Apéndice A

Caracterización del Retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n)$

El objeto de este apéndice es demostrar el teorema VI.1.8 : *Dado un "retículo proyectivo" $\mathcal{R}$, existen un cuerpo k y un k-espacio vectorial E tales que $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$.* La construcción que haremos de k y de E no será difícil pero sí laboriosa. Téngase en cuenta que vamos a resumir todo el proceso que durante siglos han realizado los matemáticos para llegar a la idea de "espacio vectorial" partiendo de "la geometría que intuitivamente vemos" (es decir, de los conceptos de punto, recta, plano, . . . y de las relaciones de incidencia entre dichos conceptos). Dicha construcción se basa en las siguientes ideas (véanse las secciones III.2 y III.6):

(i) Dado un espacio afín $\mathbb{A}$ sobre el que opera un k-espacio vectorial V, si conocemos el grupo de las dilataciones y el grupo de las traslaciones de $\mathbb{A}$, entonces a partir de dichos grupos podemos recuperar el cuerpo k y el espacio vectorial V. Efectivamente, por una parte, el grupo de las traslaciones es isomorfo al grupo aditivo V (ya que la composición de traslaciones se corresponde con la suma de vectores), de modo que sabemos recuperar V y su suma. Por otra parte, si decimos que un morfismo de grupos $f : V \to V$ conserva las direcciones cuando satisface $f(v) \in \langle v \rangle$ para todo $v \in V$, entonces se comprueba fácilmente (cuando $\dim V \geq 2$) que los únicos endomorfismo de grupos de V que conservan las direcciones son las homotecias, de modo que tenemos una aplicación biyectiva entre los endomorfismos de V que conservan las direcciones y el cuerpo k; dicha biyección permite recuperar las operaciones de k, ya que por ella la suma de k se corresponde con la suma de endomorfismos y el producto de k se corresponde con la composición de endomorfismos. Por último, los endomorfismos de V que conservan las direcciones los podemos obtener a partir de las dilataciones: dada una dilatación σ de razón $\lambda \in k^*$ y dado un vector v (ó sea, una traslación τ), la traslación definida por el vector λv es la dilatación $\sigma\tau\sigma^{-1}$ (compruebese); es decir, a parte del endomorfismo nulo, todo endomorfismo de V que conserve las direcciones es de la forma $V \to V$, $\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$, para alguna dilatación σ.

(ii) Supongamos ahora que tenemos el retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P})$ de las variedades lineales de un espacio proyectivo $\mathbb{P}$ de dimensión ≥ 2, y que conocemos sus automorfismos. Si fijamos un hiperplano H en $\mathcal{R}(\mathbb{P})$ y consideramos el espacio afín $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, H)$, entonces sabemos que las dilataciones de $\mathbb{A}$ son los automorfismos del retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P})$ que dejan fijos todos los puntos de H, y que las traslaciones de $\mathbb{A}$ (distintas de la identidad) son los automorfismos del retículo $\mathcal{R}(\mathbb{P})$ cuyos puntos fijos son exactamente los de H. Por lo tanto podemos construir el espacio vectorial asociado a $\mathbb{A}$ según hemos dicho en (i).

1.1 En este punto y en el siguiente fijaremos la notación y la terminología que utilizaremos en todo el apéndice (véanse las secciones IV.1 y IV.2). $\mathcal{R}$ será un retículo proyectivo (= retículo en las hipótesis del teorema IV.1.8) de dimensión n (≥ 2), y $\mathbb{P}$ denotará el conjunto de todos los puntos de $\mathcal{R}$.

Recordemos que cada variedad de $\mathcal{R}$ está determinada por los puntos que contiene (véase el lema IV.1.9). Además, si $r \geq 0$ es fácil comprobar por inducción en r las siguientes propiedades: (i) dados $P_0, P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{P}$ se cumple $\dim(P_0 + \cdots + P_r) \leq r$; (ii) dada una variedad X de $\mathcal{R}$ de dimensión r existen $P_0, P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{P}$ tales que $X = P_0 + \cdots + P_r$.

Lo dicho en el anterior párrafo puede generalizarse en el siguiente sentido (pruébese como ejercicio): Para cada variedad X de $\mathcal{R}$ tenemos: (i) dados puntos $P_1, \ldots, P_m$ se cumple $\dim(X + P_1 + \cdots + P_m \leq \dim X + m$; (ii) si Y es una variedad de $\mathcal{R}$ que contiene a X y $m = \dim Y - \dim X$, entonces existen puntos $P_1, \ldots, P_m$ tales que $Y = X + P_1 + \cdots + P_m$.

Utilizando las anteriores propiedades no es difícil generalizar el terorema IV.2.11 para obtener el siguente resultado: *Toda colineación $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ se extiende de modo único a un automorfismo $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. En consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre los automorfismos de $\mathcal{R}$ y las colineaciones de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}$.*

1.2 En el retículo proyectivo $\mathcal{R}$ fijaremos un hiperplano H que denominaremos *hiperplano del infinito*. Los *puntos afines* serán los puntos de $\mathcal{R}$ que no están en H, y el conjunto de todos los puntos afines lo denotaremos $\mathbb{A}$. Llamaremos *variedad afín* a toda variedad de $\mathcal{R}$ que no esté contenida en H. Si al conjunto de las variedades afines le aadimos la variedad $\emptyset$, entonces obtenemos un nuevo retículo que denotaremos $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$. Es claro que $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ es un retículo de dimensióm finita tal que $\dim \mathcal{R}_{\mathbb{A}} = \dim \mathcal{R} = n$.

Sea X una variedad afín de dimensión mayor o igual que 1. Los puntos de $X \cap H$ los denominaremos *puntos del infinito* de X, y diremos que la variedad $X \cap H$ es la *dirección* de X. Dada otra variedad afín Y, diremos que X e Y son *paralelas* si sus direcciones son incidentes, en cuyo caso escribiremos “$X \parallel Y$”. Como $\dim(X + H) = n$, de la fórmula de la dimensión obtenemos $\dim(X \cap H) = \dim X - 1$; en particular tenemos que X está determinada por su dirección y por un punto afín suyo: si $P \in X \cap \mathbb{A}$, entonces $X = P + (X \cap H)$. Claramente, si X e Y son paralelas, entonces son incidentes si y sólo si tienen algún punto afín en común (en particular, si X e Y son paralelas y tienen igual dimensión, entonces $X = Y$ si y sólo si tienen algún punto afín en común).

Será un buen ejercicio para el lector dibujar las demostraciones de los resultados siguientes.

Definición 1.3 Llamaremos *dilatación* de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ a todo automorfismo de $\mathcal{R}$ que deja fijos todos los puntos de H. Una dilatación de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ es una *traslación*, si es la identidad o si no deja fijo ningún punto de $\mathbb{A}$.

Según lo dicho al final de 1.1, las dilataciones de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ coinciden son las colineaciones de $\mathbb{P}$ en sí mismo que son la identidad sobre los puntos del infinito.

Proposición 1.4 *Una dilatación σ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ está determinada por las imágenes de dos puntos distintos de $\mathbb{A}$.*

Demostración. Sean P y Q puntos afines distintos de los que conocemos sus imágenes: $P' = \sigma(P)$, $Q' = \sigma(Q)$. Como σ queda determinada si se conoce su restricción al conjunto de puntos

$\mathbb{P}$, y σ es la dentidad sobre los puntos del hiperplano H, bastará obtener las imágenes de los puntos afines. Sea entonces $R \in \mathbb{A}$, $R \neq P$ y $R \neq R$, y calculemos $\sigma(R)$.

Si $R \notin P+Q$ y denotamos $P_\infty = H \cap (P+R)$, $Q_\infty = H \cap (Q+R)$, entonces $P' + P_\infty = \sigma(P+P_\infty)$ y $Q' + Q_\infty = \sigma(Q+Q_\infty)$ son dos rectas distintas (porque $P_\infty \neq Q_\infty$) tales que $\sigma(R) \in P' + P_\infty$ y $\sigma(R) \in Q' + Q_\infty$, por lo tanto

$$\sigma(R) = (P' + P_\infty) \cap (Q' + Q_\infty)\,.$$

Si $R \in P+Q$, sea $S \in \mathbb{A}$ tal que $S \notin P+Q$ (S existe). Igual que antes calculamos $\sigma(S)$, y luego calculamos $\sigma(R)$ teniendo en cuenta que $R \notin P+S$. ▮

Corolario 1.5 *Si una dilatación de $\mathcal{R}_\mathbb{A}$ deja fijos dos puntos afines distintos, entonces dicha dilatación es la identidad. De otro modo: toda dilatación que no sea una traslación tiene un único punto fijo en $\mathbb{A}$.*

Más adelante necesitaremos probar la existencia de ciertas dilataciones, y para ello será muy útil la siguiente caracterización.

Proposición 1.6 *Sea $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación no constante con la siguiente propiedad: dados puntos distintos $P, Q \in \mathbb{A}$, $\sigma(Q)$ pertenece a la única recta que pasa por $\sigma(P)$ y es paralela a $P+Q$. Entonces σ puede extenderse a una dilatación.*

Demostración. Si σ es biyectiva, entonces podemos extenderla a una biyección $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ definiendola como la identidad sobre los puntos de H; sería fácil probar que esta última aplicación es una colineación y concluiríamos. Probemos entonces que σ es biyectiva.

Es inyectiva, ya que si existieran dos puntos distintos $R_1, R_2 \in \mathbb{A}$ tales que $\sigma(R_1) = R' = \sigma(R_2)$, entonces $\sigma(P) = R'$ para todo $P \in \mathbb{A}$ (compruébese), lo cual contradice que σ no es constante.

Probemos que es epiyectiva. Como σ no es constante, existen $P, Q \in \mathbb{A}$ tales que $P' = \sigma(P)$ y $Q' = \sigma(Q)$ son distintos. Sea $R' \in \mathbb{A}$. Igual que en la demostración de 1.4, la existencia de $R \in \mathbb{A}$ tal que $\sigma(R) = R'$ bastará probarla en el caso $R' \notin P' + Q'$. Sean entonces l_1 y l_2 las rectas afines determinadas por las siguientes condiciones:

$$P \in l_1\,, \qquad l_1 \parallel P' + R'\,, \qquad Q \in l_2\,, \qquad l_2 \parallel Q' + R'\,;$$

por hipótesis $P+Q \parallel P'+Q'$, por lo tanto, como las tres rectas $P'+Q'$, $P'+R'$ y $Q'+R'$ son distintas y coplanarias, las rectas $P+Q$, l_1 y l_2 también son distintas y coplanarias; como además l_1 y l_2 no son paralelas, obtenemos que l_1 y l_2 se cortan en un único punto afín: $l_1 \cap l_2 = R \in \mathbb{A}$. Entonces $\sigma(R) = R'$. ▮

Proposición 1.7 *Sea τ una traslación de $\mathcal{R}_\mathbb{A}$ diferente de la identidad. Existe un único punto $D \in H$ tal que toda recta afín que tenga a D como dirección es invariante por τ. Diremos que D es la* dirección *de τ.*

Demostración. Fijemos un punto $P \in \mathbb{A}$. Como $P \neq \tau(P)$, obtenemos que $D = H \cap (P + \tau(P))$ es un punto del infinito tal que $P + D = P + \tau(P)$; observemos que $P + \tau(P)$ es una recta invariante por τ porque $\tau(D) = D$. Sea $Q \in \mathbb{A}$ tal que $Q \notin P + D$ y veamos que $Q + D$

es también invariante por τ, es decir, veamos que $\tau(Q) \in Q + D$: si fuera $\tau(Q) \notin Q + D$, entonces $P + \tau(P)$ y $Q + \tau(Q)$ serían dos rectas con distinta dirección, invariantes por τ y que son coplanarias (porque $Q + P \parallel \tau(Q + P) = \tau(Q) + \tau(P)$), de lo que se sigue que $(P + \tau(P)) \cap (Q + \tau(Q))$ es un punto de $\mathbb{A}$ que queda fijo por τ, lo cual no puede ocurrir. La unicidad del punto D es clara. ∎

Corolario 1.8 *Una traslación τ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ está determinada por la imagen de un punto de $\mathbb{A}$.*

Demostración. Fijemos un punto $P \in \mathbb{A}$. Si $\tau(P) = P$, entonces τ es la identidad. Si $\tau(P) \neq P$, entonces la dirección de τ es $D = H \cap (P + \tau(P))$. Dado un punto afín Q tal que $Q \notin P + \tau(P)$, su imagen por τ se calcula del siguente modo: si $D' = H \cap (P + Q)$, entonces

$$\tau(Q) = (\tau(P) + D') \cap (Q + D)\,.$$

Para concluir basta tener en cuenta la proposición 1.4. ∎

Probemos a continuación, con la ayuda del Teorema de Desargues (véase IV.1.6), que en $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ existen suficientes dilataciones y traslaciones.

Proposición 1.9 *Dados puntos $P, P' \in \mathbb{A}$, existe una (única) traslación τ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ que transforma P en P'.*

Demostración. Si $P = P'$ entonces τ es la identidad, así que supongamos $P \neq P'$. (La demostración de 1.8 nos dice cómo debemos construir la traslación buscada.)

En primer lugar, definamos τ sobre los puntos de $\mathbb{A}$ que no están en la recta $P + P'$. Sea $Q \in \mathbb{A}$, $Q \notin P + P'$, y sea l_1 la única recta que pasa por Q y es paralela a $P + P'$; como las rectas $Q + P$ y $P + P'$ son coplanarias y no paralelas, tenemos que l y la única recta que pasa por P' y es paralela a $P + Q$ también son coplanarias y no paralelas, por lo que se cortan en un único punto afín Q' ($\neq Q$) y definimos $\tau(Q) = Q'$ (véase la figura 1.1); es decir, Q' es el único punto que satisface $P + Q \parallel P' + Q'$ y $P + P' \parallel Q + Q'$.

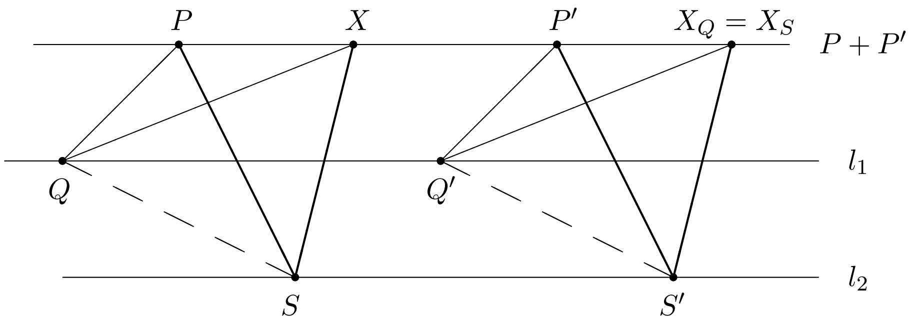


Figura 1.1

Sea ahora X ($\neq P$) un punto afín de la recta $P + P'$. Dado un punto afín Q exterior a la recta $P + P'$, definimos $\tau(X) = X_Q$, donde $Q' = \tau(Q)$ y X_Q es el único punto (afín) determinado por las condiciones

$$Q + X \parallel Q' + X_Q \qquad \text{y} \qquad Q + Q' \parallel X + X_Q\,.$$

Debemos comprobar que la anterior construcción no depende del punto Q. Sean entonces S otro punto afín exterior a $P+P'$, $S'=\tau(S)$, $l_2=S+S'$ y X_S el único punto determinado por las condiciones

$$S+X \parallel S'+X_S \qquad \text{y} \qquad S+S' \parallel X+X_S\,.$$

Tenemos que probar que $X_Q=X_S$, y es claro que basta hacerlo cuando las rectas l_1 y l_2 son distintas (es decir, cuando $S\notin l_1$; si no existen puntos afines fuera de las rectas $P+P'$ y l_1, entonces debe ser $\mathbb{A}=\{P,P',Q,Q'\}$ y no hay nada más que decir). Como las rectas $P+P'$, l_1 y l_2 se cortan en un punto del infinito, aplicando el teorema de Desargues a los triángulos PQS y $P'Q'S'$ obtenemos que $Q+S\parallel Q'+S'$; pero entonces, aplicando el teorema de Desargues a los triángulos QXS y $Q'X_QS'$ obtenemos que $S+X\parallel S'+X_Q$, es decir, X_Q satisface las condiciones que determinan a X_S; por lo tanto $X_Q=X_S$.

Es fácil probar que la aplicación τ definida satisface las hipótesis de 1.6 y que $\tau(P)=P'$, por lo que τ puede extenderse a una dilatación de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$. También es fácil ver que $\tau:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ no tiene ningún punto fijo, es decir τ es una traslación de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ que manda P a P'. ∎

Proposición 1.10 *Dados tres puntos distintos y alineados $P,Q,Q'\in\mathbb{A}$, existe una (única) dilatación σ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ que deja fijo a P y satisface $\tau(Q)=Q'$.*

Demostración. Es análoga a la de la proposición 1.9. Ahora, en vez de considerar rectas paralelas y triángulos con lados paralelos cuyos vértices están en dichas rectas, se consideran triángulos con lados paralelos cuyos vértices están en rectas que pasan por P (véanse la figura 1.2 y la demostración de la proposición 1.4). ∎

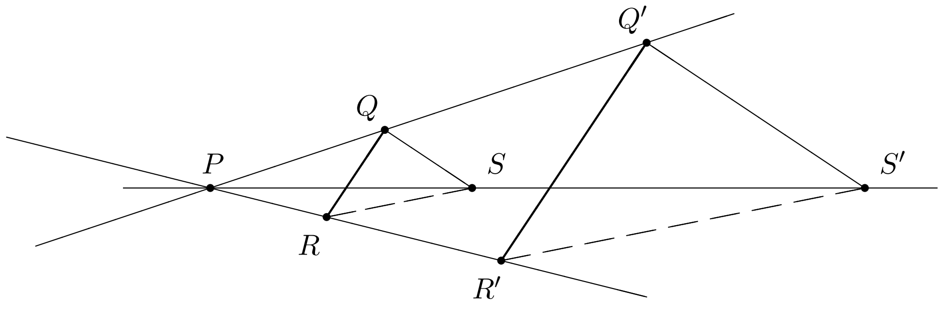


Figura 1.2

Proposición 1.11 *El conjunto de las dilataciones de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$, con la operación de componer, es un grupo, y el subconjunto de las traslaciones es un subgrupo normal. Además, si τ es una traslación y σ es una dilatación, entonces τ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tienen la misma dirección.*

Demostración. Es claro que la composición de automorfismo de $\mathcal{R}$ que dejan invariantes todos los puntos del hiperplano H es un automorfismo de $\mathcal{R}$ que deja invariante todos los puntos de H, es decir, las dilataciones de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ forman un grupo.

Sean ahora τ_1 y τ_2 dos traslaciones. Si τ_1^{-1} tiene algún punto fijo en $\mathbb{A}$, entonces τ_1 también tiene un punto fijo en $\mathbb{A}$ y por lo tanto $\tau_1^{-1}=\tau_1$ es la identidad; en cualquier caso, τ_1^{-1} es una traslación. Si $\tau_1\tau_2$ tiene algún punto fijo en $\mathbb{A}$, entonces $\tau_1^{-1}=\tau_2$ (porque coinciden en un punto de $\mathbb{A}$) y por lo tanto $\tau_1\tau_2$ es la identidad; en cualquier caso, $\tau_1\tau_2$ es una traslación. Queda probado que las traslaciones son un subgrupo del grupo de las dilataciones.

