangle^\perp = E^\perp = 0$, lo cual es absurdo; por lo tanto debe ser $T_2(P_0, v_1) \neq 0$. Tomemos el representante T_2 de la cuádrica de manera que $T_2(P_0, v_1) = -\frac{1}{2}$; dicho representante está totalmente determinado salvo el signo, y dicho signo depende de que como vector unitario generador de $\operatorname{rad} V$ tomemos v_1 o $-v_1$. La matriz de T_2 en la referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ es

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & & & \\ 0 & & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{array}\right),$$

por lo que la ecuación de la cuádrica en coordenadas homogéneas es

$$-x_0x_1 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 0\,,$$

y la ecuación reducida de la cuádrica en coordenadas euclídeas es

$$y_1 = \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\,.$$

La recta X se denomina *eje de la cuádrica* y el punto P_0 se llama *vértice de la cuádrica* (no confundirlo con el vértice de una cuádrica singular). Recordemos que en este caso la cuádrica es un paraboloide y que sus diámetros son las rectas afines cuya dirección es $\langle v_1\rangle$ (las rectas afines que tienen a P_1 como punto del infinito); en particular X es un diámetro. Calculemos el hiperplano tangente a la cuádrica en su vértice, es decir, en el punto P_0: teniendo en cuenta cómo es la matriz de T_2 en la base $\{P_0, v_1, \dots, v_n\}$ y que las coordenadas homogéneas de P_0 en la referencia proyectiva asociada a dicha base son $(1, 0, \dots, 0)$, se sigue que la ecuación del hiperplano polar de P_0 es $x_1 = 0$, que es el hiperplano afín que en coordenadas euclídeas tiene por ecuación $y_1 = 0$. Concluyendo, el hiperplano tangente a la cuádrica en P_0 es $P_0 + \langle v_2, \dots, v_n\rangle$, que es el hiperplano que pasa por P_0 y es perpendicular a $X = P_0 + \langle v_1\rangle$.

Compruébese como ejercicio que la anterior propiedad caracteriza al eje del paraboloide: Sea Y un diámetro del paraboloide y sea Q el único punto afín que Y tiene en común con el paraboloide; si el hiperplano tangente a la cuádrica en Q es perpendicular a Y, entonces $Y = X$ (y por tanto $Q = P_0$).

• Hemos estudiado con detalle el caso III cuando la cuádrica es no singular, es decir, cuando $r = n+1$. El caso general puede reducirse fácilmente al caso no singular, probándose que existe una referencia euclídea y un representante métrico de la cuádrica (único salvo el signo) tales que la matriz de dicha métrica en dicha referencia es

$$\left(\begin{array}{c|cccccc}
0 & -\frac{1}{2} & . & . & . & & 0 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 0 & & & & & \\
0 & & \lambda_2 & & & & \\
. & & & \ddots & & & \\
. & & & & \lambda_{r-1} & & \\
. & & & & & 0 & \\
. & & & & & & \ddots \\
0 & & & & & & 0
\end{array}\right),$$

por lo que la ecuación de la cuádrica en coordenadas homogéneas es

$$-x_0x_1 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_{r-1} x_{r-1}^2 = 0\,,$$

y la ecuación reducida de la cuádrica en coordenadas euclídeas es

$$y_1 = \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_{r-1} y_{r-1}^2\,.$$

Ejemplo 2.7 En un espacio afín euclídeo con una referencia euclídea $(P_0; v_1, v_2, v_3)$ fijada, estudiemos la cuádrica de ecuación $x^2 + 4xy + 2y^2 + 4z + 3 = 0$. Homogeneizando obtenemos que su ecuación en coordenadas homogéneas es $x^2 + 4xy + 2y^2 + 4zt + 3t^2 = 0$, de modo que un representante métrico T_2 de la cuádrica tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es $r = 4$. Entonces el endomorfismo T tiene por matriz a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es $r' = 2$. Por lo tanto estamos en el caso III no singular, esto es, se trata de un paraboloide. Diagonalizando la matriz B obtenemos que los valores propios de T son

$$\lambda_1 = 0\,, \qquad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}\,,$$

y que una base de V formada por vectores propios es $\{v_3, 4v_1 + (1+\sqrt{17})v_2, 4v_1 + (1-\sqrt{17})v_2\}$. De la anterior obtenemos la base ortonormal

$$\left\{u_1 = v_3\,,\ u_2 = \alpha\left(4v_1 + (1+\sqrt{17})v_2\right)\,,\ u_3 = \beta\left(4v_1 + (1-\sqrt{17})v_2\right)\right\},$$

donde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{16+(1+\sqrt{17})^2}}$ y $\beta = \frac{1}{\sqrt{16+(1-\sqrt{17})^2}}$. El eje del paraboloide es la proyectivización del subespacio $\langle u_2, u_3\rangle^{\perp}$. Como aquí es $\langle u_2, u_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, un sencillo cálculo nos lleva a que dicho eje es la recta afín X cuyas ecuaciones euclídeas son $x = 0$, $y = 0$. El vértice del paraboloide es el único punto afín Q_0 en el que la recta X corta al paraboloide, por lo que las ecuaciones euclídeas de Q_0 son

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ 4z + 3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

es decir, $Q_0 = (0, 0, \frac{-3}{4})$. En la referencia euclídea $(Q_0; u_1, u_2, u_3)$ que hemos construido se obtiene la ecuación reducida del paraboliode. Siguiendo con la teoría, como

$$T_2(Q_0, u_1) = \left(0, 0, \frac{-3}{4}, 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

tenemos que el representante métrico de la cuádrica que debemos considerar es

$$\frac{-1}{2T_2(Q_0, u_1)} \cdot T_2 = \frac{-1}{4} \cdot T_2\,,$$

de modo que los valores propios que aparecerán en la ecuación reducida son los de la matriz $\frac{-1}{4}B$, que son $\mu_1 = \frac{-1}{4}\lambda_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{-1}{4}\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}+3}{8}$ y $\mu_3 = \frac{-1}{4}\lambda_3 = \frac{\sqrt{17}-3}{8}$. Por tanto la ecuación reducida de la cuádrica es

$$\bar{x} = -\frac{\sqrt{17}+3}{8}\bar{y}^2 + \frac{\sqrt{17}-3}{8}\bar{z}^2$$

(compárese con la correspondiente ecuación de la tabla de la página 179).

Veamos una tabla-resumen con las ecuaciones reducidas obtenidas:

Ecuaciones euclídeas reducidas de las cuádricas	
Caso I	$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0 \qquad (1 \leq r \leq n)$
$r' = r$	$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ determinados salvo proporcionales
Caso II *	$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{r-1} y_{r-1}^2 = 1 \qquad (1 \leq r \leq n+1)$
$r' = r - 1$	$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}\}$ unívocamente determinados
Caso III	$y_1 = \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_{r-1} y_{r-1}^2 \qquad (2 \leq r \leq n+1)$
$r' = r - 2$	$\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}\}$ determinados salvo un signo

* Podemos incluir aquí el caso trivial $(r, r') = (1, 0)$, en el que la ecuación quedaría $0 = 1$.

2.8 Esferas: Llamaremos *esfera* del espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ a toda cuádrica no singular suya que corte al hiperplano del infinito en la cuádrica del absoluto.

Sea $\langle T_2 \rangle$ una cuádrica en $\mathbb{A}$ y veamos cómo podemos determinar si es una esfera a través de su ecuación reducida. Obsérvemos en primer lugar que una condición previa para que $\langle T_2 \rangle$ sea una esfera es que sea no singular y que su corte con el infinito sea no singular, es decir, $r = n+1$ y $r' = n$ (caso II). Supongamos entonces que existe una referencia euclídea $(P_0; v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{A}$ y unos escalares no nulos totalmente determinados $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tales que la ecuación reducida de la cúadrica en dicha referencia es (en coordenadas homogéneas) $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = x_0^2$, en cuyo caso, la ecuación del corte de la cuádrica con el infinito en la referencia proyectiva de $\pi(V)$ que define la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 0$. Como la ecuación de la cuádrica del absoluto en la referencia proyectiva de $\pi(V)$ que define la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ (véase el ejercicio IX.3.5), obtenemos: la cuádrica $\langle T_2 \rangle$ es una esfera si y sólo si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, es decir, si y sólo si existe $\rho > 0$ tal que su ecuación reducida es

$$\frac{y_1^2}{\rho^2} + \cdots + \frac{y_n^2}{\rho^2} = \pm 1 \qquad \equiv \qquad y_1^2 + \cdots + y_n^2 = \pm\rho^2\,,$$

donde el signo de "± 1" es el signo de λ_1; cuando dicho signo es "$+$" se dice que la esfera es real, y cuando es "$-$" la esfera se denomina imaginaria. El número real positivo ρ (que depende de la métrica euclídea Ω_2 representante del absoluto que tenemos fijada) se denomina *radio* (respecto de Ω_2) de la esfera. Las esferas de los planos afines euclídeos se denominan *circunferencias.*

Ejercicio 2.9 Una esfera real queda totalmente determinada por su centro y por su radio. Además, dados $P_0 \in \mathbb{A}$ y $\rho > 0$, el lugar de la esfera real cuyo centro es P_0 y cuyo radio es ρ coincide con "el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{A}$ cuya distancia a P_0 es igual a ρ".

2.10 Cuádricas euclídeas en las dimensiones bajas: En las clasificaciones proyectiva y afín obteníamos un número finito de clases de equivalencia. Sin embargo en la clasificación euclídea hay infinitas clases. Lo que vamos a hacer entonces es dar las tablas de clasificación euclídea de los casos afines (las ecuaciones las modificaremos convenientemente).

Cónicas euclídeas

(r,i) \ (r',i')	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
(0,0)	$1=0$ vacío		$y=0$ una recta		
(1,0)	$y^2=0$ recta doble	$y^2=-\lambda^2$ $\lambda>0$ rectas imaginarias paralelas	$y^2=\lambda^2$ $\lambda>0$ par de rectas paralelas		$y=\dfrac{x^2}{a}$ $a>0$ parábola
(2,0)		$x^2+\lambda^2y^2=0$ $0<\lambda\leq 1$ rectas imagina. no paralelas		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $a\geq b>0$ elipse imaginaria (2)	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $a\geq b>0$ elipse real (2)
(2,1)			$x^2-\lambda^2y^2=0$ $0<\lambda\leq 1$ par de rectas no paralelas (1)		$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $a,b>0$ hipérbola (3)

(1) Las rectas son perpendiculares si y sólo si $\lambda = 1$.

(2) La elipse es una circunferencia si y sólo si $a = b$.