Sean ahora τ una traslación y σ una dilatación. Si $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tiene algún punto fijo en $\mathbb{A}$, entonces τ también tiene algún punto fijo en $\mathbb{A}$ y por lo tanto τ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$ son iguales a la identidad; en cualquier caso, $\sigma\tau\sigma^{-1}$ es una traslación. Además, supuesto que τ no es la identidad, dado un punto $P \in \mathbb{A}$, la dirección de τ es la de la recta $\sigma^{-1}(P) + \tau\sigma^{-1}(P)$, y la dirección de $\sigma\tau\sigma^{-1}$ es la de la recta $P + \sigma\tau\sigma^{-1}(P) = \sigma(\sigma^{-1}(P) + \tau\sigma^{-1}(P))$ (véase la demostración de 1.7). ∎

Lema 1.12 *Sea σ una dilatación de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ con algún punto fijo en $\mathbb{A}$. Si existe una traslación τ distinta de la identidad tal que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau$, entonces σ es la identidad.*

Demostración. Si $P \in \mathbb{A}$ es un punto tal que $\sigma(P) = P$, entonces P y $\tau(P)$ son dos puntos distintos de $\mathbb{A}$ que quedan fijos por σ, por lo tanto σ debe ser igual a la identidad. ∎

Proposición 1.13 *El grupo de las traslaciones de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ es conmutativo.*

Demostración. Sea τ_1 una traslación y sea τ_2 una dilatación. Supongamos que existe un punto $P \in \mathbb{A}$ tal que $\tau_1\tau_2(P) \neq \tau_2\tau_1(P)$ y veamos que entonces τ_2 no puede ser una traslación.

La suposición hecha implica que las traslaciones τ_1 y $\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ son distintas entre sí y distintas a la identidad, por lo tanto los tres puntos P, $\tau_1(P)$ y $\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2(P)$ son distintos; además, dichos puntos están alineados porque τ_1 y $\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ tienen la misma dirección (véase 1.11). Sea σ la única dilatación que satisface $\sigma(P) = P$ y $\sigma\tau_1(P) = \tau_2^{-1}\tau_1\tau_2(P)$; entonces $\sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ (porque son traslaciones que coinciden en P) y por lo tanto $\tau_2\sigma\tau_1(\tau_2\sigma)^{-1} = \tau_1$. Si $\tau_2\sigma$ no tiene ningún punto fijo en $\mathbb{A}$, entonces es una traslación y por lo tanto τ_2 no puede ser una traslación; si $\tau_2\sigma$ tiene algún punto fijo en $\mathbb{A}$, entonces (véase 1.12) $\tau_2 = \sigma^{-1}$ no es una traslación. ∎

Definiciones 1.14 El grupo conmutativo de todas las traslaciones de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ lo denotaremos T. Usaremos para T notación aditiva; así, la operación "composición" de T la denotaremos "$+$" y la traslación identidad de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ la denotaremos "0".

Diremos que un endomorfismo $\lambda : T \to T$ *conserva las direcciones* si satisface: dada $\tau \in T$, $\lambda\tau = 0$ ó τ y $\lambda\tau$ tienen la misma dirección. El conjunto de todos los endomorfismos de T con sus operaciones usuales (composición de endomorfimos y suma de endomorfismos) tiene estructura de anillo; dentro de dicho anillo, denotaremos por k el subconjunto de todos los endomorfismos de T que conservan las direcciones. Es fácil ver que la suma y el producto de dos elementos de k están en k; además, el endomorfismo identidad de T conserva las direcciones. Tenemos entonces que k es un anillo unitario (aunque puede ser no conmutativo).

Definición 1.15 De la proposición 1.11 se sigue que cada dilatación σ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ define un endomorfismo de T,

$$\begin{array}{ccc} T & \to & T \\ \tau & \mapsto & \sigma\tau\sigma^{-1}\,, \end{array}$$

que conserva las direcciones, es decir, existe un único elemento λ en k que satisface $\lambda\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$ para toda traslación $\tau \in T$; λ se denomina *razón* de σ.

Ejercicio 1.16 Dedúzcase del lema 1.12 que las traslaciones son exactamente las dilataciones cuya razón es igual a 1.

Proposición 1.17 *Dado un punto $P \in \mathbb{A}$ y dado $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, existe una única dilatación σ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ de razón λ que deja fijo a P.*

Demostración. Probemos la existencia (la unicidad se sigue fácilmente del lema 1.12). Definamos la aplicación $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ del siguiente modo: dado $Q \in \mathbb{A}$, si τ_{PQ} es la única traslación que manda P a Q, entonces $\sigma(Q) = (\lambda\tau_{PQ})(P)$. Supongamos probado que σ es una dilatación; entonces $\sigma^{-1}(\lambda\tau_{PQ})\sigma$ es una traslación que manda P a Q (pues $\sigma(P) = P$ al ser $\tau_{PP} = 0$), y por lo tanto $\sigma^{-1}(\lambda\tau_{PQ})\sigma = \tau_{PQ}$, es decir, $\lambda\tau_{PQ} = \sigma\tau_{PQ}\sigma^{-1}$; como τ_{PQ} es una traslación arbitraria obtenemos que la razón de σ es λ.

Probemos que σ es una dilatación, para lo cual veamos que σ está en las hipótesis de 1.6. Si σ fuera constante, como $\sigma(P) = P$, sería $\sigma(Q) = P$ para todo $Q \in \mathbb{A}$, es decir, $P = (\lambda\tau)(P)$ para toda $\tau \in T$; pero $\lambda\tau = 0$ para toda $\tau \in T$ sólo es posible si $\lambda = 0$. Por lo tanto σ no es constante. Consideremos ahora dos puntos distintos Q, $R \in \mathbb{A}$; tenemos que probar que $\sigma(R)$ está en la recta $\sigma(Q) + D$, donde $D \in H$ es la dirección de la recta $Q + R$. Como $\tau_{QR} + \tau_{PQ} = \tau_{PR}$, entonces $\lambda\tau_{QR} + \lambda\tau_{PQ} = \lambda\tau_{PR}$ y aplicando ambos miembros de la igualdad a P obtenemos $(\lambda\tau_{QR})((\lambda\tau_{PQ})(P)) = (\lambda\tau_{PR})(P)$, es decir, $(\lambda\tau_{QR})(\sigma(Q)) = \sigma(R)$. Si $\lambda\tau_{QR} = 0$, entonces $\sigma(R) = \sigma(Q) \in \sigma(Q) + D$, y si $\lambda\tau_{QR} \neq 0$, entonces $\sigma(Q) + \sigma(R) = \sigma(Q) + D$ (porque $\lambda\tau_{QR}$ y τ_{QR} tienen la misma dirección). ∎

Corolario 1.18 *k es un cuerpo y T es un k-espacio vectorial.*

Demostración. Sea $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$. Dadas dos dilataciones σ_1 y σ_2, es fácil probar que la razón de la dilatación $\sigma_1\sigma_2$ es igual al producto de la razón de σ_1 por la razón de σ_2 (es decir, el endomorfismo de T que define $\sigma_1\sigma_2$ es igual a la composición del endomorfismo que define σ_1 con el endomorfismo que define σ_2); en particular, si σ es una dilatación de razón λ, entonces σ^{-1} es una dilatación cuyo razón μ satisface $\lambda\mu = \mu\lambda = 1$. Esto prueba que k es un cuerpo.

Ahora, dados $\lambda, \mu \in k$ y $\tau, \tau' \in T$, tenemos: $\lambda(\tau+\tau') = \lambda\tau+\lambda\tau'$ porque λ es un endomorfismo de T, $(\lambda+\mu)\tau = \lambda\tau+\mu\tau$ por definición de suma de endomorfismos, $(\lambda\mu)\tau = \lambda(\mu\tau)$ por definición de composición de endomorfismos, y $1\tau = \tau$ trivialmente. ∎

Nota **1.19** Como en todo espacio vectorial, en T tenemos la noción de "dirección" definida por un vector no nulo; es fácil ver que está coincide con la noción de dirección que hemos venido usando.

Un hecho interesante y fácil de probar es que se puede hallar una configuración geométrica sencilla que es equivalente a la conmutatividad del cuerpo k.

1.20 Enunciado de Pappus: *Sean r_1 y r_2 dos rectas distintas y coplanarias de $\mathcal{R}$. Dados seis puntos distintos $A_1, A_2, A_3 \in r_1$, $B_1, B_2, B_3 \in r_2$ tales que ninguno de ellos es $r_1 \cap r_2$, los tres puntos $P_1 = (A_1+B_2)\cap(A_2+B_1)$, $P_2 = (A_2+B_3)\cap(A_3+B_2)$ y $P_3 = (A_1+B_3)\cap(A_3+B_1)$ estan alineados.*

Como el hiperplano H fijado en $\mathfrak{R}$ es arbitrario, en 1.20 podemos suponer que H corta al plano $r_1 + r_2$ en la recta $P_1 + P_2$, en cuyo caso tendríamos las dos siguientes versiones afines del enunciado de Pappus:

1.20 A (Si $r_1 \cap r_2 \in H$) Sean r_1 y r_2 dos rectas afines paralelas y distintas. Dados seis puntos afines y distintos $A_1, A_2, A_3 \in r_1$, $B_1, B_2, B_3 \in r_2$, si $A_1 + B_2 \parallel A_2 + B_1$ y $A_2 + B_3 \parallel A_3 + B_2$, entonces $A_1 + B_3 \parallel A_3 + B_1$. (Véase la figura 1.3.)

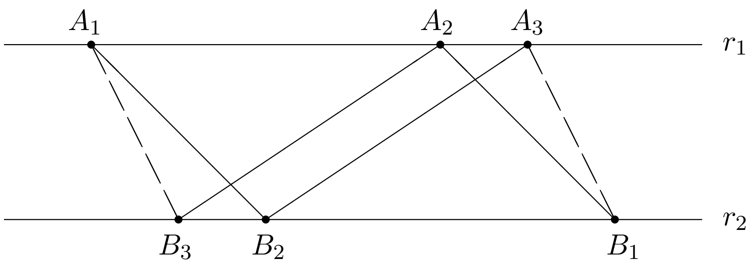


Figura 1.3

1.20 B (Si $r_1 \cap r_2 \notin H$) Sean r_1 y r_2 dos rectas afines que se cortan en un punto $P \in \mathbb{A}$. Dados seis puntos afines y distintos $A_1, A_2, A_3 \in r_1 - \{P\}$, $B_1, B_2, B_3 \in r_2 - \{P\}$, si $A_1 + B_2 \parallel A_2 + B_1$ y $A_2 + B_3 \parallel A_3 + B_2$, entonces $A_1 + B_3 \parallel A_3 + B_1$. (Véase la figura 1.4.)

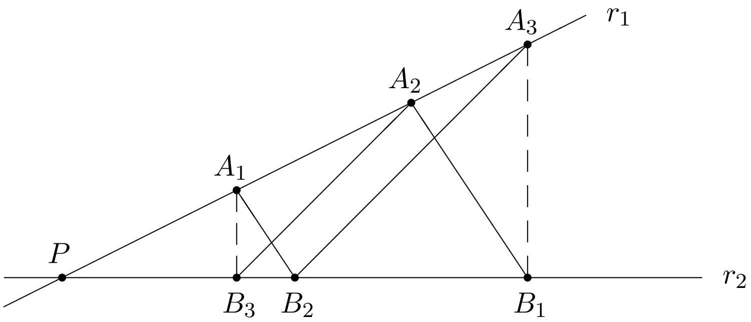


Figura 1.4

El enunciado 1.20 A siempre es cierto, y ello es debido a que el grupo T es conmutativo (la demostración del siguiente teorema indica cómo puede probarse la veracidad de 1.20 A).

Teorema 1.21 *El enunciado* 1.20 B *es verdadero si y sólo si el cuerpo* k *es conmutativo.*

Demostración. Sea G el conjunto de las dilataciones de centro $P = r_1 \cap r_2$. Según 1.17, hay una correspondencia biunívoca entre G y $k^* = k \setminus \{0\}$; además, si $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ tienen razones λ_1 y λ_2, respectivamente, entonces (según hemos dicho en la demostración de 1.18) la razón de $\sigma_1\sigma_2 \in G$ es igual a $\lambda_1\lambda_2$. En otras palabras, G es un grupo isomorfo a k^* y por lo tanto k será conmutativo si y sólo si G es conmutativo.

Supongamos que G es conmutativo y veamos que 1.20 B se cumple. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ tales que $\sigma_1(A_1) = A_2$ y $\sigma_2(B_3) = B_2$. Las hipótesis de 1.20 B nos dicen que $\sigma_1(B_2) = B_1$ y

$\sigma_2(A_2) = A_3$. Tenemos $\sigma_2\sigma_1(A_1) = \sigma_2(A_2) = A_3$, y por lo tanto probar que $A_1 + B_3$ es paralela a $A_3 + B_1$ es equivalente a probar que $\sigma_2\sigma_1(B_3) = B_1$: $\sigma_2\sigma_1(B_3) = \sigma_1\sigma_2(B_3) = \sigma_1(B_2) = B_1$.

Si se cumple 1.20 B basta invertir el razonamiento anterior para llegar a que el grupo G es conmutativo. ∎

1.22 En todo lo que sigue, los elementos del k-espacio vectorial T los denotaremos con letras como $e, v, \dots$, y dados $P \in \mathbb{A}$ y $e \in T$ escribiremos $P+e$ en vez de $e(P)$; con esta notación, si σ es una dilatación de razón λ que deja fijo un punto $P \in \mathbb{A}$, entonces tenemos $\sigma(P+e) = P+\lambda e$ para todo $e \in T$ (compruébese).

Recordemos que $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ denota el retículo de las variedades afines de $\mathcal{R}$ (= variedades de $\mathcal{R}$ no contenidas en el hiperplano H; véase la p. 1.2); es claro que cada subvariedad de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ está determinada por sus puntos afines (véase IV.1.9), es decir, si para cada $X \in \mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ denotamos $\mathbb{A}(X) = \{P \in \mathbb{A} \,:\, P \in X\}$, entonces, dadas $X_1, X_2 \in \mathcal{R}_{\mathbb{A}}$, tenemos $X_1 = X_2$ si y sólo si $\mathbb{A}(X_1) = \mathbb{A}(X_2)$.

Teorema 1.23 *El retículo $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ es isomorfo al retículo de las subvariedades afines de un espacio afín de dimensión n sobre el cuerpo k.*

Demostración. La aplicación $\mathbb{A} \times T \to \mathbb{A}$, $(P, e) \mapsto P + e$, es una acción del grupo aditivo T sobre $\mathbb{A}$ (dado $e \in T$, la aplicación $P \in \mathbb{A} \mapsto P + e \in \mathbb{A}$ es una biyección, y dados e, $v \in T$ y $P \in \mathbb{A}$ se satisface $P+(e+v) = (P+e)+v$); además, dicha acción es fiel ($P+e = P$ para algún $P \in \mathbb{A} \Rightarrow e = 0$) y transitiva (dados P, $Q \in \mathbb{A}$, existe $e \in T$ tal que $Q = P + e$). Tenemos entonces que $\mathbb{A}$ con la acción de T es un espacio afín sobre k; llamemos T-*subvariedades* a las subvariedades de $\mathbb{A}$ respecto de la T-acción.

Veamos que la aplicación que a cada variedad X de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ le asigna el conjunto de sus puntos afines $\mathbb{A}(X)$ establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de dimensión r de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ y las T-subvariedades de dimensión r; lo probaremos por inducción en r.

Para $r = -1$ y $r = 0$ no hay nada que decir. Sea $r \geq 0$ y probémoslo para $r + 1$ supuesto cierto para r. Sea X_{r+1} un elemento de dimensión $r + 1$ de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$; entonces podemos escribir $X_{r+1} = P + X_r$ donde X_r es un elemento de dimensión r de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ y $P \in \mathbb{A}$. Por hipótesis de inducción, existen $P_0 \in \mathbb{A}$ y un subespacio vectorial de T de dimensión r, V_r, tales que $\mathbb{A}(X_r) = P_0 + V_r = \{P_0 + v \,:\, v \in V_r\}$; como $P \notin X_r$, existe $e \in T$, $e \notin V_r$, tal que $P = P_0 + e$. Denotemos $V_{r+1} = V_r \oplus \langle e\rangle$ y veamos que $\mathbb{A}(X_{r+1}) = P_0 + V_{r+1}$.

Sea $Q \in \mathbb{A}(X_{r+1})$ y supongamos que $Q \notin X_r$ y $Q \neq P$ (en caso contrario es claro que $Q \in P_0 + V_{r+1}$); si la recta $P + Q$ corta a X_r en un punto afín Q', entonces existe $v \in V_r$ tal que $Q' = P_0 + v = P + (v - e)$, y como P, Q y Q' son tres puntos afines alineados, existe $\lambda \in k$ tal que

$$Q = P + \lambda(v - e) = P_0 + (1 - \lambda)e + \lambda v \in P_0 + V_{r+1} \,;$$

si la recta $P + Q$ corta a X_r en un punto P_∞ de H, entonces la recta $P_0 + P_\infty$ y la recta que pasa por Q con la dirección del vector e se cortan en un punto $Q' \in \mathbb{A}(X_r)$, por lo que existe $v \in V_r$ tal que $Q' = P_0 + v$ y $Q = P + v$, es decir, $Q = P_0 + e + v \in P_0 + V_{r+1}$.

Sea ahora $Q \in P_0 + V_{r+1}$, y sean $\lambda \in k$ y $v \in V_r$ tales que $Q = P_0 + \lambda e + v$; si $\lambda = 1$ y definimos $Q' = P_0 + v$, entonces las rectas $P_0 + Q'(\subseteq X_r)$ y $P + Q$ tienen igual dirección y por lo tanto $P + Q \subseteq X_{r+1}$; si $\lambda \neq 1$ y definimos $v' = v + (\lambda - 1)e$ y $Q' = P + (1 - \lambda)^{-1}v'$, entonces $Q = P + v' \in P + Q'$ y $Q' = P_0 + (1 - \lambda)^{-1}v \in X_r$, por lo tanto $Q \in X_{r+1}$.

Recíprocamente, sea V_{r+1} un subespacio vectorial de dimensión $r+1$ de T, sea $P_0 \in \mathbb{A}$ y consideremos la T-subvariedad $P_0 + V_{r+1}$. Podemos escribir $V_{r+1} = V_r \oplus \langle e \rangle$ donde $e \in V_{r+1}$ y V_r es un subespacio vectorial de dimensión r de T. Por hipótesis de inducción existe un elemento $X_r \in \mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ de dimensión r tal que $\mathbb{A}(X_r) = P_0 + V_r$, por lo que si $P = P_0 + e$, entonces se satisface $\mathbb{A}(P + X_r) = P_0 + V_{r+1}$ (compruébese).

Que la biyección probada es un isomorfismo de retículos se obtiene como consecuencia de que tanto las T-subvariedades como los elementos de $\mathcal{R}_{\mathbb{A}}$ están determinados por sus puntos. En particular obtenemos que la dimensión del espacio afín que la T-acción define en $\mathbb{A}$ es igual a n, ya que $\dim \mathcal{R}_{\mathbb{A}} = n$. ∎

Teorema 1.24 *El retículo $\mathcal{R}$ es isomorfo al retículo de las variedades lineales del espacio proyectivo $\mathbb{P}(T \oplus k)$.*

Demostración. Consideremos el k-espacio vectorial $E = T \oplus k$; según 1.23 tenemos $\dim E = n+1$. Fijemos un punto $P_0 \in \mathbb{A}$ y consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A} & \longrightarrow & E = T \oplus k \\ P & \longmapsto & f(P) = (v,1) \quad \text{tal que} \quad P_0 + v = P\,; \end{array}$$

la aplicación f es afín e inyectiva (su aplicación lineal asociada es $\vec{f} : T \to E$, $\vec{f}(v) = (v,0)$), de modo que f identifica el espacio afín $\mathbb{A}$ con el hiperplano afín $\{(v,1) \;:\; v \in T\}$ de E (es decir, E es la extensión vectorial de $\mathbb{A}$).