(3) Cuando $a = b$ la hipérbola se denomina *equilátera.*

Cuádricas euclídeas en el espacio **(..\..)**				
(r,i) \ (r',i')	(1,0)	(2,0)	(2,1)	(3,0)
(0,0)	$1=0$ vacío		$z=0$ un plano	
(1,0)	$z^2=0$ plano doble	$z^2=-\lambda^2$ $\lambda>0$ planos imagina-rios paralelos	$z^2=\lambda^2$ $\lambda>0$ par de planos paralelos	
(2,0)		$x^2+\lambda^2y^2=0$ $0<\lambda\leq 1$ planos imagina. no paralelos		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ $a\geq b>1$ cilindro imaginario
(2,1)			$x^2-\lambda^2y^2=0$ $0<\lambda\leq 1$ par de planos no paralelos	
(3,0)				$x^2+\lambda y^2+\mu z^2=0$ $0<\lambda\leq\mu\leq 1$ cono imaginario
(3,1)				

Cuádricas euclídeas en el espacio **(continuación)**				
(r,i) \ (r',i')	(3,1)	(4,0)	(4,1)	(4,2)
(0,0)				
(1,0)	$y = \dfrac{x^2}{a}$ $a > 0$ cilindro parabólico			
(2,0)	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a \geq b > 0$ cilindro elíptico		$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $a \geq b > 0$ paraboloide no reglado	
(2,1)	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a, b > 0$ cilindro hiperbólico			$z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ $a, b > 0$ paraboloide reglado
(3,0)		$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ $a \geq b \geq c > 0$ elipsoide imaginario	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $a \geq b \geq c > 0$ elipsoide real	
(3,1)	$z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $a \geq b > 0$ cono real		$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $a > 0, b \geq c > 0$ hiperboloide no reglado	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $a \geq b > 0, c > 0$ hiperboloide reglado

3 Elementos Métricos de las Cónicas Euclídeas

En esta sección vamos a estudiar con detalle las cuádricas euclídeas no singulares en dimensión 2, por lo que en todo lo que sigue $\mathbb{A}$ será un plano afín euclídeo y $\langle T_2\rangle$ será una cónica no singular sobre $\mathbb{A}$ cuyo lugar se denotará $\mathcal{C}$.

Recordemos que $\langle T_2\rangle$ es una cónica sobre el plano proyectivo $\mathbb{P}(E)$ (véase el comienzo de la sección anterior), y que dos rectas de dicho plano se dice que son "conjugadas respecto de la cónica" si el polo de una de ellas es incidente con la otra.

Definición 3.1 Llamaremos *eje* de la cónica $\langle T_2\rangle$ a todo diámetro suyo cuyo polo coincide con su dirección perpendicular, esto es, un diámetro d de $\langle T_2\rangle$ es eje si se cumple la igualdad

$$\{\text{rectas conjugadas a } d \text{ respecto de } \langle T_2\rangle\} = \{\text{rectas perpendiculares a } d\}\,.$$

Claramente, para que el diámetro d sea eje basta con que los dos conjuntos de la anterior igualdad tengan intersección no vacía.

Definición 3.2 Llamaremos *vértices* de la cónica $\langle T_2\rangle$ a los puntos afines (reales ó imaginarios) en los que la cónica es cortada por sus ejes.

Ejercicio 3.3 Si d es un diámetro de $\langle T_2\rangle$ que corta a $\mathcal{C}$ en un punto $P\in\mathbb{A}$, entonces d es un eje si y sólo si la tangente a la cónica en P coincide con la recta perpendicular a d que pasa por P. Es decir, los vértices reales de $\langle T_2\rangle$ son los puntos afines de $\mathcal{C}$ en los que la tangente y el diámetro son perpendiculares.

Como consecuencia, si $\langle T_2\rangle$ es una parábola, entonces las nociones de "eje" y de "vértice" dadas para ella en esta sección coinciden con las dadas en 2.6.

Definición 3.4 Sea P un punto de $\mathbb{P}(E)$ que no está en el lugar $\mathcal{C}$ de la cónica $\langle T_2\rangle$ y sean r_1, r_2 las rectas tangentes a la cónica trazadas desde P (que pueden ser reales ó imaginarias). En el haz de rectas que pasan por P tenemos la involución definida por las rectas r_1, r_2, que será hiperbólica ó elíptica según dichas rectas sean reales ó imaginarias, y que denominaremos *involución de rectas conjugadas* (respecto de $\langle T_2\rangle$).

Cuando el punto P es afín las rectas r_1, r_2 cortan a la recta del infinito de $\mathbb{A}$ en dos puntos distintos (reales ó imaginarios), y la involución de rectas conjugadas se obtiene proyectando desde P la involución que dichos puntos definen en la recta del infinito.

Ejercicio 3.5 Supóngase que la cónica $\langle T_2\rangle$ es central (esto es, que es una hipérbola ó una elipse). Si en el haz de rectas que pasan por su centro se consideran la involución de rectas conjugadas y la involución de rectas perpendiculares, entonces los ejes son las rectas homólogas comunes a ambas involuciones (véase el lema II.4.6).

Como consecuencia tenemos: (a) la cónica central es una circunferencia si y sólo si todo diámetro es eje (y todo punto de su lugar es vértice); (b) si la cónica central es una hipérbola ó una elipse ($\neq$ circunferencia), entonces tiene exactamente 2 ejes, los cuales son las rectas definidas como ejes en 2.4.