Consideremos el morfismo canónico $\pi : E \to \mathbb{P}(E)$, $0 \neq e \mapsto \pi(e) = \langle e \rangle$, y veamos que $\mathcal{R} \approx \mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$, para lo cual será suficiente probar que existe una colineación $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}(E)$. Dado $P \in \mathbb{P}$, si $P \in \mathbb{A}$, entonces definimos $\varphi(P) = \pi(f(P))$, y si $P \in H$, entonces existe una traslación $v \in T - \{0\}$ cuya dirección es P (véanse 1.7 y 1.9) y definimos $\varphi(P) = \pi(v,0)$.

Probemos que la aplicación φ definida es biyectiva. Por una parte, como $\mathbb{A}$ es un hiperplano afín de E cuya dirección es T, tenemos que la aplicación $\mathbb{A} \xrightarrow{\pi f} \mathbb{P}(E)$ es inyectiva e identifica $\mathbb{A}$ con el conjunto de los puntos de $\mathbb{P}(E)$ que no están en $\pi(T)$, es decir, $\varphi_{|_{\mathbb{A}}} : \mathbb{A} \to \mathbb{P}(E) - \pi(T)$ es una biyección; por otra parte, dado $\pi(v,0) \in \pi(T)$, si $P \in H$ es la dirección de la traslación v, entonces $\varphi(P) = \pi(v,0)$, con lo que es claro que $\varphi_{|_H} : H \to \pi(T)$ es también una biyección.

Para terminar, la demostración de que φ manda ternas de puntos alineados a ternas de puntos alineados es un sencilla comprobación. ∎

Nota **1.25** Hemos construido un cuerpo k tal que $\mathcal{R}$ es una geometría sobre k. Sin embargo dicho cuerpo no está asociado canónicamente a $\mathcal{R}$ porque lo hemos determinado fijando un hiperplano H en $\mathcal{R}$. Fijado otro hiperplano H' distinto de H obtendríamos otro cuerpo k' distinto de k. Se puede probar que cuando en $\mathcal{R}$ se satisface el teorema de Pappus, el cuerpo k no depende del hiperplano fijado y por lo tanto está canónicamente asociado al retículo $\mathcal{R}$.

Teorema 1.26 *Sean k y k' cuerpos, sean E y E' espacios vectoriales de dimensión ≥ 3 sobre k y k', respectivamente, y denotemos $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{P}(E))$ y $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(\mathbb{P}(E'))$. Dado un isomorfismo de retículos $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, existe un isomorfismo semi-lineal $g : E \to E'$ que satisface $\tilde{g} = \varphi$.*

Demostración. Fijemos en $\mathcal{R}$ un hiperplano H y un punto P_0 que no esté en H. Sea V el subespacio vectorial de E tal que $H = \pi(V)$ y fijemos un representante $e_0 \in E$ de P_0; en particular $e_0 \notin V$ y por lo tanto $E = \langle e_0 \rangle \oplus V$. Si consideramos en E el hiperplano afín $\mathbb{A} = e_0 + V$, entonces vimos en el capítulo III que tenemos la identificación $\mathbb{A} = \{P \in \mathbb{P}(E) : P \notin H\}$ (la cual significa que cada punto de $\{P \in \mathbb{P}(E) : P \notin H\}$ tiene un único representante en $e_0 + V$); en particular, identificando el punto P_0 con su representante e_0 $(\in \mathbb{A})$ obtenemos

$$\mathbb{A} = P_0 + V = \{P \in \mathbb{P}(E) : P \notin H\} \subset E\,, \qquad E = \langle P_0 \rangle \oplus V\,.$$

Como φ es un isomorfismo de retículos, es claro que $H' = \varphi(H)$ es un hiperplano de $\mathcal{R}'$ y $P'_0 = \varphi(P_0)$ es un punto de $\mathcal{R}'$ que no está en H', e igual que antes tenemos

$$\mathbb{A}' = P'_0 + V' = \{P' \in \mathbb{P}(E') : P' \notin H'\} \subset E'\,, \qquad E' = \langle P'_0 \rangle \oplus V'\,,$$

donde V' es el subespacio vectorial de E' que satisface $\pi(V') = H'$.

Empecemos ya a construir el isomorfismo semi-lineal. Para cada vector $v \in V$ existe un único vector en V' que denotaremos $f(v)$ y satisface

$$\varphi(P_0 + v) = P'_0 + f(v)$$

(ya que $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ manda puntos afines a puntos afines), de modo que tenemos definida una aplicación $f : V \to V'$. Es claro que f es una biyección (porque la restricción de φ a los puntos de $\mathbb{A}$ establece una biyección entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$). Veamos que f es un isomorfismo de grupos, es decir, dados vectores $u, v \in V$ (que podemos suponer no nulos porque claramente $f(0) = 0$), probemos que $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Supongamos primero que u y v son linealmente independientes y denotemos

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + u\,, & P_2 &= P_0 + v\,, & P_3 &= P_0 + u + v\,, \\ P'_1 &= P'_0 + f(u)\,, & P'_2 &= P'_0 + f(v)\,, & P'_3 &= P'_0 + f(u) + f(v)\,. \end{aligned}$$

El punto P_3 es la intersección de la recta paralela a $P_0 + P_2$ que pasa por P_1 con la recta paralela a $P_0 + P_1$ que pasa por P_2, por lo tanto (como $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ es un isomorfismo de retículos), $\varphi(P_3) = P'_0 + f(u + v)$ es la intersección de la recta paralela a $P'_0 + P'_2$ que pasa por P'_1 con la recta paralela a $P'_0 + P'_1$ que pasa por P'_2; pero esta última intersección es P'_3, es decir, $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Supongamos ahora que u y v son linealmente dependientes; si elegimos un vector $e \in V$ que no esté en $\langle u \rangle$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(u + v) + f(e) &= f(u + v + e) = f(u + e + v) \\ &= f(u + e) + f(v) = f(u) + f(e) + f(v) \end{aligned}$$

y por lo tanto $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Geométricamente, el isomorfismo de grupos f es el siguiente: a cada traslación τ de $\mathbb{A}$ le hemos asignado la única traslación τ' de $\mathbb{A}'$ que satisface $\varphi\tau = \tau'\varphi$; además $(\tau_1\tau_2)' = \tau'_1\tau'_2$. Por otra parte, de lo probado se obtiene inmediatamente la siguiente propiedad: cualesquiera que sean $P \in \mathbb{A}$ y $v \in V$ se satisface

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + f(v)\,. \tag{*}$$

Definamos ahora el isomorfismo de cuerpos $h : k \to k'$. En primer lugar probemos que si σ es una dilatación de $\mathbb{A}$ que deja fijo a P_0, entonces existe una única dilatación de $\mathbb{A}'$ que denotaremos σ' y satisface que es conmutativo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}' \\ \sigma\big\downarrow & & \big\downarrow\sigma' \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}'\,. \end{array} \qquad \varphi\sigma = \sigma'\varphi$$

Efectivamente, sea P_1 un punto de $\mathbb{A}$ distinto de P_0 y denotemos $P_2 = \sigma(P_1)$. Si $P_1 = P_2$, entonces σ es la identidad y por lo tanto σ' debe ser también la identidad. Supongamos que $P_1 \neq P_2$ y denotemos $P_1' = \varphi(P_1)$, $P_2' = \varphi(P_2)$; si σ' es la única dilatación de $\mathbb{A}'$ que deja fijo a P_0' y manda P_1' a P_2', veamos que σ' es la dilatación buscada. Dado $Q \in \mathbb{A}$, tenemos que demostrar que $\sigma'(\varphi(Q)) = \varphi(\sigma(Q))$, para lo cual podemos suponer (como hemos hecho otras veces) que Q no está en la recta $P_0 + P_1 + P_2$. Sabemos que $\sigma(Q)$ es la intersección de la recta $P_0 + Q$ con la recta que pasa por P_2 y es paralela a $P_1 + Q$, por lo tanto $\varphi(\sigma(Q))$ debe ser la intersección de la recta $P_0' + \varphi(Q)$ con la recta que pasa por P_2' y es paralela a $P_1' + \varphi(Q)$; pero esta última intersección es precisamente $\sigma'(\varphi(Q))$.

Dadas dilataciones σ_1 y σ_2 de $\mathbb{A}$ es fácil comprobar que se satisface $(\sigma_1\sigma_2)' = \sigma_1'\sigma_2'$ (es decir, de las igualdades $\varphi\sigma_1 = \sigma_1'\varphi$ y $\varphi\sigma_2 = \sigma_2'\varphi$ se obtiene $\varphi\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1'\sigma_2'\varphi$); en particular, como a la dilatación identidad de $\mathbb{A}$ le corresponde la dilatación identidad de $\mathbb{A}'$, obtenemos que para toda dilatación σ de $\mathbb{A}$ se satisface $(\sigma^{-1})' = (\sigma')^{-1}$.

Definimos la aplicación $h : k \to k'$ del siguiente modo: $h(0) = 0$, y dado $\lambda \in k^*$, si σ es la única dilatación de $\mathbb{A}$ que deja fijo a P_0 y tiene razón λ, entonces $h(\lambda)$ es la razón de σ'; es claro que la aplicación h es biyectiva (por el mismo motivo por el que dijimos que la aplicación f es biyectiva).

Antes de probar que h es un morfismo de cuerpos (y por lo tanto es un isomorfismo de cuerpos), veamos que dados $v \in V$ y $\lambda \in k^*$ se satisface

$$f(\lambda v) = h(\lambda) f(v)\,. \tag{**}$$

Efectivamente, si pensamos el vector v como una traslación τ de $\mathbb{A}$ y el escalar λ como una dilatación σ de $\mathbb{A}$ que deja fijo a P_0, entonces el vector λv es la traslación $\sigma\tau\sigma^{-1}$ y por lo tanto (**) es equivalente a la igualdad $(\sigma\tau\sigma^{-1})' = \sigma'\tau'(\sigma')^{-1}$, la cual se deduce fácilmente de todo lo probado ya.

Probemos que h es un morfismo de cuerpos. De lo dicho hasta ahora se obtienen trivialmente las igualdades $h(1) = 1$ y $h(\lambda_1\lambda_2) = h(\lambda_1)h(\lambda_2)$. Veamos que h separa también la suma. Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in k^*$, sean σ_1, σ_2 y σ las dilataciones de $\mathbb{A}$ que dejan fijo a P_0 y cuyas razones son λ_1, λ_2 y $\lambda_1 + \lambda_2$, respectivamente. Por una parte, la razon de σ' es $h(\lambda_1 + \lambda_2)$; por otra parte, dado $v \in V$, de (*), (**) y la igualdad $\sigma'\varphi = \varphi\sigma$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma'(P_0' + f(v)) &= \sigma'(\varphi(P_0 + v)) = \varphi(\sigma(P_0 + v)) \\ &= \varphi(P_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)v) = \varphi((P_0 + \lambda_1 v) + \lambda_2 v) \\ &= \varphi(\sigma_1(P_0 + v) + \lambda_2 v) = \varphi(\sigma_1(P_0 + v)) + f(\lambda_2 v) \\ &= \sigma_1'(\varphi(P_0 + v)) + h(\lambda_2)f(v) = \sigma_1'(P_0 + f(v)) + h(\lambda_2)f(v) \\ &= P_0' + [h(\lambda_1) + h(\lambda_2)]\, f(v)\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue que la razón de σ' es $h(\lambda_1) + h(\lambda_2)$.

Para terminar, teniendo en cuenta que $E = \langle P_0 \rangle \oplus V$ y $E' = \langle P'_0 \rangle \oplus V'$, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} g : E & \to & E' \\ \lambda P_0 + v & \mapsto & h(\lambda) P'_0 + f(v)\,. \end{array}$$

Es fácil ver que g es un isomorfismo semi-lineal de isomorfismo de cuerpos asociado h. Se deja como ejercicio comprobar que la proyectividad de Staudt que se obtiene al proyectivizar g es la colineación $\varphi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ definida por el isomorfismo de retículos $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$. ∎

Apéndice B

Geometrías Clásicas

Los objetivos de este capítulo son dos: por una parte, discutir la "definición geométrica" de "espacio euclídeo", del cual hemos dado la definición algebraica; por otra parte, generalizar la definición de espacio euclídeo para obtener las conocidas como "geometrías clásicas" (que incluyen modelos geométricos no euclídeos). Comenzaremos con una breve introducción histórica sobre el origen de las geometrías no euclídeas.

1 Geometrías No Euclídeas

El problema de las geometrías no euclídeas aparece con el famoso "quinto postulado de Euclides". Euclides desarrolló una geometría de forma axiomática partiendo de los siguientes postulados (que no transcribimos de modo riguroso):

$1^{\S}$. Por dos puntos distintos pasa una única recta.

$2^{\S}$. Las rectas tienen longitud infinita.

$3^{\S}$. Existen circunferencias con centros y radios dados cualesquiera.

$4^{\S}$. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

$5^{\S}$. Si dos rectas distintas de un plano son cortadas por una tercera recta en ángulos rectos, entonces las primeras rectas no se cortan.

Dado que de los cuatro primeros postulado se sigue que se pueden trazar perpendiculares a una recta dada, es claro que del $5^{\S}$ postulado se sigue que por un punto exterior a una recta r pasa una única recta paralela a r (esto es, coplanaria con r y que no corta a r).

Desde tiempos de Euclides, el $5^{\S}$ postulado parecía menos evidente que los demás, por lo que desde esos tiempos se intentó probar el $5^{\S}$ postulado a partir de los restantes. Sin embargo todos los intentos de demostración resultaron ser infructuosos. En el siglo XVIII, Saccheri creyó haberlo logrado; veamos cómo hizo la demostración.

Primero construyó un cuadrilátero de la siguiente forma: Tomo un segmento de extremos A y B; por dichos extremos trazó dos perpendiculares y colocó en ellas dos puntos C y D a una misma distancia λ; para completar el cuadrilátero tomo la recta que pasa por C y D (véase la figura 12.1).

Seguidamente probó, sin utilizar el $5^{\S}$ postulado, que los ángulos formados en los vértices C y D eran iguales. Entonces hizo tres distinciones: $\theta < \pi/2$, $\theta = \pi/2$ y $\theta > \pi/2$. A continuación demuestra que si en un cuadrilátero se da uno de los tres casos, entonces, en todos los demás cuadriláteros que pueden formarse en esa geometría también se da el mismo caso. Después prueba que el caso $\theta = \pi/2$ es equivalente al $5^{\S}$ postulado. Además, al suponer la hipótesis $\theta > \pi/2$ obtiene que las rectas son de longitud finita, lo cual contradice el $2^{\S}$ postulado y por lo tanto elimina dicha hipótesis. Le queda el caso $\theta < \pi/2$, en el cual no es capaz de llegar a ninguna contradicción pero en el que obtiene resultados que él supone absurdos, por lo que considera que el $5\ ^{\S}$ postulado queda demostrado.

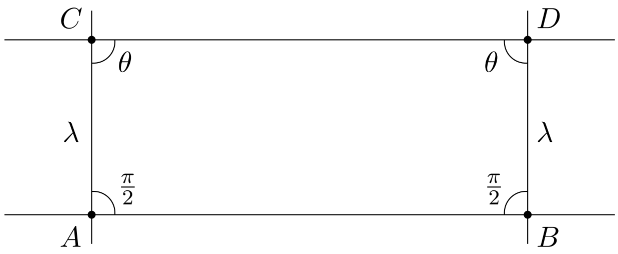


Figura 12.1

Los resultados que Saccheri obtiene al analizar el caso $\theta < \pi/2$ son extraos pero no contradictorios. En el siglo XIX, Gauss, Lobachevsky y Bolyai desarrollan geometrías no euclídeas eliminando el $5^{\S}$ postulado y sustituyéndolo por la hipótesis $\theta < \pi/2$. Gauss no se atrevió a publicar estos resultados por miedo a ser considerado contrario a las ideas filosóficas de Kant. Lobachevsky y Bolyai sí publican estas teorías, pero la mayoría de los matemáticos de la época no las aceptan por considerarlas internamente contradictorias. Más tarde, Beltrami construyó un modelo de la geometría de Lobachevsky dentro de una geometría euclídea, y probó que si dicho modelo es internamente contradictorio, entonces la geometría euclídea en la que se encuentra también es contradictoria.

Nosotros también vamos a construir (en dimensión 2 para simplificar) modelos geométricos no euclídeos.

1.1 Geometría pseudo-euclídea: Consideremos el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ sobre el cuerpo real. Para desarrollar una Geometría similar a la euclídea necesitamos definir el concepto de perpendicularidad, es decir, tenemos que definir cuándo dos rectas son perpendiculares. Ahora bien, dos rectas se corresponden con un par de puntos del dual. Diremos entonces que dos rectas son perpendiculares cuando correspondan a un par de puntos del dual que son conjugados respecto de una cónica fijada.

Podemos definir así una *geomatría pseudo-euclídea* consistente en *el plano proyectivo* $\mathbb{P}_2$ *junto con una cónica del plano proyectivo dual*, $\langle \Omega^2 \rangle$, a la que podemos denominar *cónica del absoluto en el dual*. En esta geometría dos rectas serán *perpendiculares* cuando correspondan a puntos del dual conjugados respecto de $\langle \Omega^2 \rangle$.

Diremos que un punto de $\mathbb{P}_2$ es un *punto propio del dominio de la geometría*, cuando se corresponda con una recta del dual que no corte a la cónica del absoluto. Veamos qué sentido tiene esta definición. Consideremos el haz de rectas que pasan por un punto P; dichas rectas se corresponden en el dual con puntos contenidos en la recta p (recta del dual que se corresponde con el punto P), y si p corta a $\langle \Omega^2 \rangle$, entonces los puntos de corte resultante son autoconjugados respecto de $\langle\Omega^2\rangle$, por lo que dichos puntos se corresponderían con rectas de $\mathbb{P}_2$ que pasan por P y que son autoperpendiculares. Para eliminar esta patología es por lo que nos quedaremos con los puntos propios del dominio de la geometría.

En este modelo que hemos construido, según la naturaleza de la cónica $\langle\Omega^2\rangle$ vamos a obtener distintas geometrías. (En lo que sigue, $\langle\Omega_2\rangle$ denotará la cónica dual en $\mathbb{P}_2$ de la cónica $\langle\Omega^2\rangle$.)

1.2 Geometría Elíptica: Cuando $\langle\Omega^2\rangle$ es no singular y de índice 0 (es decir, una cónica no singular imaginaria), entonces estamos en la denominada *geometría elíptica*. En este caso la cónica dual $\langle\Omega_2\rangle$ es también no singular y de índice 0 (y por lo tanto imaginaria)

Por ser $\langle\Omega^2\rangle$ imaginaria no existen rectas en $\mathbb{P}_2^*$ que la corten, por lo que el dominio de la Geomería Elíptica son todos los puntos de $\mathbb{P}_2$. Observemos que en esta geometría no se cumple el 5§ postulado de Euclides, ya que en el plano proyectivo dos rectas distintas siempre se cortan y por lo tanto no hay rectas paralelas.