Según este ejercicio, los ejes de una hipérbola son las bisectrices de sus asíntotas.

Definición 3.6 Un punto P de $\mathbb{A}$ (real ó imaginario) que no está en el lugar $\mathcal{C}$ se dice que es un *foco* de la cónica $\langle T_2\rangle$, si las tangentes a la cónica trazadas desde P cortan a la recta del infinito en la cuádrica del absoluto; es decir, P es un foco de $\langle T_2\rangle$ si como recta del plano proyectivo dual corta en los mismos puntos a la cónica dual $\langle T^2\rangle$ y al cono dual de la cuádrica del absoluto (véanse la definición VI.2.9 y el problema VI.5.29 (b)). Claramente, si P es un foco dichas tangentes deben ser imaginarias.

Las rectas polares de los focos se denominan *directrices* de la cónica.

Ejercicio 3.7 (Caracterización de los focos reales) Dado un punto afín P que no está sobre $\mathcal{C}$, P es un foco de $\langle T_2\rangle$ si y sólo si en el haz de rectas que pasan por P coinciden la involución de rectas conjugadas y la involución de rectas perpendiculares.

3.8 Cálculo de los focos y de los ejes: Denotemos por $\langle\Omega^2\rangle$ el cono dual de la cuádrica del absoluto, y sean I y J los dos puntos cíclicos del plano (esto es, los puntos del lugar de la cuádrica $\langle\Omega_2\rangle$ sobre la recta del infinito r_∞, véase la definición XI.3.6). Dichos puntos se corresponden en el plano proyectivo dual con dos rectas imaginarias conjugadas i y j, las cuales se cortan en el punto R_∞ que se corresponde con la recta r_∞. Es claro entonces que el vértice del cono $\langle\Omega^2\rangle$ es R_∞ y que su lugar es el par de rectas i y j.

• Supongamos que $\langle T_2\rangle$ es una circunferencia, es decir, que su corte con la recta r_∞ son los puntos cílicos, o lo que es lo mismo, que el cono tangente a $\langle T^2\rangle$ trazado desde el punto R_∞ es $\langle\Omega^2\rangle$. En este caso sólo hay una recta del plano proyectivo dual que corta a las cónicas $\langle\Omega^2\rangle$ y $\langle T^2\rangle$ en los mismos puntos: la recta que pasa por los puntos de tangencia de ambas cónicas. Dicha recta es la polar del punto R_∞ respecto de la cónica $\langle T^2\rangle$, la cual se corresponde con el polo de la recta r_∞, es decir, con el centro de la circunferencia. Conclusión: una circunferencia tiene un único foco, que es su centro; además su única directriz es la recta del infinito.

• Supongamos ahora que $\langle T_2\rangle$ no es una circunferencia. Para calcular los focos debemos determinar en primer lugar los puntos del plano proyectivo dual en los que se cortan las cónicas $\langle\Omega^2\rangle$ y $\langle T^2\rangle$, y una vez conocidos dichos puntos los focos se corresponden con las rectas que pasan por dos de ellos. Es decir, los focos de $\langle T_2\rangle$ se corresponden con las rectas del plano proyectivo dual que están en el lugar de las cónicas singulares ($\neq\langle\Omega^2\rangle$) del haz $\langle\Omega^2, T^2\rangle$. El haz de cónicas $\langle\Omega^2, T^2\rangle$ se denomina *serie focal* de la cónica $\langle T_2\rangle$, y dos cónicas no singulares de $\mathbb{A}$ se dice que son *homofocales* si tienen la misma serie focal (si tienen los mismos focos).

El cálculo en coordenadas sería el siguiente. Si en una referencia euclídea la matriz de un representante métrico de $\langle T_2\rangle$ es A, entonces en la referencia proyectiva dual la matriz A^{-1} define un representante métrico de $\langle T^2\rangle$. Además, en dicha referencia dual la ecuación del cono $\langle\Omega^2\rangle$ viene dada por la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(compruébese). Por lo tanto las cónicas singulares de la serie focal de $\langle T_2\rangle$ son aquellas cuya ecuación viene dada por una matriz de la forma $A_\lambda = A^{-1} + \lambda M$ tal que $|A_\lambda| = 0$.

Ejercicio 3.9 Supuesto que $\langle T_2\rangle$ no es una circunferencia, los ejes de la cónica $\langle T_2\rangle$ se corresponden con los vértices de las cónicas singulares ($\neq\langle\Omega^2\rangle$) de la serie focal $\langle\Omega^2, T^2\rangle$. (Estúdiense por separado el caso de la parábola y el caso de la cónica central.)

3.10 Elipse: Calculemos los elementos métricos de una elipse (que no sea circunferencia) sabiendo que su ecuación respecto de una referencia euclídea es $\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$ con $a>b>0$. La matriz que nos da la ecuación de la elipse en dicha referencia es

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix},$$

de modo que para calcular las cónicas singulares de la serie focal de la elipse debemos encontrar los λ solución de la ecuación

$$\left| A^{-1}+\lambda\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & b^2+\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

que son $-a^2$ y $-b^2$. Para $\lambda=-a^2$ obtenemos la cónica singular $-z_0^2+(b^2-a^2)z_2^2=0$, cuyo vértice es el punto $(0,1,0)$ que se corresponde con la recta $x_1=0$. Por lo tanto, uno de los ejes de la elipse es la recta $y_1=0$ (en coordenadas euclídeas). Calculemos los focos que están sobre dicho eje. Es fácil ver que la ecuación de la cónica singular que hemos obtenido se puede escribir de la forma

$$\Big[(\sqrt{b^2-a^2}\,)z_2-z_0\Big]\cdot\Big[(\sqrt{b^2-a^2}\,)z_2+z_0\Big]=0\,,$$

por lo que su lugar son las rectas $(\sqrt{b^2-a^2}\,)z_2-z_0=0$ y $(\sqrt{b^2-a^2}\,)z_2+z_0=0$, las cuales se corresponden con los puntos $(1,0,-\sqrt{b^2-a^2}\,)$ y $(1,0,\sqrt{b^2-a^2}\,)$. Por lo tanto dos focos son los puntos $(0,-\sqrt{b^2-a^2}\,)$ y $(0,\sqrt{b^2-a^2}\,)$ (en coordenadas euclídeas).

Para $\lambda=-b^2$ obtenemos la cónica singular $-z_0^2+(a^2-b^2)z_1^2=0$, la cual podemos escribirla de la forma

$$\Big[(\sqrt{a^2-b^2}\,)z_1-z_0\Big]\cdot\Big[(\sqrt{a^2-b^2}\,)z_1+z_0\Big]=0\,,$$

y cuyo vértice es el punto $(0,0,1)$. Por lo tanto el otro eje de la elipse es la recta $y_2=0$, y sobre él se encuentran los focos $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ y $(\sqrt{a^2-b^2},0)$.

Obsérvese que los focos que se encuentran sobre el eje correspondiente al semieje mayor (esto es, el eje $y_2=0$) son puntos reales, mientras que los focos que están sobre el otro eje son puntos imaginarios conjugados.

El centro de la elipse es el origen de la referencia euclídea (ya que para eso hemos elegido la referencia en la que su ecuación es la reducida), y los vértices (esto es, los cortes de los ejes con la elipse) son los cuatro puntos $(-a,0)$, $(a,0)$, $(0,-b)$ y $(0,b)$. Por último, las directrices reales (rectas polares respecto de la elipse de los focos reales) son las rectas $y_1=\pm a^2/\sqrt{a^2-b^2}$, y la distancia de cada foco real a su correspondiente directriz es $d=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Calcúlense como ejercicio las directrices imaginarias.

El eje de la elipse sobre el que yacen los focos reales (el correspondiente al semieje mayor) se denomina *eje principal*, y el otro eje se conoce como *eje secundario*.

Nótese que los dos focos reales distan igual del centro de la elipse, y que si dicha distancia la denotamos por c se satisface $a^2=b^2+c^2$; el valor c se denomina *distancia focal*. Es claro cómo podemos obtener los focos reales de una elipse si conocemos sus vértices: si a es el simieje mayor y B es uno de los vértices que yacen sobre el eje secundario, entonces la circunferencia de centro B y radio a corta al eje principal en los focos reales.

3.11 Hipérbola: Las hipérbolas tienen dos ejes y cuatro focos; dos de los focos son reales y yacen sobre el eje que corta a la hipérbola en vértices reales, y los otro dos focos son imaginarios y están sobre el eje que corta a la hipérbola en vértices imaginarios. Concretamente, si la ecuación reducida de la hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces sus focos (reales) son los puntos $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ y $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, las directrices (reales) son las rectas $x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, y la distancia de cada foco real a su correspondiente directriz es $d = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Además sus asíntotas son las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$.

El eje de la hipérbola sobre el que yacen los focos reales (el que corta a la hipérbola en los vértices reales) se denomina *eje transversal* y el otro eje se conoce como *eje no transversal*; por este motivo, al semieje a lo llamaremos *transversal* y al semieje b lo llamaremos *no transversal*. Los dos focos reales distan igual del centro de la hipérbola, y si dicha distancia la denotamos por c se cumple la igualdad $c^2 = b^2 + a^2$; el valor c se denomina *distancia focal*. Es claro cómo podemos obtener los focos reales de una hipérbola si conocemos sus vértices reales y su semieje b: sean A y A' los vértices reales, y sean B y B' los puntos situados sobre el eje no transversal y cuya distancia al centro es b; si consideramos el rectángulo que pasa por los puntos A, A', B, B' y cuyas bimedianas son las rectas $A + A'$ y $B + B'$, entonces la circunferencia que pasa por los vértices de dicho rectángulo corta al eje transversal en los focos reales.

3.12 Parábola: Una parábola tiene un único eje y un único foco. Concretamente, si la ecuación reducida de la parábola es $y = \frac{x^2}{2d}$ (de modo que, según las definiciones dadas en 2.6, su vértice es el punto $(0, 0)$, su eje es la recta $x = 0$, y la tangente en el vértice es la recta $y = 0$), entonces su eje (según la difinición dada en 3.1) es la recta $x = 0$, su foco es el punto $(0, \frac{d}{2})$, y la directriz es la recta $y = -\frac{d}{2}$. La distancia del foco a la directriz es d.

Ejercicio 3.13 Estúdiense los elementos métricos de las elipses imaginarias.

4 Definición Euclídea de Cónica: Excentricidad

Veamos en esta sección cómo podemos definir las cónicas no singulares de índice 1 del plano afín euclídeo a partir de la función distancia. Ya sabemos que el lugar de una circunferencia real es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a su centro es igual a su radio (véase el ejercicio 2.9), motivo por el cual, en esta sección nos ocuparemos de las cónicas no singulares de índice 1 que no son circunferencias.