En esta geometría, además del concepto de perpendicularidad existe la siguiente noción de distancia: dados puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_2$, si Q_1 y Q_2 son los puntos imaginarios en los que la recta $P_1 + P_2$ corta a la cónica $\langle\Omega_2\rangle$, entonces se define la distancia entre los puntos P_1 y P_2 como

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) := |\ln(P_1, P_2; Q_1, Q_2)|$$

(al ser Q_1 y Q_2 puntos imaginarios - véase la figura 1.2 -, el logaritmo neperiano que aparece en la anterior igualdad será un número complejo, y es por eso que debemos tomar su módulo para obtener un número real no negativo; obsérvese que de las propiedades de la razón doble y del logaritmo neperiano se deduce fácilmente que la definición dada por la anterior igualdad no depende del orden de los puntos P_1 y P_2, ni del orden de los puntos Q_1 y Q_2).

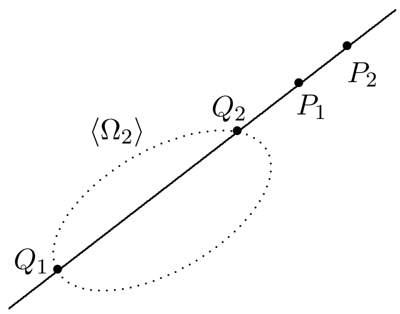


Figura 1.2

La "distancia" definida satisface las propiedades usuales de las distancias:
- $\mathrm{d}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$;
- $\mathrm{d}(P_1, P_2) = \mathrm{d}(P_2, P_1)$;
- $\mathrm{d}(P_1, P_3) \leq \mathrm{d}(P_1, P_2) + \mathrm{d}(P_2, P_3)$.

Algunas características más de esta geometría son:
- Dados dos puntos, el camino más corto que los une es la recta que pasa por ellos.
- Todas las rectas tienen longitud finita igual a 2π.
- La suma de los tres ángulos de un triángulo es mayor que π (será tanto mayor cuanto más grande sea el área del triángulo).
- La Geometría Elíptica corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri.

1.3 Geometría Hiperbólica: Cuando $\langle\Omega^2\rangle$ es no singular y de índice 1 (es decir, una cónica no singular real), entonces estamos en la denominada *geometría hiperbólica ó de Lobachevsky*. En este caso la cónica dual $\langle\Omega_2\rangle$ también es no singular y de índice 1.

Dado un punto $P \in \mathbb{P}$, si p es la recta que se corresponde con él en el espacio proyectivo dual, entonces las rectas tangentes a la cónica $\langle\Omega_2\rangle$ trazadas desde P se corresponden en el dual con los puntos de corte de la recta p con la cónica $\langle\Omega^2\rangle$. Como por definición P está en el dominio de la geometría si y sólo si la recta p no corta a la cónica $\langle\Omega^2\rangle$, obtenemos que el dominio de esta geometría son los puntos de $\mathbb{P}_2$ desde los que no se pueden trazar rectas tangentes a $\langle\Omega_2\rangle$ (es decir, los puntos tales que las tangentes a la cónica que pasan por ellos son imaginarias); dichos puntos son los interiores a la cónica (véase el problema VII.6.7).

Resumiendo, el dominio de la Geometría Hiperbólica definida por la cónica $\langle\Omega^2\rangle$ no singular de índice 1 es el interior de la cónica $\langle\Omega_2\rangle$ (véase la figura 1.3). Las rectas de esta geometría serán las rectas de $\mathbb{P}_2$ que pasan por puntos interiores de la cónica.

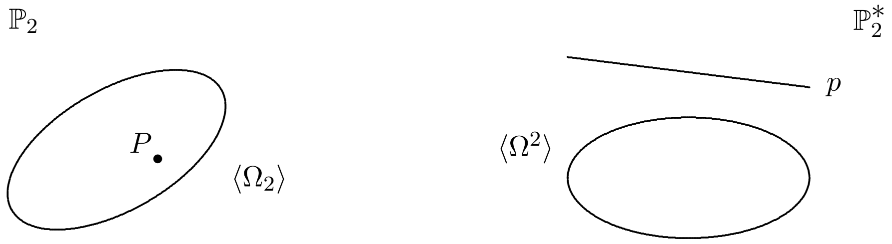


Figura 1.3

Al igual que en la Geometría Elíptica, en esta geometría también puede definirse una distancia: dados puntos P_1, P_2 de la geometría, la recta $P_1 + P_2$ corta necesariamente a la cónica $\langle\Omega_2\rangle$ en dos puntos distintos Q_1 y Q_2, y se define la distancia de P_1 a P_2 como

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) := |\ln(P_1, P_2; Q_1, Q_2)|\,.$$

Se comprueba que las función "d" así definida tiene las propiedades de una distancia.

Observemos que en esta geometría tampoco se cumple el $5^{\S}$ postulado de Euclides: dada una recta r y un punto P exterior a ella (dentro del dominio de la geometría), existen muchas rectas de la geometría que pasan por P y no cortan a r, es decir, existen muchas paralelas a r que pasan por P; todas esas paralelas son las rectas de la geometría que cortan a r en un punto de $\mathbb{P}_2$ no interior a la cónica $\langle\Omega_2\rangle$.

Algunas características de la Geometría Hiperbólica son:

• Dados dos puntos, el camino más corto que los une es la recta que pasa por ellos.

• Dada una recta de la geometría, la parte de ella que está dentro del dominio de la geometría tiene longitud infinita.

• La suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que π (será tanto menor cuanto más pequeo sea al área del triángulo).

• La Geometría Hiperbólica corresponde a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri.

1.4 Geometría Euclídea (ó parabólica): Cuando $\langle\Omega^2\rangle$ es singular de rango 2 e índice 0 (es decir, un par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real), entonces estamos en la Geometría Euclídea. Veámoslo:

Si el lugar de la cónica del absoluto en el dual son las rectas imaginarias i y j que se cortan en el punto real R, y si r es la recta de $\mathbb{P}_2$ que se corresponde con R, entonces un punto $P \in \mathbb{P}_2$ está en el dominio de la geometría cuando la recta p de $\mathbb{P}_2^*$ que se corresponde con P no pasa por el punto R, es decir, cuando $P \notin r$; por lo tanto el dominio de esta geometría es el espacio afín real $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{P}_2, r)$. Además, $\langle \Omega_2 \rangle$ es una cuádrica no singular y de índice 0 sobre la recta r cuyo lugar está formado por los puntos imaginarios I y J que se corresponden con las rectas i y j, por lo que $(\mathbb{A}_2, r, \langle \Omega_2 \rangle)$ es un espacio afín ecuclídeo.

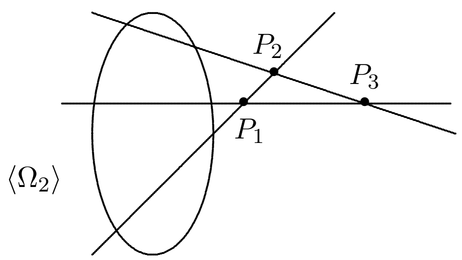
1.5 Nos quedan todavía dos posibles casos para $\langle \Omega^2 \rangle$: el rango es 2 y el índice es 1, y el rango es 1 y el índice es 0. Estos casos no tienen interés porque en ellos el dominio de la geometria es vacío, ya que en ambos casos en el lugar de la cónica $\langle \Omega^2 \rangle$ hay rectas y por lo tanto no existen rectas de $\mathbb{P}_2^*$ que no corten a la cónica.

1.6 Modelo Relativista: Hemos visto en 1.3 que en la Geometría Hiperbólica (esto es, cuando $\langle \Omega^2 \rangle$ es no singular de índice 1) el dominio de la geometría es el interior de la cónica $\langle \Omega_2 \rangle$. Podemos preguntarnos, qué ocurre en el exterior de la cónica? Pues bien, el exterior de la cónica es un "espacio relativista". Veámoslo:

Consideremos como dominio del modelo que vamos a describir el conjunto de puntos de $\mathbb{P}_2$ que no son interiores a la cónica $\langle \Omega_2 \rangle$. Llamaremos *trayectorias de la luz* a las rectas que son tangentes a la cónica, y llamaremos *trayectorias de un observador* a las rectas que corten a la cónica. Dados dos puntos P_1 y P_2 de la trayectoria de un observador, vamos a definir el *intervalo de tiempo* transcurrido desde que el observador pasa de P_1 a P_2 como

$$\Delta t_{(P_1,P_2)} := |\ln(P_1, P_2; Q_1, Q_2)|\,,$$

donde Q_1 y Q_2 son los puntos de corte de $\langle \Omega_2 \rangle$ con la trayectoria. Esta definición de intervalo temporal satisface las propiedades de una distancia, salvo la propiedad triángular que es al revés (véase la figura 1.4).



$$\Delta t_{(P_1,P_3)} \geq \Delta t_{(P_1,P_2)} + \Delta t_{(P_2,P_3)}$$

Figura 1.4

Sólamente con estas definiciones tenemos ya la famosa "paradoja de los gemelos": Supongamos que dos gemelos viajan juntos por una trayectoria, y que en un cierto punto P_1 uno de ellos cambia de trayectoria y el otro no; supongamos además que el que ha cambiado de trayectoria vuelve a cambiar en un cierto punto P_2 para encontrarse con el otro gemelo en un cierto punto P_3 de la trayectoria original; entonces el tiempo transcurrrido para el gemelo que cambió de trayectoria es menor que el transcurrido para el otro gemelo, es decir, el gemelo que se marchó vuelve más joven que el que se quedó (véase la figura 1.4).

Otra "paradoja" de este modelo es la siguiente: para un observador que se mueve en una trayectoria de la luz el tiempo no transcurre; efectivamente, si P_1 y P_2 son dos puntos exteriores a la cónica y tales que la recta $P_1 + P_2$ es tangente a la cónica en $Q_1 = Q_2$, entonces $\Delta t_{(P_1,P_2)} = |\ln(P_1, P_2; Q_1, Q_2)| = \ln 1 = 0$.

Definamos más conceptos en este modelo. Se dice que dos puntos P_1 y P_2 son *simultáneos respecto de un observador*, si $P_1 = P_2$, ó si la recta $P_1 + P_2$ y la trayectoria del observador son conjugadas respecto de la cónica. De la definición se sigue inmediatamente que la simultaneidad es una noción relativa, es decir, dos puntos que son simultáneos para un observador pueden no ser simultáneos para otro observador. Más aun, dados dos puntos distintos cualesquiera, existen infinitos observadores para los que son simultáneos (aquellos cuya trayectoria pasa por el polo de la recta que definen los dos puntos).

Este modelo relativista tiene un fallo importante: en él no existen flechas de tiempo (ya que no es posible dar una orientación en todas las trayectorias).

2 Discusión de la Noción de Espacio Afín

2.1 En el capítulo III se ha definido "espacio afín sobre un cuerpo k" como un conjunto $\mathbb{A}$ sobre el que opera de modo fiel y transitivo un k-espacio vectorial V mediante una operación $\mathfrak{t} : V \to \operatorname{Biy}(\mathbb{A})$, $v \mapsto \mathfrak{t}_v$. Para cada $v \in V$ se denomina "traslación respecto del vector v" a la aplicación biunívoca $\mathfrak{t}_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $P \mapsto \mathfrak{t}_v(P) := P + v$. Se llaman "rectas" de $\mathbb{A}$ a los subconjuntos suyos de la forma $P_0 + V'$ donde $P_0 \in \mathbb{A}$ y V' es un subespacio de V dimensión 1, y se llaman "planos" de $\mathbb{A}$ a los subconjuntos suyos de la forma $P_0 + V'$ donde $P_0 \in \mathbb{A}$ y V' es un subespacio de V dimensión 2. (Véase la sección III.1.)

Esta definición, que no es intuitivamente evidente la del espacio en el que vivimos, nos referiremos a ella como la "definición algebraica de espacio afín".

Observación **2.2** Nótese que en la definición algebraica de espacio afín que hemos dado en 2.1 no hemos exigido al espacio vectorial V que sea de dimensión finita, es decir, el espacio afín $\mathbb{A}$ puede ser de dimensión infinita. Obsérvese también que en dicha definición es irrelevante el que el cuerpo k sea conmutativo, es decir, podemos suponer que k es un *álgebra de división* (= cuerpo no necesariamente conmutativo).

A continuación damos una definición más intuitiva de espacio afín:

2.3 Definición geométrica de espacio afín: Un *espacio afín* consiste en un conjunto no vacío $\mathbb{A}$ cuyos elementos llamaremos *puntos*, junto con dos familias R y P de subconjuntos de $\mathbb{A}$, cuyos elementos llamaremos *rectas* y *planos*, respectivamente, cumpliendo los axiomas:

(i) Por dos puntos distintos de $\mathbb{A}$ pasa una única recta (y cada recta de $\mathbb{A}$ tiene al menos dos puntos distintos).

(ii) Por tres puntos no colineales de $\mathbb{A}$ (esto es, que no pertenecen a una misma recta) pasa un único plano (y cada plano de $\mathbb{A}$ contiene al menos tres puntos no colineales).

(iii) *Axioma de las paralelas:* Dados un punto y una recta en $\mathbb{A}$, existe una única recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta dada. (Se dice que dos rectas de $\mathbb{A}$ son *paralelas* si son iguales, ó si no se cortan y están sobre un mismo plano.)

(iv) La relación de paralelismo en $\mathbb{A}$ es transitiva (y por lo tanto de equivalencia).

Un subconjunto de $\mathbb{A}$ se dice que es un *subespacio*, si cada vez que contiene dos puntos distintos contiene también a la recta que pasa por ellos, y si cada vez que contiene tres puntos no colineales contiene también al plano que pasa por ellos. (La segunda condición es consecuencia de la primera cuando las rectas de $\mathbb{A}$ tienen al menos tres puntos distintos; compruébese.) Esta segunda condición puede sustituirse por la siguiente: si el subespacio contiene un punto y una recta, entonces contiene la correspondiente recta paralela.

Es fácil comprobar que $\mathbb{A}$ es un subespacio, que las rectas y los planos son subespacios, y que todo subespacio que contenga tres puntos no colineales es un espacio afín (considerando las rectas y los planos que contiene).

Dado un subespacio X de $\mathbb{A}$, se llama *dimensión* de X al máximo de las lomgitudes de las cadenas de subespacios de $\mathbb{A}$ de la forma $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$; dicha dimensión puede ser infinita.

Es claro que las rectas tienen dimensión 1, que los planos tienen dimensión 2, y que la dimensión de $\mathbb{A}$ es ≥ 2.

2.4 En todo lo que resta de sección supondremos que $\mathbb{A}$ es un espacio afín según la definición 2.3. Vamos a ver, sin profundizar en los detalles, que las definiciones algebraica y geométricas son equivalentes en dimensión ≥ 3. Para ello vamos a empezar probando que cuando la dimensión de $\mathbb{A}$ es ≥ 3, en $\mathbb{A}$ se satisfacen las versiones afines del teorema de Desargues conocidas como "Desargues menor" y "Desargues mayor". Fijemos antes alguna notación.

La noción de triángulo en $\mathbb{A}$ es la usual: se llama *triángulo* de $\mathbb{A}$ a tres puntos no colineales; tales puntos se denominan *vértices* del triángulo, y la recta que pasa por dos vértices distintos se llama *lado* del triángulo. Dado dos puntos distintos $A, B \in \mathbb{A}$, la única recta que pasa por ellos la denotaremos AB, y dado un triángulo $\{A, B, C\}$ de $\mathbb{A}$, el único plano que lo contiene lo denotaremos ABC (nótese que la notación varía ligeramente de la que hemos venido usando en los anteriores capítulos).

Lema 2.5 (Desargues menor) *Supongamos que la dimensión de $\mathbb{A}$ es ≥ 3, y sean $\{A, B, C\}$, $\{A', B', C'\}$ dos triángulos de $\mathbb{A}$ (sin vértices ni lados comunes) tales que las rectas AA', BB' y CC' son paralelas. Si el lado AB es paralelo al lado $A'B'$ y el lado AC es paralelo al lado $A'C'$, entonces el lado BC es paralelo al lado $B'C'$. (Figura 2.1.)*

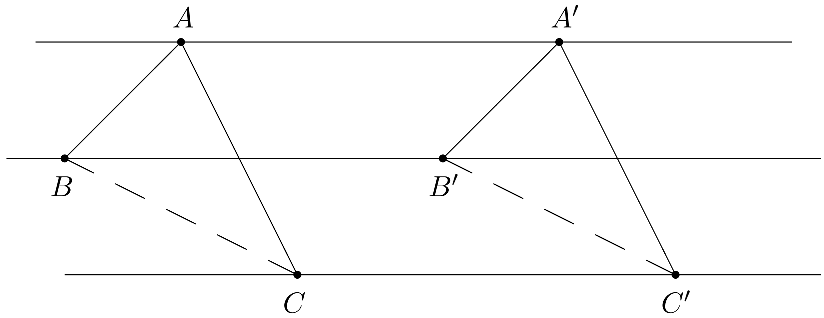


Figura 2.1

Demostración. Supongamos en primer lugar que los triángulos no son coplanarios, es decir, que $ABC \neq A'B'C'$. Como las rectas BB' y CC' son paralelas, los puntos B, C, B', C' son coplanarios y por lo tanto las rectas BC y $B'C'$ son paralelas o se cortan. Si se cortan en un punto P, entonces sea PD la recta paralela a AB que pasa por P, y sea PE la recta paralela a AC que pasa por P; como el plano ABC contiene los puntos no colineales P, D y E, debe satisfacerse $ABC = PDE$. De la transitividad del paralelismo se sigue que las rectas PD y $A'B'$ son paralelas y que las rectas PE y $A'C'$ son paralelas, y como los planos $A'B'C'$ y PDE tienen en común el punto P concluimos que son iguales (compruébese). Pero entonces $ABC = PDE = A'B'C'$, lo cual es una contradicción; por lo tanto las rectas BC y $B'C'$ son paralelas.

Supongamos ahora que los triángulos son coplanarios, es decir, que $ABC = A'B'C'$. Como la dimensión de $\mathbb{A}$ es ≥ 3 podemos considerar un punto $X \in \mathbb{A}$ que no sea coplanario con los triángulos. Sea r la recta que pasa por X y es paralela a AA', y sea X' el punto de intersección de r con la recta que pasa por A' y es paralela a AX (compruébese que X' existe). Por el caso anterior aplicado a los triángulos $\{A, B, X\}$ y $\{A', B', X'\}$ resulta que las rectas BX y $B'X'$ son paralelas; aplicando el caso anterior a los triángulos $\{A, C, X\}$ y $\{A', C', X'\}$ obtenemos que las rectas CX y $C'X'$ son paralelas; finalmente, aplicando el caso anterior a los triángulos $\{B, C, X\}$ y $\{B', C', X'\}$ resulta que las rectas BC y $B'C'$ son paralelas. ∎

Lema 2.6 (Desargues mayor) *Supongamos que la dimensión de* $\mathbb{A}$ *es* ≥ 3*, y sean* $\{A, B, C\}$*,* $\{A', B', C'\}$ *dos triángulos de* $\mathbb{A}$ *(sin vértices ni lados comunes) tales que las rectas* AA'*,* BB' *y* CC' *se cortan un punto. Si el lado* AB *es paralelo al lado* $A'B'$ *y el lado* AC *es paralelo al lado* $A'C'$*, entonces el lado* BC *es paralelo al lado* $B'C'$*. (Figura 2.2.)*

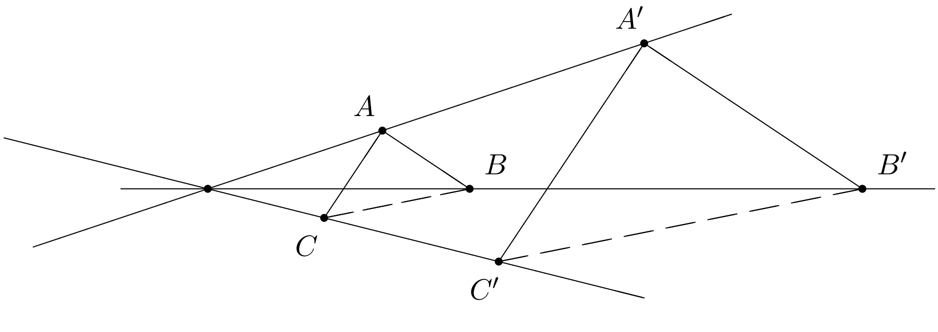


Figura 2.2

Demostración. Se prueba con argumentos similares a los usados para demostrar 2.5. ∎

Nota **2.7** No en todo plano afín geométrico se satisface el teorema de Desargues; los planos que lo satisfacen se denominan *arguesianos*; un ejemplo sencillo de plano no arguesiano lo dio Moulton en 1902 (es el plano construido en IV.1.12, sin aadirle los puntos del infinito). En el siglo XIX, cuando se estudiaba la fundamentación axiomática de la Geometría Proyectiva, no estaba nada claro si el teorema de Desargues era consecuencia ó no de otros axiomas, y es por eso que los autores aadían en la definición geométrica de espacio proyectivo el siguiente axioma: "se satisface el teorema de Desargues". Como ya se dijo en el capítulo IV, fue en 1898 cuando el matemático extremeo Ventura Reyes Prosper demostró que (en dimensión ≥ 3) el teorema de Desargues era consecuencia de las propiedades de la incidencia.