Seguiremos con la notación fijada en la sección anterior. Además, la palabra "foco" significará en lo que sigue "foco real".

Proposición 4.1 *Sean en $\mathbb{A}$ un punto F y una recta l tales que $F \notin l$. Dado $\varepsilon > 0$, el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen la igualdad*

$$\mathrm{d}(P, F) = \varepsilon\ \mathrm{d}(P, l)$$

es una cónica no singular de índice 1 ($\neq$ circunferencia), para la cual F es un foco y l es la directriz correspondiente a dicho foco. Cuando $0 < \varepsilon < 1$ la cónica es una elipse, cuando $\varepsilon = 1$ la cónica es una parábola, y cuando $1 < \varepsilon$ la cónica es una hipérbola.

Demostración. Empecemos construyendo en $\mathbb{A}$ una referencia euclídea apropiada. Fijemos un vector unitario $v_1 \in V$ tal que la dirección de l es $\langle v_1 \rangle$ y sea $P_0 = l \cap (F + \langle v_1 \rangle^{\perp})$ (es decir, P_0 es el pie de la perpendicular a l trazada desde F); si consideramos el único vector unitario v_2 de $\langle v_1 \rangle^{\perp}$ que satisface $F = P_0 + \alpha v_2$ con $\alpha > 0$, entonces $(P_0; v_1, v_2)$ es un sistema de referencia euclídeo de $\mathbb{A}$.

Dado un punto $P = (y_1, y_2)$ (esto es, $P = P_0 + y_1 v_1 + y_2 v_2$), como $F = (0, \alpha)$ y $l \equiv y_2 = 0$ es inmediato comprobar las igualdades

$$\mathrm{d}(P, l) = |y_2| \,, \qquad \mathrm{d}(P, F) = \sqrt{(y_2 - \alpha)^2 + y_1^2}\,,$$

de modo que la condición $\mathrm{d}(P, F) = \varepsilon\ \mathrm{d}(P, l)$ es equivalente a la igualdad $(y_2 - \alpha)^2 + y_1^2 = \varepsilon^2 y_2^2$. Por lo tanto, P pertenece al lugar geométrico del enunciado si y sólo si sus coordenadas cumplen la ecuación

$$y_1^2 + (1 - \varepsilon^2) y_2^2 + \alpha^2 - 2\alpha y_2 = 0\,,$$

que es la ecuación de una cónica de $\mathbb{A}$. Clasificándola se obtiene fácilmente que es una cónica no singular de índice 1 ($\neq$ circunferencia), y que es una elipse, una parábola ó una hipérbola, según sea $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ ó $\varepsilon > 1$, respectivamente.

Para terminar, supongamos por ejemplo que es una parábola ($\varepsilon = 1$) y calculemos sus focos y directrices. La ecuación de la cónica en coordenadas homogéneas es en este caso $x_1^2 + \alpha^2 x_0^2 - 2\alpha x_2 x_0 = 0$, ecuación que viene dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\alpha} & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

por lo que las cónicas singulares de su serie focal se obtienen para los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que anulan el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \alpha - \lambda \end{pmatrix},$$

es decir, para $\lambda = -\alpha$. La ecuación de la cónica de la serie focal que obtenemos para $\lambda = -\alpha$ es $\alpha z_2^2 + z_0 z_2 = 0$, cuyo lugar está formado por el par de rectas $z_2 = 0$ y $\alpha z_2 + z_0 = 0$, las cuales se corresponden con los puntos $(0, 0, 1)$ ($=$ punto del infinito de $\mathbb{A}$) y $(1, 0, \alpha)$ ($= (0, \alpha)$ en coordenadas euclídeas) $= F$. Es fácil ver que la polar de F es la recta l ($\equiv y_2 = 0$). ∎

Ejercicio 4.2 Se cumple el recíproco de la proposición 4.1, a saber: Dada una cónica $\langle T_2 \rangle$ no singular de índice 1 en $\mathbb{A}$ que no es circunferencia, si F es un foco de $\langle T_2 \rangle$ y l es su correspondiente directriz, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el lugar de $\langle T_2 \rangle$ es igual al lugar geométrico de los puntos $P \in \mathbb{A}$ que cumplen $\mathrm{d}(P, F) = \varepsilon\ \mathrm{d}(P, l)$.

Concrétamente, si $\langle T_2 \rangle$ es una parábola entonces $\varepsilon = 1$, y si $\langle T_2 \rangle$ es una cónica central cuya distancia focal es c y cuyo semieje mayor (ó semieje transversal) es a entonces $\varepsilon = c/a$, es decir,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{si } \langle T_2 \rangle \text{ es una elipse}\,, \qquad \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{si } \langle T_2 \rangle \text{ es una hipérbola}\,,$$

donde b es el semieje menor (ó el semieje no transversal).

Definición 4.3 Según el ejercicio 4.2, si $\langle T_2 \rangle$ es una cónica no singular de índice 1 de $\mathbb{A}$ que no es una circunferencia, entonces $\langle T_2 \rangle$ tiene intrínsecamente asociado un número real positivo ε ; dicho número ε se denomina *excentricidad* de la cónica $\langle T_2 \rangle$.

Proposición 4.4 *Consideremos un escalar $a > 0$ y dos puntos distintos F, F' en $\mathbb{A}$, y denotemos $c = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(F, F') > 0$.*

(i) *Si $a > c$, entonces el lugar geométrico de los puntos $P \in \mathbb{A}$ que satisfacen*

$$\mathrm{d}(P, F) + \mathrm{d}(P, F') = 2a$$

es una elipse; los focos de dicha elipse son F y F', el semieje mayor es a, y el semieje menor es $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Teniendo en cuenta que toda elipse está determinada por sus focos y su semieje mayor, se deduce de lo anterior que en toda elipse tenemos que la suma de las distancias de un punto de su lugar a los focos es igual al doble del semieje mayor.

(ii) *Si $a < c$, entonces el lugar geométrico de los puntos $P \in \mathbb{A}$ que satisfacen*

$$|\,\mathrm{d}(P, F) - \mathrm{d}(P, F')| = 2a$$

es una hipérbola; los focos de dicha hipérbola son F y F', el semieje transversal es a, y el semieje no transversal es $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Teniendo en cuenta que toda hipérbola está determinada por sus focos y su semieje transversal, se deduce de lo anterior que para toda hipérbola se cumple que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto de su lugar a los focos es igual al doble del semieje transversal[2]*.*

Demostración. Probemos (i), dejando (ii) como ejercicio para el lector. Supongamos $a > c$ y consideremos en $\mathbb{A}$ la referencia euclídea $(P_0; v_1, v_2)$ obtenida del siguiente modo: P_0 es el punto medio del segmento FF', $v_1 \in V$ es un vector unitario tal que $F = P_0 + cv_1$ (y por lo tanto $F' = P_0 - cv_1$), y v_2 es un vector unitario ortogonal a v_1.

Dado un punto $P = (x, y)$, como en la referencia euclídea construida tenemos $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$, es fácil obtener las igualdades

$$\mathrm{d}(P, F) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\,, \qquad \mathrm{d}(P, F') = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}\,.$$

Ahora, si expresamos en coordenadas la condición $\mathrm{d}(P, F) + \mathrm{d}(P, F') = 2a$ obtenemos

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a\,;$$

pasando el primer radical de la anterior igualdad al otro miembro, elevando al cuadrado y simplificando tenemos $a^2 - xc = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$; elevando de nuevo al cuadrado y volviendo a simplificar obtenemos $a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$, igualdad que podemos escribir en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\,,$$

que es la ecuación de la elipse de centro P_0, de semieje mayor igual a a, y de semieje menor igual a $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Es claro que los focos de esta elipse son F y F'. ∎

[2] Los puntos que satisfacen $\mathrm{d}(P, F) - \mathrm{d}(P, F') = 2a$ son los de la rama de la hipérbola que dista menos de F', y los que cumplen $\mathrm{d}(P, F) - \mathrm{d}(P, F') = -2a$ son los de la otra rama.

5 Problemas

Todas las coordenadas y ecuaciones que aparecen en los siguientes enunciados se suponen referidos a sistemas de referencias euclídeos.

5.1 Calcúlense las parábolas con foco en el punto $(-1, 2)$, que pasan por el punto $(2, 2)$, y cuyo punto del infinito es la dirección del eje $x = 0$.

5.2 Calcúlense las hipérbolas con un foco en el punto $(2, -1)$ y cuyas asíntotas son las rectas $x = 0$ y $3x - 4y = 0$.

5.3 Calcúlense las elipses de semieje menor igual a 1 para las que los puntos $(-1, 2)$ y $(-7, 2)$ son vértices.

5.4 Calcúlense las cónicas para las que los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son sus focos.

5.5 Calcúlense las elipses con un vértice en $(-1, 1)$, centro en $(3, -1)$ y excentricidad $\varepsilon = 1/2$.

5.6 Estúdiense las siguientes cónicas (centro, focos, ejes, vértices, asíntotas, directrices, sistema de referencia euclídeo en el que la ecuación es la reducida, y ecuación reducida):
(a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0\,;$
(b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 1 = 0\,;$
(c) $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0\,;$
(d) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0\,;$
(e) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0\,;$
(f) $2x^2 - xy - y^2 - x + y = 0\,;$
(g) $3x^2 - 5xy + y^2 - x + 2y - 1 = 0\,.$

5.7 Clasifíquese euclídeamente, según los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la cónica
$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0\,.$$

5.8 Estúdiense las siguientes cuádricas euclídeas:
(a) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 2x - 4y - 2z - 5 = 0\,;$
(b) $y^2 + 4xz + 1 = 0\,;$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y + 2 = 0\,;$
(d) $x^2 - 2xy + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2xz - 6 = 0\,;$
(e) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz - x + 3y + 3z - 2 = 0\,.$

5.9 Clasifíquese euclídeamente, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la cuádrica
$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0\,.$$

5.10 Dado un punto P de una elipse (ó de una hipérbola), pruébese que la tangente y la normal a la elipse (ó a la hipérbola) en P son las bisectrices de las rectas que unen P con los focos. (Se define la *normal* a una cónica no singular en un punto suyo, como la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la tangente a la cónica en el punto.)

5.11 Dado un punto P de una parábola, pruébese que la tangente y la normal a la parábola en P son las bisectrices de la recta perpendicular a la directriz que pasa por P y de la recta que une P con el foco.