2.8 Ya sabemos (porque lo hemos probado en capítulos anteriores) que todo espacio afín en sentido algebraico es un espacio afín en sentido geométrico que satisface el teorema de Desargues. Como consecuencia se sigue que un plano no arguesiano no puede ser un plano afín algebraico. Salvo esta escepción, las definiciones algebraica y geométrica de espacio afín son equivalentes.

Teorema 2.9 *Todo espacio afín geométrico* $\mathbb{A}$ *de dimensión* ≥ 3 *es isomorfo a un espacio afín algebraico* $(\mathbb{A}, V)$ *sobre un álgebra de división.*

Análogamente, todo plano afín geométrico que sea arguesiano es isomorfo a un plano afín algebraico sobre un álgebra de división. [1]

Demostración. La demostración es laboriosa y nos limitaremos a dar las ideas generales (para demostrar las afirmaciones que no probamos pueden ser útiles las demostraciones hechas en el apéndice A).

Se define un *vector* como un par de puntos ordenados P_0P_1 del espacio afín $\mathbb{A}$, y se define del modo usual la *relación de equipolencia* de vectores. El teorema de Desargues se aplica para probar que la relación de equipolencia es de equivalencia, por lo que podemos construir el conjunto V de vectores módulo dicha relación. Se define la suma de vectores mediante el diagrama típico del paralelogramo, y aplicando de nuevo el teorema de Desargues se prueba que V con dicha suma es un grupo conmutativo.

Una vez que se dispone del grupo conmutativo $(V, +)$ se procede a construir el cuerpo de escalares del siguiente modo. Digamos que dos vectores poseen la misma dirección cuando yacen en rectas paralelas. Consideremos el conjunto k de los endomorfismos del grupo V que conservan las direcciones, es decir, las aplicaciones $\lambda : V \to V$ que satisfacen: (i) $\lambda(v+v') = \lambda(v)+\lambda(v')$; (ii) dirección de v = dirección de $\lambda(v)$. El conjunto k tiene de modo natural estructura de anillo (no necesariamente conmutativo) si consideramos sobre él las siguientes operaciones: la suma de k es la suma de endomorfismo, $(\lambda + \lambda')(v) := \lambda(v) + \lambda'(v)$, y el producto de k es la composición de endomorfismo, $(\lambda \cdot \lambda')(v) := \lambda(\lambda'(v))$; el elemento neutro de la suma es el endomorfismo nulo, mientras que el elemento neutro del producto es el endomorfismo identidad.

Automáticamente V adquiere estructura de k-módulo mediante el producto $\lambda \cdot v := \lambda(v)$. Para demostrar que k es un álgebra de división (y por consiguiente V es un k-espacio vectorial) se utiliza el siguiente resultado: Dados vectores no nulos v, v' con la misma dirección, existe un único $\lambda \in k$ tal que $\lambda \cdot v = v'$ (la demostración usa una vez más el teorema de Desargues). De este resultado se deduce que todo elemento no nulo $\lambda \in k$ posee inverso: Dado un vector no nulo v y su correspondiente transformado $v' = \lambda \cdot v$, el inverso de λ es el único elemento de k que transforma v' en v. Otra consecuencia del mencionado resultado es que dos vectores del k-espacio vectorial V tienen la misma dirección (con la definición dada en esta demostración) si y sólo si son proporcionales (es decir, si y sólo si tienen la misma dirección con la definición usual).

Finalmente se define para cada vector v una traslación $\mathfrak{t}_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$; con ello resulta una operación fiel y transitiva de V sobre $\mathbb{A}$ y por tanto se tiene un espacio afín algebraico $(\mathbb{A}, V)$, el cual tiene los mismos subespacios que el espacio afín geométrico de partida. ∎

[1] El término “isomorfo” que aparece en el enunciado se refiere a aplicaciones biunívocas que preservan los subespacios: la imagen de un subespacio es un subespacio y recíprocamente.

Nota **2.10** Según el teorema 2.9, es evidente que debe existir una estrecha relación entre las propiedades geométricas de un espacio afín $(\mathbb{A}, V)$ y las propiedades algebraicas del k-espacio vectorial V. Así, por ejemplo, es inmediato comprobar que la propiedad distributiva de la suma de vectores respecto del producto por escalares es equivalente al Teorema de Thales, cuyo enunciado es el siguiente: Sean r, r' dos rectas distintas en un plano afín que se cortan en un punto O. Si s y t son rectas paralelas y distintas que no pasan por O y no son paralelas ni a r ni a r', y si se denotan $A = r \cap s$, $B = r \cap t$, $A' = r' \cap s$, $B' = r' \cap t$, entonces, "proporción del segmento OA al segmento OB" = "proporción del segmento OA' al segmento OB'" = "proporción del segmento AA' al segmento BB'".

Otro ejemplo de esta estrecha relación es la existencia de una configuración geométrica sencilla que es equivalente a la conmutatividad del cuerpo de escalares de un espacio afín. En efecto; utilizando el teorema de Thales se prueba fácilmente que el cuerpo de escalares de una geometría afín es conmutativo, si y sólo si, en dicha geometría se satisface el Teorema de Pappus, cuyo enunciado es el siguiente (véase la figura 2.4): *Sean r y r' dos rectas de un espacio afín $\mathbb{A}$ que se cortan en un punto O. Dados seis puntos distintos $A, B, C \in r - \{O\}$, $A', B', C' \in r' - \{O\}$, si $AB' \parallel A'B$ y $BC' \parallel B'C$, entonces $AC' \parallel A'C$.*

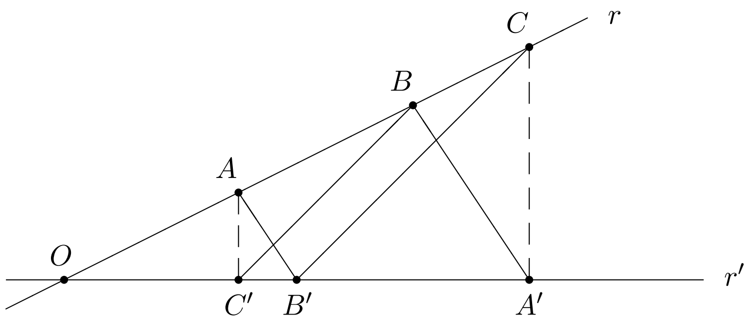


Figura 2.4

3 Discusión de la Noción de Espacio Afín Real

Para nuestra intuición las rectas tienen más propiedades de las que se deducen de los axiomas dados en la definición 2.3 para el espacio afín. Por ejemplo, tenemos la noción de que un punto de una recta esté "entre" otros dos puntos de tal recta. La formalización de este concepto de "entre" tendrá como consecuencia que el cuerpo de escalares tenga una estructura de orden. Antes de axiomatizar el concepto de "entre" conviene recordar algunos hechos sobre los cuerpos ordenados.

Definición 3.1 Un *cuerpo ordenado* consiste en un cuerpo k (no necesariamente conmutativo) junto con un subconjunto $\mathsf{P} \subset k$, cuyos elementos se llaman *positivos*, satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) $k = (-\mathsf{P}) \sqcup \{0\} \sqcup \mathsf{P}$;

(ii) $\mathsf{P} + \mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}$ y $\mathsf{P} \cdot \mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}$.

Un cuerpo ordenado (k, P) posee un orden total definido del siguiente modo: $x \geq y$ si y sólo si $x - y \in \mathsf{P} \sqcup \{0\}$. En particular, $x \in \mathsf{P}$ si y sólo si $x > 0$.

3.2 La noción de cuerpo ordenado se puede establecer en términos de la relación de orden: Un cuerpo ordenado es un cuerpo k dotado de una relación de orden total "$\leq$" que satisface las propiedades siguientes:
(a) Dado $x \in k$, sólo se satisface una de las opciones siguientes: $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$.
(b) Si $x, y \in k$ son tales que $x > 0$ e $y > 0$, entonces $x + y > 0$ y $xy > 0$.

Es claro que con esta definición tendríamos la igualdad $\mathsf{P} = \{x \in k \,:\, x > 0\}$.

Ejercicio 3.3 Para un cuerpo ordenado (k, P) se cumplen las siguientes propiedades:
(a) $(-\mathsf{P}) \cdot \mathsf{P} \subseteq (-\mathsf{P})$ y $(-\mathsf{P}) \cdot (-\mathsf{P}) \subseteq \mathsf{P}$;
(b) $x > y \Leftrightarrow$ para todo $z \in k$ se satisface $x + z > y + z$;
(c) si $z > 0$ entonces: $x > y \Rightarrow zx > zy$ y $xz > yz$;
(d) $x > y \Leftrightarrow -x < -y$;
(e) si $x > 0$ e $y > 0$ entonces: $x > y \Leftrightarrow (1/x) < (1/y)$.

Proposición 3.4 *Todo cuerpo ordenado es de característica cero.*

Demostración. El elemento 1 es positivo porque es un cuadrado. Como la suma de elementos positivos es positivo se concluye que todo natural es positivo en k, es decir, todo natural es no nulo en k. ∎

3.5 De 3.4 se sigue que todo cuerpo ordenado es una extensión del cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, y es trivial comprobar que el orden inducido sobre $\mathbb{Q}$ por el orden del cuerpo coincide con el orden usual. En particular, el orden usual es el único orden que admite $\mathbb{Q}$ (que lo dote de estructura de cuerpo ordenado).

Proposición 3.6 *El único orden que admite $\mathbb{R}$ es el usual. En consecuencia, el único automorfismo de cuerpo que posee $\mathbb{R}$ es la identidad.*

Demostración. Sea P el conjunto de los elementos positivos de $\mathbb{R}$ para el orden usual, y sea P' el conjunto de los elementos positivos para otro orden. Dado que P consiste en los cuadrados no nulos de $\mathbb{R}$ y que los cuadrados no nulos son positivos para cualquier orden, se deduce la inclusión $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}'$. Luego $-\mathsf{P} \subseteq -\mathsf{P}'$. Tales inclusiones deben ser igualdades, ya que $\mathbb{R} - \{0\} = \mathsf{P} \sqcup (-\mathsf{P}) = \mathsf{P}' \sqcup (-\mathsf{P}')$.

La segunda parte se deja como ejercicio para el lector. ∎

Observación **3.7** Un cuerpo puede admitir diferentes órdenes. Por ejemplo, las identificaciones $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}(\pi) \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}(\mathrm{e}) \subset \mathbb{R}$ inducen por restricción del orden de $\mathbb{R}$ distintos órdenes sobre $\mathbb{Q}(x)$.

Definición 3.8 Un cuerpo *arquimediano* es un cuerpo ordenado (k, P) en el que para cada elemento $x \in \mathsf{P}$ existe un natural n tal que $x < n$. Si (k, P) es un cuerpo arquimediano, entonces es claro que para todo $x \in -\mathsf{P}$ existe un natural n tal que $-n < x$.

El que un cuerpo ordenado sea arquimediano significa que en él no existen elementos que "en valor absoluto sean infinitamente grandes" (esto es, que en valor absoluto sean mayores que todo natural). Un cuerpo arquimediano (k, P) tampoco posee elementos "infinitamente pequeos en valor obsoluto": dado $x \in \mathsf{P}$, si n es un natural tal que $(1/x) < n$, entonces $(1/n) < x$.

Teorema 3.9 *Todo cuerpo arquimediano es canónicamente isomorfo como cuerpo ordenado a un subcuerpo de* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea k un cuerpo arquimediano. Como k contiene una copia de $\mathbb{Q}$, para cada $x \in k$ podemos considerar los subconjuntos $\{a \in \mathbb{Q} : a \leq x\}$ y $\{a \in \mathbb{Q} : a > x\}$, y como k es arquimediano, el primero de dichos subcojuntos está acotado superiormente y el segundo está acotado inferiormente, satisfaciéndose además la igualdad

$$\sup\{a \in \mathbb{Q} : a \leq x\} = \inf\{a \in \mathbb{Q} : a > x\}\,.$$

Probemos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \sup\{a \in \mathbb{Q} : a \leq x\} = \inf\{a \in \mathbb{Q} : a > x\} \end{array}$$

es un morfismo de cuerpos, siendo obvio que $f(1) = 1$ porque f es la identidad sobre $\mathbb{Q}$. Dados $x, y \in k$ consideremos sucesiones (a_n), (a'_n), (b_n), (b'_n) de números racionales tales que

$$a'_n - a_n < \frac{1}{n}\,, \quad b'_n - b_n < \frac{1}{n}\,, \quad a_n < f(x) < a'_n\,, \quad b_n < f(y) < b'_n \quad (\text{desigualdades en } \mathbb{R})\,.$$

De la definición de f obtenemos $a_n < x < a'_n$ y $b_n < y < b'_n$ (desigualdades en k); sumando resulta $a_n + b_n < x + y < a'_n + b'_n$, de lo que (por definición de f) se sigue $a_n + b_n < f(x+y) < a'_n + b'_n$. Tomando límite $n \to \infty$ se concluye que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Para la multiplicación se razona de modo similar. Por último, nótese que el isomorfismo construido en la demostración es único bajo la condición de preservar el orden. ∎

Corolario 3.10 *Todo cuerpo arquimediano es conmutativo.*

Corolario 3.11 *El mayor cuerpo arquimediano es* $\mathbb{R}$*; es decir,* $\mathbb{R}$ *es el único cuerpo arquimediano que no admite extensiones arquimedianas estrictamente mayores. De otro modo,* $\mathbb{R}$ *es el único cuerpo arquimediano y completo (esto es, en el que todo conjunto acotado superiormente - inferiormente - tiene supremo - ínfimo -).*

3.12 Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, es fácil ver que su orden define de modo natural otro orden "$\leq'$" sobre X: dados $x, y \in X$, $x \leq' y :\Leftrightarrow y \leq x$. Diremos que "$\leq'$ es el *orden opuesto* de $\leq$". Es claro que el orden opuesto de "$\leq'$" es "$\leq$", por lo que se dice que ambos órdenes son "mutuamente opuestos".

Definición 3.13 (Geometría afín ordenada) Una *geometría afín ordenada* es un espacio afín $(\mathbb{A}, V)$ cuyas rectas estan dotadas de dos órdenes totales mutuamente opuestos satisfaciendo la siguiente propiedad: la proyección paralela de una recta sobre otra preserva las ordenaciones.

Definición 3.14 Sea $(\mathbb{A}, V)$ una geometría afín ordenada. Dados tres puntos distintos y alineados A, B, C de $\mathbb{A}$, uno (y sólo uno) de ellos está *entre* los otros dos para las dos ordenaciones de la recta que los contiene; escribiremos $A|B|C$ para indicar que el punto B está entre A y C. Para dicha terna de puntos tienen sentido las expresiones "los puntos B y C están al mismo lado respecto de A" ó "los puntos B y C están en lados opuestos respecto de A".

La noción de "entre" que existe para las ternas de puntos distintos de una recta de $\mathbb{A}$ la podemos trasladar al espacio vectorial V del siguiente modo: Dados vectores proporcionales no nulos y distintos $v_1, v_2 \in V$, si fijamos un punto $P_0 \in \mathbb{A}$ y consideramos los puntos $P_1 = P_0 + v_1$ y $P_2 = P_0 + v_2$, entonces P_0, P_1, P_2 son tres puntos alineados y distintos, y diremos que los vectores v_1 y v_2 tienen el *mismo sentido* si los puntos P_1 y P_2 están en el mismo lado respecto de P_0; en caso contrario (esto es, cuando P_0 está entre P_1 y P_2) diremos que v_1 y v_2 tienen *sentidos opuestos*. Es fácil comprobar que estas nociones no dependen del punto P_0 elegido. Cuando $v_1 = v_2$ convenimos en que v_1 y v_2 tienen el mismo sentido.

Observación **3.15** Nótese que todo espacio afín sobre el cuerpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (es decir, todo espacio afín cuyas rectas tienen exactamente dos puntos) admite una estructura ordenada trivial, y sin embargo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no es un cuerpo ordenado (según la definición 3.1).

Vamos a ver que, exceptuando el caso en el que las rectas tienen dos puntos, el cuerpo de escalares de una geometría afín ordenada es un cuerpo ordenado. Es bastante fácil probar que el recíproco también es cierto: si el cuerpo de escalares de un espacio afín es ordenado, entonces posee una estructura natural de geometría afín ordenada (compruébese).

3.16 Fijemos en lo que resta de sección un espacio afín ordenado $(\mathbb{A}, V)$ y sea k su cuerpo de escalares. Supongamos que cada recta de $\mathbb{A}$ tiene al menos tres puntos, y probemos que entonces k posee una estructura natural de cuerpo ordenado. Para simplificar la demostración la dividiremos en una secuencia de lemas.

Lema 3.17 *En las hipótesis de* 3.16, *dado un escalar no nulo $\lambda \in k$ se cumple una de las dos siguientes posibilidades: λv y v tienen el mismo sentido para todo $v \in V$ no nulo, ó λv y v tienen sentidos opuestos para todo $v \in V$ no nulo.*

Demostración. Fijemos un punto O en el espacio afín $\mathbb{A}$ (de modo que tenemos identificado $\mathbb{A}$ con el espacio vectorial V). Sea $\lambda \in k$ un escalar no nulo (que podemos suponer distinto de 1), y sean $v, w \in V$ vectores no nulos. Como la dimensión de $\mathbb{A}$ es ≥ 2 podemos suponer en primer lugar que v y w no son proporcionales, en cuyo caso la proyección paralela de una recta sobre otra muestra que los vectores v y λv tienen el mismo sentido si y sólo si los vectores w y λw tienen el mismo sentido (ya que la recta que pasa por los puntos $O + v$ y $O + w$ tiene la misma dirección que la recta que pasa por $O + \lambda v$ y $O + \lambda w$; véase la figura 3.1). El caso en que v y w son proporcionales se reduce al caso anterior. ∎

Definición 3.18 En las hipótesis de 3.16, diremos que un escalar no nulo $\lambda \in k$ es *positivo* si para algún vector no nulo v (y por lo tanto para todos, según 3.17) se cumple que v y λv tienen el mismo sentido.

Es fácil ver que el producto de dos positivos es positivo (compruébese).

Lema 3.19 *En las hipótesis de* 3.16, *las traslaciones conservan la noción de "entre".*

Demostración. Sean A, B, C tres puntos distintos y alineados de $\mathbb{A}$ tales que $A|B|C$, sea v un vector no nulo de V, y denotemos $A' = A + v$, $B' = B + v$, $C' = C + v$. Si la dirección de la recta determinada por A y B no es $\langle v \rangle$, entonces los puntos A', B', C' se obtienen a partir de los puntos A, B, C mediante una proyección paralela y por lo tanto $A'|B'|C'$. Si la dirección de la recta determinada por A y B es $\langle v \rangle$, entonces los puntos A', B', C' se obtienen a partir de los puntos A, B, C componiendo dos proyecciones paralelas (véase la figura 3.2) y por lo tanto $A'|B'|C'$. ∎

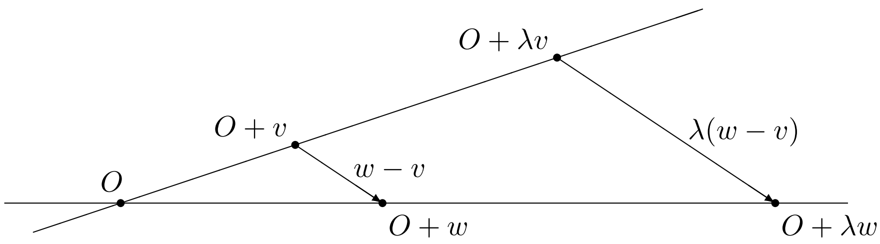


Figura 3.1

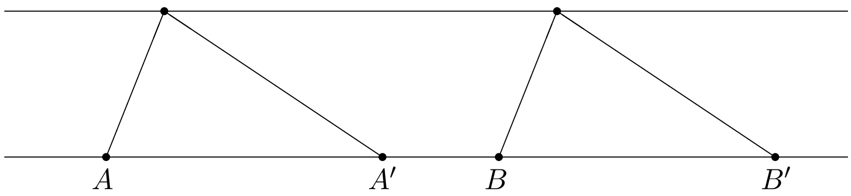


Figura 3.2

Lema 3.20 *En las hipótesis de* 3.16, *la característica del cuerpo k es distinta de* 2.

Demostración. Supongamos que la característica de k es igual a 2 y llegaremos a una contradicción. Consideremos tres puntos distintos y alineados A, B, C de $\mathbb{A}$, y denotemos cada punto por medio del vector de V que definen al tomar A como punto unicial: $0, v, w$. Podemos suponer $0|v|w$ (en caso contrario se cumple $0|w|v$). Trasladando la terna por v y aplicando el lema 3.19 obtenemos $v|0|v + w$, y trasladando luego por w llegamos a $v + w|w|v$. Pero trasladando primero por w y después por v obtenemos $v + w|v|w$, de modo que debe ser $v = w$, lo que contradice que $B \neq C$. ∎

Lema 3.21 *En las hipótesis de* 3.16, *el escalar* -1 *(que es* $\neq 0$ *según* 3.20*) no es positivo.*

Demostración. Supongamos que -1 es positivo y fijemos un vector no nulo v. Con la notación de la demostración de 3.20, como v y $-v$ tienen el mismo sentido, se cumple $0|v| - v$ ó bien $0| - v|v$. Supongamos que es $0|v| - v$, es decir, que v está entre 0 y $-v$; entonces se sigue (razonando como en la demostración de 3.17) que para todo vector no nulo w se cumple $0|w| - w$, y en particular para $w = -v$ tenemos $0| - v|v$; es decir, $-v$ está entre 0 y v, lo cual no puede ser. ∎

Lema 3.22 *En las hipótesis de* 3.16*, si v y w son vectores no nulos con el mismo sentido, entonces $v + w$ tiene el mismo sentido que v y w.*

Demostración. Según 3.21 se cumple $-v|0|w$, y trasladando por v resulta $0|v|v + w$. ∎

Teorema 3.23 *Sea $(\mathbb{A}, V)$ una geometría afín ordenada cuyas rectas tienen al menos tres puntos y sea k su cuerpo de escalares. El cuerpo k posee estructura de cuerpo ordenado de modo natural.*

Demostración. Denotemos por P el conjunto de todos los escalares positivos de k. Si $\lambda \in k^*$ es no positivo (esto es, "multiplicar por λ" cambia el sentido de los vectores), entonces la composición $(-1) \cdot \lambda$ preserva el sentido, es decir, $-\lambda \in \mathsf{P}$. Esto significa que $k = (-\mathsf{P}) \sqcup \{0\} \sqcup \mathsf{P}$.

Ya hemos dicho antes que es fácil comprobar la inclusión $\mathsf{P} \cdot \mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}$. Veamos finalmente que $\mathsf{P} + \mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}$. Fijado un vector no nulo v, si $\lambda, \mu \in \mathsf{P}$, entonces λv y μv tienen el mismo sentido que v, por lo que, según 3.22, $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ tiene el mismo sentido que λv; de todo se sigue que $(\lambda + \mu)v$ tiene el mismo sentido que v y por lo tanto $\lambda + \mu \in \mathsf{P}$. ∎

Una vez que hemos probado que el cuerpo de escalares de una geometría afín ordenada es (bajo ciertas hipótesis) un cuerpo ordenado, para obtener una "geometría afín real" debemos dar condiciones geométricas que aseguren que el cuerpo de escalares es arquimediano y completo. Dichas condiciones son obvias, y las daremos basándonos en la noción de entre.

Definición 3.24 (Geometría afín arquimediana) Una *geometría afín arquimediana* es una geometría afín ordenada $(\mathbb{A}, V)$ cuyas rectas tienen al menos tres puntos y en la que se satisface la siguiente propiedad: dados puntos distintos y alineados P_0, P_1, X tales que $P_0|P_1|X$, si $t : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es la (única) traslación que cumple $t(P_0) = P_1$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $P_0|X|t^n(P_0)$.

3.25 Es inmediato comprobar (teniendo en cuenta 3.23) que el cuerpo de escalares de una geometría afín arquimediana es un cuerpo arquimediano; y recíprocamente, toda geometría afín sobre un cuerpo arquimediano es una geometría afín arquimediana.

Definición 3.26 (Geometría afín real) Una *geometría afín real* es una geometría afín arquimediana $(\mathbb{A}, V)$ en la que se satisface la siguiente propiedad: si $\mathcal{A}$ es un conjunto de puntos de una recta r de $\mathbb{A}$, y si existe $X \in r$ tal que $P|Q|X$ cualesquiera que sean los puntos distintos P, Q de $\mathcal{A}$, entonces existe $M \in r$ cumpliendo:

(i) $P|Q|M$ cualesquiera que sean los puntos distintos P, Q de $\mathcal{A}$;

(ii) si $X \in r - \{M\}$ y $P|Q|X$ cualesquiera que sean los puntos distintos P, Q de $\mathcal{A}$, entonces $P|M|X$ para todo $P \in \mathcal{A}$.

3.27 Sea $(\mathbb{A}, V)$ una geometría afín real y sea k su cuerpo de escalares. Por una parte, k es un cuerpo arquimediano y por lo tanto existe un morfismo canónico de cuerpos ordenados $k \to \mathbb{R}$ (véase 3.9); por otra parte, la propiedad de la definición 3.26, traducida al cuerpo de escalares, significa que todo subconjunto de k que esté acotado superiormente tiene supremo, y que todo subconjunto de k que esté acotado inferiormente tiene ínfimo, de modo que k es completo. De todo se sigue que k es canónicamente isomorfo a $\mathbb{R}$ (véase el corolario 3.11).

Concluimos entonces que una geometría afín real es canónicamente isomorfa a un espacio afín (de dimensión ≥ 2) sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

4 Geometrías Clásicas

Hemos estudiado en las secciones anteriores los axiomas geométricos que se requieren para establecer la noción de espacio afín real. A continuación nos ocuparemos de la estructura euclídea, para lo cual comenzaremos recordando la definición algebraica.

4.1 Definición algebraica de espacio afín euclídeo: Un *espacio afín euclídeo* es un espacio afín real $(\mathbb{A}, V)$ junto con un subespacio vectorial $\langle T_2 \rangle$ de dimensión 1 del espacio vectorial de las métricas simétricas sobre V, de modo que cada métrica de dicho subespacio sea no singular y de índice 0.

Si $(\mathbb{A}, V, \langle T_2 \rangle)$ es un espacio afín euclídeo, entonces T_2 es una métrica definida (porque es no singular y de índice 0) y podemos suponer que es definida positiva (en caso contrario sustituimos T_2 por $-T_2$); por lo tanto en $\mathbb{A}$ podemos definir la "medida de ángulos" y la "proporción entre segmentos" (véase el capítulo IX; también podemos definir en $\mathbb{A}$ la "distancia entre dos puntos", pero dicha noción de distancia estará bien definida una vez se fije una métrica definida positiva en el subespacio $\langle T_2 \rangle$, es decir, cuando se elija un segmento unidad como referencia).

4.2 Para dar una definición geométrica de espacio afín euclídeo vamos a formalizar la noción de perpendicularidad.

Dado un espacio afín real $(\mathbb{A}, V)$ consideremos el "conjunto de sus direcciones", es decir, el conjunto cociente de las rectas de $\mathbb{A}$ respecto de la relación de paralelismo. Dado que cada dirección se corresponde con un subespacio vectorial de dimensión 1 de V, podemos identificar de modo natural el conjunto de las direcciones del espacio afín con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$.

4.3 Definición geométrica de espacio afín euclídeo: Una *geometría euclídea* es una geometría afín real $(\mathbb{A}, V)$ junto con una relación binaria "$\perp$" en el conjunto $\mathbb{P}(V)$ de sus direcciones, de modo que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Si X es una subvariedad lineal de $\mathbb{P}(V)$, entonces

$$X^{\perp} := \{x' \in \mathbb{P}(V) \ : \ x' \perp x \ \text{ para todo } x \in X\}$$

también es una subvariedad lineal.

(ii) Para toda subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(V)$ se satisface $(X^{\perp})^{\perp} = X$.

(iii) Para todo $x \in \mathbb{P}(V)$ se cumple $x \notin x^{\perp}$.

Obsérvese que de la condición (ii) de la definición se sigue que la relación binaria "$\perp$" es simétrica. Dados $x, x' \in \mathbb{P}(V)$, diremos que x y x' son *ortogonales* cuando $x \perp x'$, y diremos que dos rectas de $\mathbb{A}$ son *perpendiculares* cuando sus direcciones sean ortogonales.

4.4 Ya sabemos (porque lo hemos probado en capítulos anteriores) que todo espacio afín euclídeo en sentido algebraico es un espacio afín euclídeo en sentido geométrico. Salvo en el caso de dimensión 2 (ya veremos por qué motivo), vamos a probar que las definiciones algebraica y geométrica de espacio afín euclídeo son equivalentes.

Teorema 4.5 *Si* $(\mathbb{A}, V, \perp)$ *es una geometría euclídea de dimensión* ≥ 3*, entonces existe de modo natural una estructura de espacio afín euclídeo en el espacio afín real* $(\mathbb{A}, V)$ *para la cual la relación de perpendicularidad coincide con la definida por la relación binaria "* $\perp$ *".*

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ el retículo de las subvariedades lineales del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y consideremos la aplicación $\phi_1 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, $X \mapsto X^\perp$. La condición (ii) de la definición 4.3 nos dice que ϕ_1 es una involución y por lo tanto es biyectiva; como además se comprueba trivialmente que dadas $X, Y \in \mathcal{R}$ se satisface la implicación " $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$ ", tenemos que ϕ_1 es un isomorfismo de retículos entre $\mathcal{R}$ y el dualizado de $\mathcal{R}$ (véase la sección I.3). En particular, el conjunto de las direcciones ortogonales a una dada forman un hiperplano.

Si $X \in \mathcal{R}$ y W es el subespacio vectorial de V que satisface $\pi(W) = X$, entonces denotaremos por $W^\perp$ el subespacio vectorial de V que satisface $\pi(W^\perp) = X^\perp$; según hemos dicho, si v es un vector no nulo de V, entonces $\langle v \rangle^\perp$ es un hiperplano de V.

Sea $\mathcal{R}^*$ el retículo de las subvariedades lineales del espacio proyectivo dual $\mathbb{P}(V^*)$, y consideremos la aplicación $\phi_2 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^*$ que a cada subvariedad lineal X de $\mathbb{P}(V)$ le asigna su subvariedad lineal incidente X° en $\mathbb{P}(V^*)$; es decir, dado un subespacio W de V, si $X = \pi(W)$, entonces $\phi_2(X) = X^\circ = \pi(W^\circ)$. Como ya sabemos, ϕ_2 es un isomorfismo de retículos entre el dualizado de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$.

Componiendo los dos morfismos anteriores obtenemos el isomorfismo de retículos

$$\begin{aligned} \phi = \phi_2 \circ \phi_1 : \mathcal{R} &\to \mathcal{R}^* \\ X &\mapsto (X^\perp)^\circ\,, \end{aligned}$$

y aplicando el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva (teniendo en cuenta que sobre los espacio vectoriales reales toda aplicación semi-lineal es lineal), obtenemos que existe un isomorfismo lineal $f : V \to V^*$, único salvo un factor de proporcionalidad, cuya proyectivización es ϕ; es decir, para todo subespacio vectorial W de V se cumple $(W^\perp)^\circ = f(W)$.

Definimos ahora la siguiente métrica sobre V :

$$\begin{aligned} T_2 : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, v') &\mapsto T_2(v, v') := f(v)(v')\,. \end{aligned}$$

Para terminar la demostración veamos que la relación de ortogonalidad " $\perp$ " coincide con la definida por la métrica T_2, y que T_2 es simétrica, no singular y de índice 0. Por una parte, dados vectores no nulos $v, v' \in V$ tenemos

$$\langle v \rangle \perp \langle v' \rangle \iff \langle v \rangle \subseteq \langle v' \rangle^\perp \iff \langle f(v') \rangle = (\langle v' \rangle^\perp)^\circ \subseteq \langle v \rangle^\circ \iff f(v')(v) = 0\,,$$

es decir, las direcciones de $\mathbb{A}$ definidas por los vectores v y v' son ortogonales si y sólo si $T_2(v', v) = 0$; luego la métrica T_2 define la relación de ortogonalidad " $\perp$ ". En particular, como sabemos que dicha relación es simétrica tenemos: $T_2(v', v) = 0 \Leftrightarrow T_2(v, v') = 0$.

Por otra parte, como el ortogonal de una dirección es un hiperplano y ninguna dirección es ortogonal a sí misma, dado un vector no nulo $v \in V$, para la métrica T_2 tenemos $V = \langle v \rangle \perp \langle v \rangle^\perp$; dado otro vector $v' \in V$, existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in \langle v \rangle^\perp$ tales que $v' = \lambda v + w$, y por lo tanto

$$T_2(v, v') = T_2(v, \lambda v + w) = \lambda T_2(v, v) = T_2(\lambda v + w, v) = T_2(v', v)\,;$$

luego la métrica T_2 es simétrica.

Finalmente, T_2 es no singular porque su polaridad asociada (que es f) es un isomorfismo, y es de índice 0 porque la condición de que ninguna dirección sea ortogonal a sí misma implica que no existen en V vectores no nulos que sean isótropos para T_2. ∎

4.6 El teorema 4.5 nos dice que la noción de perpendicularidad es suficiente para establecer la estructura euclídea, lo que es bastante sorprendente, pues no es evidente que se pueda establecer la medida de los ángulos ó la proporción entre segmentos conociendo sólo la relación de perpendicularidad de las rectas.

4.7 El motivo por el que el teorema 4.5 no es válido en dimensión 2, es que en su demostración se utiliza el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva, el cual no es cierto para la recta proyectiva. En dimensión 2, la definición de geometría euclídea debe modificarse en el siguiente sentido (véase el teorema IV.2.15.): "Un plano euclídeo es un plano afín real $(\mathbb{A}, V)$ junto con una involución del conjunto de sus direcciones, $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, $x \mapsto x^\perp$, que conserva razones dobles y cumple: $x \neq x^\perp$ para toda dirección $x \in \mathbb{P}(V)$".

Terminaremos el cápitulo definiendo con precisión lo que es una "geometría clásica", las cuales hemos visto brevemente en dimensión 2 al principio del capítulo.

Definiciones 4.8 Sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo real de dimensión $n \geq 2$ y sea $\langle T^2 \rangle$ una cuádrica en el espacio proyectivo dual $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}(E^*)$. Diremos que un punto $P \in \mathbb{P}$ está en el dominio de $\langle T^2 \rangle$ si el hiperplano incidente de P no corta a la cuádrica $\langle T^2 \rangle$, y diremos que $\langle T^2 \rangle$ define una *geometría clásica* sobre $\mathbb{P}$ si su dominio es no vacío, en cuyo caso $\langle T^2 \rangle$ se denomina *cuádrica del absoluto* de la geometría, y se define el *dominio de la geometría* como el dominio de $\langle T^2 \rangle$. El *grupo de transformaciones* de una geometría clásica $(\mathbb{P}, \langle T^2 \rangle)$ es el subgrupo del grupo lineal proyectivo de $\mathbb{P}$ formado por las proyectividades que dejan invariante el absoluto.

Sea $(\mathbb{P}, \langle T^2 \rangle)$ una geometría clásica. El absoluto permite separar los puntos de $\mathbb{P}$ en tres clases, según la posición relativa del absoluto y del hiperplano incidente del punto:

- Los puntos *propios*, que son los puntos del dominio de la geometría (los puntos tales que la restricción del absoluto a su hiperplano incidente es no singular y de índice 0).
- Los puntos *del infinito*. Son los puntos de $\mathbb{P}$ tales que la restricción del absoluto a su hiperplano incidente es singular.
- Los puntos *ideales*. Son los puntos de $\mathbb{P}$ tales que la restricción del absoluto a su hiperplano incidente es no singular y de índice > 0.

Teorema 4.9 *Dada una cuádrica $\langle T^2 \rangle$ sobre el espacio proyectivo dual $\mathbb{P}^*$ de un espacio proyectivo real $\mathbb{P}$ de dimensión $n \geq 2$, la condición necesaria y suficiente para que $\langle T^2 \rangle$ defina una geometría clásica sobre $\mathbb{P}$ es que se satisfaga una de las siguientes condiciones:*

(i) *El rango de $\langle T^2 \rangle$ es n y el índice es 0.*
Este es el caso de la geometría euclídea (ó parabólica*); el lugar de $\langle T^2 \rangle$ es un punto (su vértice), el cual define un hiperplano H en $\mathbb{P}$; los puntos de H son los puntos del infinito, los puntos propios son los puntos de $\mathbb{P}$ que no están en H, y no existen puntos ideales.*

(ii) *El rango de $\langle T^2 \rangle$ es $n+1$ y el índice es 0.*
En este caso la geometría se denomina elíptica*. El lugar de $\langle T^2 \rangle$ es vacío, así que no hay puntos ideales ni del infinito, esto es, el dominio de la geometría es todo $\mathbb{P}$.*

(iii) *El rango de* $\langle T^2 \rangle$ *es* $n+1$ *y el índice es* 1.
En este caso la geometría se denomina hiperbólica. *La cuádrica* $\langle T^2 \rangle$ *es no singular, real y no reglada. Los puntos del infinito son los puntos de la cuádrica dual* $\langle T_2 \rangle$ *de la cuádrica del absoluto, los puntos propios son los puntos interiores a la cuádrica dual* $\langle T_2 \rangle$*, y los puntos ideales son los puntos exteriores a la cuádrica dual* $\langle T_2 \rangle$*.*

Demostración. No vamos a probar todo lo afirmado en el enunciado. Sólo observaremos que los tres casos del enunciado son los únicos en los que en el lugar de la cuádrica $\langle T^2 \rangle$ no hay rectas, por lo que esos son los casos en los que existen hiperplanos de $\mathbb{P}^*$ que no cortan a $\langle T^2 \rangle$, es decir, dichos casos son los únicos en los que el dominio de $\langle T^2 \rangle$ es no vacío. ∎

Apéndice C

Métricas Hermíticas

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo k. Existen aplicaciones de $E \times E$ en k que no son enteramente bilineales para las cuales son válidos los resultados expuestos en los capítulos V y VII casi sin introducir ningún cambio, pero que deben ser tratadas por separado. Nos referimos a las "formas sesquilineales", es decir, las aplicaciones de $E \times E$ en k que son lineales en una de las variables y semi-lineales en la otra [1] (véase el problema IV.4.8).