5.12 Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de $\mathbb{A}$ de centro P_0 y radio r, y sea P un punto de $\mathbb{A}$ distinto de P_0. Si A y B son los puntos de $\mathcal{C}$ determinados por un diámetro suyo, y si $e, v \in V$ son tales que $A = P + e$ y $B = P + v$, pruébese que entonces $P \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; e \cdot v = 0$.

5.13 Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de $\mathbb{A}$ de centro P_0 y radio r, y sea P un punto de $\mathbb{A}$ exterior a $\mathcal{C}$. Si Q y Q' son los puntos de contacto de las tangentes a $\mathcal{C}$ trazadas desde P, entonces la recta $P_0 + P$ es la mediatriz del segmento QQ'.

5.14 Pruébese que el lugar geométrico de los puntos desde los que se pueden trazar tangentes perpendiculares a una cónica central, es una circunferencia concéntrica con la cónica dada (llamada "círculo director" de la cónica).

5.15 Pruébese que el lugar geométrico de los puntos desde los que se pueden trazar tangentes perpendiculares a una parábola es la directriz de la parábola.

5.16 Fijados puntos distintos A y B en $\mathbb{A}_1$, para cada $P \in \mathbb{A}_1$ se llama *potencia de P respecto de A y B* al escalar $(P : A, B)$ definido por la igualdad

$$(P : A, B) = \mathrm{d}(P, M)^2 - \mathrm{d}(A, M)^2,$$

siendo M el punto medio del segmento AB. (La definición es simétrica en A y B.)

(a) Si $e, v \in V$ son tales que $A = P + e$ y $B = P + v$ entonces $(P : A, B) = e \cdot v$.

(b) Denotemos $\alpha_0 = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A, B)\right]^2$. Cuando P recorre la recta $\mathbb{A}_1$, el escalar $(P : A, B)$ recorre el intervalo real $[-\alpha_0, \infty)$. Dicho escalar se anula exactamente en A y B, es negativo en el interior del segmento AB (es decir, para $P = A + \lambda v_0$ con $0 < \lambda < 1$, donde v_0 es el único vector que cumple $B = A + v_0$), y es positivo fuera del segmento AB. Por este motivo, cuando $(P : A, B) > 0$ (lo que implica que P, A, B son puntos distintos) se dice que A y B *están al mismo lado*[3] de P.

(c) La única solución de la ecuación $(P : A, B) = -\alpha_0$ es $P = M$, pero si $\alpha \in (-\alpha_0, \infty)$ entonces dicha ecuación tiene exactamente dos soluciones, de las cuales M es el punto medio.

5.17 Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia en $\mathbb{A}_2$ de centro P_0 y radio $r > 0$. Para cada punto $P \in \mathbb{A}_2$ se define la *potencia de P respecto de la circunferencia $\mathcal{C}$* como el escalar $(P : \mathcal{C})$ definido por la igualdad

$$(P : \mathcal{C}) = \mathrm{d}(P, P_0)^2 - r^2 .$$

Es claro que $(P : \mathcal{C}) = 0$ si y sólo si $P \in \mathcal{C}$. Además, P es un punto del interior de la circunferencia cuando $(P : \mathcal{C}) < 0$, y P está en el exterior cuando $(P : \mathcal{C}) > 0$. Tenemos: si una recta que pasa por P corta a $\mathcal{C}$ en puntos distintos A y B, entonces se cumple

$$(P : \mathcal{C}) = (P : A, B) .$$

[3] La definición dada coincide con la usual: dados $u \in V$, $u \neq 0$, y $\delta \in \mathbb{R}^*$ tales que $A = P + u$ y $B = P + \delta u$, A y B están al mismo lado de P cuando $\delta > 0$.

5.18 Construcciones métricas del conjugado armónico: Dados tres puntos distintos y alineados A, B, C de $\mathbb{A}$, el conjugado armónico D de C respecto del par (A, B) admite las siguientes construcciones:
(a) Elegidas rectas perpendiculares a y b que pasen por A y B, respectivamente, si $O = a \cap b$, $c = O + C$ y d es la recta tal que a y b son las bisectrices de c y d, entonces $d \cap (A + B) = D$.
(b) Si la perpendicular por C a la recta $A + B$ corta a la circunferencia de diámetro AB en X, entonces la tangente a dicha circunferencia en X corta a $A + B$ en D.
(c) Dada una circunferencia que pasa por A y B, si se une C con uno de los extremos X del diámetro perpendicular a $A + B$, y si s es la recta que pasa por el otro extremo de dicho diámetro y por el otro punto de corte de $X + C$ con la circunferencia, entonces s corta a $A + B$ en D.
(d) Si M es el punto medio del segmento AB entonces $(M : C, D) = \mathrm{d}(B, M)^2$. Es decir, C y D están al mismo lado de M, y la distancia de M a B es media geométrica entre la distancia de M a C y la distancia de M a D. (La media geométrica de dos escalares $\alpha, \beta > 0$ se define como $\sqrt{\alpha\beta}$.)

5.19 Dadas dos circunferencias que se cortan ortogonalmente, si una recta pasa por el centro de una de ellas y es secante a la otra, pruébese que entonces la recta corta a las circunferencias en pares de puntos separados armónicamente.

Recíprocamente, toda circunferencia que pase por dos puntos C y D separados armónicamente por A y B, es ortogonal a la circunferencia de diámetro AB.

Conclúyase que la condición necesaria y suficiente para que dos puntos P y Q sean conjugados respecto de una circunferencia dada, es que dicha circunferencia corte ortogonalmente a la circunferencia de diámetro PQ.