Dentro de las formas sesquilineales nos interesan las denominadas "formas hermíticas": si $H_2 : E \times E \to k$ es una forma sesquilineal de automorfismo asociado $\sigma : k \to k$, se dice que H_2 es una forma hermítica si σ es una involución y se cumple $H_2(e, v) = \sigma(H_2(v, e))$. Si H_2 es hermítica y denotamos $k_0 = \{\lambda \in k : \sigma(\lambda) = \lambda\}$, entonces k_0 es un cuerpo y para los escalares de k_0 la aplicación H_2 tiene un comportamiento bilineal, satisfaciéndose además $H_2(e, e) \in k_0$ para todo $e \in E$; a esta razón se debe esencialmente el que las demostraciones de las afirmaciones relativas a las métricas simétricas sean válidas (casi sin cambios) para las formas hermíticas.

En este apéndice nos centraremos en el caso en el que $k = \mathbb{C}$ y σ es la conjugación compleja. Es usual que en dicho caso las formas hermíticas se denominen "métricas hermíticas", si bien debe quedar claro que no son "métricas" en el sentido de que no son aplicaciones bilineales (es decir, no son tensores covariantes de orden 2).

Todos los espacios vectoriales que aparezcan en este capítulo lo serán sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y de dimensión finita, siendo E uno de tales espacios vectoriales. Como es usual, para cada escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda}$ denotará el número complejo conjugado de λ. Además i será uno de los dos números complejos que satisfacen $\mathrm{i}^2 = -1$.

1 Métricas Hermíticas

Definición 1.1 Una aplicación $H_2 : E \times E \to \mathbb{C}$ es una *métrica hermítica* sobre E si cualesquiera que sean $e, e', v, v' \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
&H_2(e + e', v) = H_2(e, v) + H_2(e', v)\,, \qquad && H_2(\lambda e, v) = \lambda\, H_2(e, v)\,,\\
&H_2(e, v + v') = H_2(e, v) + H_2(e, v')\,, \qquad && H_2(e, \lambda v) = \overline{\lambda}\, H_2(e, v)\,,\\
&H_2(e, v) = \overline{H_2(v, e)}\,.
\end{aligned}
$$

[1] *Sesquilineal* significa "vez y media lineal", por lo que la terminología es bastante acertada.

Si H_2 es una métrica hermítica sobre E, como es usual usaremos la siguiente notación:

$$H_2(e,v) = <e,v> \qquad (e,v \in E)\,.$$

1.2 Sea H_2 una métrica hermítica sobre E. A partir de H_2 podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} q : E & \to & \mathbb{C} \\ e & \mapsto & q(e) := <e,e>\,. \end{array}$$

Es fácil comprobar que cualesquiera que sean $e \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple

$$q(\lambda e) = |\lambda|^2 q(e)\,. \tag{1.1}$$

Además, dados $e,v \in E$ tenemos $q(e+v) = q(e) + q(v) + <e,v> + <v,e>$ y $q(e-v) = q(e) + q(v) - <e,v> - <v,e>$, de donde, restando miembro a miembro, obtenemos

$$q(e+v) - q(e-v) = 2<e,v> + 2<v,e>\,;$$

sustituyendo en la anterior igualdad v por iv, obtenemos

$$q(e+\mathrm{i}v) - q(e-\mathrm{i}v) = -2\mathrm{i}<e,v> + 2\mathrm{i}<v,e>\,.$$

Por último, multiplicando los dos miembros de la anterior igualdad por i y sumandola miembro a miembro a la precedente, obtenemos

$$H_2(e,v) \;=\; \frac{q(e+v) - q(e-v)}{4} + \mathrm{i}\,\frac{q(e+\mathrm{i}v) - q(e-\mathrm{i}v)}{4}\,. \tag{1.2}$$

La aplicación q definida a partir de H_2 se denomina "forma cuadrática hermítica" asociada a la métrica hermítica H_2.

Una aplicación $q : E \to \mathbb{C}$ se dice que es una *forma cuadrática hermítica*, si satisface la igualdad (1.1) y la aplicación H_2 definida a partir de q por la igualdad (1.2) es una métrica hermítica. Es fácil probar que existe una correspondencia biunívoca entre las métricas hermíticas sobre E y las formas cuadráticas hermíticas sobre E. (Compárese con lo dicho en VI.1.1 y VI.1.2.)

Ejercicio 1.3 El conjunto de las métricas hermíticas sobre E es un grupo aditivo (con la suma usual de aplicaciones), pero no es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (con el producto usual de escalares por aplicaciones). Equivalentemente, el conjunto de la formas cuadráticas hermíticas sobre E es un grupo aditivo pero no es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Definiciones 1.4 Consideremos una métrica hermítica H_2 sobre E.

Para cada subespacio vectorial E' de E, la restricción de H_2 a E' definine una métrica hermítica sobre E': $H_2'(e_1,e_2) := H_2(e_1,e_2)$, $e_1,e_2 \in E'$. Diremos que H_2' es la *restricción* de H_2 a E'.

Si $\bar{E}$ es otro $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $\pi : E \to \bar{E}$ es una aplicación lineal y epiyectiva, entonces diremos que la métrica H_2 es *proyectable* por π si existe una métrica hermítica $\bar{H}_2$ sobre $\bar{E}$ satisfaciendo

$$H_2(e_1,e_2) = \bar{H}_2(\pi(e_1),\pi(e_2))\,, \qquad e_1,e_2 \in E\,.$$

Si H_2 es proyectable por π, entonces la métrica $\bar{H}_2$ sobre $\bar{E}$ que tiene la anterior propiedad es única y se denomina *proyección* de H_2 por el epimorfismo π.

Se define el *radical* de H_2 como el siguiente subespacio vectorial de E:

$$\operatorname{rad} H_2 := \{e \in E : H_2(e, e') = 0 \quad \forall\, e' \in E\} = \{e \in E : H_2(e', e) = 0 \quad \forall\, e' \in E\}\,.$$

La comprobación de que $\operatorname{rad} H_2$ es un subespacio de E es muy sencilla.

Proposición 1.5 *Si H_2 es una métrica hermítica sobre E y $\pi : E \to \bar{E}$ es un epimorfismo, entonces H_2 es proyectable por π si y sólo si* $\operatorname{Ker} \pi \subseteq \operatorname{rad} H_2$.

Demostración. Es análoga a la demostración de la proposición V.1.2. ∎

Definición 1.6 Una métrica hermítica H_2 sobre E se dice que es *no singular* si $\operatorname{rad} H_2 = 0$. Cuando $\operatorname{rad} H_2 \neq 0$ se dice que H_2 es singular.

1.7 Si H_2 es una métrica hermítica sobre E que es singular, entonces podemos proyectarla para hacerla no singular de la siguiente manera: si consideramos el morfismo de paso al cociente $\pi : E \to E/(\operatorname{rad} H_2)$, entonces $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{rad} H_2$ y según 1.5 tenemos que H_2 es proyectable por π a una métrica hermítica $\bar{H}_2$ sobre $E/(\operatorname{rad} H_2)$; esta nueva métrica es no singular (compruébese).

Definición 1.8 Sea H_2 una métrica hermítica sobre E. Un vector $e \in E$ se dice que es *isótropo* (para H_2) si $H_2(e, e) = 0$. Diremos que E es *totalmente isótropo* (para H_2) si $\operatorname{rad} H_2 = E$, es decir, si H_2 es la métrica identicamente nula sobre E.

Lema 1.9 *Si H_2 es una métrica hermítica sobre E entonces: E es totalmente isótropo si y sólo si todo vector de E es isótropo.*

Demostración. Se sigue de la igualdad (1.2) (véase la demostración del lema V.1.6). ∎

1.10 Sea (E, H_2) un espacio vectorial dotado de una métrica hermítica. Dado un subespacio vectorial E' de E, en lo que sigue (y siempre que no haya peligro de confusión) el subespacio $\operatorname{rad} H_2'$ de E' lo denotaremos $\operatorname{rad} E'$ y lo llamaremos "radical de E'" (donde H_2' es la métrica hermítica H_2 restringida a E'). Diremos que E' es un "subespacio totalmente isótropo" de E cuando $\operatorname{rad} E' = E'$ (es decir, cuando la restricción de la métrica hermítica de E a E' sea la métrica nula).

Definición 1.11 Sea (E, H_2) un espacio vectorial dotado de una métrica hermítica. Dos vectores e_1, e_2 de E se dice que son *ortogonales* (para H_2) si $H_2(e_1, e_2) = 0$, y diremos que dos subespacios F_1, F_2 de E son ortogonales si $H_2(e_1, e_2) = 0$ cualesquiera que sean $e_1 \in F_1$, $e_2 \in F_2$. Dos subespacios vectoriales E' y E'' de E se dice que *están en suma ortogonal* cuando están en suma directa y son ortogonales, en cuyo caso su suma se denota $E' \perp E''$. Por último, una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E se dice que es *ortogonal* si $H_2(e_i, e_j) = 0$ cuando $i \neq j$.

Proposición 1.12 *El radical de una suma ortogonal es igual a la suma ortogonal de los radicales. Es decir, si H_2 es una métrica hermítica sobre E, y E' y E'' son subespacios de E que están en suma ortogonal, entonces*

$$\operatorname{rad}(E' \perp E'') = \operatorname{rad} E' \perp \operatorname{rad} E''\,.$$

Demostración. Es análoga a la demostración de la proposición V.1.11. ▮

Definición 1.13 Una aplicación lineal $T : (E, H_2) \to (\bar{E}, \bar{H}_2)$ entre espacios vectoriales dotados de métricas hermíticas se dice que es una *isometría*, si es un isomorfismo tal que $H_2(e_1, e_2) = \bar{H}_2(T(e_1), T(e_2))$ cualesquiera que sean $e_1, e_2 \in E$.

Dos espacios vectoriales dotados de métricas hermíticas se dicen que son *isométricos* si existe entre ellos una isometría.

Teorema 1.14 *Todo espacio vectorial dotado de una métrica hermítica, descompone de modo único (salvo isometrías) en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo y un espacio no singular. Concrétamente, dada una métrica hermítica H_2 sobre E, la parte totalmente isótropa es* $\operatorname{rad} E$ *y la parte no singular es isométrica al espacio vectorial $E/(\operatorname{rad} H_2)$ dotado de la métrica hermítica H_2 proyectada sobre él:*

$$E = \operatorname{rad} E \perp (E/\operatorname{rad} E)\,.$$

Demostración. Es análoga a la demostración del teorema V.1.16. ▮

Definición 1.15 Sea (E, H_2) un espacio vectorial dotado de una métrica hermítica. Tenemos entonces definida una aplicación $\phi : E \to E^*$ por la fórmula $\phi(e) := \,<\cdot\,, e>\,$ $(e \in E)$. La aplicación ϕ es semi-lineal para la conjugación compleja (es decir, ϕ es un morfismo de grupos aditivos tal que $\phi(\lambda e) = \bar{\lambda}\phi(e)$), y se denomina *polaridad asociada* a la métrica hermítica H_2. La polaridad determina totalmente a H_2, ya que dados $e_1, e_2 \in E$ se tiene $<e_1, e_2> = \phi(e_2)(e_1)$.[2]

Ejercicios 1.16 (a) Sean E_1 y E_2 espacios vectoriales sobre un cuerpo k, y sea $f : E_1 \to E_2$ una aplicación semi-lineal cuyo automorfismo de cuerpos asociado es $\sigma : k \to k$. Entonces se definen el núcleo y la imagen de f del modo usual y tenemos: $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio vectorial de E_1, $\operatorname{Im} f$ es un subespacio vectorial de E_2, y $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$. Se define el rango de f como la dimensión de $\operatorname{Im} f$.

(b) Supongamos ahora que $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ son bases de E_1 y E_2, respectivamente. Se define la matriz de f en dichas bases, como la matriz $A \in M_{m\times n}(k)$ cuya columna j-ésima son las coordenadas del vector $f(e_j)$ en la base de E_2. Dado un vector $e \in E_1$, si las coordenadas de e son $(x_1, \dots, x_n)$ y las coordenadas de $f(e)$ son $(y_1, \dots, y_m)$ (en dichas bases), entonces se tiene

$$A \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \vdots \\ \sigma(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Además se cumple $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$, por lo que en particular tenemos: si $n = m$, entonces f es un isomorfismo semi-lineal si y sólo si $|A| \neq 0$.

[2] Recuérdese que la polaridad asociada a una métrica (tensor covariante de orden 2) la definimos contrayendo la métrica en su primera variable (véase V.2.1), mientras que la polaridad asociada a una métrica hermítica la hemos definido contrayendo la métrica hermítica en su segunda variable. El motivo es claro: dado $e \in E$, la aplicación $<e, \cdot> : E \to \mathbb{C}$ no es lineal, es decir, $<e, \cdot> \notin E^*$.

Ejercicio 1.17 Con la notación de la definición 1.15, se cumple $\operatorname{rad} H_2 = \operatorname{Ker}\phi$. Como consecuencia: H_2 es no singular $\Leftrightarrow$ ϕ es un isomorfismo semi-lineal.

Ahora, si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de E y $A = (<e_i, e_j>)$ es la matriz de H_2 en dicha base, entonces la matriz de ϕ en la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ y en su base dual es A. Por lo tanto: H_2 es no singular $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

Por último, dados vectores $e, v \in E$ cuyas coordenadas en la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ son respectivamente $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ y $(\beta_1,\dots,\beta_n)$, tenemos la igualdad

$$<e, v> = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.18 Consideremos una métrica hermítica H_2 sobre E. Dado un subespacio vectorial F de E, se define el *subespacio ortogonal* de F como

$$F^\perp := \{e \in E \;:\; <e, v> = 0 \quad \forall\, v \in F\} = \{e \in E \;:\; <v, e> = 0 \quad \forall\, v \in F\}$$

(es inmediato comprobar que $F^\perp$ es un subespacio vectorial de E).

Ejercicio 1.19 Dada una métrica hermítica H_2 sobre E, para cada subespacio vectorial F de E se cumplen $F^\perp = \phi^{-1}(F^\circ)$ y $F \cap F^\perp = \operatorname{rad} F$. En particular tenemos $\operatorname{rad} E = E^\perp$.

Proposición 1.20 *Sea H_2 una métrica hermítica no singular sobre E. Para cada subespacio vectorial F de E tenemos $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ y $(F^\perp)^\perp = F$.*

Además, si F es también no singular (es decir, si $\operatorname{rad} F = 0$), entonces $E = F \perp F^\perp$.

Demostración. Véase la demostración de la proposición V.2.3. ∎

2 Clasificación de Métricas Hermíticas

La clasificación de las métricas hermíticas es totalmente análoga a la clasificación de las métricas simétricas reales. Recordemos que para las métricas simétricas reales hemos dado en el capítulo VII dos clasificaciones (que, como es natural, son equivalentes): por una parte tenemos el teorema de estructura para las métricas simétricas sobre cualquier cuerpo (de característica distinta de 2), el cual afirma que todo espacio vectorial dotado de una métrica simétrica descompone, de modo único salvo isometrías, en suma ortogonal de un espacio totalmante isótropo, un espacio hiperbólico y un espacio elíptico (véase el teorema VII.3.1); por otra parte, en el caso real todo espacio vectorial dotado de una métrica simétrica descompone, de modo único salvo isométrias, en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo, un espacio elíptico definido positivo y un espacio elíptico definido negativo (si E, T_2, t y s son como en el teorema VII.3.14, entonces $E = \operatorname{rad} E \perp E_+ \perp E_-$, donde E_+ es un espacio elíptico definido positivo de dimensión t, y E_- es un espacio elíptico definido negativo de dimensión s).

Definición 2.1 Dados dos espacios vectoriales dotados de métricas hermíticas, (E, H_2) y $(\bar{E}, \bar{H}_2)$, diremos que son *equivalentes* si son isométricos, es decir, si existe un isomorfismo lineal $\tau : E \to \bar{E}$ tal que $<e, e'> = <\tau(e), \tau(e')>$ cualesquiera que sean $e, e' \in E$.

Definiciones 2.2 Sea (E, H_2) un espacio vectorial dotado de una métrica hermítica. Diremos que $\dim E$ es la *dimensión de* (E, H_2) (ó *dimension de* H_2, si no hay motivo de confusión), y el entero no negativo $\dim E - \dim(\operatorname{rad} E)$ se denomina *rango de* (E, H_2) (ó *rango de* H_2); el rango de H_2 lo denotaremos $\operatorname{rg} H_2$, y es la dimensión de la parte no singular de E (véase 1.14). Si $\phi : E \to E^*$ es la polaridad asociada a la métrica H_2, entonces $\operatorname{rad} E = \operatorname{Ker} \phi$, por lo que el rango de H_2 es igual al rango de la aplicación semi-lineal ϕ (véase 1.17).

Ejercicio 2.3 Sean (E, H_2) y $(\bar{E}, \bar{H}_2)$ espacios vectoriales dotados de métricas hermíticas. Si (E, H_2) y $(\bar{E}, \bar{H}_2)$ son equivalentes, entonces tienen la misma dimensión y el mismo rango.

Lema 2.4 *Sean H_2 y $\bar{H}_2$ métricas hermíticas sobre los espacios vectoriales E y $\bar{E}$, respectivamente. La condición necesaria y suficiente para que (E, H_2) y $(\bar{E}, \bar{H}_2)$ sean isométricos, es que existan una base $\{e_i\}$ en E y una base $\{\bar{e}_j\}$ en $\bar{E}$ tales que la matriz de H_2 en la base $\{e_i\}$ sea igual a la matriz de $\bar{H}_2$ en la base $\{\bar{e}_j\}$.*

Demostración. Véase la demostración del lema VII.1.5. ∎

Definición 2.5 Sea H_2 una métrica hermítica sobre E. Para todo $e \in E$ se cumple $<e, e> = \overline{<e, e>}$ y por lo tanto $<e, e> \in \mathbb{R}$. Diremos que (E, H_2) es un *espacio definido positivo* si $<e, e> > 0$ para todo $e \in E - \{0\}$, y diremos que (E, H_2) es un *espacio definido negativo* si $<e, e> < 0$ para todo $e \in E - \{0\}$. Es inmediato comprobar que un espacio definido positivo (ó definido negativo) es no singular.

Lema 2.6 *Dos espacios definidos positivos son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión. Del mismo modo, dos espacios definidos negativos son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

Demostración. Supongamos que (E, H_2) es un espacio definido positivo (no trivial). Sea $e \in E$ un vector no isótropo (el vector e existe porque H_2 es no singular); existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $<e, e> = \lambda$, de modo que si $e_1 = \sqrt{\lambda}\, e$ entonces $<e_1, e_1> = +1$. Además tenemos una descomposición de E como suma ortogonal de espacios no singulares: $E = \langle e_1 \rangle \perp \langle e_1 \rangle^\perp$.

Procediendo como en el párrafo anterior llegamos a que existe una base ortogonal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en E tal que $<e_i, e_i> = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$; la matriz de H_2 en esta base es

$$\begin{pmatrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{pmatrix},$$

por lo que basta aplicar el lema 2.4 para concluir la demostración en el caso definido positivo.

El caso definido negativo se prueba exactamente igual: si (E, H_2) es un espacio definido negativo, entonces existe una base de E en la cual la matriz de H_2 es

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \quad ∎$$

Teorema 2.7 *Todo $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de una métrica hermítica descompone, de modo único salvo isometrías, en suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo, un espacio definido positivo, y un espacio definido negativo.*

Demostración. Sea H_2 una métrica hermítica sobre E. En virtud del teorema 1.14, bastará probar que cuando H_2 es no singular, E descompone, de modo único salvo isometrías, en suma ortogonal de un espacio definido positivo y un espacio definido negativo.

Supongamos entonces que H_2 es no singular. Procediendo como en la demostración de 2.6 llegamos a que existe una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E que es ortogonal y satisface $<\!e_i, e_i\!> = \pm 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Reordenando la base si fuera necesario, obtenemos que existen $t, s \in \mathbb{N}$ tales que $t + s = n$, $<\!e_i, e_i\!> = +1$ si $i \in \{1, \dots, t\}$, y $<\!e_{t+i}, e_{t+i}\!> = -1$ si $i \in \{1, \dots, s\}$. Si definimos $E_+ = \langle e_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle e_t \rangle$ y $E_- = \langle e_{t+1} \rangle \perp \cdots \perp \langle e_{t+s} \rangle$, entonces es fácil ver que E_+ es un espacio definido positivo, E_- es un espacio definido negativo, y $E = E_+ \perp E_-$.

Supongamos ahora que $E = E'_+ \perp E'_-$ es otra descomposición de E como suma ortogonal de un espacio definido positivo E'_+ y un espacio definido negativo E'_-, y denotemos $t' = \dim E'_+$ y $s' = \dim E'_-$. En virtud del lema 2.6, para concluir la demostración bastará probar que $t' = t$ y $s' = s$.

Según vimos en la demostración de 2.6, existe una base $\{v_1, \dots, v_{t'}\}$ de E'_+ que es ortogonal y satisface $<\!v_i, v_i\!> = +1$ $(i = 1, \dots, t')$, y existe una base $\{v_{t'+1}, \dots, v_{t'+s'}\}$ de E'_- que es ortogonal y satisface $<\!v_i, v_i\!> = +1$ $(i = t' + 1, \dots, t' + s')$. Si probamos que la familia de vectores $\{v_1, \dots, v_{t'}, e_{t+1}, \dots, e_{t+s}\}$ es libre, entonces será $t' \leq t$ y $s' \geq s$. Sean escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{t'}, \beta_1, \dots, \beta_s$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{t'} v_{t'} + \beta_1 e_{t+1} + \cdots + \beta_s e_{t+s} = 0\,;$$

si denotamos $e = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{t'} v_{t'} = -\beta_1 e_{t+1} - \cdots - \beta_s e_{t+s}$, entonces tenemos

$$<\!e, e\!> = \alpha_1 \overline{\alpha_1} + \cdots + \alpha_{t'} \overline{\alpha_{t'}} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_{t'}|^2 \geq 0$$
$$<\!e, e\!> = -\beta_1 \overline{\beta_1} - \cdots - \beta_s \overline{\beta_s} = -|\beta_1|^2 - \cdots - |\beta_s|^2 \leq 0$$

(compruébense las igualdades anteriores); por lo tanto debe ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{t'} = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$. Del mismo modo se prueban las desigualdades $t' \geq t$ y $s' \leq s$. ∎

Definición 2.8 Sea H_2 una métrica hermítica sobre E y sea $E = \operatorname{rad} E \perp E_+ \perp E_-$ la descomposición de E como suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo $\operatorname{rad} E$, un espacio definido positivo E_+, y un espacio definido negativo E_-. Llamaremos *signatura* de H_2 al número entero $\dim E_+ - \dim E_-$. Obsérvese que

$$\operatorname{rg} H_2 = |\dim E_+ - \dim E_-| + 2 \cdot \min\{\dim E_+, \dim E_-\}\,,$$

es decir, el valor absoluto de la signatura es par cuando el rango es par, y es impar cuando el rango es impar.

2.9 Teorema de clasificación: *La dimensión, el rango y la signatura clasifican las métricas hermíticas. En consecuencia, dos métricas hermíticas sobre un mismo $\mathbb{C}$-espacio vectorial son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango y la misma signatura.*

Además, dados $n, r \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tales que $r \leq n$ y $r - |\varepsilon|$ es un entero no negativo par ($|\varepsilon| = 0, 2, \dots, r$ si r es par, $|\varepsilon| = 1, 3, \dots, r - 1$ si r es impar), existe un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n dotado de una métrica hermítica de rango r y signatura ε.

Demostración. Sea H_2 una métrica hermítica sobre E, y sean n su dimensión, r su rango y ε su signatura. Consideremos una descomposición $E = \operatorname{rad} E \perp E_+ \perp E_-$ con E_+ definido positivo y E_- definido negativo, y denotemos $t = \dim E_+$, $s = \dim E_-$ y $m = \dim(\operatorname{rad} E)$. Tenemos las igualdades

$$t = \frac{1}{2}(r + |\varepsilon|)\,, \qquad s = \frac{1}{2}(r - |\varepsilon|)\,, \qquad m = n - r\,,$$

por lo que existe una base de E en la cual la matriz de H_2 es

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \overset{t)}{\ddots} & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \overset{s)}{\ddots} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \overset{m)}{\ddots} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

y basta aplicar el lema 2.4 para concluir la primera parte. Ahora, dados $n, r \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ como en el enunciado, es claro que existe una metrica hermítica H_2 sobre $\mathbb{C}^n$ tal que $(\mathbb{C}^n, H_2)$ tiene rango r y signatura ε (véanse las demostraciones de VII.2.1 y VII.3.4). ∎

Definición 2.10 Con la notación de la demostración del teorema 2.9, diremos que la matriz (2.1) es la *matriz reducida* de la métrica hermítica H_2. Si B es la base ortogonal de E en la que se obtiene la matriz reducida de H_2, y si e, v son vectores de E cuyas coordenadas en la base B son $(x_1, \dots, x_n)$ y $(y_1, \dots, y_n)$, respectivamente, entonces

$$H_2(e, v) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_t\overline{y_t} - x_{t+1}\overline{y_{t+1}} - \cdots - x_{t+s}\overline{y_{t+s}}\,,$$

que es la *ecuación reducida* de H_2.

3 Cálculo del Rango y la Signatura

En esta sección vamos a indicar, sin dar demostraciones, cómo clasificar una métrica hermítica dada. Expondremos dos maneras de hacerlo: en primer lugar veremos que se pueden seguir los mismos pasos que los dados en el capítulo VII para calcular el rango y la signatura de una métrica simétrica real; en segundo lugar veremos que cada métrica hermítica tiene asociada de modo natural una métrica simétrica real, y que la clasificación de una métrica hermítica es equivalente a la clasificación de su métrica simétrica real asociada.

3.1 Sea H_2 una métrica hermítica sobre E. Se dice que (E, H_2) es un "espacio elíptico" si es no singular y carece de vectores isótropos no nulos.

(a) Si E es elíptico, entonces E es un espacio definido positivo ó E es un espacio definido negativo. (Véase el lema VII.3.9.)

Llamaremos "plano hiperbólico" de E a todo subespacio suyo de dimensióm 2 que sea no singular y no elíptico. Dados $e, v \in E$, diremos que (e, v) es un "par hiperbólico" si e y v son vectores isótropos tales que $<\!e, v\!> = 1$.

(b) Dado un subespacio F de E de dimensión 2, F es un plano hiperbólico si y sólo si está generado por un par hiperbólico. (Véase el lema V.3.2.)

Se dice que (E, H_2) es un "espacio hiperbólico" si puede ponerse como suma ortogonal de planos hiperbólicos. En particular, todo espacio hiperbólico tiene dimensión par.

(c) (E, H_2) descompone de modo único (salvo isometrías) como suma ortogonal de un espacio totalmente isótropo, un espacio hiperbólico y un espacio elíptico (téngase en cuenta el teorema 2.9 y la demostración del teorema VII.3.15.)

Sea $E = \operatorname{rad} E \perp H \perp E'$ tal que H es hiperbólico y E' es elíptico. Definimos el "signo elíptico" de E como el signo de su parte elíptica (esto es, "$+$" si E' es definido positivo, "$-$" si E' es definido negativo, y "0" si $E' = 0$).

(d) La signatura de E es igual a la dimensión de E' afectada del signo elíptico. Si definimos el "índice" de E como $\frac{1}{2} \dim H$, y si t y s son como en la demostración del teorema 2.9, entonces para la métricas hermíticas se cumplen las relaciones probadas en el teorema VII.3.15 para las métricas simétricas reales ("ley de inercia de Sylvester" para las métricas hermíticas).

Fijada una base en E, sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ la matriz de H_2 en dicha base y sea $\bar{H}_2$ la única métrica hermítica sobre E cuya matriz en la base fijada es la matriz unidad de $M_n(\mathbb{C})$ ($\bar{H}_2$ será una métrica hermítica definida positiva); además, dados $e, v \in E$ denotemos $\bar{H}_2(e, v) = \ll\! e, v\! \gg$.

(e) Existe un único endomorfismo $T : E \to E$ tal que

$$<\!e, v\!> = \ll\! e, T(v)\! \gg \qquad (e, v \in E)\,.$$

Se cumple que T diagonaliza en una base de E que es ortonormal para $\bar{H}_2$ y ortogonal para H_2 (véase el teorema VII.4.4).

(f) El polinomio característico $P(x)$ de la matriz A tiene todas sus raíces reales (y por lo tanto los coeficientes de $P(x)$ son reales). Si t' es el número de raíces positivas de $P(x)$ y s' es el número de raíces negativas de $P(x)$ (contando multiplicidades), entonces el rango de E es $t' + s'$ y la signatura de E es $t' - s'$. Como consecuencia tenemos $t = t'$ y $s = s'$.

3.2 Fijemos una métrica hermítica H_2 sobre E. La restricción a $\mathbb{R}$ del producto por escalares que dota a E de estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial, define una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial sobre E tal que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$. Concretamente, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces $\{e_1, \mathrm{i}e_1 \dots, e_n, \mathrm{i}e_n\}$ es una base de E como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Para cada número complejo z tenemos $z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}}{2}(z - \bar{z})$, siendo $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ la parte real de z y $\frac{-\mathrm{i}}{2}(z - \bar{z})$ la parte imaginaria de z. Por lo tanto, si definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} T_2 : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (e, v) &\mapsto T_2(e, v) := \frac{1}{2}\Big(H_2(e, v) + H_2(v, e)\Big)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (e, v) &\mapsto \omega_2(e, v) := \frac{-\mathrm{i}}{2}\Big(H_2(e, v) - H_2(v, e)\Big)\,, \end{aligned}$$

entonces se cumple

$$H_2 = T_2 + \mathrm{i}\,\omega_2\,.$$

(a) Tenemos que T_2 es una métrica simétrica y que ω_2 es una métrica hemisimétrica (considerando E como $\mathbb{R}$-espacio vectorial). Además, cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface

$$\omega_2(e,v) = -T_2(\mathrm{i}e, v)\,.$$

(b) Dado un vector no nulo $e \in E$, sea $F = \langle e \rangle$ (= subespacio generado sobre $\mathbb{C}$ por el vector e), de modo que una base de F como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es $\{e, \mathrm{i}e\}$. Si $H_2(e,e) = 1$, entonces la base $\{e, \mathrm{i}e\}$ de F es ortonormal para T_2 y $(\mathrm{i}e, e)$ es un par hiperbólico para ω_2. Qué ocurre si $H_2(e,e) = -1$?

(c) Sean r el rango de H_2, r' el rango de T_2, r'' el rango de ω_2, ε la signatura de H_2, y ε' la signatura de T_2. Se cumplen las igualdades $r'' = r' = 2r$ y $\varepsilon' = 2\varepsilon$ (téngase en cuenta **(b)**). Como consecuencia, la clasificación de la métrica hermítica H_2 es equivalente a la clasificación de la métrica simétrica real T_2.

(d) Según **(a)**, las métricas T_2 y ω_2 son tales que cada una de ellas determina a la otra; en particular, dados $e, v \in E$ se satisface

$$H_2(e,v) = T_2(e,v) - \mathrm{i}\, T_2(\mathrm{i}e, v)\,. \tag{3.1}$$

Dada una métrica simétrica real cualquiera T_2 sobre E, considérese la aplicación $H_2 : E \times E \to \mathbb{C}$ definida a partir de T_2 por la fórmula (3.1). Cuándo será H_2 una métrica hermítica?

4 Problemas

4.1 Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea H_2 una métrica hermítica no singular sobre E.

(a) Dado un endomorfismo $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)$, existe un único endomorfismo $f' : E \to E$ que cumple: dados $e, v \in E$,

$$<\!f(e), v\!> \,=\, <\!e, f'(v)\!>\,.$$

El endomorfismo f' se denomina *endomorfismo adjunto* de f (respecto de H_2).

(b) Según el apartado (a) tenemos la aplicación $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E) \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)$, $f \mapsto f'$. Esta aplicación es un automorfismo semi-lineal involutivo del espacio vectorial $\operatorname{End}_k(E)$ (cuyo automorfismo de cuerpos asociado es la conjugación de $\mathbb{C}$), tal que $(f \circ g)' = g' \circ f'$. Como consecuencia, para todo automorfismo f de E se cumple $(f^{-1})' = (f')^{-1}$.

(c) Un endomorfismo $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)$ se dice que es *autoadjunto* si $f = f'$, es decir, si cualesquiera que sean $e, v \in E$ se satisface

$$<\!f(e), v\!> \,=\, <\!e, f(v)\!>\,.$$

Dados endomorfismos autoadjuntos $f, g \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)$ tenemos:

- $f + g$ es autoadjunto;
- si f es un automorfismo entonces f^{-1} también es autoadjunto;
- $f \circ g$ es autoadjunto $\Leftrightarrow$ f y g conmutan.

(d) Llamaremos *automorfismo* de la métrica hermítica H_2 a toda isometría de (E, H_2) en (E, H_2). Dado un endomorfismo $f : E \to E$ son equivalentes:

(i) $<\!f(e), f(v)\!> = <\!e, v\!>$ cualesquiera que sean $e, v \in E$;
(ii) f es un automorfismo de H_2 ;
(iii) f es un automorfismo y $f^{-1} = f'$.

(e) Los automorfismo de la métrica H_2 forman un grupo, el cual se denomina *grupo unitario* de (E, H_2).

(f) Supóngase que (E, H_2) es un espacio definido positivo, en cuyo caso existen bases en E que son ortonormales para H_2. Entonces los automorfismos de H_2 son los endomorfismos de E que mandan bases ortonormales a bases ortonormales.

4.2 Siguiendo con la notación de 4.1, supongamos ahora que (E, H_2) es definido positivo, de modo que existe una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ en E que es ortonormal para H_2. Dado un endomorfismo $f : E \to E$, sean A y A' las matrices en la base B de f y f', respectivamente.

(a) La matriz del endomorfismo f' en la base B es igual a la matriz traspuesta de la matriz conjugada de f. Es decir, si definimos la *matriz conjugada* de $A = (a_{ij})$ como la matriz $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$, entonces $A' = \overline{A}^{\,t}$.

(b) El endomorfismo f es autoadjunto $\Leftrightarrow$ la matriz A es *hermítica* (una matriz cuadrada A con ceoficientes complejos se dice que es hermítica si $A = \overline{A}^{\,t}$).

(c) f es un automorfismo de H_2 $\Leftrightarrow$ la matriz A es invertible y $A^{-1} = \overline{A}^{\,t}$.

Las matrices invertibles A de $M_n(\mathbb{C})$ que cumplen $A^{-1} = \overline{A}^{\,t}$ se denominan *unitarias*, y las matrices de $M_n(\mathbb{C})$ que son unitarias forman un grupo que se denomina *grupo unitario de orden n* y se denota $U_n(\mathbb{C})$. Según este problema, cuando H_2 es una métrica hermítica definida positiva, el grupo de automorfismos de H_2 es isomorfo al grupo $U_n(\mathbb{C})$.

4.3 Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita n. La matriz de una métrica hermítica sobre E (respecto de cualquier base de E) es una matriz hermítica. Recíprocamente, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz hermítica, entonces, fijada una base cualquiera en E, existe una única métrica hermítica sobre E cuya matriz en la base fijada es A.

Dedúzcase de lo anterior que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es un matriz hermítica, entonces todos los valores propios de A son reales (y en particular, los coeficientes del polinomio característico de A son reales).

Bibliografía

[1] Abellanas, P. , *Geometría Básica*, Romo, Madrid, 1969.

[2] Artin, E. , *lgebra Geométrica*, Limusa, Mexico D.F., 1992.

[3] Ayres, F. , *Geometría Proyectiva*, Schaum & McGraw-Hill de Mexico, 1971.

[4] Baer, R. , *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press, New York 1952.

[5] Bennett, M.K. , *Affine and Projective Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[6] Berger, M. , *Geometry*, vols. I y II, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[7] Birkhoff, G. , *Lattice Theory*, A.M.S. Colloquium Publications., Providence, RI, 1940.

[8] Castellet, M. , Llerena, I. , *lgebra Lineal y Geometría*, Reverté, Barcelona, 1991.

[9] Coxeter, H.S.M. , *Fundamentos de Geometría*, Limusa, Mexico D.F., 1984.

[10] Hartshorne, R. , *Foundations of Projective Geometry*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1954.

[11] Hernández, E. , *lgebra y Geometría*, Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid, 1994.

[12] Hilbert, D. , *Fundamentos de la Geometría*, Textos Universitarios, C.S.I.C., Madrid 1991.

[13] Hodge, W.V.D. , Pedoe, D. , *Methods of Algebraic Geometry*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1954.

[14] Holland, S. , Orthomodularity in infinite dimensions, *Bull. A.M.S.* **32** (1995), 205 – 234.

[15] Jacobson, N. , *Lectures in Abstract Algebra*, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1975.

[16] Kadison, L. , Kromann, M.T. , *Projective Geometry and Modern Algebra*, Birkhuser, Cambridge, 1996.

[17] Kerékjártó, B. , *Les Fondaments de la Géométrie*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.

[18] Lang, S. , *lgebra*, Reverté, Barcelona, 1991.

[19] Navarro, J.A. , *lgebra Conmutativa Básica*, Manuales Unex n. 19, Publi. Univ. Extremadura, Cáceres, 1996.

[20] Reyes Prosper, V. , Sur les propiétés graphiques des figures centriques, *Math. Annalen* (1888).

[21] Ruipérez, D.H. , *lgebra Lineal* (2 ed.), Ed. Univ. Salamanca, Salamanca, 1987.

[22] Sample, J.G. , Kneebone, G.T. ; *Algebraic Projective Geometry*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1952.

[23] Sidler, J.C. , *Géométrie Projective*, InterEditions, Paris, 1993.